Algebra di Orlik-Solomon

Ale Fenu

June 9, 2025

Abstract

Questo è un documento riassuntivo sul mio seminario di esame di Topologia Algebrica B sulle algebre di Orlik-Solomon. Alla fine sono presenti anche un paio di prerequisiti che ho preferito inserire per completezza. Cito qui una volta e per tutte le fonti principali: [1] di Hatcher, [2] di Levine e [3] di Orlik e Terao.

Contents

1 Algebra di Orlik-Solomon

Questo documento è dedicato alla dimostrazione del teorema di Orlik-Solomon e Brieskorn, Teorema 2.4, che descrive l'anello di coomologia intera del complementare di un arrangiamento di iperpiani complessi. La dimostrazione del Teorema 2.4 segue lo schema in [3], leggermente semplificata nel carattere espositivo, in [2].
Trattiamo solo il caso delle disposizioni centrali. Le disposizioni affini non sono fondamentalmente più difficili, ma la dimostrazione è leggermente più lunga e tecnica: non si può sfruttare la struttura differenziale sull'algebra di Orlik-Solomon. Nel corso della dimostrazione, noteremo le principali difficoltà con il caso affine. Sia $A = \{H_1, ..., H_n\}$ un arrangiamento di iperpiani in uno spazio vettoriale complesso V assunto l dimensionale, e denotiamo con $M = V - \bigcup_{i=1}^{n} H_i$ il suo complementare. Prima di definire l'algebra di Orlik-Solomon A in termini di generatori e relazioni, è utile considerare da dove potrebbero provenire i generatori dell'anello di coomologia $H^*(M;\mathbb{Z})$. Tutti i gruppi di coomologia che seguiranno avranno coefficienti interi, e quindi d'ora in avanti ometteremo $\mathbb{Z}$ nella notazione. Il complementare $M_i = V - H_i$ del singolo iperpiano H_i è omotopicamente equivalente a $\mathbb{C}^*$ tramite proiezione su una linea complessa che incontra H_i trasversalmente. Un generatore di $H^1(\mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ nella coomologia di De Rham con coefficienti complessi è rappresentato dalla forma $\frac{1}{2\pi i}\frac{dz}{z}$ ed anche per la coomologia intera dato che la valutazione di questa forma su un elemento dell' H_1 è intera.

Il **pullback** di questo generatore sotto l'inclusione $M \to M_i$ è rappresentato dalla forma

$$\omega_i = \frac{1}{2\pi i} \frac{d\alpha_i}{\alpha_i} \tag{1}$$

dove α_i è una forma lineare in V^* avente H_i come zero-locus. Come mostreremo, le classi di coomologia $[\omega_i]$ generano $H^*(M)$.

Per determinare le relazioni soddisfatte dai generatori $[\omega_i]$, dovremo impostare alcune notazioni. Denotiamo con E_1 il gruppo abeliano libero con generatori $\{e_H\}_{H\in A}$ indicizzati dagli iperpiani di A. Se gli iperpiani sono indicizzati $H_1, ..., H_n$, abbrevieremo $e_i := e_{H_i}$. Denotiamo con E l'algebra esterna di E_1:

$$E = \bigoplus_{k=0}^{n} \bigwedge^k E_1 = \mathbb{Z} \oplus E_1 \oplus \bigwedge^2 E_1 \oplus \bigwedge^3 E_1 \oplus \dots$$

Se $S = \{i_1, ..., i_k\} \subset [n]$ con $i_1 < ... < i_k$, scriviamo

$$e_S = e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}.$$

L'algebra E è graduata con il k-esimo pezzo graduato $E_k = \bigwedge^k E_1$. Ogni E_k è un $\mathbb{Z}$-modulo libero generato dagli elementi e_S con $|S| = k$. La derivazione $\partial\colon E \to E$ definita da

$$\partial e_S = \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} e_{S-\{i_j\}} \tag{2}$$

dà a E la struttura di un'algebra graduata differenziale.
Dato $S \subset [n]$, scriviamo $\bigcap S := \bigcap_{i\in S} H_i$.
Certi insiemi di indici giocheranno un ruolo importante nel descrivere l'anello di coomologia $H^*(M)$. Un insieme $S \subset [n]$ sarà chiamato **dipendente** se l'intersezione $\bigcap S$ ha codimensione strettamente inferiore a $|S|$.

