A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 1)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 2 – LEZIONE 001

Titolo nota 23/09/2015

ANALISI 1 $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{15}$

ANALISI 2 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

ANALISI 3 $f: X \to \mathbb{R}$ dove $\dim X = +\infty$

— o — o —

Precorso	20%	
Analisi 1	40%	
Algebra Lin	10%	
Analisi 2	30%	

→ Calcolo diff. in + variabili
→ Calcolo integrale in + variabili
→ Curve, sup., calcolo vettoriale
} Prima passata

→ Successioni e serie di funzioni
→ Equazioni Diff.
→ Spazi metrici
} Seconda passata

— o — o —

SLOGAN: UNIFORME (MENTE)

— o — o —

$\boxed{\text{Ripasso su } \mathbb{R}^n}$

① È uno spazio vettoriale (somma e prodotto per scalare)

[Notazione: $x \in \mathbb{R}^n$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$
$(x_1, \ldots, x_{15}) \in \mathbb{R}^{15}$]

② È definito il prodotto scalare canonico

$$\langle x, y \rangle = x \cdot y = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n \qquad x \in \mathbb{R}^n, y \in \mathbb{R}^n$$

③ È definita la norma di un vettore

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2} = \langle x, x \rangle^{1/2}$$ (lunghezza del vettore)

④ È definita la distanza tra due vettori

$$\operatorname{dist}(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2} = |x - y|$$

Idea generale: prod. scalare ⇝ norma ⇝ distanza
⇕
topologia

Def. Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e sia $r > 0$. Si dice PALLA con centro in x_0 e raggio r l'insieme

aperta

$$B_r(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, x_0) < r\} \leftarrow \text{aperta}$$
$$\overline{B}_r(x_0) = \{ \quad '' \quad '' \quad \leq r\} \leftarrow \text{chiusa}$$

Def. Sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$ una successione. Si dice che $x_n \to x_\infty \in \mathbb{R}^k$ se

$$\boxed{\text{dist}(x_n, x_\infty) \to 0} \leftarrow \text{limite di numeri}$$

cioè $\forall r > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\underbrace{|x_n - x_\infty| < r}_{x_n \in B_r(x_\infty)} \quad \forall n \geq n_0$

Osservazione Una volta definite le $B_r(x_0)$ abbiamo immediatamente le nozioni di [dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$]

1. punto interno $\rightsquigarrow$ Int(A)
2. punto aderente $\rightsquigarrow$ Clos(A)
3. punto di frontiera $\rightsquigarrow$ ∂A
4. punto di accumulazione $\rightsquigarrow$ $D(A)$
5. punto isolato $\rightsquigarrow$ Isol(A)

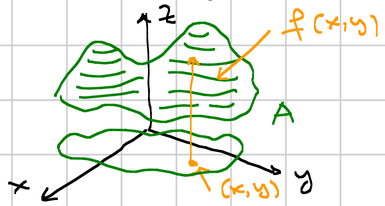
[Def di 1: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Si dice che x_0 è interno ad A se $\exists r > 0$ t.c. $B_r(x_0) \subseteq A$]

— o — o —

Funzioni $f(x,y)$, $f(x,y,z)$, $f(x_1, \dots, x_{15})$, $f(x)$ $x \in \mathbb{R}^n$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $f : A \to \mathbb{R}$, il suo grafico è

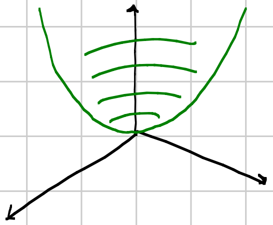
$$\text{Grafico}(f) := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in A, \ z = f(x,y)\}$$

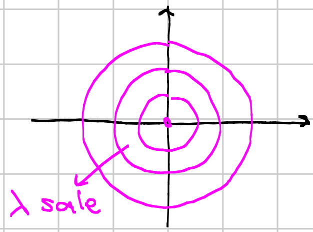


Due scorciatoie per visualizzare funzioni $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$

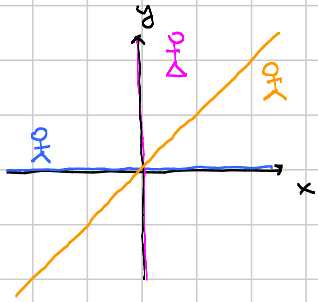
→ <u>linee di livello</u> $A_\lambda = \{(x,y) \in A : f(x,y) = \lambda\}$

<u>Esempio</u> $f(x,y) = x^2+y^2$ $x^2+y^2=\lambda$





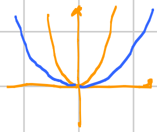
→ <u>percorsi di omini</u> $f(x,y) = x^2+y^2$



$f(\underbrace{t,0}) = t^2$ al variare di t descrive l'asse x

$f(\underbrace{0,t}) = t^2$ asse y

$f(t,t) = t^2+t^2 = 2t^2$



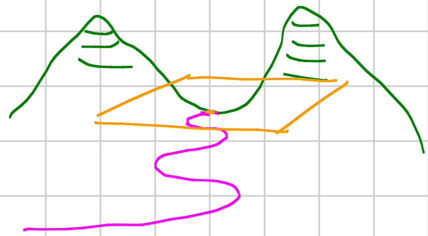
$f\left(\frac{t}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^2 = t^2$

— o — o —

Punti stazionari: p.ti in cui piano tangente // piano base

Oltre ai max / min / flessi ci sono i

MOUNTAIN PASS



— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 002

Titolo nota 23/09/2015

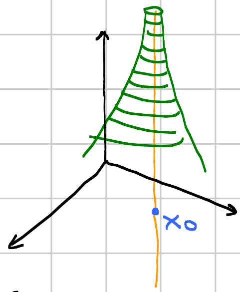
Definizioni di limite per funzioni di più variabili

$A \subseteq \mathbb{R}^n \qquad f : A \to \mathbb{R} \qquad x_0 \in \mathbb{R}^n$ p.to di accumulazione di A

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \begin{cases} \ell \in \mathbb{R} & ① \\ +\infty & ② \\ -\infty & ③ \\ \text{N.E.} & ④ \leftarrow \text{Nessuno dei precedenti} \end{cases}$$

vettori

② $\forall M \in \mathbb{R}$ (anche enorme)
$\exists r > 0$ t.c.
$f(x) \geq M \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$



③ $\forall M \in \mathbb{R} \ \exists r > 0$ t.c. $f(x) \leq M \quad \forall x \in \ldots$

① $\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ t.c. $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$
$|f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Achtung! In $\mathbb{R}^n$ non si fanno (almeno per ora ☺) limiti all'infinito.

Osservazione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ posso definire $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}^m$
$\uparrow \mathbb{R}^m$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0$ t.c. $|f(x) - \ell| \leq \varepsilon \quad \forall x \in (B_r(x_0) \cap A) \setminus \{x_0\}$

vettori
norma

Notazione: se siamo in $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$ scriviamo

$$\lim_{(x,y) \to (x_0, y_0)} f(x,y)$$

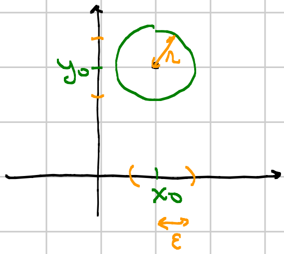
Esempio 1 Calcolare $$\lim_{(x,y) \to (1,2)} \frac{y \log x + \arctan(xy)}{x^2 + y^2} = \frac{1}{5} \arctan 2$$

Posso sostituire perché vale il solito meta-teorema di analisi 1.

L'unica cosa da dimostrare è la continuità delle "componenti"

$f(x,y) = x \qquad f(x,y) = y$

Questa è sostanzialmente ovvia: se (x,y) è vicino a (x_0, y_0), allora x è vicino a x_0 e y è vicino a y_0



Strumenti per il calcolo di limiti in $\mathbb{R}^n$:

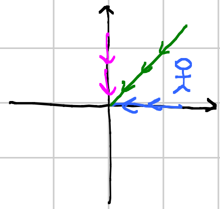
→ teo. algebrici

→ composizioni

→ confronto e carabinieri

→ De L'Hôpital NO

→ Taylor lo vedremo.

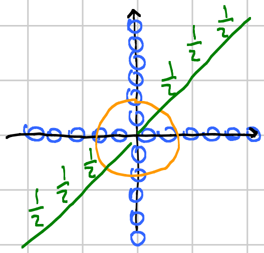


Esempio 1 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \boxed{\frac{xy}{x^2+y^2}} = f(x,y)$

Esploriamo con l'omino

omino: $f(x,0) = 0$ omino: $f(0,y) = 0$ omino: $f(x,x) = \frac{1}{2}$

Due omini con comportamento diverso → il limite non esiste



Se il limite fosse reale, non potrei avere valori che distano $\frac{1}{2}$ in ogni $B_r(0)$.

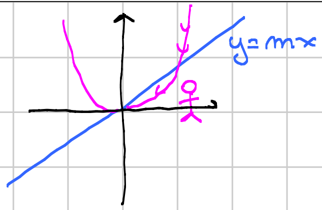
Similmente si escludono i limiti $\pm\infty$

SLOGAN: ad Analisi 2 i limiti non hanno NESSUNA VOGLIA di esistere

Come dimostro che un limite NON esiste? Trovo 2 omini con comp. diverso

" " " " ESISTE? Può essere complicato

Esempio 2 $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \; ?$



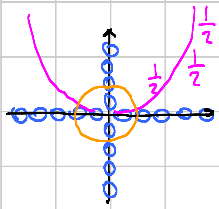
Asse x: $f(x,0) = 0$

Asse y: $f(0,y) = 0$

Bisettrice: $f(x,x) = \dfrac{x^3}{x^4 + x^2} = \dfrac{x}{x^2+1} \to 0$

$\boxed{y = mx}$: $f(x,mx) = \dfrac{m x^3}{x^4 + m^2 x^2} = \dfrac{m x}{x^2 + m^2} \to 0$ per ogni $m \neq 0$ e anche per $m = 0$

$f(x,x^2) = \dfrac{x^4}{x^4 + x^4} = \dfrac{1}{2}$

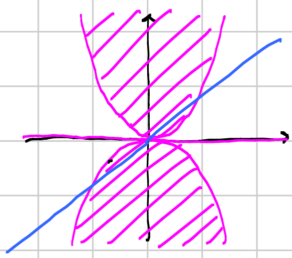


Esempio 3 $\quad f(x,y) = \dfrac{x y^2}{x^4 + y^2}$

Dimostro che $|f(x,y)| \to 0$

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \le \underset{\downarrow \atop 0}{|f(x,y)|} = |x| \underbrace{\frac{y^2}{x^4+y^2}}_{\le 1} \le \underset{\downarrow \atop 0}{|x|}$$

Esempio 2-bis

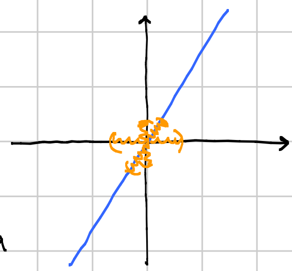


$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{zona colorata} \\ 1 & \text{fuori} \end{cases}$$

Il limite a $(0,0)$ non esiste, ma su tutte le rette passanti per l'origine il limite viene 0 (ogni retta vicino all'origine casca in zona 0)

Fissato $\varepsilon > 0$ in ogni direzione trovo un intornino in cui $|f(x,y)| \le \varepsilon$.

Se mettendo insieme gli intornini avessi una palla di $\mathbb{R}^2$ avrei l'esistenza del limite



Il problema è che l'r sulle varie rette NON È UNIFORME, cioè non esiste un $r_0 > 0$ che va bene ovunque.

Esercizio (semi-hard) Trovare $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\} \to \mathbb{R}$ tale che

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \quad \text{NON ESISTE}$$

$$\lim_{x\to 0} f(\underbrace{ax^k, bx^\ell}_{\text{tanti cammini che vanno in } (0,0)}) = 0 \qquad \text{per ogni } a \in \mathbb{R},\ b \in \mathbb{R},\ k \geq 1,\ \ell \geq 1 \text{ interi}$$

$\boxed{\text{ACHTUNG!}}$ Se anche infiniti cammini concordano sul limite, questo può comunque non esistere.

ANALISI 2 — LEZIONE 003

Titolo nota 25/09/2015

Visto finora: → $\lim_{x \to x_0} f(x)$ $f: D \to \mathbb{R}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$

$\mathbb{R}^n$

→ continuità per funzioni di più variabili

Quattro facce della continuità:

① con i limiti: $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

② (ε/δ) : $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap D$

③ per successioni: per ogni succ. $\underbrace{x_n \to x_0}_{\text{tutto in } \mathbb{R}^n}$ si ha $f(x_n) \to f(x_0)$

④ con gli aperti: se $f(x_0) \in \operatorname{Int}(B)$, allora $x_0 \in \operatorname{Int} f^{-1}(B)$

relativo all'insieme D.

— o — o —

LIMITI ALL'INFINITO PER FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

Data una succ. $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}^k$, cosa vuol dire che "$x_n \to +\infty$"?

Vuol dire che $\underbrace{|x_n|}_{\text{norma}} \to +\infty$, cioè

$$\boxed{\forall R > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad x_n \notin B_R(0)}$$

origine

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme non limitato ($\forall R > 0 \quad D \cap B_R(0) \neq D$)

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = \begin{cases} \ell \\ +\infty \\ -\infty \\ \text{N.E.} \end{cases}$$

(Nessuno dei precedenti)

② $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \geq M$

③ $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow f(x) \leq M$

① $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R > 0$ t.c. $\forall x \in D \quad |x| \geq R \Rightarrow |f(x) - \ell| \leq \varepsilon$

Oss. Ovviamente liminf e limsup esistono sempre

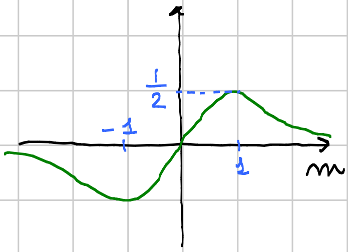
Esempio 1 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ liminf / limsup $(x,y) \to (0,0)$

Asse x: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,0) = 0$ Bisettrice: $\lim\limits_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$

Chi sono liminf / limsup? Provo intanto la retta generica $y = mx$

$$\lim_{t\to 0} f(t,mt) = \lim_{t\to 0} \frac{mt^2}{t^2+m^2t^2} = \frac{m}{1+m^2}$$

Al variare di m troviamo vari valori del limite.



Da questo conto sappiamo che

$$\liminf f(x,y) \le -\frac{1}{2} \qquad \limsup f(x,y) \ge \frac{1}{2}$$

Provo a vedere se per caso $f(x,y) \overset{?}{\le} \frac{1}{2}$; $\dfrac{xy}{x^2+y^2} \overset{?}{\le} \frac{1}{2}$; $2xy \overset{?}{\le} x^2+y^2$ Ok

La disuguaglianza è vera, quindi $\limsup f(x,y) = \frac{1}{2}$. Idem per liminf.

— o — o —

Esempio 2 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} = 0$

Si può fare con delle stime $\left|\dfrac{x^3}{x^2+y^2}\right| = |x| \dfrac{x^2}{x^2+y^2} \le |x|$

Più velocemente si fa in $\boxed{\text{COORDINATE POLARI}}$ $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$f(x,y) = \frac{\rho^3\cos^3\theta + \rho^3\sin^3\theta}{\rho^2} = \rho(\cos^3\theta + \sin^3\theta)$$

Devo fare il limite per $\rho \to 0$, ma solo dopo essermi liberato di θ.

$$\underbrace{0}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{\boxed{|\rho(\cos^3\theta+\sin^3\theta)|}}_{\downarrow\, 0} \le \underbrace{2\rho}_{\downarrow\, 0}$$

Esempio 3 $\quad f(x,y) = \dfrac{x^5+3y^5}{x^4+y^4} \qquad (x,y) \to (0,0)$

Passo in polari: $\quad f(x,y) = \dfrac{\rho^5(\cos^5\theta + 3\sin^5\theta)}{\rho^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)}$

$$= \underset{\downarrow \atop 0}{\rho}\ \boxed{\frac{\cos^5\theta + 3\sin^5\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}}$$

come posso stimarlo indipendentemente da θ ?

$|$Numeratore$| \leq 4$.

Denominatore $= d(\theta)$ è una funzione continua che in $[0,2\pi]$ avrà un minimo m per W, che non è nullo perché $\cos\theta$ e $\sin\theta$ non si annullano contemporaneamente.

Quindi

$$\underset{\downarrow \atop 0}{0} \leq \underbrace{\rho\left|\frac{\cdots}{\cdots}\right|}_{\downarrow \atop 0} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\rho\,\frac{4}{m}}$$

Esempio 4 $\quad f(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$

Passiamo in polari: $\quad \dfrac{\rho^3\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^4\cos^4\theta + \rho^2\sin^2\theta} = \rho\,\dfrac{\cos^2\theta\sin\theta}{\rho^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$

① Se fisso θ e faccio il limite in $\rho \to 0$ ottengo 0, almeno per $\sin\theta \neq 0$

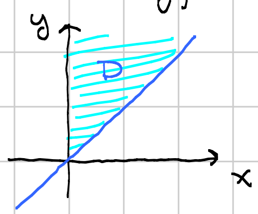
② Quando $\sin\theta = 0$, la frazione vale 0, quindi tende comunque a 0

No!!! Queste cose non si fanno !!!

Fissare θ è equivalente a fare il limite sulle rette !!!

Achtung! Si può fare il limite in ρ solo dopo aver ottenuto stime UNIFORMI in θ. (N.B. : il limite non esisteva)

Esempio 5 $\quad \displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad D = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y\}$



Ora esiste e fa 0. Infatti in D

$$\underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{0}} \leq f(x,y) \leq \frac{x^2y}{x^4+x^2} = \frac{y}{1+x^2} \leq \underset{\downarrow \atop 0}{\boxed{y}}$$

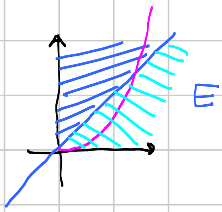
In alternativa $0 \le f(x,y) \le \dfrac{y^3}{x^4+y^2} \le \dfrac{y^3}{y^2} = y$

Esempio 6 $f(x,y) = \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}$ $|(x,y)| \to +\infty$ $x^2+y^2 \to +\infty$

Asse x : $\lim_{t \to +\infty} f(t,0) = 0$

Bisettrice : $\lim_{t \to +\infty} f(t,t) = \dfrac{t^3}{t^4+t^2} = 0$

Parabole : $\lim_{t \to +\infty} f(t,t^2) = \dfrac{1}{2}$ come sempre.



Se mi restringo al D dell' esempio 5
Continua a non esistere perchè posso usare
bisettrice + parabole.

Esercizio Mostrare che il limite esiste se mi restringo ad E.

