Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

26/09/2008

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

lacchine di Turin

Nondeterministiche
Problemi
Alternanti

Giochi alternanti

Macchina di Turing

Modello astratto di calcolatore.

Tesi di Church-Turing

"Tutto ciò che è calcolabile è Turing-calcolabile."

È al tempo stesso una *congettura* ed un *assioma* alla base della teoria della calcolabilità.

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Nondeterministiche Problemi

Giochi alternanti



Macchina di Turing

Modello astratto di calcolatore.

Tesi di Church-Turing:

"Tutto ciò che è calcolabile è Turing-calcolabile."

È al tempo stesso una *congettura* ed un *assioma* alla base della teoria della calcolabilità.

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

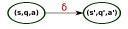
Nondeterministiche Problemi

Giochi alternanti



Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.



Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

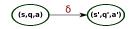
Deterministiche

Problemi

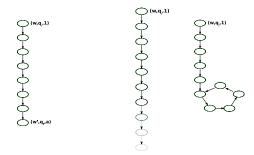
Giochi alternant

Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.



La computazione è lineare o contiene al più un ciclo.



Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

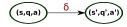
Problemi Alternanti

Giochi alternant

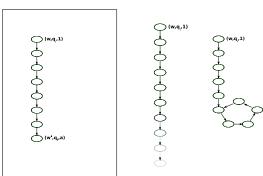


Macchine deterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione una configurazione successiva.



La computazione è lineare o contiene al più un ciclo.



La si considera accettante se arriva ad uno stato q_f (e quindi termina).

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

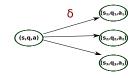
Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternanti

Giochi alternant

Macchine nondeterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.



Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

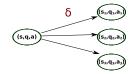
Macchine di Turing

Nondeterministiche

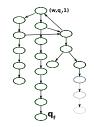
Alternar Problem

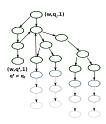
Giochi alternant

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.



La struttura della computazione può variare.





Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

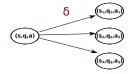
Macchine di Turing Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternanti Problemi

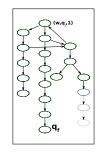
Giochi alternant
Ancora QSAT
Altri giochi

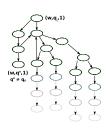
Macchine nondeterministiche

La funzione di transizione assegna ad ogni configurazione un insieme di configurazioni successive.



La struttura della computazione può variare.





La si considera accettante se almeno uno dei rami arriva ad uno stato q_f .

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing
Deterministiche
Nondeterministiche

Alternanti Problemi

Giochi alternant Ancora QSAT

1. SAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale
$$\exists X_1 \; \exists X_2 \; \exists X_3 \ldots \varphi(X_1, X_2, \ldots X_m)$$

 $\mathit{SAT} \in \mathit{NP}$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970)

SAT è NP-completo

4 □ → 4 □ → 4 □ → 4 □ → □

2. 3-colorabilità di una cartina ∈ NP

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi

C: I: I:

1. SAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale
$$\exists X_1 \exists X_2 \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$$
?

 $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970):

SAT è NP-completo

4 D > 4 D > 4 D > 4 D > 3

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi

Problem

Giochi alternanti

1. SAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \ \exists X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

Esempi:

- $(A \wedge B) \wedge (\neg A \vee C) \in SAT$
- $(A \land \neg A) \land (B \lor C) \not\in SAT$
- $ightharpoonup p(x_1, x_2, x_3 \dots)$ ha radici in \mathbb{Z}_2 ?

 $\mathit{SAT} \in \mathit{NP}$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970)

SAT è NP-completo

4 D > 4 P > 4 E > 4 E > 9 Q P

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Nondeterministiche

Problemi Alternanti

Ciaabi alkamaa

1. SAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale
$$\exists X_1 \ \exists X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$$
?

Esempi:

- $(A \land B) \land (\neg A \lor C) \in SAT$
- $(A \land \neg A) \land (B \lor C) \not\in SAT$
- $ightharpoonup p(x_1, x_2, x_3 \dots)$ ha radici in \mathbb{Z}_2 ?

 $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970):

SAT è NP-completo

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternanti

Problem

Ancora QSAT

Altri giochi GO

SAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \ \exists X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

Esempi:

- $(A \land B) \land (\neg A \lor C) \in SAT$
- \blacktriangleright $(A \land \neg A) \land (B \lor C) \not\in SAT$
- \triangleright $p(x_1, x_2, x_3...)$ ha radici in \mathbb{Z}_2 ?

 $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970):

SAT è NP-completo



Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale
$$\exists X_1 \ \exists X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$$
?

Esempi:

- $(A \land B) \land (\neg A \lor C) \in SAT$
- $(A \land \neg A) \land (B \lor C) \not\in SAT$
- $p(x_1, x_2, x_3...)$ ha radici in \mathbb{Z}_2 ?

 $SAT \in NP$ (complessità nondeterministica polinomiale)

Cook (1970):

SAT è NP-completo

2. 3-colorabilità di una cartina $\in NP$

Pietro Battiston

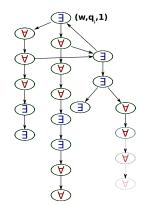
Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternant

Giochi alternanti

Ogni configurazione è esistenziale o universale.



Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turin
Deterministiche
Nondeterministiche

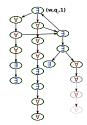
Alternanti

iochi alternant Ancora QSAT Altri giochi



Macchine alternanti

Ogni configurazione è esistenziale o universale.