Lemma 1.1. *Sia $A = \{H_1, ..., H_n\}$ un arrangiamento di iperpiani, e siano $\alpha_1, ..., \alpha_n \in V^*$ forme lineari i cui nuclei sono rispettivamente $H_1, ..., H_n$. Sia $S = \{i_1, ..., i_k\} \subset [n]$. Allora S è dipendente se e solo se $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_k}$ sono linearmente dipendenti su $\mathbb{C}$.*

Proof. Se S è dipendente, una delle inclusioni nella catena di sottospazi

$$\bigcap S \subseteq \bigcap(S - \{i_p\}) \subseteq \cdots \subseteq H_{i_1} \cap H_{i_2} \subseteq H_{i_1} \subseteq V.$$

deve fallire di essere propria, cioè qualche H_{i_p} contiene l'intersezione $H_{i_1} \cap \cdots \cap H_{i_{p-1}}$. Allora α_{i_p} è una combinazione lineare $\mathbb{C}$-lineare di $\alpha_{i_1}, ..., \alpha_{i_{p-1}}$. Viceversa, se qualche α_{i_p} è una combinazione lineare delle rimanenti α_{i_j}, allora H_{i_p} contiene $\bigcap(S - \{i_p\})$, quindi $\bigcap S = \bigcap(S - \{i_p\})$ ha codimensione strettamente inferiore a k. □

Le classi di coomologia $[\omega_i] \in \mathrm{H}^1(M)$ determinano un omomorfismo di algebre graduate

$$\phi\colon E \to \mathrm{H}^*(M) \tag{3}$$

che invia $e_i \mapsto [\omega_i]$. Speriamo di comprendere $\mathrm{H}^*(M)$ determinando il nucleo e l'immagine della mappa ϕ. Il lemma seguente descrive alcuni elementi del nucleo.

Lemma 1.2. *Se $S \subset [n]$ è dipendente, allora $\phi(\partial e_S) = 0$.*

Proof. Scriviamo $S = \{i_1, ..., i_k\}$. Per Lemma 1.1, se S è dipendente, riordinando S abbiamo

$$\alpha_{i_k} = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \alpha_{i_j},$$

$c_j \in \mathbb{C}$. Quindi per (1),

$$\omega_{i_k} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j \alpha_{i_j}}{\alpha_{i_k}} \omega_{i_j}.$$

Così

$$\begin{aligned}
\phi(\partial e_S) &= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} \phi(e_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{e}_{i_j} \wedge \cdots \wedge e_{i_k}) \\
&= \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j-1} [\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_{i_j} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}] \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} [\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_{i_j} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_k}] + (-1)^{k-1} [\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{k-1}} \wedge \hat{\omega}_{i_k}] \\
&= \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j-1} [\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \hat{\omega}_{i_j} \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{p=1}^{k-1} \frac{c_p \alpha_{i_p}}{\alpha_{i_k}} \omega_{i_p} \right)] \\
&= \left((-1)^{k-2} \sum_{j=1}^{k-1} \frac{c_j \alpha_{i_j}}{\alpha_{i_k}} + (-1)^{k-1} \right) [\omega_{i_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{i_{k-1}}] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

L'ideale $I \subset E$ generato dagli elementi ∂e_S per S dipendente, è chiamato l'**ideale di Orlik-Solomon** della disposizione centrale A. Il quoziente E/I è chiamato l'**algebra di Orlik-Solomon** di A, denotata $A(A)$. Poiché I è un ideale omogeneo, $A(A)$ è un'algebra graduata. Se S è dipendente, per ogni $a \in A(A)$ abbiamo per la regola di Leibniz

$$\partial(a \partial e_S) = \partial a \partial e_S \in I$$

quindi $\partial I \subset I$ e $A(A)$ eredita la struttura di un'algebra graduata differenziale.
Nel caso di una disposizione non centrale, la situazione è complicata da un insieme aggiuntivo di generatori per l'ideale di Orlik-Solomon, quei monomi e_S con $\bigcap S = \emptyset$. Per questi generatori, ∂e_S in generale non giace nell'ideale di Orlik-Solomon, quindi il differenziale non discende più all'algebra di Orlik-Solomon. Sebbene questo non presenti una seria difficoltà, aggiunge un ulteriore livello di tecnicità.
Nella dimostrazione del Lemma 2.2 faremo uso del differenziale su $A(A)$.
Il nostro prossimo lemma fornisce un insieme più piccolo di generatori per l'ideale di Orlik-Solomon. Un insieme di indici $S \subset [n]$ è chiamato un **circuito** se è dipendente e non contiene sottoinsiemi dipendenti propri.