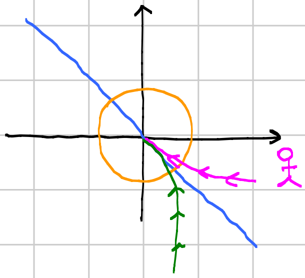
. — o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 004

Titolo nota 25/09/2015

Esempio 1 $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$ $\quad (x,y) \to (0,0)$

Non esiste! f è definita in $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq -x\}$



Idea: in ogni $B_r(0)$ esistono p.ti della retta diversi dall'origine. Vicino a quei p.ti $f(x,y)$ assume valori enormi o enorm. negativi

Formalmente: $\lim_{t \to 0^+} f(t, -t+t^2) =$

$$= \lim_{t\to 0^+} \frac{t^4 + (-t+t^2)^5}{t^3 + (-t+t^2)^3} = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{\cancel{t^3} - \cancel{t^3} + 3t^4 + o(t^4)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Se invece vado lungo l'asse x: $\lim_{t\to 0} f(t,0) = \dfrac{t^4}{t^3} = 0$

Quindi il limite non esiste. Analogamente

$$\lim_{t\to 0^+} f(t, -t+t^4) = \lim_{t \to 0^+} \frac{t^4 + o(t^4)}{t^3 - t^3 + 3t^6 + o(t^6)} = +\infty$$

Quindi $\limsup_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = +\infty$

Per vedere che $\liminf_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = -\infty$ uso $f(t, -t-t^4)$

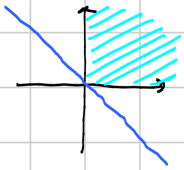
Esempio 2 Stessa $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$ all'infinito

$\lim_{t\to+\infty} f(t,0) = \lim_{t\to+\infty} t = +\infty \implies \limsup = +\infty$

$\lim_{t\to-\infty} f(t,0) = \lim_{t \to -\infty} t = -\infty \implies \liminf = -\infty$

Esempio 3 Stessa $f(x,y) = \dfrac{x^4+y^5}{x^3+y^3}$, $(x,y) \to (0,0)$ ristretta a $D = 1°$ quadrante

Qui il limite è 0 e lo dim. con le coord. polari



$$f(x,y) = \frac{\rho^4 \cos^4\theta + \rho^5 \sin^5\theta}{\rho^3(\cos^3\theta + \sin^3\theta)} = \rho \frac{\cos^4\theta + \rho \sin^5\theta}{\cdots}$$

Per $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ la funzione $\cos^3\theta + \sin^3\theta$ ha un minimo $m > 0$ ($\cos\theta$ e $\sin\theta$ sono ≥ 0 in $[0, \frac{\pi}{2}]$ e non si annullano insieme)

$$\underbrace{0}_{\to 0} \leq \left| \frac{\cdots}{\cdots} \right| \leq \underbrace{\rho \cdot \frac{1}{m}}_{\to 0} + \underbrace{\rho^2 \frac{1}{m}}_{\to 0}$$ e da qui si chiude.

Esempio 4 $(x,y) \to (0,0)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^{16}+y^{16}}$

Studiare al variare di α. Il limite esiste ed è uguale a 0 se e solo se $\alpha > 14$. Infatti in polari

$$\frac{\rho^{2+\alpha}(\cos^2\theta |\sin\theta|^\alpha)}{\rho^{16}\underbrace{(\cos^{16}\theta + \sin^{16}\theta)}_{\geq m > 0}}$$ e quindi fine come sempre

Esempio 5 $(x,y) \to (0,0)$ $f(x,y) = \dfrac{x^2|y|^\alpha}{x^{10}+y^{16}}$

Idea: PAREGGIARE GLI ESPONENTI!
Ad esempio uso la curva (t^8, t^5)

$$\lim_{t\to 0} f(t^8, t^5) = \lim_{t \to 0} \frac{t^{16}|t^{5\alpha}|}{2t^{80}}$$

Quindi le cose cambiano quando $5\alpha + 16 = 80$; $5\alpha = 64$, $\alpha = \frac{64}{5}$

Cosa ho dimostrato? Che per $\alpha \leq \frac{64}{5}$ il limite non esiste (sull'asse x o y fa 0, e sulla curva strana $\neq 0$)
Resta da dim. che per $\alpha > \frac{64}{5}$ esiste e fa 0.

Faccio un cambio di variabili $x = z^8$

$y = w^5$

Se posso fare il cambio il limite diventa

$$\lim_{(z,w)\to(0,0)} \frac{z^{16}|w|^{5\alpha}}{z^{80}+w^{80}}$$ e questo si fa bene con le polari

Fatto che ci sta sotto: $(x,y)\to(0,0)$ se e solo se $(z,w)\to(0,0)$.
Cioè se $x^2+y^2 \leq R$ allora $z^2+w^2 \leq R_1$ e viceversa.

<u>Osservazione</u> Nel momento in cui pongo $x = z^8$ perdo informazione, cioè sto facendo il limite solo per $x>0$.
Dovrei poi fare la stessa cosa ponendo $x = -z^8$ e questo fa il limite per $x<0$.

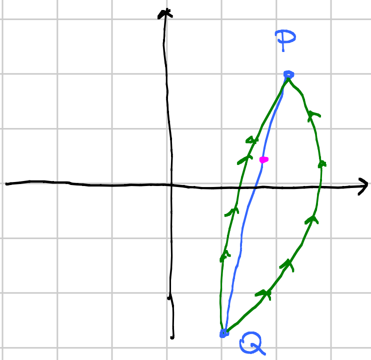
— o — o —

<u>Esempio 6</u> Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua t.c.

$$\limsup_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty \qquad \liminf_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = -\infty$$

Tesi: allora $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ l'equazione $f(x,y)=\lambda$ ha ∞ soluz.

<u>Idea</u>: esiste un p.to P in cui $f(P) > \lambda$
" " " Q in cui $f(Q) < \lambda$



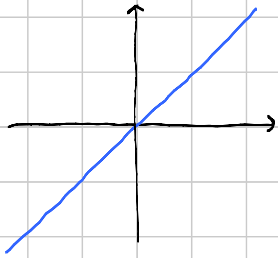
Nel segmento congiungente c'è almeno un p.to in cui vale esatt. λ

$\varphi(t) = f(Q + t(P-Q))$

φ è continua e $\varphi(0) < \lambda$ e $\varphi(1) > \lambda$

Lo stesso ragionamento vale per ogni percorso che congiunge P e Q.

<u>Esempio 7</u> $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \underbrace{\frac{\sin^2 x - \sin^2 y}{x-y}}_{f(x,y)}$ $D = \{\dots : x \neq y\}$



In questo caso $f(x,y) \to 0$.
Uso Lagrange con $g(x) = \sin^2 x$

$$\sin^2 x - \sin^2 y = (x-y)\, g'(c) = (x-y)\, 2 \sin c \cdot \cos c$$

Per $x \neq y$ posso semplificare ottenendo $f(x,y) = 2 \sin c \cdot \cos c$

dipende da x e y, ma è compreso tra x e y

Quando $(x,y) \to (0,0)$ ci siamo $c \to 0$, quindi $f(x,y) \to 0$.

<u>Esempio 8</u> $f(x,y) = \dfrac{\sin(xy)}{xy}$ $D =$ fuori dagli assi

$\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$ e si fa con il cambio di variabili $t = xy$

diventa $\displaystyle\lim_{t\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 005

Titolo nota 29/09/2015

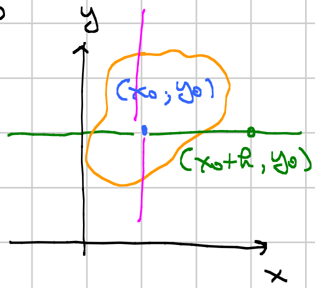
"Derivate" per funzioni di più variabili

Derivata $\quad f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$

Differenziale $\quad f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\alpha}_{f'(x_0)} h + o(h)$

In una variabili le 2 nozioni sono equivalenti

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in D$ p.to INTERNO



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

se esiste ed è reale

Se esiste, si chiama DERIVATA PARZIALE di $f(x, y)$ rispetto alla variabile x nel p.to (x_0, y_0)

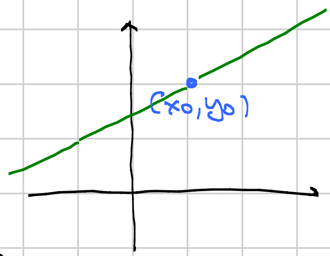
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

se esiste ed è reale

.... rispetto a y ....

DERIVATA DIREZIONALE: andare lungo una qualunque retta

Fissato un qualunque vettore $\vec{v} = (v_1, v_2)$ non nullo, cioè $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$, posso provare a calcolare



$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+v_1 h, y_0+v_2 h) - f(x_0, y_0)}{h} = \frac{\partial f}{\partial v}(x_0, y_0)$$

se esiste ed è reale

Si chiama DERIVATA di f lungo la direzione v nel p.to (x_0, y_0)

Oss. La derivata direzionale si può definire
→ rispetto a tutti i $v \neq 0$
→ rispetto ai soli versori $(|v| = 1)$

Bastano quelle definite nel secondo modo per "catturare" tutte le possibili rette per (x_0, y_0).

— o — o —

Def. formali in $\mathbb{R}^n$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$.

Dato $v \neq 0$
$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h v) - f(x_0)}{h}$$
se esiste e $\in \mathbb{R}$

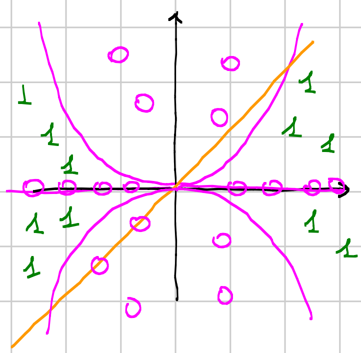
Le derivate parziali sono derivate direzionali con $v =$ uno dei vettori della base canonica

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h e_i) - f(x_0)}{h} \qquad e_i = (0, \dots, 0, \underset{i\text{-esima}}{1}, 0 \dots 0)$$
se esiste e $\in \mathbb{R}$

— o — o —

Sorpresona: in più variabili possono esistere tutte le derivate direzionali in x_0 senza che f sia continua in x_0

Esempio 1 $D = \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$



Chiaramente $f(x,y)$ non è continua in $(0,0)$.
Tuttavia, tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle in $(0,0)$.
Su ogni retta infatti la $f(x,y)$ è identicamente nulla vicino all'origine.

<u>Esempio 2</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \left(\dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} \right)^2 & \text{per } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{per } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Il limite in $(0,0)$ non esiste (basta andare sulle parabole).
Tutte le derivate direzionali esistono e sono nulle.
Preso $v = (a,b)$

$$\lim_{\ell \to 0} \frac{f(a\ell, b\ell) - \overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(0,0)}}}{\ell} = \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{\ell} \left(\frac{a^2 \ell^2 b \ell}{a^4 \ell^4 + b^2 \ell^2} \right)^2$$

$$= \lim_{\ell \to 0} \frac{1}{\cancel{\ell}} \frac{a^4 b^2 \quad \ell^{\cancel{6}}}{\cancel{\ell^4} (a^4 \ell^2 + b^2)^2} = 0 \quad \text{se } b \neq 0$$

Se $b = 0$ vuol dire che sto facendo $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e questa è nulla perchè la frazione è sempre nulla in quel caso

— o —

<u>Oss. geometrica</u> fare $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$ è equivalente a fare la derivata in $t=0$ della funzione $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$, cioè la restrizio= ne di f alla retta $x_0 + tv$

— o —

<u>Notazioni</u> Le derivate parziali / direzionali si indicano indifferentemente come

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0) \qquad f_x(x_0) \qquad D_x f(x_0)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) \qquad f_v(x_0)$$

— o — o —

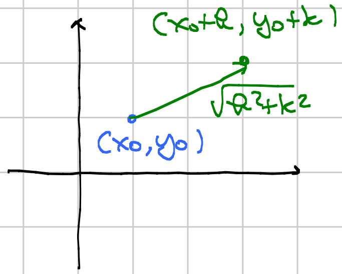
Le derivate parziali / direzioni si comportano male perché sono equivalenti a muoversi lungo le sole rette.

DIFFERENZIALE IN PIÙ VARIABILI

$D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f : D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathrm{Int}(D)$.

$$f(x_0+h, y_0+k) = f(x_0,y_0) + \underbrace{\alpha h + \beta k}_{(\alpha,\beta)\cdot(h,k)} + \underbrace{o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)}_{r(h,k)}$$

Dico che f è differenziabile in (x_0,y_0) se esistono due numeri α e β tali che vale la formula di sopra.



L'o piccolo vuol dire che

$$\underbrace{\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{r(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\text{limite di una funzione di due variabili}} = 0$$

Def. formale in n variabili

$D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$

Dico che f è diff. in x_0 se esiste un vettore α t.c.

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\alpha \cdot h}_{\text{prodotto scalare di vettori}} + o(\underbrace{|h|}_{\text{norma del vettore } h})}$$

$$o(|h|) = r(h) \quad \text{con} \quad \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{r(h)}{|h|} = 0}_{\text{limite in } n \text{ variabili}}$$

Osservazione L'applicazione $h \to \alpha \cdot h = \langle \alpha, h \rangle$ è un'applicazione lineare da $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$\boxed{\text{Def ancora più generale}}$ $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathrm{Int}(D)$, $f : D \to \mathbb{R}^m$

Si dice che f è diff. in x_0 se esiste un'applicazione lineare

$$L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

tale che

$$\underbrace{f(x_0+h)}_{\in \mathbb{R}^m} = \underbrace{f(x_0)}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{\overset{M_{m,n}}{L}\,\overset{\mathbb{R}^n}{h}}_{\in \mathbb{R}^m} + \underbrace{o(|h|)}_{r(h) \in \mathbb{R}^m}$$

solo che ora

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overset{\text{norma in } \mathbb{R}^m}{|r(h)|}}{\underset{\text{norma in } \mathbb{R}^n}{|h|}} = 0$$

ANALISI 2 – LEZIONE 006

Titolo nota 29/09/2015

Quadro dei risultati $D \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : D \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{Int}(D)$

$\boxed{f \text{ diff. in } x_0} \Rightarrow \boxed{\text{Esistono deriv. parziali in } x_0}$

$\boxed{f \text{ diff. in } x_0} \Rightarrow \boxed{f \text{ continua in } x_0}$

$\boxed{f \text{ diff. in } x_0} \Downarrow \boxed{\text{Esistono deriv. direzionali più formula in } x_0}$

$\boxed{\text{Esistono deriv. direzionali più formula in } x_0} \Rightarrow \boxed{\text{Esistono deriv. parziali in } x_0}$

Ogni altra implicazione è in generale FALSA.

Def. Si dice GRADIENTE di f nel p.to x_0 il vettore che ha come componenti le derivate parziali di f.

$$\nabla f(x_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right)$$

NABLA

Teorema Siano D, f, x_0 come sopra.
Supponiamo che f sia differenziabile in x_0
Allora
(i) f è continua in x_0
(ii) esistono le derivate parziali in x_0 e l'α della definizione di diff. è proprio $\nabla f(x_0)$, quindi

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + o(h)}$$

(iii) esistono tutte le derivate direzionali in x_0 e sono date dalla formula

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle}$$

formula per le derivate direzionali date le derivate parziali

$\boxed{\text{Dim.}}$ (i) Devo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Pongo $h = x - x_0$

e diventa $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$

D'altra parte per definizione di differenziale

$$f(x_0+h) = f(x_0) + \underbrace{\langle \alpha, h \rangle}_{\downarrow \; 0 \text{ per } h \to 0} + \underbrace{o(|h|)}_{\downarrow \; 0 \text{ per } |h|}$$

(ii) + (iii) Uso la def. di derivata direzionale

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \underbrace{\lim_{t \to 0}}_{\text{numeri}} \frac{f(x_0 + \overbrace{tv}^{h}) - f(x_0)}{t}$$

D'altra parte se uso la def. di diff. con $h = tv$ ottengo

$$\frac{f(x_0+tv) - f(x_0)}{t} = \frac{\cancel{f(x_0)} + \langle \alpha, tv \rangle + r(tv) - \cancel{f(x_0)}}{t}$$

$$= \frac{\cancel{t} \langle \alpha, v \rangle}{\cancel{t}} + \frac{r(tv)}{t}$$

$$= \langle \alpha, v \rangle + \underbrace{\boxed{\frac{r(tv)}{t|v|}}}_{\frac{r(h)}{|h|} \to 0} |v| \longrightarrow \langle \alpha, v \rangle$$

Back to (ii): se uso $v = e_i$ ottengo

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \langle \alpha, e_i \rangle = \alpha_i = i\text{-esima componente di } \alpha$$

Quindi le componenti di α sono le derivate parziali, quindi $\alpha = \nabla f(x_0)$.

— o — o —

Praticamente:

1. Come calcolo le derivate parziali?
2. " " " " direzionali?
3. Come dimostro la differenziabilità?

1. O uso la definizione, oppure quando posso uso le classiche regole di derivazione stile analisi 1.

Esempi $f(x,y) = x^2 + 3y^2 + 4xy$ $\qquad f_x = 2x + 4y$

$f_y = 6y + 4x$

$f(x,y) = y \sin(x^2 y)$ $\qquad f_x = y \cos(x^2 y) \cdot 2xy$

$f_y = 1 \cdot \sin(x^2 y) + y \cos(x^2 y) \cdot x^2$

$f(x,y) = x^y$ $\qquad f_x = y x^{y-1}$

$f_y = x^y \log x$

Mi raccomando, fare esercizi (sono derivate in 1 variabile)

2. O uso la definizione, oppure se ho una risposta affermativa a 3. uso la formula $\frac{\partial f}{\partial v} = \langle \nabla f(x_0), v \rangle$

— o — o —

Significato geometrico del gradiente.

Domanda: per quali versori v la derivata direzionale risulta max / min?

angolo compreso

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x_0) = \langle \nabla f(x_0), v \rangle = |\nabla f(x_0)| \cdot \underset{=1}{|v|} \cdot \cos\theta$$

Max per $\cos\theta = 1$, cioè $\theta = 0$

min per $\cos\theta = -1$, cioè $\theta = \pi$

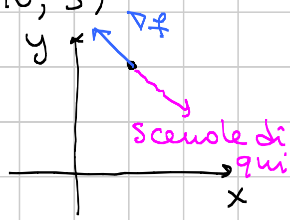
Quindi: $\boxed{\text{il gradiente è la direzione di massima salita per } f(x,y)}$

Brutalmente: guardando la piantina, è la direzione in cui andare per salire

Esempio $f(x,y) = x^2 + y^3 - 3x^2y$.
Mettiamo una pallina nel p.to del grafico che corrisponde a $(1,2)$. In che direziona va la pallina.

$\nabla f = (2x - 6xy,\ 3y^2 - 3x^2)$ $\qquad \nabla f(1,2) = (-10, 9)$

La pallina va nella direzione opposta



— o — o —

③ O uso la definizione, o uso il seguente

Teorema (del DIFFERENZIALE TOTALE) $D \subseteq \mathbb{R}^2$, $f: D \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \text{Int}(D)$

Supponiamo che
(i) le derivate parziali esistono in tutto D (intorno di (x_0,y_0))
(ii) le derivate parziali sono continue in (x_0, y_0).
Allora f è differenziabile in (x_0, y_0)

— o — o —

Osservazione Il teorema precedente permette di stabilire la differenziabilità "tutte le volte che non ci sono problemi", ad esempio

$f(x,y) = x^3 \log y + \arctan(xy)$ è differenziabile su tutto il suo insieme di definizione

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$
Basta osservare che le derivate parziali non hanno problemi.

Oss. Le derivate parziali si possono scrivere in termini di o piccolo

$$f(x_0 + h e_i) = f(x_0) + \underbrace{f_{x_i}(x_0)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)} h + o(h)$$

$$f(x_0 + h v) = f(x_0) + \frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\, h + o(h)$$

La differenza rispetto al differenziale è che qui h è un numero, quindi $o(h)$ contiene un limite in dim. 1, mentre nel differenziale $h \to 0$ come vettore.