Configurazione accettanti:

- esistenziali con almeno una configurazione figlia accettante
- universale con tutte le configurazioni figlie accettanti

M accetta $w \Leftrightarrow la radice <math>(w, q_i, 1)$ è accettante

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turin Deterministiche Nondeterministiche

Alternanti Problemi



Alternanza: problemi

QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale
$$\exists X_1 \ \forall X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi

Giochi alternant

Alternanza: problemi

QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \ \forall X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Nondeterministiche

Problemi Alternanti Problemi

Alternanza: problemi

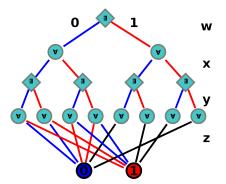
QSAT:

Input: $\varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$ formula booleana

Vale $\exists X_1 \ \forall X_2 \ \exists X_3 \dots \varphi(X_1, X_2, \dots X_m)$?

Esempio:

▶ in \mathbb{Z}_2 : $\exists w \ \forall x \ \exists y \ \forall z \ (x+z+wy+wz=0)$



Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Problemi

Problemi

Giochi alternanti



tempo → spazio→

paradigina			
Р	NP	AP	
PSPACE	NPSPACE	APSPACE	

naradiama -

EXP

- ► Savitch (1970): *PSPACE* = *NPSPACE*
- ► Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): *AP* = *PSPACE*
- ▶ Idem: APSPACE = EXF

 $P \subset NP \subset AP$, = $PSPACE \subset NPSPACE \subset APSPACE = EXP$

Hartmanis. Stearns (1965): $P \neq EXP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternanti

Problemi

Giochi alternanti

tempo → spazio→

paradigina			
Р	NP	AP	
PSPACE	NPSPACE	APSPACE	

naradiama -

EXP

- ► Savitch (1970): *PSPACE* = *NPSPACE*
- ► Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): *AP* = *PSPACE*
- ▶ Idem: *APSPACE* = *EXF*

 $P \subset NP \subset AP$, $= PSPACE = NPSPACE \subset APSPACE = EXP$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi Alternanti

Problemi

Giochi alternanti

tempo → spazio→

parauigina →			
Р	NP	AP	
PSPACE	NPSPACE	APSPACE	

naradiama

EXP

- ► Savitch (1970): *PSPACE* = *NPSPACE*
- ► Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): AP = PSPACE
- ightharpoonup Idem: APSPACE = EXP

 $P \subset NP \subset AP = PSPACE = NPSPACE \subset APSPACE = EXP$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Deterministiche Nondeterministiche

Problemi

Giochi alternanti



 $tempo \rightarrow$ spazio→

parauigiria →			
Р	NP	AP	
PSPACE	NPSPACE	APSPACE	

FXP

- Savitch (1970): PSPACE = NPSPACE
- ► Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): AP = PSPACE
- ▶ Idem: APSPACE = EXP

$$P \subset NP \subset AP = PSPACE = NPSPACE \subset APSPACE = EXP$$

Alternanza. parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Problemi

Deterministiche Nondeterministiche Problemi

Problemi

Giochi alternant

Ancora QSAT Altri giochi GO

paradigma ightarrow

 $tempo \rightarrow P NP AP$ $spazio \rightarrow PSPACE NPSPACE APSPACE$

EXP

- Savitch (1970): PSPACE = NPSPACE
- ► Chandra, Kozen, Stockmeyer (1981): AP = PSPACE
- ▶ Idem: APSPACE = EXP

 $P \subset NP \subset AP = PSPACE = NPSPACE \subset APSPACE = EXP$

Hartmanis, Stearns (1965): $P \neq EXP$

Il gioco QSAT

 \exists rnesto ed \forall antonio scelgono una formula booleana $\varphi(X_1, X_2 \dots X_n)$. \exists rnesto sceglie X_1 , \forall ntonio X_2 . . .

È un gioco ad informazione perfetta

Per quali φ ∃rnesto ha una strategia vincente? $\varphi \in QSAT$

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Nondeterministiche
Problemi

Giochi alternant



Il gioco QSAT

∃rnesto ed ∀antonio scelgono una formula booleana $\varphi(X_1,X_2\ldots X_n).$ \exists rnesto sceglie X_1 , \forall ntonio X_2 ...

È un gioco ad informazione perfetta

Per quali $\varphi \exists rnesto ha una strategia vincente?$ $\varphi \in QSAT$

Alternanza. parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Ancora QSAT



Altri giochi

Ipotesi:

- ▶ informazione perfetta
- mosse finite
- possibilità finite
- tempo polinomiale per stabilire la vittoria
- ▶ turni stabiliti in partenza
- \Rightarrow individuare le posizioni vincenti è \in APTIME.

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Turing

Nondeterministiche Problemi Alternanti

Giochi alternanti

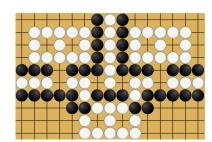


Giochi alternanti

Ancora QSAT Altri giochi GO

$\mathsf{GO} \in \mathit{PSPACE} - \mathit{C}$, perché emula QSAT

Un quantificatore esistenziale:



Fine

Alternanza, parallelismo e complessità

Pietro Battiston

Macchine di Ti

Nondeterministiche Problemi

Giochi alternant

Ancora QSAT Altri giochi GO

Grazie dell'attenzione