Lemma 1.3. *L'ideale di Orlik-Solomon $I \subset E$ è generato da elementi della forma ∂e_T, dove $T \subset [n]$ è un circuito.*

Proof. Se $S \subset [n]$ è un qualsiasi insieme dipendente, scriviamo $S = T \cup U$, dove T è un circuito. Scegli un qualsiasi elemento $t \in T$. Poiché $e_T = \pm e_t \partial e_T$, abbiamo per la formula di Leibniz

$$\partial e_S = \pm \partial e_t e_U \pm e_t \partial e_U = (\pm e_U \pm e_t \partial e_U)\partial e_T. \qquad \square$$

Dal Lemma 1.2 scopriamo che la mappa (3) induce un omomorfismo graduato di anelli graduati

$$\psi : A(A) \to H^*(M).$$

Nella prossima sezione mostreremo che questo è un isomorfismo.

2 Teorema di Orlik-Solomon-Brieskorn: isomorfismo $A \cong H^*(M)$

La dimostrazione del Teorema 2.4 si basa sulle nozioni di deletion e restriction di un arrangiamento di iperpiani.
Il prossimo lemma mette in relazione i gruppi di coomologia del complementare di A con quelli della sua deletion e restriction.

Lemma 2.1. *Esiste una successione esatta lunga in coomologia*

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^i(M') \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\tilde{\delta}} \mathrm{H}^{i-1}(M'') \xrightarrow{j^*} \mathrm{H}^{i+1}(M') \longrightarrow \ldots$$

Proof. Dalla successione esatta lunga della coppia (M', M)

$$\ldots \longrightarrow \mathrm{H}^i(M', M) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^i(M) \xrightarrow{\delta} \mathrm{H}^{i+1}(M', M) \xrightarrow{j^*} \mathrm{H}^{i+1}(M) \longrightarrow \ldots$$

è sufficiente trovare un isomorfismo $\mathrm{H}^{i-1}(M'') \cong \mathrm{H}^{i+1}(M', M)$.
Sia N un intorno tubolare di M'' in M', e sia $N^* = N - M''$.
Allora N e N^* sono fibrati su M'' con fibre omeomorfe a $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$, rispettivamente. Questi fibrati sono restrizioni di fibrati banali, quindi banali. Questo segue da proprietà di orientabilità naturale delle varietà complesse.
Così da Kunneth (o alternativamente dal teorema di Leray-Hirsch senza considerazioni sulla orientabilità)

$$\mathrm{H}^*(N, N^*) \cong \mathrm{H}^*(M'') \otimes \mathrm{H}^*(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*)$$

Sia $t \in \mathrm{H}^2(\mathbb{C}, \mathbb{C}^*) \cong \mathbb{Z}$ un generatore, e sia

$$\tau \colon \mathrm{H}^{i-1}(M'') \to \mathrm{H}^{i+1}(N, N^*) \tag{4}$$

il corrispondente isomorfismo di Thom.
Notiamo che tutto questo è naturale. Segue dalla naturalità della orientazione e del prodotto cup.

Ora calcoliamo $\mathrm{H}^*(M', M)$ per escissione. Poiché $M = M' - M''$ abbiamo

$$M - (M' - N) = N - M'' = N^*.$$

Escidendo $M' - N$ dalla coppia (M', M) si ottiene quindi un isomorfismo

$$\epsilon \colon \mathrm{H}^{i+1}(M', M) \to \mathrm{H}^{i+1}(N, N^*).$$

In combinazione con (4), questo dà l'isomorfismo richiesto $\mathrm{H}^{i-1}(M'') \cong \mathrm{H}^{i+1}(M', M)$.
$\square$