—o—o—

Notazione Nel caso di $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, chi è la matrice che rappresenta l'applicazione lineare?

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + M h + o(|h|)$$

Le righe di M sono i gradienti delle componenti di f, cioè

$$M_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

riga i
colonna j

f_i = componente i-esima di f

M si dice MATRICE JACOBIANA di f

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 007

Titolo nota 30/09/2015

Diff. in più variabili $f(x_0+h) = f(x_0) + \underset{\text{applicazione}}{L}\, h + o(|h|)$ per $\underbrace{h \to 0}_{\text{limite in } n \text{ variabili}}$

Teorema del differenziale totale

Brutalmente: se le derivate parziali esistono e sono continue, allora f è differenziabile

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $\delta > 0$ e sia f definita in un intorno di x_0 e raggio δ $(B_\delta(x_0))$ a valori in $\mathbb{R}$.

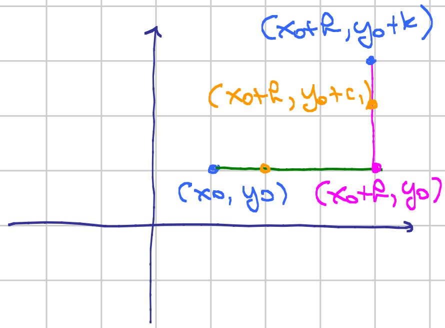
Supponiamo che

(i) le derivate parziali esistono in $B_\delta(x_0)$

(ii) " " " sono continue in x_0.

Allora f è diff. in x_0

$\boxed{\text{Dim. in 2 variabili}}$ $x_0 \rightsquigarrow (x_0, y_0)$



$$f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0,y_0) =$$

$$= f(x_0+h, y_0+k) - f(x_0+h, y_0) +$$
$$+ f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0)$$

Applico Lagrange uno-dimensionale alla prima e alla seconda riga

$$= k\, f_y(x_0+h, y_0+c_1) + h\, f_x(x_0+c_2, y_0)$$

Lagrange su $\varphi(t) = f(x_0+h, t)$
$\varphi(y_0+k) - \varphi(y_0) = k\,\varphi'(c)$

$$= \underbrace{k\, f_y(x_0,y_0) + h\, f_x(x_0,y_0)}_{\langle (k,h),\, \nabla f(x_0,y_0)\rangle} + \underbrace{k\,[f_y(x_0+h, y_0+c_1) - f_y(x_0,y_0)] + h\,[f_x(x_0+c_2, y_0) - f_x(x_0,y_0)]}_{\text{spero che sia } o(\sqrt{h^2+k^2})}$$

Dico che ciascuno dei due termini è $o(\sqrt{h^2+k^2})$. Guardo il 1°

$$\underbrace{\frac{|k|}{\sqrt{h^2+k^2}}}_{\le 1}\,|f_y(x_0+h, y_0+c_1) - f_y(x_0,y_0)| \le \underbrace{|f_y(x_0+h, y_0+c_1) - f_y(x_0,y_0)|}_{\downarrow\ 0}$$

perché ho assunto che f_y fosse continua in (x_0, y_0) e $(x_0+h, y_0+c_1(k)) \to (x_0, y_0)$ per $(h,k) \to (0,0)$

Il secondo termine si tratta allo stesso modo.

— o — o —

<u>Osservazioni</u>

- Nel caso generale (n variabili) la dim. è la stessa, solo bisogna togliere n termini. Più elegante: induzione su n (esercizio di formalizzazione)
- Ho usato per Lagrange l'esistenza di f_x e f_y in tutto un intorno.

— o — o —

<u>Teorema</u> (in ipotesi più risparmiose) Si possono risparmiare le ipotesi su f_x

$$\ldots \quad f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)$$

So che $f_x(x_0,y_0)$ esiste, quindi per analisi 1 posso scrivere

$$f(x_0+h, y_0) - f(x_0,y_0) = \underbrace{f_x(x_0,y_0)\,h}_{\text{termine che volevo}} + \underbrace{h\,\omega(h)}_{\text{banalmente } o(\sqrt{h^2+k^2})}$$

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|h\,\omega(h)|}{\sqrt{h^2+k^2}} \le \lim_{(h,k)\to(0,0)} |\omega(h)| = 0$$

Quindi ho dimostrato il teorema in 2 variabili assumendo:

(i) f_y esiste nell'intorno ed è continua in (x_0, y_0)

(ii) f_x esiste solo in (x_0,y_0).

In n variabili posso assumere
(i) $n-1$ derivate esistono nell'intorno e continue nel p.to
(ii) l'altra derivata esiste solo nel p.to.

— o — o —

Teorema (Derivata della funzione composta)
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$, sia $f: D \to \mathbb{R}^k$
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^k$, sia $g: \Omega \to \mathbb{R}^m$ $\quad \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^m$
Supponiamo D ed Ω aperti e supponiamo che $f(D) \subseteq \Omega$.
Così posso definire $h = g \circ f : D \to \mathbb{R}^m$.
Sia $x_0 \in D$ e sia $y_0 = f(x_0) \in \Omega$.
Supponiamo f differenziabile in x_0 con matrice jacobiana A
" g " " y_0 " " B.
Allora h è differenziabile in x_0 con matrice jacobiana BA

$\boxed{\text{Dim.}}$ Scriviamo le ipotesi

$$f(x_0+h) = f(x_0) + Ah + r_f(h) \qquad \text{con } \lim_{h\to 0} \frac{|\overbrace{r_f(h)}^{\mathbb{R}^k}|}{|\underbrace{h}_{\mathbb{R}^n}|} = 0$$

$$g(y_0+k) = g(y_0) + Bk + r_g(k) \qquad \text{con } \lim_{k\to 0} \frac{|r_g(k)|}{|k|} = 0$$

Lavoro con $h = g \circ f$

$$g(f(x_0+h)) = g(\underbrace{f(x_0)}_{y_0} + \underbrace{Ah + r_f(h)}_{k})$$

$$= g(y_0) + B(Ah + r_f(h)) + r_g(Ah + r_f(h))$$

$$= \underbrace{g(y_0)}_{\substack{g(f(x_0)) \\ \text{ok!}}} + \underbrace{BAh}_{\substack{\text{termine} \\ \text{lineare che volevo}}} + B r_f(h) + r_g(Ah + r_f(h))$$

Mi serve che gli altri 2 termini siano $o(|h|)$

1° termine $\lim_{k\to 0} \frac{|B r_f(k)|}{|k|}$

Un lemma misterioso dice che: data una matrice M esiste una costante C tale che $|Mx| \leq C|x|$ per ogni $x \in$ spazio di partenza

Dato il lemma misterioso $\frac{|B r_f(k)|}{|k|} \leq C \frac{|r_f(k)|}{|k|} \to 0$ per Rp su r_f

2° termine: cosa vorrei fare

$$\frac{|r_g(Ak + r_f(k))|}{|k|} = \boxed{\frac{|r_g(Ak + r_f(k))|}{|Ak + r_f(k)|}} \cdot \boxed{\frac{|Ak + r_f(k)|}{|k|}}$$

$\downarrow$ per l'ipotesi su r_g 0 — limitato $\leq \frac{C|k| + |r_f(k)|}{|k|}$

L'unico problema è che potrei aver diviso per 0.

→ uscita 1: considerare la funzione $\frac{|r_g(k)|}{|k|}$ estesa ponendola $=$ la 0 (o anche 15) per $k = 0$

→ uscita 2: lemma della sotto-sotto. Basta dimostrare che ogni successione $k_n \to 0$ ha una s.succ. in cui il limite fa 0. (il limite del 2° termine)
D'altra parte, ogni succ. $k_n \to 0$ ha una sottosucc. in cui

- o $Ak_n + r_f(k_n) \neq 0$, e allora farò quello che ho fatto
- o $Ak_n + r_f(k_n) = 0$, ma se $k = 0$, allora il termine non c'è nemmeno.

Osservazione: sono le stesse uscite che c'erano ad Analisi 1.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 008

Titolo nota 30/09/2015

Lemma Sia M una matrice $m \times n$. Allora esiste una costante C tale che

$$\underbrace{|Mx|}_{\mathbb{R}^m} \leq C \underbrace{|x|}_{\text{in } \mathbb{R}^n} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

stessa per tutti gli x

(altro modo di dire la stessa cosa: le applicazioni lineari sono lipschitziane, infatti

$$|Mx - My| = |M(x-y)| \leq C|x-y| \;)$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Caso semplice in cui $m = 1$, per cui M è un vettore riga e Mx vuol dire prodotto scalare tra M ed x

$$|Mx|^2 = |\langle M, x\rangle|^2 \leq |M|^2 \cdot |x|^2$$

somma dei quadrati di tutti i termini

Nel caso generale le componenti di Mx sono i prodotti scalari tra le righe di M e x, quindi

$$|Mx|^2 = \langle R_1, x\rangle^2 + \ldots + \langle R_m, x\rangle^2$$

righe di M

$$\leq |R_1|^2 \cdot |x|^2 + \ldots + |R_m|^2 \cdot |x|^2$$

$$= |x|^2 \underbrace{\left(|R_1|^2 + \ldots + |R_m|^2\right)}_{C^2}$$

= Somma dei □ di tutti i termini della matrice
= "norma" della matrice.

— o — o — o —

Osservazione sulla composizione

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$
$g: \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$
$h = g \circ f$

$$h_j = g_j(f_1(x), \dots, f_k(x))$$

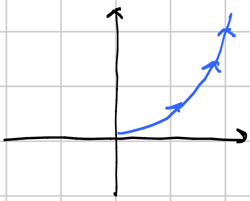
$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \frac{\partial g_j}{\partial y_1}\frac{\partial f_1}{\partial x_i} + \frac{\partial g_j}{\partial y_2}\frac{\partial f_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial g_j}{\partial y_k}\frac{\partial f_k}{\partial x_i}$$

termine di posto riga j, colonna i nella matrice BA e quel termine è il prodotto scalare tra la riga j-esima di B e la colonna i-esima di A, che è proprio il RHS.

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + 3xy + y^4$ $\qquad \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$t \xrightarrow[g]{} (\underset{x(t)}{t}, \underset{y(t)}{t^2})$ $\qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ $\qquad \mathbb{R} \to \mathbb{R}$



$$\varphi'(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

CHAIN RULE

$f_x = 2x + 3y$
$f_y = 3x + 4y^3$

$$= (2x(t) + 3y(t))\,x'(t) + (3x(t) + 4y(t)^3)\,y'(t)$$

$$= (2t + 3t^2)\,1 + (3t + 4t^6)\cdot 2t$$

Per riprova, fare il conto nell'altro modo:

$\varphi(t) = f(x(t), y(t)) = t^2 + 3t^3 + t^8$ e quindi
$\varphi'(t) = 2t + 9t^2 + 8t^7$ viene lo stesso nell'altro modo.

— o — o —

Esempio 2 Coordinate polari.

Descrivo una funzione in coordinate polari

$$f(\rho, \theta) = \rho^2 \cos\theta$$

Domanda: calcolare le derivate parziali rispetto a x e y

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \rho}}_{\downarrow} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \theta}}_{\swarrow} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

Dall'espressione

$\frac{\partial \rho}{\partial x}$ e $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ si calcolano dalle formule per le coordinate polari

Esempio 3 Data $f(x,y)$, trovare $\frac{\partial f}{\partial \rho}$ e $\frac{\partial f}{\partial \theta}$ $\quad x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho} = f_x \cdot \cos\theta + f_y \sin\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = f_x \rho(-\sin\theta) + f_y \rho\cos\theta$$

$$f_\rho^2 = f_x^2\cos^2\theta + f_y^2\sin^2\theta + 2 f_x f_y \cos\theta\sin\theta$$

$$f_\theta^2 = \rho^2 f_x^2 \sin^2\theta + \rho^2 f_y^2 \cos^2\theta - 2\rho^2 f_x f_y \cos\theta\sin\theta$$

$$\boxed{f_x^2 + f_y^2 = f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\theta^2}$$

norma^2 del gradiente in coordinate cartesiane / polari

Verifica $\quad f(x,y) = y + x^2 \quad = \rho\sin\theta + \rho^2\cos^2\theta$

$$|\nabla f|^2 = f_x^2 + f_y^2 = (2x)^2 + 1 = 4x^2 + 1 = 4\rho^2\cos^2\theta + 1$$

$$|\nabla f|^2 = f_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2} f_\theta^2 = (\sin\theta + 2\rho\cos^2\theta)^2 + \frac{1}{\rho^2}(\rho\cos\theta - \rho^2 2\cos\theta\sin\theta)^2$$

= sviluppando dovrebbe venire uguale.

— o — o —

<u>Esercizio</u> Come sono fatte tutte le funzioni $f(x,y)$ tali che

$$f_x(x,y) = f_y(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Esempi: $f(x,y) = \text{costante}$

$f(x,y) = ax + ay$

$f(x,y) = \cancel{x^2y + xy^2}$ $\quad f_x = 2xy + y^2 \quad f_y = x^2 + 2xy$

$f(x,y) = x^2 + y^2 + 2xy$

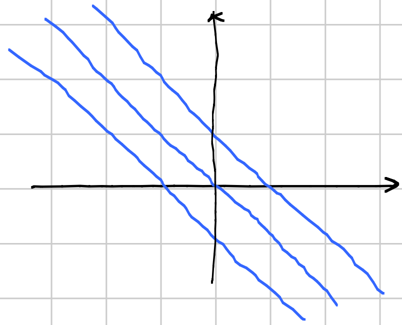
$f(x,y) = g(x+y) \qquad f_x = g'(x+y) \quad f_y = g'(x+y)$

$g(2x+3y) \qquad f_x = g'(2x+3y)\,2$

$f_y = g'(2x+3y)\,3$

Congettura: sono tutte e sole le funzioni del tipo $g(x+y)$ con $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile.

Si tratta di dimostrare che sono costanti su tutte le rette // alla $y = -x$. A quel p.to pongo



$g(x) = f(x,0)$ e ho che

$$f(x,y) \underset{\uparrow}{=} f(x+y, 0) \underset{\uparrow}{=} g(x+y)$$

f è costante sulle rette \\\\

def. di g

Come sono fatte le rette? Sono del tipo $(t, k-t)$

Devo dim. che $\varphi(t) = f(t, k-t)$ è costante

$$\varphi'(t) \underset{\uparrow}{=} \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}$$

CHAIN RULE

$$= f_x(t, k-t) \cdot 1 + f_y(t, k-t)(-1)$$

$= 0$ per ipotesi, quindi $\varphi(t) = \text{costante}$.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 009

Titolo nota 02/10/2015

Derivate successive per funzioni di più variabili

Esempio $f(x,y) = x^2 + 7x\sin y$

$f_x(x,y) = 2x + 7\sin y$ $\qquad$ $f_y(x,y) = 7x\cos y$

$f_{xx}(x,y) = 2$ $\qquad$ $f_{xy}(x,y) = \boxed{7\cos y}$

$f_{yx}(x,y) = \boxed{7\cos y}$ $\qquad$ $f_{yy}(x,y) = -7x\sin y$

$f_{xxx}(x,y) = 0$

$f_{yxx}(x,y) = 0$

$f_{xyx}(x,y) = 0$

$f_{yyx}(x,y) = -7\sin y$

Oss. Per una funzione di 2 variabili, le possibilità per le derivate parziali k-esime sono 2^k. Per una funzione di n variabili sono n^k.

Notazione $\quad f_{xx} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \partial_{xx} f \quad D_{xx} f$

$f_{xy} \quad \underset{\text{dopo}}{\dfrac{\partial}{\partial x}} \underset{\text{prima}}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \partial_{xy} f \quad D_{xy} f$

Fatto generale: → ci sono esempi in cui $f_{xy} \neq f_{yx}$

→ sotto ipotesi del tutto ragionevoli vale $f_{xy} = f_{yx}$

Corollario Sotto ipotesi ragionevoli, una qualunque derivata k-esima per una funzione di n variabili dipende solo da quante volte ho derivato rispetto ad ogni variabile, e non dall'ordine di esecuzione delle operazioni:

$f_{xxyx} = f_{yxxx} = f_{xxxy} \qquad f_{xxyz} = f_{yxxz} = f_{xzxy} = \dots$

Conseguenza Sotto le ipotesi ragionevoli, le derivate k-esime di una funzione di 2 variabili sono $(k+1)$. Ad esempio quelle terze sono

$$f_{xxx} \qquad f_{xxy} \qquad f_{xyy} \qquad f_{yyy}$$

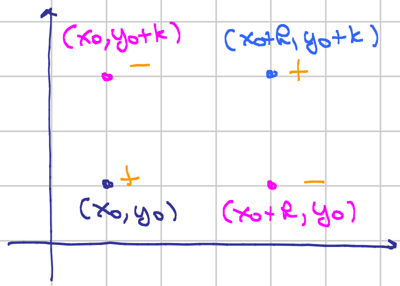
Esercizio Quante sono le k-esime di una funzione di n variabili

Osservazione Basta dimostrare che $f_{xy} = f_{yx}$ per funzioni di 2 variabili per avere il risultato in generale (le altre le posso pensare fissate).

Teorema (Inversione dell'ordine di derivazione – Schwarz)
Sia $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$, sia $\delta > 0$, sia $f : \underbrace{(x_0-\delta, x_0+\delta) \times (y_0-\delta, y_0+\delta)}_{R_\delta} \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) $f_{xy}(x,y)$ e $f_{yx}(x,y)$ esistono in tutto R_δ
(ii) " " sono continue in (x_0,y_0)
Allora

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Considero la funzione



$$g(h,k) = f(x_0+h, y_0+k) + f(x_0,y_0) - f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0+k)$$

Considero anche

$$\varphi(t) := f(x_0+h, t) - f(x_0, t)$$
$$\psi(t) := f(t, y_0+k) - f(t, y_0)$$

Allora

$$\begin{aligned} g(h,k) &= \varphi(y_0+k) - \varphi(y_0) \qquad \text{(Lagrange su } \varphi(t)) \\ &= k\,\varphi'(y_0+\alpha) \\ &= k\,[f_y(x_0+h, y_0+\alpha) - f_y(x_0, y_0+\alpha)] \qquad \text{(Lagrange in } x) \\ &= k h\, f_{xy}(x_0+\beta, y_0+\alpha) \end{aligned}$$

Supponendo $k>0$, $h>0$ avremo $0<\beta<h$ e $0<\alpha<k$

Analogamente $g(h,k) = \psi(x_0+h) - \psi(x_0)$ (Lagrange su $\psi(t)$)

$= h\,\psi'(x_0+\gamma)$

$= h\,[f_x(x_0+\gamma, y_0+k) - f_x(x_0+\gamma, y_0)]$ Lagr in y

$= h\,k\, f_{yx}(x_0+\gamma, y_0+\delta)$

dove $0<\gamma<h$ e $0<\delta<k$

Divido per hk che sono $\neq 0$ e ho ottenuto

$$f_{xy}(x_0+\beta, y_0+\alpha) = f_{yx}(x_0+\gamma, y_0+\delta)$$

Ora faccio tendere $(h,k)\to(0,0)$ e uso l'ipotesi (ii) ottenendo

$$f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0). \qquad \square$$

<u>Osservazione</u> Non serve usare 2 parametri diversi, si può usare $k=h$.

