

Esercizio 1. Sia $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{-2}$.

- i) Determinare il polinomio minimo di α su $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ e su $\mathbb{Q}(i)$.
- ii) Determinare il polinomio minimo di α su \mathbb{Q} .

Esercizio 2. Calcolare il campo di spezzamento di $x^3 + x + 1$ su \mathbb{Q} , \mathbb{F}_2 e su \mathbb{F}_3 .

Esercizio 3. Sia $p(x) = x^4 + 2x - 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

- i) Dimostrare che $p(x)$ è irriducibile su \mathbb{Q} .
- ii) Dimostrare che $p(x)$ ha almeno una radice reale.
- iii) Detta α una radice reale di $p(x)$, dimostrare che $x^2 + 1$ è irriducibile su $\mathbb{Q}(\alpha)$.
- iv) Determinare il grado su \mathbb{Q} di $\alpha + i \in \mathbb{C}$

Esercizio 4. Sia $\alpha \in \mathbb{C}$ una radice del polinomio $x^4 - 2x^2 - 2$.

- i) Determinare il polinomio minimo di $\alpha + 1$ su \mathbb{Q} .
- ii) Mostrare che $\frac{1}{\alpha^2+1}$ ammette una scrittura polinomiale in α esplicitando una tale scrittura.
- iii) Dire per quali $\lambda \in \mathbb{Q}$, l'elemento $\alpha^2 + \lambda\alpha$ ha grado due su \mathbb{Q} .