Vogliamo costruire un'analoga successione esatta nelle algebre di Orlik-Solomon. Faremo uso di una base esplicita per l'algebra di Orlik-Solomon, la base dei circuiti rotti. Ricordiamo che un insieme $S \subset [n]$ è chiamato un **circuito** se è dipendente e non contiene sottoinsiemi dipendenti propri. Un insieme S è chiamato un **circuito rotto** se esiste un indice i per cui $S \cup \{i\}$ è un circuito e $i < j$ per ogni $j \in S$. Se S non contiene circuiti rotti, lo chiameremo un **insieme nbc**, e il corrispondente monomio $e_S \in E$ sarà chiamato un **monomio nbc**. Denotiamo con $C \subset E$ lo span $\mathbb{Z}$-lineare di tutti i monomi nbc.
Avremo anche bisogno di una gradazione su $A(A)$ che sia più fine della gradazione $\mathbb{Z}$-graduata ereditata da E. Per ogni elemento X del reticolo delle intersezioni $L(A)$, sia E_X il sottogruppo generato dai monomi e_S per cui $\bigcap S = X$. Questo dà una gradazione di E per $L(A)$ nel senso che $E_X E_Y \subset E_{X\cap Y}$. Se T è un circuito con $\bigcap T = X$, per ogni $t \in T$ abbiamo che $T \setminus \{t\}$ sarebbe un sottoinsieme dipendente proprio. Così $\partial e_T \in E_X$. Per Lemma 1.3 ne consegue che l'ideale di Orlik-Solomon $I \subset E$ è omogeneo rispetto alla gradazione di E per $L(A)$. Denotiamo con $A_X, X \in L(A)$ i corrispondenti pezzi graduati dell'algebra di Orlik-Solomon. Similmente, sia $C_X = C \cap E_X$.

Lemma 2.2. *La restrizione a C della proiezione naturale $\pi\colon E \to A(A)$ è un isomorfismo di gruppi abeliani; cioè, le immagini sotto π dei monomi **nbc** in E sono una $\mathbb{Z}$-base per $A(A)$.*

Proof. Per mostrare che $\pi\colon C \to A(A)$ è suriettiva, è sufficiente mostrare che ogni monomio di base $e_S \in E$ giace in $I + C$.
Dimostriamo questo per induzione sull'ordine lessicografico sui monomi.
Se S è un **insieme nbc**, allora $e_S \in C$. Altrimenti, scriviamo $S = B \cup U$, dove $B = \{b_1, ..., b_k\}$ è un **circuito rotto**, e scegliamo $t \in [n]$ minimale tale che $T := B \cup \{t\}$ è un circuito. Allora

$$e_S = \pm e_B e_U = \pm e_U \left(\partial e_T - \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} e_{T-\{b_i\}} \right) \in I + \sum_i \pm e_{S-\{b_i\}\cup\{t\}}$$

Poiché l'insieme $S - \{b_i\} \cup \{t\}$ precede S nell'ordine lessicografico, $e_{S-\{b_i\}\cup\{t\}}$ giace in $I + C$ per ipotesi induttiva.
Poiché π rispetta la gradazione per $L(A)$, è sufficiente mostrare che $\pi|_{C_X}$ è iniettiva per ogni X. Induciamo sulla codimensione di X.
Nel caso base $X = V$, abbiamo $C_V = A_V = \mathbb{Z}$, e $\pi|_{C_V}$ è la mappa identità. Il diagramma seguente commuta.

$$\begin{array}{ccc} C_X & \xrightarrow{\partial} & C_{r-1} \\ \big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \big\downarrow{\scriptstyle\pi} \\ A_X & \xrightarrow{\partial} & A_{r-1} \end{array} \tag{19}$$

Per ipotesi induttiva, π è iniettiva (ed in realtà anche surgettiva) su C_{r-1}. Per mostrare che π è iniettiva su C_X, è sufficiente mostrare che ∂ è iniettiva su C_X. Scegli $i \in [n]$ minimale tale che $H_i \supset X$. Allora dobbiamo avere $i \in S$ per ogni monomio $e_S \in C_X$. Altrimenti $\bigcap(S \cup \{i\}) = \bigcap S = X$, quindi $S \cup \{i\}$ è dipendente, cioè S contiene un circuito rotto.