<u>Esempio in cui sono diverse</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Prima osservazione: è ovvio che f_{xy} e f_{yx} esistono e coincidono per ogni $(x,y)\neq(0,0)$

Nell'origine devo fare i conti diversamente.

<u>Fatto 1</u> $f(x,y)$ è continua in $(0,0)$

[Moralmente è $\dfrac{\rho^4}{\rho^2}$]

<u>Fatto 2</u> $f(x,y)$ è differenziabile in $(0,0)$ e $\underbrace{f_x(0,0) = f_y(0,0) = 0}_{f(x,y)=0 \text{ sugli assi}}$

<u>Dim. che è diff.</u> $\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Uso la def. e mi riduco a far vedere che

$$f(h,k) = \overset{0}{f(0,0)} + \overset{0}{f_x(0,0)}\,h + \overset{0}{f_y(0,0)}\,k + o\left(\sqrt{h^2+k^2}\right)$$

Basta mostrare che $f(h,k) = o(\sqrt{x^2+y^2})$, cioè che

$$\lim_{(h,k)\to 0} \frac{f(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0 \qquad \left(\text{è } \frac{\rho^4}{\rho^3}\right)$$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Calcolo $f_x(x,y)$ e $f_y(x,y)$ ovunque e dim. che sono continue in $(0,0)$ + teo. diff. tot.

$$f_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^3y - xy^3}{x^2+y^2} = \frac{(3x^2y-y^3)(x^2+y^2) - 2x(x^3y - xy^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\dots}{\dots} = -\frac{\text{stessa cosa scambiati } x \text{ e } y}{(x^2+y^2)^2}$$

Il fatto che f_x e $f_y \to 0$ per $(x,y)\to(0,0)$ segue da $\dfrac{\rho^5}{\rho^4}$.

Fatto 3

$$f_x(0,y) = -\frac{y^5}{y^4} = -y \implies f_{yx}(0,0) = -1$$

Diverse

$$f_y(x,0) = \frac{x^5}{x^4} = x \implies f_{xy}(0,0) = 1$$

$\boxed{\text{Oss 1}}$ Come vedere che $f_y(x,y) = -f_x(y,x)$

[Dim. osservo che $f(x,y) = -f(y,x)$, quindi

$$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} f(x,y) = -\frac{\partial}{\partial y} f(y,x) = -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x)\cdot \overset{\frac{\partial y}{\partial y}}{1} + \frac{\partial f}{\partial y}(\dots)\cdot \overset{\frac{\partial x}{\partial y}}{0}$$

chain rule

$$= -\frac{\partial f}{\partial x}(y,x). \quad]$$

Oss. 2 "Costruttore di controesempi a Schwarz".

Prendo una $g(x,y)$ con limiti diversi a $(0,0)$ sull'asse x e sull'asse y.

Poi pongo

$$f(x,y) = xy\, g(x,y)$$

Se g non è troppo orribile funziona !!!

ANALISI 2 — LEZIONE 010

Titolo nota 02/10/2015

FORMULA DI TAYLOR IN PIÙ VARIABILI

Analisi 1

$$f(x_0+h) = \underbrace{\sum_{k\leq m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k}_{\text{polinomio di Taylor di ordine } m} + r(h)$$

dove

- (Peano) $r(h) = o(h^m)$ per $h \to 0$ [Ipotesi: $m-1$ derivate nell'intorno, derivata m-esima nel punto]
- (Lagrange) $r(h) = \frac{f^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} h^{m+1}$ con c che sta fra x_0 e x_0+h [Ipotesi: $m+1$ derivate nell'intorno]

Analisi 2

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{|p|\leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} h^p + r(h)}$$

Sotto ci sta il formalismo dei MULTI-INDICI.
Un multiindice p è una n-upla $(p_1, \ldots, p_n)$ di naturali.
Si pone

- $|p| = p_1 + \ldots + p_n$
- $p! = p_1! \cdot \ldots \cdot p_n!$
- Se $h = (h_1, \ldots, h_n)$ è un vettore, allora $h^p = h_1^{p_1} \cdot \ldots \cdot h_n^{p_n}$
- $D^p f = \partial_{x_1}^{p_1} \cdot \ldots \cdot \partial_{x_n}^{p_n}$ = derivata parziale di ordine $|p|$

Oss. Con i multiindici si scrive bene la potenza di un k-nomio

$$(x_1 + \ldots + x_k)^m = \sum_{|p|=m} \frac{m!}{p!} x^p$$

multiindici con k componenti

Volendo $x_1 + \ldots + x_k = \sum_{|p|=1} x^p$

Casi particolari del polinomio di Taylor

2 variabili, ordine 3, centro in $(x_0, y_0) = (0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0) \qquad \text{termine di ordine } 0$$
$$+ f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y \qquad \text{termine di } 1^\circ \text{ grado}$$
$$+ \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2\right] \qquad 2^\circ \text{ grado}$$
$$+ \frac{1}{3!}\left[f_{xxx}(\dots)\,x^3 + 3f_{xxy}\cdot x^2y + 3f_{xyy}\,xy^2 + f_{yyy}\,y^3\right] \qquad 3^\circ \text{ grado}$$

In 2 variabili i termini di ordine k sono come aver ultrabrutalmente sviluppato

$$\frac{1}{k!}(f_x\,x + f_y\,y)^k$$

In n variabili è la stessa cosa solo con $(x_1\partial_{x_1} + \dots + x_n\partial_{x_n})^k \frac{1}{k!}$

— o — o —

Forme del resto

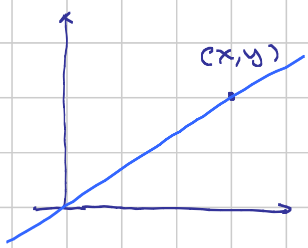
- Alla Peano: $r(h) = o(|h|^n)$ (norma) [Ipotesi: deriv. parz. di ordine $n-1$ nell'intorno e di ordine n nel punto]

- Alla Lagrange: $r(h) = \sum_{|p|=n+1} \frac{D^p f(c)}{p!} h^p$

  dove c è un punto nel segmento congiungente x_0 e x_0+h
  [Ipotesi: deriv. parziali di ordine $n+1$ nell'intorno]

"Dim." Slogan: è un fatto uno-dimensionale !!
Per semplicità considero il caso di 2 variabili.
$f(x,y)$ e voglio sviluppare in $(0,0)$.
Considero, fissati x e y, la funzione

$$\varphi(t) = f(tx, ty)$$



La funzione φ è derivabile tante volte quanto f e avrà un suo sviluppo di Taylor – Lagrange

$$\varphi(t) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} t^k + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!} t^{m+1}$$

Ponendo $t=1$ otteniamo

$$f(x,y) = \varphi(1) = \sum_{k \leq m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \frac{\varphi^{(m+1)}(c)}{(m+1)!}$$

Resta da capire chi sono $\varphi^{(k)}(0)$. Vediamo a mano

$\varphi^{(0)}(0) = f(0,0)$

$\varphi'(t) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{CHAIN} \\ \text{RULE}}}{=} f_x(tx,ty)\,x + f_y(tx,ty)\,y$

quindi $\varphi'(0) = f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y$

$$\varphi''(t) = f_{xx}(tx,ty)x^2 + f_{yx}(tx,ty)xy + f_{xy}(tx,ty)xy + f_{yy}(\dots)y^2$$

uguali

$$\varphi''(0) = f_{xx}(0,0)x^2 + 2 f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)y^2$$

e così via per gli ordini successivi.
Questo dimostra Taylor - Lagrange modulo fare per induzione la formula per $\varphi^{(k)}(t)$.

— o — o —

La dim. di Taylor Peano non si può fare allo stesso modo usando Taylor - Peano sulla $\varphi(t)$.
Ad Analisi 1 posso dim. TP usando TL.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Voglio TP di ordine n. Scrivo TL di ordine $n-1$

$$f(x_0+h) = \sum_{k \leq n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} h^k + \frac{f^{(n)}(x_0+c)}{n!} h^n$$

Se so che $f^{(n)}$ è continua in x_0, allora posso aggiungere e togliere

$$\underbrace{\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}}_{\text{Termine che manca per la sommatoria}} R^n + \boxed{\frac{f^{(n)}(x_0+c) - f^{(n)}(x_0)}{n!} R^n}$$

$= o(R^n)$ se so che $f^{(n)}(x)$ esiste in un intorno ed è continua in x_0

Questo dimostra TP assumendo che $f^{(n)}(x)$ esista in un intorno e sia continua in x_0 e si estende anche in più variabili.

— o — o —

Oss. Praticamente i pol. di Taylor si calcolano sfruttando quelli in una variabile.

$f(x,y) = x \sin y + \cos(xy)$ Taylor di ordine 6

$$= x\left(y - \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{120}y^5\right) + 1 - \frac{1}{2}x^2y^2 + o\left((x^2+y^2)^3\right)$$

$|(x,y)|^6$ = distanza dal p.to alla sesta.

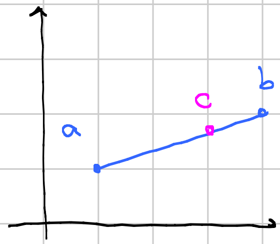
ANALISI 2 — LEZIONE 011

Titolo nota 06/10/2015

Lagrange DIREZIONALE Analisi 1: $f(b)-f(a) = (b-a)f'(c)$

In più variabili: $\underbrace{f(b)-f(a)}_{\text{numero}} = \langle \underbrace{b-a}_{\text{vettore}}, \nabla f(c)\rangle$

c: p.to sul segmento di estremi a e b



Dim. Considero la restrizione al segmento

$$\varphi(t) = f(\underbrace{a+t(b-a)}_{\text{param. del segmento}})$$

$$f(b)-f(a) = \varphi(1)-\varphi(0) = 1\cdot\varphi'(t_0) \qquad t_0\in(0,1)$$

ma

$$\varphi'(t) \underset{\text{CHAIN RULE}}{=} \langle \nabla f(a+t(b-a)), b-a\rangle \quad \text{da cui la tesi.}$$

— o — o —

Conseguenza 1 Sia $f: B_\delta(x_0)\to\mathbb{R}$. Supponiamo che $\nabla f = 0$ per ogni $x\in B_\delta(x_0)$.
Allora $f(x)$ è costante in $B_\delta(x_0)$.

Dim. $f(x)-f(x_0) = \langle x-x_0, \underbrace{\nabla f(c)}_{=0}\rangle = 0$ quindi $f(x)=f(x_0)$

Conseguenza 2 Sia $f: \overline{B}_\delta(x_0)\to\mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 (chiusa)

(nota: si dice che $f\in C^k(A)$ se sono continue in A tutte le derivate $D^p f(x)$ con p multi-indice con $|p|\le k$)

Allora f è Lipschitziana in $\overline{B}_\delta(x_0)$ e la costante di Lip. è

$$L = \max\{|\nabla f(x)| : x\in\overline{B}_\delta(x_0)\}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $|f(b)-f(a)| = |\langle b-a, \nabla f(c)\rangle| \underset{\text{C.S.}}{\le} |b-a|\cdot\underbrace{|\nabla f(c)|}_{\le L}$

Questo dimostra che la costante L va bene. Bisognerebbe dimostrare che ogni costante più piccola di L non va bene.

<u>Esercizio</u> Se f è Lip. in un insieme A e $x_0 \in \text{Int}(A)$ e $\nabla f(x_0)$ esiste, allora $|\nabla f(x_0)| \leq L$ ← costante che compare nella def. di f Lip.

<u>Dim.</u> Preso un qualunque VERSORE v calcoliamo la derivata direzionale nel p.to x_0

$$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \underset{\uparrow}{=} \left|\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)\right| = \lim_{h \to 0} \frac{|f(x_0+hv) - f(x_0)|}{|h|} \leq L$$

f è diff. in x_0

$$\leq \frac{|hv| \cdot L}{|h|} = L \quad \text{perché } |v| = 1$$

Quindi ora sappiamo che

$|\langle \nabla f(x_0), v \rangle| \leq L$ per ogni v tale che $|v| = 1$. Da questo voglio dedurre che $|\nabla f(x_0)| \leq L$.

Ci sono 2 casi:

- se $\nabla f(x_0) = 0$ non è molto difficile
- se $\nabla f(x_0) \neq 0$ uso $v = \dfrac{\nabla f(x_0)}{|\nabla f(x_0)|}$ (versore che dice la direzione di $\nabla f(x_0)$) e ottengo

$$\left\langle \nabla f(x_0), \frac{\nabla f(x_0)}{|\dots|} \right\rangle = \frac{1}{|\dots|} \langle \nabla f(x_0), \nabla f(x_0) \rangle = |\nabla f(x_0)|$$

— o — o —

<u>Domanda</u> Quanto è importante che l'insieme di definizione sia $B_r(x_0)$

Per la conseguenza 1, basta che sia un aperto CONNESSO

Enunciato: Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto connesso, sia $f: A \to \mathbb{R}$ diff. con $\nabla f(x) = 0$ per ogni $x \in A$. Allora f è costante in A.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo a caso $x_0 \in A$ e pongo
$$B = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\} \neq \emptyset$$
Vorrei dimostrare che $B = A$. Per far questo basta dimostrare che B è contemporaneamente aperto e chiuso (rispetto ad A).

Ora

- B è chiuso perché $B = f^{-1}(\{f(x_0)\})$, cioè f^{-1}(chiuso)
- B è aperto per quello detto prima come conseguenza 1. $\square$

— o — o —

<u>Oss.</u> Si può fare una dimostrazione da analisi 1 sfruttando un lemma che dice

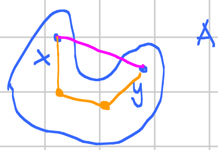
"Un aperto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è connesso se e solo se è connesso per archi C^1"

Per la conseguenza 2, esaminiamo questo enunciato:

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto (limitato). Sia $f : A \to \mathbb{R}$ diff. con
$$|\nabla f(x)| \leq L \qquad \forall x \in A$$
Allora
$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x-y| \qquad \forall\, x \in A \ \forall y \in A.$$

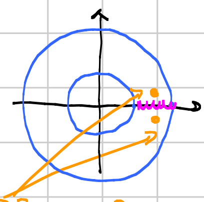
FALSO

Idea: quando congiungo 2 p.ti x e y, la congiungente può "passare fuori".
Ovviare posso fare il "giro lungo" e ottenere



$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot \text{lungh. poligonale che congiunge } x \text{ e } y$$

<u>Esempio burocratico</u>

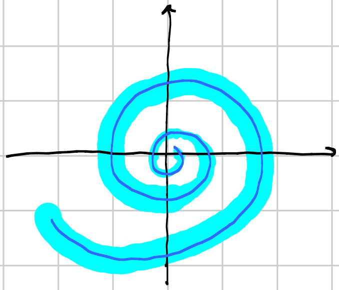


vicini in $\mathbb{R}^2$ con f lontana. Il fatto è che sono lontani in A.

A = corona circolare meno segmento lungo asse x

$f(x,y) = \theta$ quello delle coord. polari

Esempio perverso



A = intorno di una spirale che va a 0

Se la spirale ha "lunghezza infinita" allora posso considerare una funzione con $|\nabla f| \leq 1$ che "sale lungo la spirale".
Questa non è Lip. e NEMMENO LIMITATA.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 012

Titolo nota 06/10/2015

Polinomi di Taylor in più variabili

$$\boxed{f(x_0+h) = \sum_{|p|\leq m} \frac{D^p f(x_0)}{p!} x^p + r(h)}$$

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m+1$ in un intorno di x_0, allora vale la formula con resto alla Lagrange

$$r(h) = \sum_{|p|=m+1} \frac{D^p f(c)}{p!} x^p$$

con c nel segmento tra x_0 e x_0+h (c è lo stesso per tutti i p)

- Se f ammette derivate parziali fino all'indice $m-1$ in un intorno di x_0 e tutte le derivate di indice $m-1$ sono diff. in x_0, allora vale la formula con resto alla Peano

$$r(h) = o(|h|^m) \quad \text{per } h \to 0$$

(Dimostrata alla lezione 10 supponendo però che anche le $D^p f(x_0)$ con $|p|=m$ esistessero nell'intorno come funzioni continue)

Passi della dim. del Peano vero

Lemma (esercizio) Supponiamo per una funzione di 2 variabili che f_x e f_y esistano in un intorno di (x_0,y_0) e siano diff. in (x_0,y_0). Allora $f_{xy}(x_0,y_0) = f_{yx}(x_0,y_0)$.

Dal Lemma segue che nelle ipotesi di Taylor Peano le derivate con $|p|=m$ non dipendono dall'ordine di esecuzione, quindi per lo meno posso scrivere il polinomio di Taylor di ordine m.

Lemma 2 (Esercizio) Il polinomio di Taylor dato dalla formula ha la proprietà che le sue derivate in 0 coincidono con quelle di f in x_0 fino all'ordine n.

[Serve che $D^q x^p$ calcolata in $x=0$ vale 0 se $q \neq p$ e vale $p!$ se $q=p$].

Ora procedo come ad Analisi 1: considero $\varphi(x) = f(x) -$ polinomio

o meglio $\varphi(h) = f(x_0+h) -$ polinomio

e abbiamo che φ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n.

Lemma finale Se $\varphi(x)$ ha tutte le derivate nulle fino all'ordine n, allora $\varphi(x) = o(|x|^n)$ per $x \to 0$

(occhio: tutte le derivate fino all'ordine $n-1$ esistono in un intorno di 0 e quelle di ordine $n-1$ sono diff. in $x=0$).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Si fa per induzione!

$n=0$ è banale

$n=1$ è la definizione di differenziale

Facciamo il passaggio induttivo da $(n-1)$ a n.

Prendo f come nelle ipotesi e applico il passo induttivo a tutte le sue derivate parziali prime. Ne deduco che

$$D^p f(x) = o(|x|^{n-1}) \quad \text{per ogni } |p| = 1$$

Da cui segue che

$$|\nabla f(x)| = o(|x|^{n-1}) = |x|^{n-1}\omega(x)$$

Ora applico Lagrange direzionale:

$$|f(x) - \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{f(0)}| = |\langle \nabla f(c), x\rangle| \leq |\nabla f(c)| \cdot |x| = \underbrace{|x| \cdot |c|^{n-1}}_{\leq |x|^n} \underbrace{|\omega(c)|}_{\to 0}$$

nel senso di $\mathbb{R}^n$

e questo chiude la dimostrazione.

— o — o —

$\boxed{\text{RIPASSO SULLE FORME QUADRATICHE}}$

Def. Una forma quadratica in n variabili è una somma di monomi di 2° grado nelle n variabili

$$q(x) = \sum_{|q|=2} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{coeff.}}}{a_q} x^q = \sum_{1 \le i \le j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

Esempio In 3 variabili $q(x,y,z) = x^2 - 7z^2 + 5xy + 3yz$

Def. Una forma quadratica si dice

- definita positiva se $q(x) > 0$ per ogni $x \neq 0$
- semidefinita positiva se $q(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$
- def. neg. $q(x) < 0$
- semidef. neg. $q(x) \leq 0$
- indefinita se non è nessuno dei precedenti, cioè $\exists x \in \mathbb{R}^n$ $q(x) > 0$ $\exists y \in \mathbb{R}^n$ $q(y) < 0$.