Ora per ogni $c \in C_X$ abbiamo

$$0 = \partial(e_i c) = e_i \partial c,$$

così la moltiplicazione a sinistra per e_i è una inversa sinistra di ∂ su C_X.
Questo conclude l'iniettività e dunque l'isomorfismo. $\square$

Dato un iperpiano H_i di A, $i \neq n$, scriviamo A' per la restrizione di A a H_i, A'' per l' arrangiamento di $n-1$ iperpiani su H_n. Chiamiamo $\lambda(H_i) = H_i \cap H_n$. Ordiniamo gli iperpiani di A e di A'' in modo che $\lambda(H_i) \leq \lambda(H_j)$ ogni volta che $i < j$. Dato un insieme di indici $S = \{i_1, ..., i_k\} \subset [n]$, $i_1 < ... < i_k$, scriviamo $\lambda(S)$ per la successione decrescente di indici $j_1, ..., j_{k-1} \in [n'']$ che soddisfa $\lambda(H_{j_p}) = H''_p$, $p = 1, ..., k-1$. Notiamo che gli indici j_p non necessitano di essere distinti, poiché iperpiani distinti in A possono avere intersezioni identiche con H_n.
Tramite $e_{\lambda(S)}$ intenderemo il prodotto wedge $e_{j_1} \wedge \cdots \wedge e_{j_{k-1}} \in E''$.
Il prototipo di successione esatta di algebre di Orlik-Solomon è la successione

$$0 \longrightarrow E' \xrightarrow{i_m} E \xrightarrow{j_m} E'' \to 0 \tag{5}$$

dove E' è l'algebra esterna con generatori e_H per $H \in A''$, i_m è l'inclusione naturale, e j_m è dato da

$$j_m(e_S) = \begin{cases} e_{\lambda(S)}, & \text{se } n \in S \\ 0, & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Evidentemente i_m è iniettiva, j_m è surgettiva, e $j_m i_m = 0$, ma in generale l'inclusione $\mathrm{Im}(i_m) \subset \ker(j_m)$ è stretta, quindi questa successione non è esatta. Il nostro prossimo lemma mostra che la successione diventa esatta a livello di algebre di Orlik-Solomon. Denotiamo le mappe composite $E' \to E$ e $E \to E''$ per i e j, rispettivamente.

Lemma 2.3. *La successione (5) si proietta su una successione esatta di gruppi abeliani*

$$0 \longrightarrow A'_m \xrightarrow{i_m} A_m \xrightarrow{j_m} A''_m \to 0 \tag{6}$$

Proof. Siano $I' \subset E'$, $I'' \subset E''$ gli ideali di Orlik-Solomon di A', A''. È chiaro che $i(I') \subset I$. Affermiamo che $j(I) \subset I''$. Se S è dipendente, per Lemma 1.1, qualche combinazione lineare delle forme lineari che definiscono gli iperpiani in S è 1. Poiché questa relazione lineare vale ancora ristretta a H_n, l'inversa del Lemma 1.1 implica che $\lambda(S)$ è dipendente.

Fattorizzando la successione (5) per I_m, I'_m, I''_m, otteniamo una successione della forma (6). Rimane da mostrare che questa successione è esatta. Useremo la base dei circuiti rotti.
È chiaro che $i(C') \subset C$. Se $S \subset [n]$ è un **insieme nbc**, e $n \in S$, allora $\lambda(S)$ è anche un **insieme nbc**. Questo mostra che $j(C) \subset C''$. Così (5) si restringe a una successione

$$0 \longrightarrow C'_m \xrightarrow{i_m} C_m \xrightarrow{j_m} C''_{m-1} \to 0 \tag{7}$$

Per Lemma 2.2 è sufficiente mostrare che (7) è esatta, poiché il diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} C'_m \arrow[r, "i_m"] \arrow[d, "\cong"] & C_m \arrow[r, "j_m"] \arrow[d, "\cong"] & C''_{m-1} \arrow[d, "\cong"] \\ A'_m \arrow[r, "i_m"] & A_m \arrow[r, "j_m"] & A''_m \end{tikzcd}$$

(Le frecce verticali sono isomorfismi per Lemma 2.2. Le mappe orizzontali inferiori sono quelle indotte dalla successione (6).)
allora implica che (6) è esatta.

Le proprietà $\ker(i_m) = 0$ e $j_m i_m = 0$ di (5) sono preservate sotto restrizione. È anche chiaro che j_m mappa C surgettivamente su C'', quindi rimane solo da mostrare che $\ker(j_m) \subset \mathrm{Im}(i_m)$. Sia $N \subset C_m$ il sottogruppo generato da tutti i monomi **nbc** e_S per cui $n \in S$. Poiché $C_m = N \oplus \mathrm{Im}(i_m)(C')$ e $\mathrm{Im}(i_m)(C') \subset \ker(j_m)$, è sufficiente mostrare che N interseca il nucleo di j_m in modo triviale.
Poiché j invia un monomio generatore e_S di C o a zero o a un monomio generatore di C'', è sufficiente verificare che nessun monomio $e_S \in N$ giace nel nucleo di j e che nessun due monomi in N hanno la stessa immagine sotto j. Se $j(e_S) = 0$, allora $\lambda(S)$ contiene elementi ripetuti, cioè esistono elementi $s < t \in S$ tali che