Segnatura Ad ogni forma quadratica è associata una terna di interi (n_0, n_+, n_-) o (i_0, i_+, i_-) con $i_0 + i_+ + i_- = n$ detti segnatura della forma.
Da questi si deduce in quali casi ci troviamo

La forma è

- def. positiva $\iff$ $i_0 = i_- = 0$ e $i_+ = n$
- " negativa $\iff$ $i_0 = i_+ = 0$ e $i_- = n$
- semidef. pos. $\iff$ $i_- = 0$
- " neg. $\iff$ $i_+ = 0$
- indefinita $\iff$ $i_+ > 0$ e $i_- > 0$.

Fatto importantissimo

- Se $q(x)$ è definita positiva, allora esiste $m > 0$ tale che
$$q(x) \geq m\,|x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
- Se $q(x)$ è definitiva negativa, allora esiste $m > 0$ tale che
$$q(x) \leq -m\,|x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$
aggiunto dopo video

Metodi per calcolare la segnatura.

① Con gli autovalori. Alla forma associo una matrice M simmetrica, che dunque ha autovalori reali, quindi

$$\left.\begin{aligned} n_0 &= \#\ \text{autov. nulli} \\ n_+ &= \#\ \quad " \quad > 0 \\ n_- &= \#\ \quad " \quad < 0 \end{aligned}\right\}\ \text{contati con molteplicità}$$

② Completamento dei quadrati. Scrivo q come somma/differenza di espressioni lin. ind. A quel pto

$n_+ =$ numero di espressioni con il segno $+$

$n_- =$ " " " " " " $-$

③ Cartesio sul polinomio caratteristico. Scrivo il polinomio caratt.
$$p(x) = a_n x^n + \ldots + a_k x^k \qquad \text{con } a_k \neq 0$$
Allora

- $n_0 = k$
- $n_+ =$ numero di variazioni di segno nella successione dei coeff. non nulli di $p(x)$
- $n_- =$ si ottiene per differenza

④ Metodo dei minori orlati sulla diagonale (Sylvester).
Si può procedere in qualunque direzione

$$\underset{1-2-3}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}} \qquad \underset{3-2-1}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}} \qquad \underset{1-3-2}{\begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}}$$

Def. "vera" di segnatura

i_0 = dim ker M = dim. insieme dei vettori ortogonali a tutti gli altri

i_+ = max dimensione di un sottospazio W su cui $q(x)$ è def. pos.

i_- = " " " " " " " " " " " neg.

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 013

Titolo nota 07/10/2015

Arretrati sulle forme quadratiche

Tecnica di completamento dei quadrati

Esempi $q(x,y) = x^2 + 4y^2 + 3xy$ voglio la segnatura

$$= x^2 + 2\cdot x\cdot\frac{3y}{2} + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4y^2$$

$$= \left(x + \frac{3}{2}y\right)^2 + \frac{7}{4}y^2$$

somma di 2 quadrati $\Rightarrow$ segnatura è $++$

$$q(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3xy + z^2 + 4xz$$

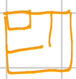
$$= x^2 + 2x\frac{3}{2}y + 2\cdot x\cdot 2z + \frac{9}{4}y^2 - \frac{9}{4}y^2 + 4z^2 - 4z^2$$

$$+ 2\cdot\frac{3}{2}y\cdot 2z - 2\cdot\frac{3}{2}y\cdot 2z + 2y^2 + z^2$$

$= \left(x + \frac{3}{2}y + 2z\right)^2$ + roba in y e z che tratto come sopra

$=$ supponiamo $(\dots)^2 + (\dots)^2 - (\dots)^2$ $\quad ++-$

Sylvester border line

Esempio  $+\ 0\ \ominus$

segnatura può essere solo $---$ opp. $++-$

$---$ è incompatibile con il primo segno $+$

$\underbrace{-+0}\ -+0$ Quasi subito so che $i_0 = 1$

$+---$

$+++-$ ← impossibile perché i primi 2 sono $--$

$+++++ \to$ NO

$+++--$

$\boxed{+----}$

<u>Lemma fondamentale</u> Sia $q(x)$ una forma quadratica (su n variabili). Supponiamo che q sia definita positiva.
Allora esiste una costante $m > 0$ tale che

$$\boxed{q(x) \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{più piccolo autovalore}}}{m} |x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia A la matrice associata alla forma, cioè $q(x) = \langle Ax, x \rangle = x^t A x$

Ora la matrice A è simmetrica, quindi per il teorema spettrale è diagonalizzabile mediante una matrice ortogonale, cioè

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ M^T}}{M^{-1}} A M = D \leftarrow \text{sulla diag. gli autovalori}$$

Ma allora

$$q(x) = x^t A x = x^t M^t D M x = (Mx)^t D (Mx) \overset{\substack{\text{da dimostrare} \\ \downarrow}}{\geq} m |Mx|^2 \underset{\substack{\uparrow \\ M \text{ è ortogo..}}}{=} m |x|^2$$

Resta da dimostrare che per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ vale la disug.

$$(Mx)^t Mx = x^t \underbrace{M^t M}_{\substack{\shortparallel \\ Id}} x = |x|^2$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ \sum \lambda_i v_i^2}}{v^t D v} \geq m |v|^2 \qquad v = (v_1, \ldots, v_n)$$

$$\sum \lambda_i v_i^2 \geq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{min. dei } \lambda_i}}{m} \sum v_i^2$$

— o — o —

<u>Risultato analogo</u> Se q è una forma quadratica, allora esiste M t.c.

$$q(x) \leq \underset{\substack{\uparrow \\ \text{più grande autovalore}}}{M} |x|^2 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

— o — o —

MATRICE HESSIANA Matrice che ha come elementi le derivate parziali seconde

$$\{Hf(x_0)\}_{ij} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Schwarz $\Rightarrow$ sotto ipotesi decenti è una matrice simmetrica.

Per semplicità prendiamo $f(x,y)$ e scriviamo Taylor di ordine 2 in $(0,0)$

$$f(x,y) = f(0,0) \qquad \text{ordine } 0 \leadsto \text{funzione}$$

$$+ f_x(0,0)\,x + f_y(0,0)\,y \qquad \text{ordine } 1 \leadsto \text{gradiente}$$

$$+ \frac{1}{2}\underbrace{\left[f_{xx}(0,0)\,x^2 + 2 f_{xy}(0,0)\,xy + f_{yy}(0,0)\,y^2 \right]}_{\text{Forma quadratica associata alla matrice } Hf(0,0)} \qquad \text{ordine } 2$$

$$+ o(x^2+y^2)$$

In generale per n variabili con centro in x_0 qualunque possiamo scrivere

$$\boxed{f(x_0+h) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h \rangle + \frac{1}{2}\underbrace{h^t\, Hf(x_0)\, h}_{\text{forma quadratica}} + o(|h|^2)}$$

Def. Il p.to x_0 si dice stazionario se $\nabla f(x_0) = 0$

Geometricamente: in 2 variabili vuol dire piano tangente // piano xy

Equazione in generale del piano tangente al grafico di $f(x,y)$ nel punto $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$:

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$

Studio locale vicino ad un p.to stazionari

Teorema Sia f una funzione C^2 in un intorno di x_0 (e volendo si può risparmiare).
Supponiamo che $\nabla f(x_0) = 0$

Allora

- se $Hf(x_0)$ è def. pos., x_0 è p.to di min. locale (cioè esiste $\delta > 0$ tale che $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in B_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$)
- se $Hf(x_0)$ è def. neg., x_0 è p.to di max. loc.
- se $Hf(x_0)$ è indefinito, x_0 non è né max. loc., né min. loc.
- se $Hf(x_0)$ è semidef. (pos. o neg.) SONO GUAI SERI.

Achtung! $Hf(x_0)$ semidef. pos. $\not\Rightarrow$ minimo locale

Esempio 1 $f(x,y) = x^2 + y^4$ $(0,0)$

$\nabla f(0,0) = (0,0)$

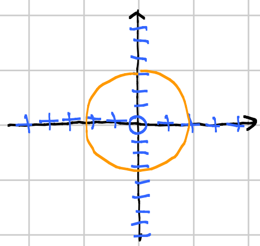
$$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\geq 0}$$

semidef. pos.

$(0,0)$ è p.to di min. globale ($\forall (x,y) \neq (0,0)$ vale $f(x,y) > 0$)

Esempio 2 $f(x,y) = x^2 - y^4$ $(0,0)$ ∇f e Hf non cambiano

$(0,0)$ non è né p.to di max, né p.to di min locale



ANALISI 2 — LEZIONE 014

Titolo nota 07/10/2015

Sia x_0 un p.to stazionario ($\nabla f(x_0)=0$)

① $Hf(x_0) > 0$ (def. pos.) $\Rightarrow$ x_0 p.to di min. locale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Taylor-Peano $f(x_0+h) = f(x_0) + \frac{1}{2}q(h) + o(|h|^2)$

forma quadratica associata ad $Hf(x_0)$

$= f(x_0) + \frac{1}{2}q(h) + |h|^2\omega(h)$

Ma allora per il lemma fondamentale esiste $m>0$ t.c.

$$f(x_0+h) - f(x_0) = \frac{1}{2}q(h) + |h|^2\omega(h)$$

$$\geq \frac{m}{2}|h|^2 + |h|^2\omega(h) = |h|^2 \underbrace{\left(\frac{m}{2} + \omega(h)\right)}_{\geq \frac{m}{4} \text{ in un opportuno } B_\delta(x_0)}, \quad \omega(h) \to 0$$

Questo dim. che $f(x_0+h) - f(x_0) \geq 0$ in $B_\delta(x_0)$ con disug. stretta se $h \neq 0$.

② $Hf(x_0) < 0$ $\Rightarrow$ x_0 p.to di max. locale

$\boxed{\text{Dim.}}$ Stessa cosa, solo che nel p.to chiave $q(x) \leq -m|x|^2$

③ $Hf(x_0)$ indefinita $\Rightarrow$ x_0 non è né max, né min.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo indefinita, vuol dire che

$\exists\, v \in \mathbb{R}^n : q(v) > 0$

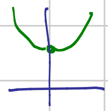
$\exists\, w \in \mathbb{R}^n : q(w) < 0$

$$\varphi(t) = f(\underbrace{x_0 + tv}_{h}) = f(x_0) + \frac{1}{2} q(tv) + |tv|^2 \omega(tv)$$

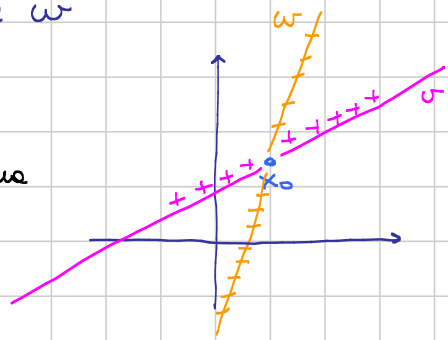
$$= f(x_0) + \frac{1}{2} t^2 q(v) + t^2 |v|^2 \omega(tv)$$

$$= f(x_0) + t^2 \Big(\overbrace{\tfrac{1}{2} q(v)}^{>0} + \overbrace{|v|^2 \omega(tv)}^{\to 0} \Big)$$

$$\geq f(x_0) + t^2 \frac{1}{4} q(v) \quad \text{se } t \text{ è vicino a } 0.$$

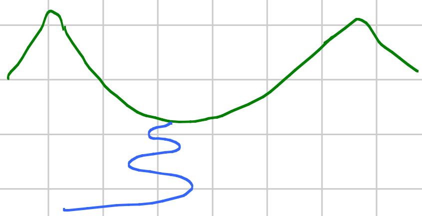


Muovendosi lungo la direzione v vedo un min. locale
Con un conto analogo lungo la direzione w vedo un max.



— o — o —

Geometricamente x_0 è quello che si chiama p.to di sella o mountain pass



Esercizio 1 Determinare i p.ti stazionari della funzione

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - xy$$

e capire di che tipo sono.

$$\nabla f(x,y) = 0 \qquad \begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 4y^3 - x = 0 \end{cases} \qquad \begin{array}{l} y = 4x^3 \\ 4^4 x^9 - x = 0 \end{array} \qquad x(2^8 x^8 - 1) = 0$$

$x = 0 \rightsquigarrow y = 0 \rightsquigarrow (0,0)$

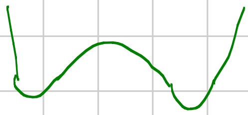
$x = \pm \frac{1}{2} \rightsquigarrow y = \pm \frac{1}{2}$ con lo stesso segno $\rightsquigarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

Per capire cosa sono posso fare l' $Hf = \begin{pmatrix} 12x^2 & -1 \\ -1 & 12y^2 \end{pmatrix}$

$Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ Det $= -1$ segnatura $+ -$ $\Rightarrow$ sella

$Hf(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ segnatura $+ +$ $\Rightarrow$ p.ti di min.

$\boxed{\text{HARD-HARD}}$ Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Supponiamo che abbia almeno due p.ti di min. locale



→ c'è per forza un p.to di max ?

→ c'è per forza un altro stazionario ?

$\boxed{\text{HARD-HARD-HARD}}$ Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x, y_0) = +\infty \qquad \forall y_0 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{y \to \pm\infty} f(x_0, y) = -\infty \qquad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

Esiste per forza un p.to stazionario ?

— o — o —

Esercizio 1 $\quad f(x,y) = x^2 + y^4 + xy^2$

L'origine è un p.to stazionario. Di che tipo ? $\quad Hf = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

quindi BOH !!!

Completo i quadrati: $x^2 + 2 \cdot x \cdot \frac{y^2}{2} + \frac{1}{4}y^4 - \frac{1}{4}y^4 + y^4$

$$= \left(x + \frac{1}{2}y^2\right)^2 + \frac{3}{4}y^4 > 0 \quad \text{se } (x,y) \neq (0,0)$$

⇒ $(0,0)$ è p.to di minimo assoluto

Esercizio 2 $\quad f(x,y) = x^2 + y^4 + 3xy^2$

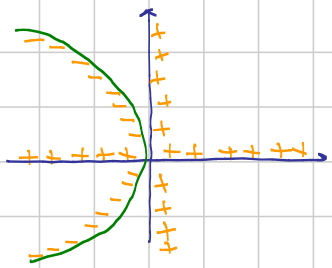
corretto dopo video

Come prima: $\left(x + \frac{3}{2}y^2\right)^2 - \frac{5}{4}y^4$. Faccio in modo che la prima parentesi sia nulla

corretto dopo video

$f\left(-\frac{3}{2}t^2, t\right) = -\frac{5}{4}t^4$, quindi vicino a $(0,0)$ ci sono p.ti in cui $f(x,y) < 0$

Alternativa: cambio di variabili
$z = y^2$



Esercizio 3 $\quad f(x,y) = x \sin y - y \sin x + x^{10}y^2 \quad (0,0)$ è stazionario

Sviluppo di Taylor

$$f(x,y) = x\left(y - \frac{1}{3!}y^3 + o(y^3)\right) - y\left(x - \frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)\right)$$

$$= \cancel{xy} - \frac{1}{6}xy^3 - \cancel{xy} + \frac{1}{6}x^3y + \underbrace{o\left((x^2+y^2)^{\frac{5}{2}}\right)}_{\text{i termini buttati sono di grado } \geq 6}$$

$$= \frac{1}{6}\underbrace{xy\,(x^2-y^2)}_{\text{segno variabile, quindi forse non è max/min}} + o(\rho^5)$$

$$f(t,2t) = t \sin(2t) - 2t \sin t + o(t^5)$$

$$= t\left(\cancel{2t} - \frac{1}{6}8t^3\right) - 2t\left(\cancel{t} - \frac{1}{6}t^3\right) + o(t^5)$$

$$= -\frac{4}{3}t^4 + \frac{1}{3}t^4 + o(t^5) = -t^4 + o(t^5) \rightsquigarrow \max$$

$f(2t,t) \rightsquigarrow$ vedo un minimo. $\qquad$ Oss. $\quad Hf(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Quanto fa $\quad f_{xxyyyyx}(0,0) = 0$

$\downarrow$

compare nel Taylor davanti x^3y^4 e questo termine nel Taylor "non c'è"

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 015

Titolo nota 09/10/2015

Max e min per funzioni di più variabili

Teorema Sia $K \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora i seguenti fatti sono equivalenti.

(i) K è LIMITATO + CHIUSO,

(ii) K è compatto per successioni,

(iii) K è compatto per ricoprimenti.

Def. Un insieme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- CHIUSO se coincide con la sua chiusura (opp. complementare aperto)
- LIMITATO se $\exists R > 0$ t.c. $K \subseteq B_R(0)$ (o equivalentemente $K \subseteq B_R(x_0)$ per un qualche centro x_0)
- COMPATTO PER SUCCESSIONI se per ogni $\{x_n\} \subseteq K$ esiste $n_k \to +\infty$ ed esiste $x_\infty \in K$ t.c. $x_{n_k} \to x_\infty$ limite in $\mathbb{R}^n$
- COMPATTO PER RICOPRIMENTI se per ogni $\{\mathcal{U}_i\}_{i\in I}$ aperti di $\mathbb{R}^n$ t.c. $K \subseteq \bigcup_{i\in I} \mathcal{U}_i$ esiste $J \subseteq I$ finito t.c.

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J} \mathcal{U}_j$$

(ogni ricoprimento ammette s.ric. finito)

Def. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice COMPATTO se verifica una delle 3 equiv.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Per semplicità partiamo in $\mathbb{R}^2$.
Prendiamo $K \subseteq \mathbb{R}^2$ lim. + chiuso, sia $\{v_n\} \subseteq K$ una succ. $v_n = (x_n, y_n)$.

Passo 1 : essendo K limitato, $|v_n| \le R$ per un certo raggio R.
Ma allora $|x_n| \le R$ e $|y_n| \le R$ per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$|x_n| = \sqrt{x_n^2} \leq \sqrt{x_n^2 + y_m^2} \leq R$$

<u>Passo 2</u> Per Bolzano – Weierstrass in una dimensione, $\{x_m\}$ ammette una s.succ. convergente

$$x_{m_k} \longrightarrow x_\infty$$

<u>Passo 3</u> Considero ora la successione $\{y_{m_k}\}$. Questa per B-W ammette una sottosucc. a sua volta convergente

$$y_{m_{k_i}} \longrightarrow y_\infty$$

Questo garantisce anche che $x_{n_{k_i}} \longrightarrow x_\infty$

<u>Passo 4</u> Sono riuscito a far convergere le componenti

$$y_{m_{k_i}} \xrightarrow{\text{lim in } \mathbb{R}} y_\infty \qquad\qquad x_{n_{k_i}} \xrightarrow{\text{lim. in } \mathbb{R}} x_\infty$$

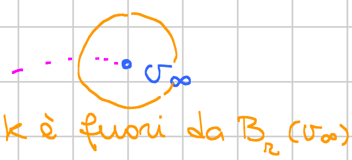
Dico che $(x_{n_{k_i}}, y_{m_{k_i}}) \xrightarrow[\text{lim. in } \mathbb{R}^2]{} (x_\infty, y_\infty) = v_\infty$

Basta verificare che

$$|v_{m_{k_i}} - v_\infty| = \left(|\underbrace{x_{n_{k_i}} - x_\infty}_{\downarrow\, 0}|^2 + |\underbrace{y_{m_{k_i}} - y_\infty}_{\downarrow\, 0}|^2 \right)^{1/2} \longrightarrow 0$$

<u>Passo 5</u> Resta da dimostrare che $v_\infty \in K$. Questo segue banalmente dalla chiusura di K.

[Se $v_\infty \notin K$, essendo il complem. aperto ... definitivamente la succ. sarebbe fuori da K].



— o — o —

Oss. In $\mathbb{R}^n$ si complicano solo le notazioni, ma l'idea è la stessa: ogni volta estraggo una s.succ. dalla precedente per far convergere una nuova componente.

$\boxed{\text{Dim (ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Per assurdo

Supponiamo K non LIMITATO. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ trovo un p.to $v_n \in K$ t.c. $|v_n| \geq n$

Questa non può avere s.succ. convergenti

Supponiamo K non chiuso. Allora esiste v_∞ aderente a K ma non in K. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$v_n \in B_{\frac{1}{n}}(v_\infty)$$

Ma allora $v_n \to v_\infty$, quindi tutte le sue s.succ. $\to v_\infty \notin K$.

— o — o —

$\boxed{\text{TEOREMA DI WEIERSTRASS}}$ Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$.

Supponiamo che

(i) D compatto,

(ii) f continua.

Allora esistono per forza

$$\max\{f(x) : x \in D\} \qquad \min\{f(x) : x \in D\}$$

Variante semicontinua:

(i) D compatto

(ii) f SCI (semicontinua inf.) (semicontinua sup)

Allora esiste per forza il min (esiste max).

$\boxed{\text{Dim.}}$ Direttamente in versione SCI. Di sicuro esiste

$$I := \inf\{f(x) : x \in D\} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

Per definizione di inf e il solito lemma, I è il limite di una successione di valori nell' immagine, quindi

$$\exists \{x_m\} \subseteq D \quad t.c. \quad f(x_m) \longrightarrow I$$

succ. minimizzante

Per la compattezza per succ. di D esiste $x_{m_k} \longrightarrow x_\infty \in D$.

Per la sci di $f(x)$ avremo che

$$I \leq f(x_\infty) \leq \liminf_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{m \to +\infty} f(x_m) = I$$

I è inf. — f sci — se $f(x_n)$ ha lim., allora tutte le s.succ. hanno lo stesso limite — succ. min.

Essendo LHS = RHS, in mezzo sono tutte uguaglianze, quindi

$$f(x_\infty) = I$$

Quindi da ora $I \in \mathbb{R}$ ed è il minimo, mentre x_∞ è UN p.to di minimo. $\square$

— o — o —

<u>Corollario</u> Una funzione continua su un compatto è per forza LIMITATA

— o — o —

Operativamente, dove cerco i p.ti di max / min una <u>volta che so che esistono</u>?

Nelle solite 3 categorie

(1) <u>Stazionari interni</u> : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x) = 0$

(2) <u>Singolari interni</u> : p.ti $x \in \text{Int}(D)$ t.c. $\nabla f(x)$ non esiste

non esiste almeno una delle derivate parziali

(3) <u>Bordo</u> : $\underbrace{x \in \partial D}$

in generale questo è complicato

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia x_0 un p.to di max / min per $f(x)$ in D.

Allora abbiamo 3 casi:

- se $x_0 \in \partial D$ siamo in (3)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\nabla f(x_0)$ N.E. siamo in (2)
- se $x_0 \in \text{Int}(D)$ e $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$ esistono tutte, devo dim. che sono nulle.

Considero la funzione $\varphi_i(t) = f(x_0 + t\, e_i)$ i-esimo vett. base canonica

È definita almeno in un intorno di $t=0$ (perché $x_0 \in \text{Int}(D)$) e ha max / min per $t=0$, quindi

$$\varphi_i'(0) \text{ (se esiste) deve fare } 0$$
$$\parallel \quad \leftarrow \text{defin. di derivata parziale}$$
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 016

Titolo nota 09/10/2015

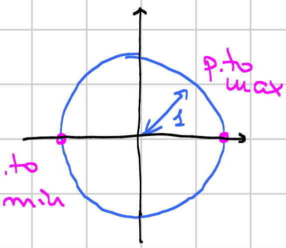
Come trovare max / min di una funzione su un compatto

1. Vedere a occhio
2. Metodo delle linee di livello
3. Procedura standard cercando
   - → staz. interni
   - → singolari interni
   - → Bordo, per il quale esistono 2 tecniche
     - PARAMETRIZZAZIONE
     - MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Esempio 1 $\max \{ \underbrace{x}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2+y^2 \le 1}_{} \} = 1$

↑ descrizione dell'insieme A dove è def. $f(x,y)$

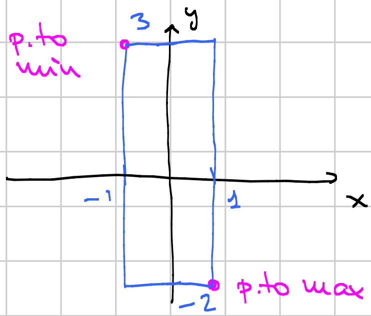
$\min \{ \ldots \} = -1$



Esempio 2 $\max / \min \{ 3x - 5y : (x,y) \in [-1,1] \times [-2,3] \}$

$\max = 13$ p.to di max $(1,-2)$

$\min = -18$ p.to di min $(-1,3)$



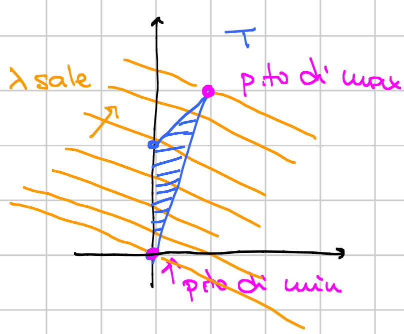
Esempio 3 $\max / \min \{ x + 2y : (x,y) \in T \}$

T è il triangolo con vertici in $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,3)$

Con le linee di livello: disegno le linee di livello della funzione

$$f(x,y) = \lambda$$

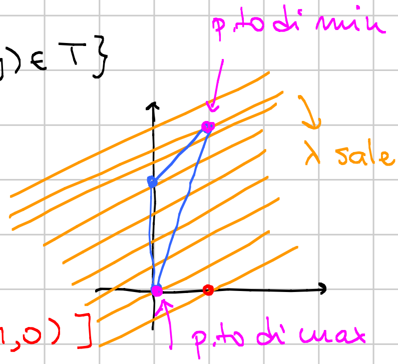
$$x + 2y = \lambda \qquad y = -\frac{x}{2} + \frac{\lambda}{2}$$



I p.ti di max / min sono le intersezioni di T corrispondenti ai valori di λ max / min.

<u>Esempio 3-bis</u> max / min $\{x-2y : (x,y)\in T\}$

Con ragionamento ad occhio non si arriva alla risposta

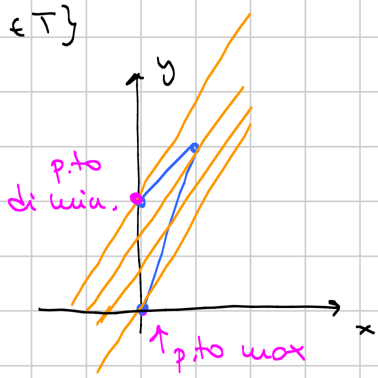


[Achtung! Non posso dire che per il max uso x più grande e y più piccolo, quindi $(1,0)$]

Scrivo le linee di livello: $x-2y=\lambda$, $y=\frac{x}{2}-\frac{\lambda}{2}$

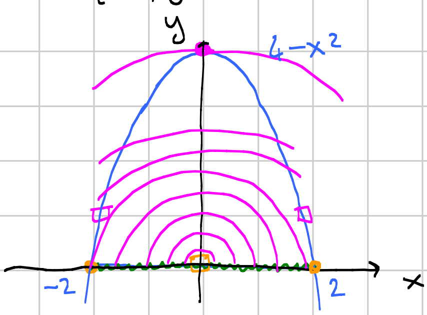
<u>Esempio 3-ter</u> max / min $\{x-\frac{1}{2}y : (x,y)\in T\}$

Linee di livello $x-\frac{1}{2}y=\lambda$ $y=2x-2\lambda$



<u>Esempio 4</u> max / min $\{x^2+y^2 : (x,y)\in A\}$

$A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\le y\le 4-x^2\}$



Il minimo si vede a occhio

min $=0$ p.to di min $=(0,0)$

max $=16$ p.to di max $=(0,4)$

↑ ma non è dim. per bene

Seguiamo la procedura:

→ Staz. interni : $\emptyset$ $2x=0$, $2y=0$ $(0,0)$ non è interno

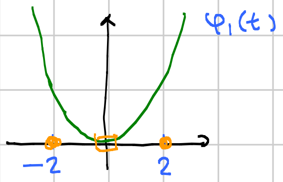
→ Sing. interni : $\emptyset$

→ Bordo, che è fatto da 2 pezzi

Pezzo ① $=\{(t,0) : t\in[-2,2]\}$

Pezzo ② $=\{(t,4-t^2) : t\in[-2,2]\}$

Parametrizzo la funzione sul bordo



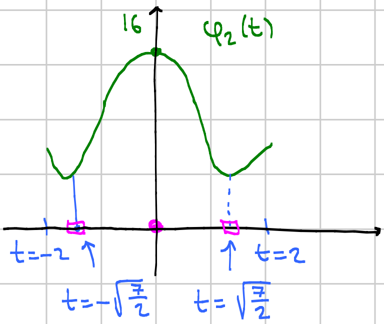
$\varphi_1(t) = f(t,0) = t^2$

max per $t = \pm 2$ che corrispondono a $(x,y) = \begin{cases} (-2,0) \\ (2,0) \end{cases}$

min per $t = 0$ che corrisponde a $(0,0)$

$\varphi_2(t) = f(t, 4-t^2) = t^2 + (4-t^2)^2 = t^2 + 16 - 8t^2 + t^4$

$= t^4 - 7t^2 + 16 \qquad t \in [-2,2]$



$\varphi_2'(t) = 4t^3 - 14t = 0$

per $t = 0$ e $t^2 = \frac{7}{2}$

Nel pezzo 2 abbiamo

max per $t = 0 \rightsquigarrow$ corrisponde a $(0,4)$

min per $t = \pm\sqrt{\frac{7}{2}} \rightsquigarrow$ corrisponde

a $\left(\pm\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$

Alla fine ho ottenuto 6 p.ti candidati

$(\pm 2, 0)$

$(0,0)$

$\left(\pm\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$

$(0,4)$

Li sostituisco tutti nella funzione e confronto i valori: dove vale di + è il max

" " " − è il min.

<u>Esempio 4-bis</u> $\quad \max/\min \{ x^2+y^2 : \underbrace{x \in [-2,2],\ y = 4-x^2}_{A} \}$

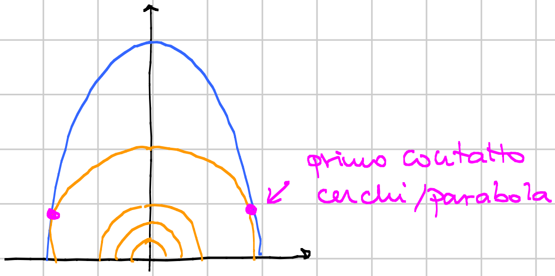
solo pezzo di parabola

In questo caso la risposta è la $\varphi_2(t)$ di prima, da cui

max $= 16 \qquad$ p.to di max $= (0,4)$

min $= \frac{49}{4} - \frac{49}{2} + 16 \qquad$ p.to di min $= \left(\pm\sqrt{\frac{7}{2}}, \frac{1}{2}\right)$

In termini di linee di livello



Strategie di parametrizzazione. Come parametrizzo in $\mathbb{R}^2$

- segmento di estremi (a_1, b_1) e (a_2, b_2)

$$\{(a_1 + t(a_2 - a_1),\ b_1 + t(b_2 - b_1)) : t \in [0,1]\}$$

- tratto della curva $y = f(x)$ con $x \in [a,b]$

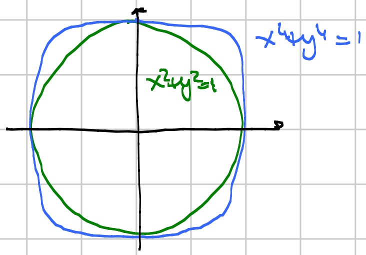
$$\{(t, f(t)) : t \in [a,b]\}$$

- circonferenza di centro (a,b) e raggio r:

$$\{(a + r\cos t,\ b + r\sin t) : t \in [0, 2\pi]\}$$

- ellisse $ax^2 + by^2 = 1$ $\quad \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{a}}\cos t,\ \frac{1}{\sqrt{b}}\sin t\right) : t \in [0, 2\pi]\right\}$

- $x^4 + y^4 = 1$



Due pezzi: $\{(t, \sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1,1]\}$ (parte alta)

$\{(t, -\sqrt[4]{1-t^4}) : t \in [-1,1]\}$ (parte bassa)

ANALISI 2 — LEZIONE 017

Titolo nota 13/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^2$.
Scrivere $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$.

$$f(x_0+h) = |x_0+h|^2 = |x_0|^2 + |h|^2 + 2\langle x_0, h\rangle$$
$$= \underset{\substack{\| \\ f(x_0)}}{|x_0|^2} + \underbrace{\langle 2x_0, h\rangle}_{\langle \nabla f(x_0), h\rangle} + \langle h, h\rangle$$
$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle H(x_0)h, h\rangle$$

da cui $\nabla f(x_0) = 2x_0$, $Hf(x_0) = 2\,\mathrm{Id}$.
Allo stesso risultato si arrivava "facendo le derivate".

Variante $g(x) = |x|^4$ Voglio calcolare $\nabla f(x_0)$

Osservo che $g(x) = [f(x)]^2$, quindi per la CHAIN RULE

$$\nabla g(x) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{numero}}}{2f(x)} \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{vettore}}}{\nabla f(x)} = 2|x|^2 \cdot 2x = 4|x|^2 x$$

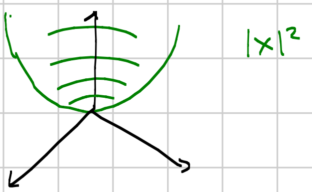
Altra variante $h(x) = |x|$

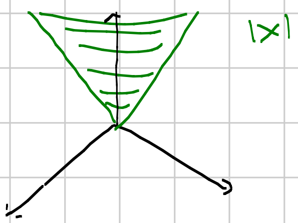
$$h(x) = \sqrt{f(x)} \qquad \nabla h(x) = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}}\nabla f(x) = \frac{1}{2|x|}\cdot 2x = \frac{x}{|x|}$$

per $x \neq 0$. Se $x = 0$, allora $\nabla h(x)$ non esiste, e non esistono nemmeno le derivate parziali.

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}(0) = \lim_{t\to 0}\frac{\overset{|t||e_i|}{h(0+te_i)} - \overset{0}{h(0)}}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{|t|}{t}$$ diverso per $t\to 0^+$ e $t\to 0^-$

In $\mathbb{R}^2$





Esercizio 2 Sia M una matrice $n \times n$, non necess. simmetrica. Consideriamo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \langle Mx, x \rangle$$

Calcolare $\nabla f(x_0)$ e $Hf(x_0)$

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= \langle M(x_0+h), x_0+h \rangle \\ &= \langle Mx_0 + Mh, x_0+h \rangle \\ &= \underbrace{\langle Mx_0, x_0 \rangle}_{= f(x_0)} + \underbrace{\langle Mx_0, h \rangle + \langle Mh, x_0 \rangle}_{= \langle \nabla f(x_0), h \rangle} + \underbrace{\langle Mh, h \rangle}_{= \frac{1}{2}\langle Hf(x_0)h, h \rangle} \end{aligned}$$

Conclusione SBAGLIATA: $Hf(x_0) = 2M$, a meno che M non sia simmetrica.

Osservo che

$$\langle Mh, x_0 \rangle = \langle h, M^T x_0 \rangle = \langle M^T x_0, h \rangle$$

e pertanto

$$\begin{aligned} \langle Mx_0, h \rangle + \langle Mh, x_0 \rangle &= \langle Mx_0, h \rangle + \langle M^T x_0, h \rangle \\ &= \langle (M+M^T) x_0, h \rangle \end{aligned}$$

e quindi

$$\nabla f(x_0) = (M+M^T) x_0$$

(compatibile con esercizio 1 in cui $M = Id$)

Per l'Hessiano osserviamo che

$$\begin{aligned} \langle Hf(x_0)h, h \rangle = \langle 2Mh, h \rangle &= \langle Mh, h \rangle + \langle Mh, h \rangle \\ &= \langle Mh, h \rangle + \langle h, M^T h \rangle \\ &= \langle Mh, h \rangle + \langle M^T h, h \rangle \\ &= \langle (M+M^T) h, h \rangle \end{aligned}$$

da cui

$$Hf(x_0) = \underbrace{M + M^T}_{\text{matrice simm.}}$$

(compatib. con Esercizio 1)

Oss. (esercizio di algebra lineare)
Data una matrice M esiste un'unica matrice simmetrica A t.c.

$$\langle Mx, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \quad \text{per ogni } x \in \mathbb{R}^n.$$

— o — o —

Esercizio 3 (Equazione delle onde)
Caratterizzare tutte le funzioni $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^2 t.c.

$$u_{tt}(t,x) = u_{xx}(t,x) \qquad \forall\,(t,x) \in \mathbb{R}^2$$

Sottoesercizio 3.1 Caratt. $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$: $f_x(x,y) = 0$

Sono tutte e sole le funzioni del tipo $f(x,y) = \psi(y)$.

Pongo $\psi(y) = f(0,y)$ e osservo che

$$f(x,y) - f(0,y) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Lagrange in } x}}{=} x \cdot f_x(c,y) = 0 \implies f(x,y) = \psi(y)$$

Sottoesercizio 3.2 Caratt. $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$: $f_{xy}(x,y) = 0$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[f_y(x,y)\right] = 0 \implies f_y(x,y) = \psi(y)$$

$$\implies f(x,y) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{primitiva di } \psi(y)}}{\Psi(y)} + \varphi(x)$$

$$f(x,y) = f(x,0) + \int_0^y f_y(x,s)\,ds$$

$$\text{\rotatebox{90}{=}}$$

$$\varphi(x) + \int_0^y \psi(s)\,ds = \varphi(x) + \Psi(y)$$

Le funzioni che risolvono $f_{xy}(x,y) = 0 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$
sono tutte e sole quelle del tipo

$$f(x,y) = \varphi(x) + \psi(y).$$

Back to esercizio 3.