$$H_s \cap H_n = H_t \cap H_n. \tag{8}$$

Ma allora l'insieme $\{s, t, n\}$ è dipendente, quindi $\{t, n\} \subset S$ è un **circuito rotto**, il che contraddice il fatto che S è un **insieme nbc**. Allo stesso modo, se $j(e_S) = j(e_T)$ per insiemi S e T distinti, allora $\lambda(S) = \lambda(T)$, quindi esistono $s \in S, t \in T$ distinti che soddisfano (8), e o $\{s, n\}$ o $\{t, n\}$ è un circuito rotto. □

Theorem 2.4. *(Teorema di Orlik-Solomon e Brieskorn). La mappa (3) è un isomorfismo di anelli graduati $\psi\colon A(A) \to \mathrm{H}^*(M)$.*

Proof. Per definizione, ψ è un omomorfismo di anelli graduati. Per mostrare che è un isomorfismo, procediamo per induzione sul numero di iperpiani n. Nel caso base $n = 0$, abbiamo $A(A) = \mathbb{Z} \cong \mathrm{H}^*(M)$ e $\psi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ è l'identità. La mappa ψ e le successioni esatte dai Lemmi 2.1 e 2.3 si inseriscono nel seguente diagramma

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A'_m \arrow[r, "i_m"] \arrow[d, "\psi'"] & A_m \arrow[r, "j_m"] \arrow[d, "\psi"] & A''_{m-1} \arrow[r] \arrow[d, "\psi''"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}^m(M') \arrow[r, "i^*"] & \mathrm{H}^m(M) \arrow[r, "\delta"] & \mathrm{H}^{m-1}(M'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd} \tag{9}$$

Per naturalità dell'isomorfismo di Thom e la successione esatta lunga della coppia (M', M) (2.1), questo diagramma commuta. Per ipotesi induttiva, ψ' e ψ'' sono isomorfismi. Per Lemma 2.3 la riga superiore è esatta, quindi j_m è suriettiva, quindi δ è suriettiva, quindi i^* è iniettiva.
Così anche la riga inferiore è esatta. Per il Lemma dei Cinque, ψ è un isomorfismo. □

Sebbene il complemento di una disposizione di iperpiani in $\mathbb{C}^\ell$ sia una varietà di dimensione reale 2ℓ, la sua coomologia è supportata in grado $\leq \ell$.

Corollary 2.5. *La coomologia del complemento di una disposizione di iperpiani complessi di dimensione ℓ si annulla in grado superiore a ℓ.*

Proof. Qualsiasi insieme S di almeno $\ell + 1$ iperpiani in $\mathbb{C}^\ell$ è dipendente, quindi ∂e_S giace nell'ideale di Orlik-Solomon I. Poiché $\partial(e_i e_S) = \pm e_i \partial e_S$ per ogni $i \in S$, il monomio e_S giace anch'esso in I. Così il pezzo graduato m-esimo A_m dell'algebra di Orlik-Solomon è zero per $m > \ell$. Per il Teorema 2.4, lo stesso vale per l'anello di coomologia. □

A Appendice

A.1 Leray-Hirsch

Mentre i gruppi di omotopia dei tre spazi in un fibrato si inseriscono in una lunga sequenza esatta, la relazione tra i loro gruppi di omologia o coomologia è più complicata. La formula di Künneth mostra che ci sono alcune sottigliezze, anche per un fibrato prodotto, e per fibrati generali la meccanica delle sequenze spettrali è richiesta. In questa appendice descriviamo alcuni tipi speciali di fibrati per cui considerazioni più elementari sono sufficienti.
Il Teorema di Leray-Hirsch
Questo teorema fornisce ipotesi sufficienti a garantire che un fibrato abbia una coomologia molto simile a quella di un prodotto fibrato.