Considero la funzione $$g(\xi,\eta) = f(\overbrace{\xi+\eta}^{t}, \overbrace{\xi-\eta}^{x})$$

Vado a calcolare con la CHAIN RULE le derivate di g:

$$g_\xi = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \xi} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \xi} = f_t(\xi+\eta,\xi-\eta)\,1 + f_x(\dots)\,1$$

$$g_\eta = \frac{\partial f}{\partial t}\cdot\frac{\partial t}{\partial \eta} + \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \eta} = f_t(\dots)\,1 + f_x(\dots)\cdot(-1)$$

$$g_{\xi\eta}(\xi,\eta) = \underbrace{f_{tt}(\dots)\,1}\; + \cancel{f_{tx}(\dots)(-1)} + \cancel{f_{xt}(\dots)\,1} + \underbrace{f_{xx}(\dots)(-1)}$$

la somma viene 0 per ipotesi

Ma allora
$$g_{\xi\eta}(\xi,\eta) = 0 \qquad \forall\,(\xi,\eta)\in\mathbb{R}^2$$
quindi
$$g(\xi,\eta) = \varphi(\xi) + \psi(\eta)$$
Data g, posso ricostruire f, basta risolvere

$$\begin{cases} \xi+\eta = t \\ \xi-\eta = x \end{cases} \qquad 2\xi = t+x \qquad \xi = \frac{t+x}{2} \qquad \eta = \frac{t-x}{2}$$

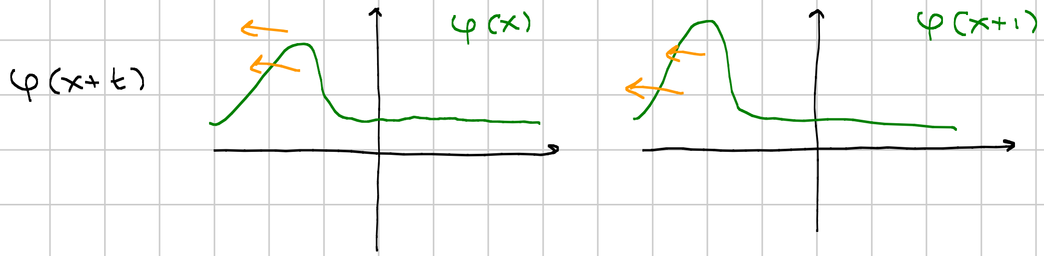
da cui

$$f(t,x) = g\left(\frac{t+x}{2}, \frac{t-x}{2}\right) = \varphi\left(\frac{t+x}{2}\right) + \psi\left(\frac{t-x}{2}\right)$$

Cambiando φ e ψ posso scriverla nella forma

$$\boxed{f(t,x) = \varphi(x+t) + \psi(x-t)}$$

TRAVELING WAVES



Ogni sol. dell'eq. delle onde è somma di 2 traveling waves che vanno in direzione opposta

<u>Variante</u> Trovare tutte le soluzioni di

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \qquad \text{con } c \text{ parametro} > 0.$$

ANALISI 2 — LEZIONE 018

Titolo nota 14/10/2015

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Metodo per trovare candidati p.ti di max/min di una funzione data su un insieme descritto come luogo di zeri

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\Phi : D \to \mathbb{R}$. Si dice luogo di zeri di Φ l'insieme

$$V := \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\Phi(x) = 0}_{\text{Equazione di } V} \}$$

Def. Siano $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta > 0$. Siano $f : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ e $\Phi : B_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$.

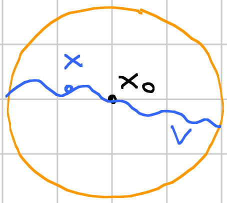
Sia V definito come sopra.
Dico che x_0 è p.to di max per $f(x)$ ristretta a V se

$x_0 \in V$ of course (aggiunto dopo video)

$$\boxed{f(x) \leq f(x_0) \qquad \forall x \in B_\delta(x_0) \text{ t.c. } \Phi(x) = 0}$$

... minimo ... $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall$ ...

Metodo dei moltiplicatori di Lagrange



Nella situazione della def. di sopra, supponiamo che f e Φ siano diff. in $B_\delta(x_0)$.
Se x_0 è un p.to di max./min. allora accade almeno una di queste possibilità:

① $\nabla \Phi(x_0) = 0$

② $\nabla f(x_0)$ è multiplo di $\nabla \Phi(x_0)$, cioè $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

Moltiplicatore di Lagrange

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla \Phi(x_0)$$

Utilizzo operativo Supponiamo di essere in 2 variabili.
Sto cercando max / min di $f(x,y)$ su un insieme compatto D.
Cerco i candidati con il solito metodo:
→ staz. interni
→ sing. interni
→ bordo ⇝ qui intervengono i moltiplicatori: spero che ∂D sia il luogo di zeri di una certa $\phi(x,y)$.
Risolvo due sistemi:

$$\boxed{\begin{cases} \phi_x(x,y) = 0 \\ \phi_y(x,y) = 0 \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$: le soluzioni sono i p.ti di $\partial D = V$ in cui $\nabla \phi = 0$. Sono i p.ti di tipo ① nel metodo precedente

Oss. 2 incognite (x,y) e 3 equazioni, quindi SPESSO non ci sono soluzioni

$$\boxed{\begin{cases} f_x(x,y) = \lambda \phi_x(x,y) \\ f_y(x,y) = \lambda \phi_y(x,y) \\ \phi(x,y) = 0 \end{cases}}$$

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$: cerca i p.ti di $\partial D = V$ in cui $\nabla f = \lambda \nabla \phi$. Sono i p.ti di tipo ② nella descrizione prec.

Oss. 3 incognite (x,y,λ) e 3 equazioni, quindi "spesso" ci sono soluzioni

Alla fine aggiungo alla lista dei candidati interni i p.ti di ∂D trovati risolvendo i due sistemi. Per il secondo sistema il valore di λ non conta nulla, ma contano solo x e y.

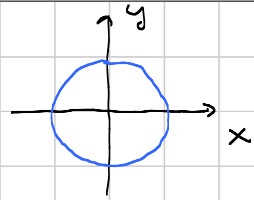
— o — o —

Oss. Risolvere il secondo sistema equivale a trovare i p.ti stazionari di una funzione ausiliaria di 3 variabili

$$\boxed{F(x,y,\lambda) = f(x,y) - \lambda \phi(x,y)}$$

Oss. Se sono in n variabili i sistemi hanno $n+1$ equazioni. Il 1° ha n incognite, il 2° ne ha $(n+1)$.

Esempio 1 $\max / \min \{ \underbrace{x+2y}_{f(x,y)} : x^2+y^2 \leq 1 \}$



① Stazionari e singolari interni : $\emptyset$

② Bordo ha equazione

$$\underbrace{x^2+y^2-1}_{\phi(x,y)} = 0$$

Risolvo i 2 sistemi.

1º sistema $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $\left.\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right\} \Downarrow$ impossibile

2º sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = 2\lambda x \\ 2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 1 \end{cases}$ $\begin{array}{l} \leadsto x = \frac{1}{2\lambda} \\ \leadsto y = \frac{1}{\lambda} \end{array}$] dopo aver oss. che $\lambda \neq 0$

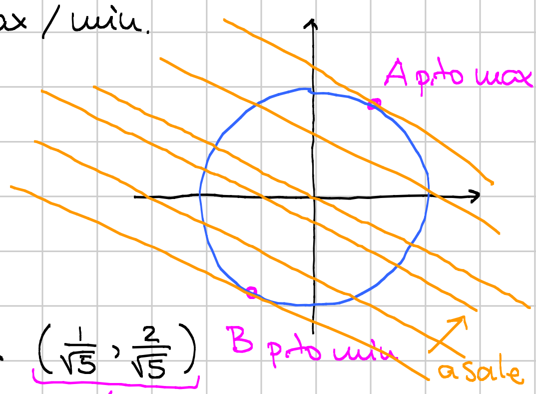
Sostituisco nella 3ª: $\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1$, $\frac{5}{4} = \lambda^2$, $\lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

Quindi ho 2 soluzioni : $(x,y) = \underbrace{\left(\pm \frac{1}{\sqrt{5}}, \pm \frac{2}{\sqrt{5}} \right)}_{\text{i segni sono gli stessi}}$

Sostituisco nella $f(x,y)$ e trovo max / min.

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = -\sqrt{5}$$



Conclusione : $\max = \sqrt{5}$ p.to di max $\underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}_{A}$

$\min = -\sqrt{5}$ p.to di min $\underbrace{(-\ldots, -\ldots)}_{B}$

Interpretazione : $f(x,y) = a \iff x+2y = a \iff y = -\frac{1}{2}x + \frac{a}{2}$

Esempio 2 $\quad \max / \min \{ \underbrace{x^2+2y^2}_{f(x,y)} : \underbrace{x^4+y^4 \leq 1}_{\text{televisore}} \}$

① Staz. interni: $\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$

② Sing. interni: $\emptyset$

③ Bordo: $\underbrace{x^4+y^4-1}_{\Phi(x,y)} = 0$

1º sistema $\begin{cases} 4x^3 = 0 \\ 4y^3 = 0 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases} \rightsquigarrow$ impossibile

2º sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \Phi_x \\ f_y = \lambda \Phi_y \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x = 4\lambda x^3 \\ 4y = 4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2\lambda x^3 \\ y = \lambda y^3 \\ x^4+y^4 = 1 \end{cases}$

1ª equazione

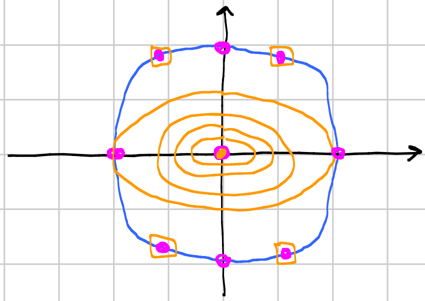
$x = 0 \xrightarrow{\text{3ª equ.}} y = \pm 1 \to \boxed{(0, \pm 1)}$

$1 = 2\lambda x^2 \xrightarrow{\text{2ª equ.}}$

- $y = 0 \xrightarrow{\text{3ª equ.}} \boxed{(\pm 1, 0)}$
- $1 = \lambda y^2 \to x^2 = \frac{1}{2\lambda} \quad y^2 = \frac{1}{\lambda} \xrightarrow{\text{3ª equ.}} \frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \rightsquigarrow \lambda = \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$

da cui trovo $\quad x^2 = \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \quad y^2 = \pm \frac{2}{\sqrt{5}}$ scarto quelle con il segno $-$ e trovo 4 possibilità per (x,y)

Alla fine ho trovato 8 pti + quello stazionario interno.



Sostituendo trovo max / min.

Dalle linee di livello è chiaro che il minimo è nell'origine, ma non è chiaro se il max è in $(0, \pm 1)$ o nei 4 pti simmetrici.

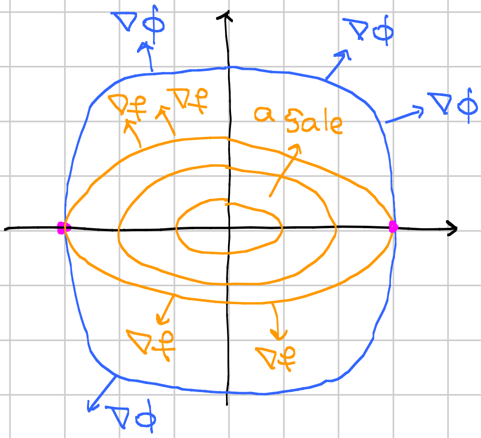
— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 019

Titolo nota 14/10/2015

Interpretazione brutale del metodo dei moltiplicatori

max / min $\{ x^2+2y^2 : \underbrace{x^4+y^4=1}_{\text{solo bordo}} \}$

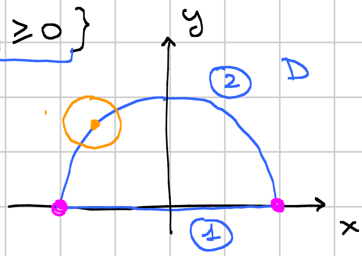


Sto cercando le linee di livello di $f(x)$ che risultano TANGENTI all' insieme V.
Ora il fatto geometrico è questo:
IL GRADIENTE È PERPENDICOLARE alle linee di livello
Nei pti di tangenza le linee di livello di f e ϕ sono tangenti, quindi $\nabla\phi$ e ∇f sono perpendicolari alla stessa cosa e dunque uno multiplo dell'altro.

— o — o —

UTILIZZO MISTO DI MOLTIPLICATORI E ALTRE TECNICHE

Esempio max / min $\{ x+2y : \underbrace{x^2+y^2 \le 1, \ y \ge 0}_{D} \}$



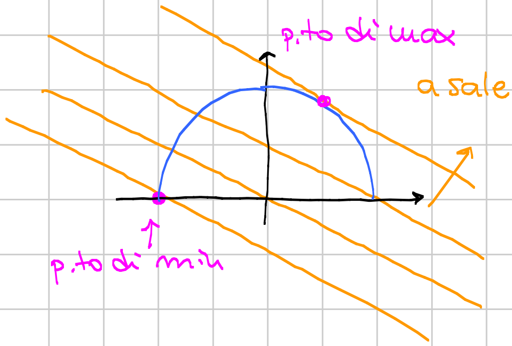
D compatto, f continua $\overset{W}{\Longrightarrow}$ max e min esistono

→ Staz. e sing. interni : $\emptyset$
→ Bordo : sono 2 pezzi
Per il pezzo ① uso la param. $\{ (t,0) : t \in [-1,1] \}$

$f(t,0) = t$ che studio per $t \in [-1,1] \rightsquigarrow$ trovo $(\pm 1, 0)$

Sul pezzo 2 vorrei usare i moltiplicatori con $\phi(x,y) = x^2+y^2-1$ ma questa sarebbe tutta la circ.

Questo si può fare MA occorre
① scartare i candidati che hanno $y<0$
② includere d'ufficio i "BORDI DEI BORDI", altrimenti detti PUNTI DI TAGLIO, cioè gli estremi del pezzo di bordo che sto considerando, cioè $(\pm 1, 0)$



Facendo i conti, il p.to di max esce dal 2° sistema dei moltiplicatori

— o — o —

Esempio 2 $\max / \min \{ x-2y : \underbrace{x^2 = y^3 ,\ x \in [-1,1]}_{D \text{ compatto con } \mathrm{Int}(D) = \emptyset} \}$

L'equazione di D è $\underbrace{x^2 - y^3}_{\phi(x,y)} = 0$

1° sistema: $\begin{cases} \phi_x = 0 \\ \phi_y = 0 \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x = 0 \\ -3y^2 = 0 \\ x^2 = y^3 \end{cases}$ $\rightsquigarrow$ ha come soluz. $\boxed{(0,0)}$

2° sistema $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = 2\lambda x & \rightsquigarrow \text{ricavo } x \\ -2 = -3\lambda y^2 & \rightsquigarrow \text{ricavo } y \\ x^2 = y^3 \end{cases}$

Alternativa: divido le prime 2 equazioni: $-\frac{1}{2} = -\frac{2}{3}\frac{x}{y^2}$
da cui
$x = \frac{3}{4} y^2$

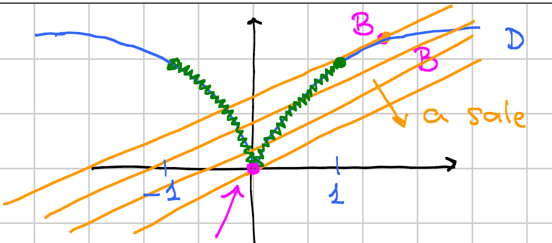
sostituisco nella 3ª $\frac{9}{16} y^4 = y^3$ $\nearrow y = 0 \rightsquigarrow x = 0$; $\searrow y = \frac{16}{9} \rightsquigarrow x = \frac{3}{4}\,\frac{256}{81} = \frac{64}{27}$

Il secondo candidato è $\left(\frac{64}{27}, \frac{16}{9} \right) = B$

$x > 1$

eliminato

$x - 2y = a \qquad y = \frac{1}{2}x - \frac{a}{2}$



Devo includere d'ufficio i p.ti di taglio

$(\pm 1, 1)$

Riassumendo ho 3 candidati

$\rightsquigarrow (1,1) \rightsquigarrow f(1,1) = -1$
$\to (-1,1) \rightsquigarrow f(-1,1) = -3 \leftarrow$ MIN
$\to (0,0) \rightsquigarrow f(0,0) = 0 \leftarrow$ MAX

— o — o —

<u>Esercizio 3</u> Sia A una matrice simmetrica. Sia $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ la forma quadratica ad essa associata.
Calcolare max / min di $q(x)$ sui vettori di norma 1, cioè

$$\max / \min \{ \underbrace{q(x)}_{f(x)} : \underbrace{|x| = 1}_{V} \}$$

Una possibile eq. per V è $|x| - 1 = 0$, ma meglio è

$$\underbrace{|x|^2 - 1}_{\phi(x,y)} = 0$$

Max e min esistono grazie a Weierstrass. Li cerco via moltiplicatori. Servono $\nabla f(x)$ e $\nabla \phi(x)$ che abbiamo fatto in una lezione precedente:

$\nabla f(x) = 2Ax \qquad$ (in generale $(A + A^T)x$)
$\nabla \phi(x) = 2x$

$\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$ $\begin{cases} \nabla \phi = 0 \\ \phi = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 0 \\ |x|^2 = 1 \end{cases}$ impossibile

$\boxed{2^o \text{ sistema}}$ $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla \phi \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{2} A x = \cancel{2} \lambda x \\ |x| = 1 \end{cases}$

Sorpresona: i p.ti stazionari sono gli autovettori (normalizzati in modo da stare in V) e i corrispondenti moltiplicatori di Lagrange sono i corr. autovalori.

Quando sostituisco in $q(x)$ un autovettore trovo

$$q(x) = \langle Ax, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle = \lambda$$

In conclusione: max = max autovalore
min = min autovalore

<u>Oss.</u> Studiare max / min di $q(x)$ in $|x|=1$ è equivalente a studiare max e min di

$$R(x) = \frac{q(x)}{|x|^2} \qquad \text{su tutto } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

Quoziente di REYLEIGH

Basta osservare che $R(\lambda x) = R(x)$ per ogni $\lambda > 0$ quindi R è costante sulle semirette che escono dall'origine

— o — o —

<u>Back to lezione?</u> Sia M una matrice $n \times n$. Trovare la costante di Lip. della funzione $f(x) = Mx$ pensata come $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Serve che $\quad |\underbrace{M(x-y)}_{Mx - My}| \leq L\, |x-y| \quad \forall\, x, y$
quindi

$$L = \max \frac{|Mv|}{|v|} \qquad v : \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

Ma allora

$$L^2 = \max\left\{\frac{|Mv|^2}{|v|^2} : v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}\right\}$$

$$= \max\left\{ |Mv|^2 : |v|^2 = 1 \right\}$$

Oss. finale $\quad |Mv|^2 = \langle Mv, Mv \rangle = \langle \underbrace{M^T M}_{\text{simmetrica}} v, v \rangle$

Conclusione: la costante di Lip. è il più grande (in modulo) autovalore della matrice

$$M^T M$$

(che è simmetrica, dunque ha autovalori reali).
Poi va fatta la radice.