Theorem A.1. *Sia $F \to E \to B$ un fibrato tale che, per un anello commutativo R:*

1. *$H^n(F; R)$ è un R-modulo finitamente generato libero per ogni n.*
2. *Esistono classi $c_i \in H^k(E; R)$ le cui restrizioni $i^*(c_i)$ formano una base per $H^*(F; R)$ in ogni fibra F, dove $i : F \to E$ è l'inclusione.*

Allora la mappa $\Phi : H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R) \to H^*(E; R)$, $\sum_j b_j \otimes i^*(c_j) \mapsto \sum_j p^*(b_j) \cdot c_j$, è un isomorfismo di R-moduli.

La conclusione può essere riformulata dicendo che $H^*(E; R)$ è un $H^*(B; R)$-modulo libero con base $\{c_j\}$, dove consideriamo $H^*(E; R)$ come un modulo sull'anello $H^*(B; R)$ definendo la moltiplicazione scalare $bc = p^*(b) \cdot c$ per $b \in H^*(B; R)$ e $c \in H^*(E; R)$.
Nel caso di un prodotto $E = B \times F$ con $H^*(F; R)$ libero su R, possiamo ricavare una base per $H^*(F; R)$ tramite la proiezione $E \to F$ per ottenere le classi c_j. Quindi il teorema di Leray-Hirsch generalizza la versione della formula di Künneth che coinvolge prodotti cup almeno per quanto riguarda la struttura additiva e la struttura di modulo su $H^*(B; R)$. Tuttavia, il teorema di Leray-Hirsch non afferma che l'isomorfismo $H^*(E; R) \cong H^*(B; R) \otimes_R H^*(F; R)$ sia un isomorfismo di anelli, e infatti questo non deve essere vero, ad esempio per la bottiglia di Klein vista come un fibrato con fibra e base S^1, dove il teorema di Leray-Hirsch si applica con coefficienti $\mathbb{Z}_2$.
Un esempio di un fibrato dove le classi c_j non esistono è il fibrato di Hopf $S^1 \to S^3 \to S^2$, poiché $H^*(S^3) \neq H^*(S^2) \otimes H^*(S^1)$.
Dimostrazione: Proviamo innanzitutto il risultato per i complessi CW di dimensione finita B per induzione sulla loro dimensione. Il caso in cui B ha dimensione 0 è banale. Per il passo induttivo, supponiamo che B abbia dimensione n, e sia $B' \subset B$ il sottospazio ottenuto cancellando un punto x_α dall'interno di ogni n-cella e^n_α di B. Sia $E' = p^{-1}(B')$. Allora abbiamo un diagramma commutativo, con coefficienti in R sottintesi:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & H^*(B,B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & H^*(B') \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & H^*(E,E') \arrow[r] & H^*(E) \arrow[r] & H^*(E') \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

La mappa Φ a sinistra è definita esattamente come nel caso assoluto, usando il prodotto cup relativo $H^*(E, E') \otimes_R H^*(E) \to H^*(E, E')$. La prima riga del diagramma è esatta poiché tensorizzare con un modulo libero preserva l'esattezza. Anche la seconda riga è naturalmente esatta. La commutatività del diagramma segue dall'evidente naturalità di Φ nel caso dei due quadrati mostrati. Per l'altro quadrato che coinvolge le mappe

di cobordo, se partiamo da un elemento $b \otimes i^*(c_j) \in H^*(B') \otimes_R H^*(F)$ e lo mappiamo orizzontalmente otteniamo $\delta b \otimes i^*(c_j)$, che mappa verticalmente a $p^*(\delta b) \cdot c_j$, mentre se mappiamo prima verticalmente otteniamo $p^*(b) \cdot c_j$ che mappa orizzontalmente a $\delta(p^*(b) \cdot c_j) = \delta p^*(b) \cdot c_j = p^*(\delta b) \cdot c_j$ poiché $\delta c_j = 0$.
Lo spazio B' si deforma contraendosi sullo scheletro B^{n-1}, e il seguente lemma implica che l'inclusione $p^{-1}(B^{n-1}) \to E'$ è una debole equivalenza di omotopia, quindi induce un isomorfismo su tutti i gruppi di coomologia:

Lemma A.2. *Dato un fibrato $p : E \to B$ e un sottospazio $A \subset B$ tale che (B, A) è k-connesso, allora $(E, p^{-1}(A))$ è anch'esso k-connesso.*

Proof. Per una mappa $g : (D^i, \partial D^i) \to (E, p^{-1}(A))$ con $i \leq k$, per ipotesi esiste un'omotopia $f_t : (D^i, \partial D^i) \to (B, A)$ di $f_0 = pg$ a una mappa f_1 con immagine in A. La proprietà di sollevamento dell'omotopia fornisce quindi un'omotopia $g_t : (D^i, \partial D^i) \to (E, p^{-1}(A))$ di g a una mappa con immagine in $p^{-1}(A)$. □

Il teorema per B di dimensione finita seguirà ora per induzione e dal lemma dei cinque una volta mostrato che la mappa a sinistra Φ nel diagramma è un isomorfismo.
Per la proprietà del fibrato, ci sono intorni aperti del disco $U_\alpha \subset E^n$ dei punti x_α tali che il fibrato è un prodotto su ogni U_α. Sia $U = \bigcup_\alpha U_\alpha$ e sia $U' = U \cap B'$. Per escissione abbiamo $H^*(B, B') \cong H^*(U, U')$, e $H^*(E, E') \cong H^*(p^{-1}(U), p^{-1}(U'))$. Questo riduce la dimostrazione al fatto che la mappa $\Phi : H^*(U, U') \otimes_R H^*(F) \to H^*(U \times F, U' \times F)$ è un isomorfismo. Per questo possiamo ricorrere alla relativa formula di Künneth oppure possiamo argomentare per induzione, applicando il lemma dei cinque al diagramma con (B, B') sostituito da (U, U'), induzione che implica che il teorema vale per U e U' poiché la deformazione è per deformazione su complessi di dimensioni 0 e $n - 1$, rispettivamente, e per il lemma possiamo restringere i fibrati su questi complessi.
Successivamente c'è il caso in cui B è un complesso CW di dimensione infinita. Poiché (B, B^n) è n-connesso, il lemma implica che lo stesso vale per $(E, p^{-1}(B^n))$. Quindi nel diagramma commutativo a destra le mappe orizzontali sono isomorfismi al di sotto della dimensione n. Allora il fatto che la mappa a sinistra Φ sia un isomorfismo, come abbiamo già dimostrato, implica che la mappa a sinistra Φ è un isomorfismo al di sotto della dimensione n. Poiché n è arbitrario, questo dà il teorema per tutti i complessi CW B.

$$\begin{tikzcd}
H^*(B) \otimes_R H^*(F) \arrow[r] \arrow[d, "\Phi"] & H^*(B^n) \otimes_R H^*(F) \arrow[d, "\Phi"] \\
H^*(E) \arrow[r] & H^*(p^{-1}(B^n))
\end{tikzcd}$$

Per estendere al caso di spazi base B arbitrari abbiamo bisogno della nozione di fibrato pullback. Dato un fibrato $p : E \to B$ e una mappa $f : A \to B$, sia $f^*(E) = \{(a, e) \in A \times E \mid f(a) = p(e)\}$, quindi c'è un diagramma commutativo come a destra, dove le due mappe da $f^*(E)$ sono $(a, e) \mapsto a$ e $(a, e) \mapsto e$. È un semplice esercizio verificare che la proiezione $f^*(E) \to A$ è un fibrato con la stessa fibra di $E \to B$, dato che una trivializzazione locale di $E \to B$ su $U \subset B$ dà origine a una trivializzazione locale di $f^*(E) \to A$ su $f^{-1}(U)$.

$$\begin{tikzcd}
f^*(E) \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
A \arrow[r, "f"] & B
\end{tikzcd}$$

Se $f : A \to B$ è un'approssimazione CW a uno spazio base arbitrario B, allora $f^*(E) \to E$ induce un isomorfismo sui gruppi di omotopia tramite il cinque-lemma applicato alle lunghe sequenze esatte dei gruppi di omotopia per i due fibrati $E \to B$ e $f^*(E) \to A$ con fibra F. Quindi $f^*(E) \to E$ è anche un isomorfismo sulla coomologia. Le classi c_j si tirano indietro a classi in $H^*(f^*(E); R)$ che continuano a restringersi a una base in ogni fibra, e così la naturalità di Φ riduce il teorema per $E \to B$ al caso di $f^*(E) \to A$.

References

[1] Allen Hatcher. *Algebraic Topology*. Cambridge University Press, 2002.

[2] Marc Levine. The orlik-solomon algebra of a hyperplane arrangement. In C. Ciliberto and E. Sernesi, editors, *Algebraic Geometry and its Applications*, pages 235–256. Birkhäuser Boston, 1994.

[3] Peter Orlik and Hiroaki Terao. *Arrangements of Hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften*. Springer-Verlag, 1992.