ANALISI 2 – LEZIONE 020

Titolo nota 16/10/2015

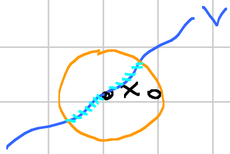
Moltiplicatori di Lagrange (caso con più moltiplicatori)

Setting: $V \subseteq \mathbb{R}^n$ descritto come luogo di zeri di più funzioni

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{\Phi_1(x) = \Phi_2(x) = \ldots = \Phi_k(x)}_{k \text{ equazioni che descrivono } V} = 0 \}$$

Def. Dato V come sopra e data $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dico che $x_0 \in V$ è p.to di max / min locale per f in V se

$$\boxed{\exists\, \delta > 0 \quad t.c. \quad \underbrace{f(x) \geq f(x_0)}_{\text{caso minimo}} \quad \forall x \in B_\delta(x_0) \cap V}$$



Teorema (misterioso) Supponiamo che x_0 sia p.to di max / min per f ristretta a V.
Supponiamo che $f(x), \Phi_1(x), \ldots, \Phi_k(x)$ siano differenziabili in $B_\delta(x_0)$. Allora x_0 rientra in una di queste due categorie:

→ $\nabla\Phi_1(x_0), \ldots, \nabla\Phi_k(x_0)$ sono k vettori LINEARMENTE DIPENDENTI, cioè equivalentemente la matrice che li ha come righe (o colonne) ha rango $\leq k-1$

→ $\nabla f(x_0)$ è combinazione lineare di $\nabla\Phi_1(x_0), \ldots, \nabla\Phi_k(x_0)$, cioè esistono numeri reali $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ t.c.

$$\boxed{\nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla\Phi_1(x_0) + \ldots + \lambda_k \nabla\Phi_k(x_0)}$$

$\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sono i moltiplicatori

Operativamente:

→ i punti del primo tipo li ottengo risolvendo il $\boxed{1^\circ \text{ sistema}}$

$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k = 0$ ← k equazioni

tutti i minori $k \times k$ della matrice con righe $\nabla \Phi_i$ siano nulli ← $\binom{n}{k}$ equazioni

n incognite, equaz. esagerate ⇒ in genere no soluzioni

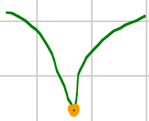
→ i p.ti del secondo tipo li ottengo risolvendo il $\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$

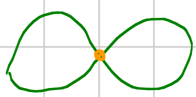
$\Phi_1 = \Phi_2 = \dots = \Phi_k = 0$ ← k equazioni

$\nabla f = \lambda_1 \nabla \Phi_1 + \dots + \lambda_k \nabla \Phi_k$ ← n equazioni, una per componenti

$k+n$ equazioni e $k+n$ incognite (n componenti di x e k moltiplicatori) ⇝ ragionevole avere # finito di soluzioni.

<u>Brutalmente</u>: i p.ti del secondo tipo sono i p.ti in cui è tangente agli insiemi di livello di f.
I p.ti del 1° tipo sono i p.ti in cui V può essere "fatto male", cioè avere cuspidi, intersezioni di vari rami, e così via.





<u>Esempi</u> Già con una sola funzione.

$\Phi(x,y) = 0$ $\quad xy = 0$

$\nabla \Phi(x,y) = (y,x)$

L'origine soddisfa il 1° sistema

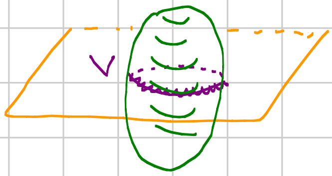
$\Phi = 0 \quad \nabla \Phi = (0,0)$

$\Phi(x,y) = 0$ $\quad x^{20} = 0$

Tutti i p.ti di V sono soluz. del 1° sistema

Esempio 1 $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+2y^2+z^2=4}_{\text{ellissoide}}, \underbrace{x+y+z=1}_{\text{piano}}\}$

$f(x,y,z) = z + x^2$



max / min di f su V

V è compatto : → è limitato perché contenuto in una sfera, o ancora meglio nel cubo $[-2,2]^3$
→ è chiuso perché è intersezione di chiusi perché sono controimmagine di un pto (chiuso) wrt una funzione continua.

W ⇒ max e min esistono, quindi basta trovare i candidati

$\Phi_1(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2-4=0$ $\qquad \Phi_2(x,y,z) = x+y+z-1$

$\boxed{1° \text{ sistema}}$ $\begin{pmatrix} \nabla\Phi_1 \\ \nabla\Phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Devo dim. che ha rango 2 nei pti di V

Se ha rango 1 vuol dire che

$\left\{\begin{array}{l} 2x-4y=0 \\ 2x-2z=0 \\ 4y-2z=0 \end{array}\right.$] annullamento dei 3 minori $\qquad x=2y,\ x=z,\ z=2y \qquad x=z=2y$

$\left\{\begin{array}{l} x^2+2y^2+z^2=4 \\ x+y+z=1 \end{array}\right.$] stare in V

$\downarrow$ piano

$x = \frac{2}{5} \quad y = \frac{1}{5} \quad z = \frac{2}{5}$

Sostituisco nell'ellissoide

$\frac{4}{25} + \frac{2}{25} + \frac{4}{25} = 4$

NO ⇒ nessuna soluzione

$\boxed{2° \text{ sistema}}$ $\nabla f = \lambda\nabla\Phi_1 + \mu\nabla\Phi_2 \qquad f(x,y,z) = z+x^2$

$\left\{\begin{array}{l} 2x = 2\lambda x + \mu \\ 0 = 4\lambda y + \mu \\ 1 = 2\lambda z + \mu \\ \Phi_1 = \Phi_2 = 0 \end{array}\right.$

$2^a - 3^a$: $4\lambda y - 2\lambda z = -1$

$\boxed{2\lambda(2y-z) = -1}$

$1^a - 2^a$: $2x = 2\lambda x - 4\lambda y$

$\boxed{x = \lambda x - 2\lambda y}$

Provo ad eliminare λ usando le 2 equ. ottenute

$$\lambda = \frac{-1}{2(2y-z)} = \frac{x}{x-2y}$$

posso dividere ...

Dividendo nella seconda devo stare attento a non perdere soluzioni (nel video c'è)

Restano 3 equazioni in x, y, z

$$\begin{cases} 2y - x = 2x(2y-z) \\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ spero di risolvere

Oss. Supponiamo di avere $\begin{cases} x^2 + 2y^2 + z^2 = 4 \\ x + y + z = a \end{cases}$

Quando il 1° sistema ha soluzione? Quando l'ellissoide è tangente al piano

— o —

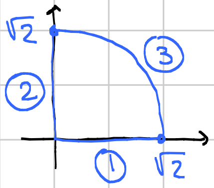
Oss. Le soluzioni del 2° sistema sono i p.ti stazionari non vincolati per la funzione

$$F(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x) - \lambda_1 \phi_1 - \dots - \lambda_k \phi_k.$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 021

Titolo nota 16/10/2015



__Esempio 1__ max / min $\{ x^2 y \ : \ x^2+y^2 \leq 2, \ x \geq 0, \ y \geq 0 \}$

W ⟹ max e min. esistono

$\nabla f(x,y) = (2xy, x^2)$ i p.ti stazionari sono tutti e soli i p.ti dell'asse y ⟹ infiniti p.ti stazionari

⇝ nessuno stazionario interno!

⇝ nessun singolare interno

Bordo: 2 pezzi con parametrizz., 1 pezzo con moltiplicatori
① e ② ③

① : $\{(t,0) : t \in [0,\sqrt{2}]\}$
② : $\{(0,t) : t \in [0,\sqrt{2}]\}$ } su questi pezzi $f \equiv 0$

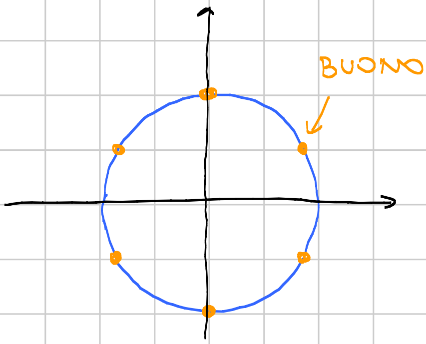
③ $\phi(x,y) = x^2+y^2-2$ ⇝ nessuna soluz. 1° sistema

$\boxed{2^\circ \text{ sistema}}$ $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{2}xy = \cancel{2}\lambda x \\ x^2 = 2\lambda y \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases}$

$x(y-\lambda) = 0$ ← 1ª equ.

$x = 0$ ↓ 3ª equ. $y = \pm\sqrt{2}$ ↓ $(0, \pm\sqrt{2})$

$y = \lambda$ ↓ 2ª equ. $x^2 = 2y^2$ ↓ 3ª equ. $3y^2 = 2$ ↓ $y = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\quad x^2 = \frac{4}{3}$ $\quad x = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$ → $\underbrace{\left(\pm\frac{2}{\sqrt{3}}, \pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}_{}$ 4 p.ti



In conclusione nel nostro caso i candidati sono

→ tutti i p.ti dei pezzi ① e ② ⇝ $f(x,y) = 0$

→ il p.to $\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ ⇝ $f(\ldots,\ldots) = \frac{4}{3}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$

$\mathrm{Max} = \frac{4\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$ p.to di max $= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

$\min = 0$ p.ti di min = tutti i p.ti dei pezzi ① e ②

Linee di livello : $x^2 y = \lambda$

$y = \frac{\lambda}{x^2}$

Esempio 1-bis max / min $\{ x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4 : (x,y) \in$ insieme di prima $\}$

Se imposto il sistema con i moltiplicatori, vengono LHS orribili.

In realtà però

$$\underbrace{x^2y + x^4 + 2x^2y^2 + y^4}_{f(x,y)} = x^2y + (x^2+y^2)^2 = \overbrace{x^2y + 4}^{\hat{f}(x,y)} \text{ sulla circonferenza}$$

Tecnica di $\boxed{\text{SOSTITUZIONE DEL VINCOLO}}$: "semplificare" la funzione f da studiare trovando una funzione più semplice che coincide con f nei p.ti di V.

Ovviamente cambia la parte stazionari e singolari interni.

Nell'esempio si può procedere così

$\min = 0$ con unico p.to di min $(0,0)$. Infatti $f(0,0) = 0$ e per ogni altro (x,y) si ha

$$f(x,y) = \underbrace{x^2y}_{\geq 0} + (x^2+y^2)^2 \geq (x^2+y^2)^2 > 0$$

se $(x,y) \neq (0,0)$

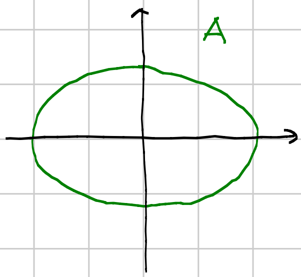
$\max = f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$ con unico p.to di max.

Infatti per ogni altro p.to

$$f(x,y) = \underbrace{x^2 y}_{\substack{\le \text{valore} \\ \text{nel pto} \\ \left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)}} + \underbrace{(x^2+y^2)^2}_{\le 4} < f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Oss. Se il problema fosse stato $\max / \min \{ x^2 y + \ldots : (x,y) \in 3 \}$ conveniva fare i moltiplicatori su $\hat{f}(x,y)$ invece che su $f(x,y)$.

Esempio 2 $\quad \max / \min \left\{ \underbrace{|x^2 - y|}_{f(x,y)} : \underbrace{x^2 + 2y^2 \le 5}_{\text{ellisse}} \right\}$



Valore assoluto $\leadsto$ p.ti singolari interni

A è compatto: $\to$ limitato perché $A \subseteq [-\sqrt{5}, \sqrt{5}]^2$

$\to$ chiuso perché controimmagine di $(-\infty, 5]$ che è un chiuso

W $\Rightarrow$ max e min esistono.

Semplificazione: $\boxed{\text{STUDIO SENZA IL VALORE ASSOLUTO}}$ e poi deduco

$g(x,y) = x^2 - y \quad \leadsto$ niente staz. e sing. interni

Bordo: 1° sistema non ha soluzioni

2° sistema $\begin{cases} g_x = \lambda \phi_x \\ g_y = \lambda \phi_y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x = 2\lambda x \\ -1 = 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 = 5 \end{cases}$

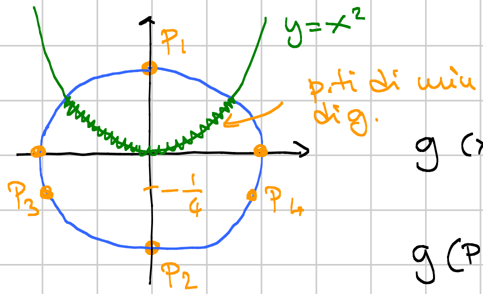
2^a equ $\Rightarrow \lambda = -\frac{1}{4y} \Rightarrow$ $\cancel{2}x = \cancel{2}\left(-\frac{1}{4y}\right)x$; $4xy = -x$

1^a equ.

$x = 0 \rightsquigarrow y^2 = \frac{5}{2} \rightsquigarrow y = \pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$4y = -1 \rightsquigarrow y = -\frac{1}{4} \rightsquigarrow x^2 + \frac{2}{16} = 5 \rightsquigarrow$ trovo $x^2 = \frac{78}{16}$

$x = \pm\frac{\sqrt{39}}{4}$



$g(x,y) = x^2 - y$

min g

$g(P_1) = \boxed{-\frac{\sqrt{5}}{2}}$ $\qquad g(P_2) = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$g(P_3) = g(P_4) = \frac{78}{16} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{82}{16}}$ max di g

max $f = \frac{82}{16}$ (che ha battuto $\frac{\sqrt{5}}{2}$) p.ti di max: P_3 e P_4

min $f = 0$ p.ti di min: gli infiniti p.ti in cui si annulla $g(x,y)$, cioè tutti i p.ti della parabola $y = x^2$ che cascano nell'ellisse.

<u>Esempio 3</u> $\quad f(x,y,z,w) = \frac{x^2yz^2}{x^4+y^4+z^4+w^4}$

limite di f per $(x,y,z,w) \to (0,0,0,0)$

Due approcci: introduco coord. polari in $\mathbb{R}^4$ oppure

$$|f(x,y,z,w)| = |x| \, \overbrace{\left|\frac{xyz^2}{x^4+y^4+z^4+w^4}\right|}^{g}$$

se fosse $\leq M$ per $(x,y,z,w) \neq (0,0,0,0)$ concluderei con i carabinieri

La funzione (2^a) è omogenea di grado, quindi

$$\max\{g(x) : x \in \mathbb{R}^4 \setminus \{0\}\} = \underbrace{\max\{g(x) : x^4+y^4+z^4+w^4=1\}}_{M \in \mathbb{R} \text{ per Weierstrass.}}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 022

Titolo nota 20/10/2015

Max e min su insiemi non compatti $f : A \to \mathbb{R}$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\inf / \sup / \max / \min \{ f(x) : x \in A \}$$

<u>TEOREMA</u> (Weierstrass generalizzato)
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f : D \to \mathbb{R}$.
Supponiamo che
(i) f è continua
(ii) esiste un sottolivello non vuoto e compatto, cioè esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$K_M = \{ x \in D : f(x) \leq M \} \leftarrow \text{sottolivello}$$

è non vuoto e compatto.
Allora

$$\min \{ f(x) : x \in D \}$$

esiste per forza.

<u>Oss.</u> Se voglio che esista il max, basta usare il sopralivello

Dim. Per W. classico esiste

$$\min \{ f(x) : x \in K_M \}$$

Sia x_0 un p.to di minimo in K_M. Dico che x_0 è p.to di min. per tutto D. Infatti:
- se $x \in K_M$, allora $f(x) \geq f(x_0)$ (per def. di x_0)
- se $x \in D \setminus K_M$, allora

$$f(x) \underset{\substack{\text{per def. di} \\ K_M}}{>} M \underset{\text{perché } x_0 \in K_M}{\geq} f(x_0).$$

Quindi in ogni caso $f(x) \geq f(x_0)$ $\forall x \in D$. □

<u>Corollario</u> Supponiamo $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua e

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Allora esiste il minimo.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta dim. che esiste un sottolivello non vuoto e compatto.
Scelgo $x_0 \in \mathbb{R}^n$ a caso (ad esempio $x_0 = 0$) e pongo

$$M = f(x_0).$$

Il corrispondente sottolivello è
- $\neq \emptyset$ perché contiene x_0,
- chiuso perché controimmagine di un chiuso $(-\infty, M]$
- limitato perché per definizione di limite

$$\exists R > 0 \quad \text{t.c.} \quad f(x) \geq M+1 \quad \forall x \quad \text{t.c.} \quad |x| \geq R$$

quindi

$$K_M \subseteq B_R(0)$$

Conclusione $K_M \neq \emptyset$ e compatto. $\square$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $\qquad D = \mathbb{R}^2$

$$\underbrace{f(x,y)}_{\downarrow\, +\infty} \geq \underbrace{x^2+y^2}_{\downarrow\, +\infty}$$

Siamo nelle ipotesi del corollario $\Rightarrow$ minimo esiste (si vede a occhio che è in $(0,0)$).

Dal limite segue anche che $\sup = +\infty$.

<u>Esempio 1-bis</u> $f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 7 \sin x$ $\qquad D = \mathbb{R}^2$

Sup $= +\infty$ (banalmente) e il min. esiste perché

$$f(x,y) \geq \underbrace{x^2+y^2-7}_{\to\, +\infty} \quad \text{e quindi siamo nelle Hp del coroll.}$$

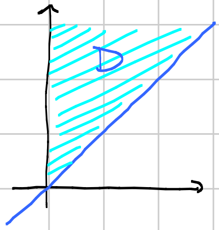
Esempio 2 $\quad f(x,y) = x^2 - 2y^2 \qquad D = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} f(t,0) \overset{\lim}{=} t^2 = +\infty$

$\inf = -\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} f(0,t) \overset{\lim}{=} -2t^2 = -\infty$

Esempio 3 $\quad f(x,y) = x^2 - 2y^2 \qquad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq x\}$

$\operatorname{Inf} = -\infty \qquad \lim_{t \to +\infty} f(0,t) = \lim_{t \to +\infty} -2t^2 = -\infty$



Dico che esiste max e vale 0

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Dimostrazione diretta

$$f(x,y) \underset{y \geq x}{\leq} x^2 - 2x^2 = -x^2 \leq 0 \qquad \text{per ogni } (x,y) \in D$$

e vale il segno di uguale se e solo se $y = x = 0$

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Se voglio usare W. gen. devo dimostrare che

$$\lim_{\substack{x^2+y^2 \to +\infty \\ (x,y) \in D}} f(x,y) = -\infty$$

Come lo dimostro? Vedo almeno 2 possibilità

$\boxed{1}$ Coord. polari : $\quad f(x,y) = \rho^2(\cos^2\theta - 2\sin^2\theta)$

$$= \rho^2(1 - 3\sin^2\theta)$$

Ora $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ e quindi $\frac{1}{2} \leq \sin^2\theta \leq 1$, ma allora

$$\underbrace{f(x,y)}_{\downarrow \, -\infty} \leq \rho^2\left(1 - \frac{3}{2}\right) = \underbrace{-\frac{1}{2}\rho^2}_{\downarrow \, -\infty}$$

$\boxed{2}$ Truccoso :

$$f(x,y) = x^2 - 2y^2 = \underbrace{x^2 - y^2}_{\leq 0} - \tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

$$\leq -\tfrac{1}{2}y^2 - \tfrac{1}{2}y^2 \quad (y \geq x)$$

$$\leq -\tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}y^2$$

valgono solo perché siamo in D

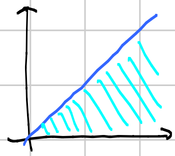
$$= \underbrace{-\tfrac{1}{2}(x^2+y^2)}_{\downarrow \ -\infty}$$

Una volta che so che max esiste, allora il p.to di max si trova nelle solite 3 categorie

→ staz. e sing. interni non esistono

→ bordo è fatto da 2 pezzi ① $\{(0,t) : t \geq 0\}$ ② $\{(t,t) : t \geq 0\}$

<u>Esempio 4</u> $f(x,y) = x^2 - 2y^2$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x\}$



$\sup = +\infty$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(t,0) = +\infty$

$\inf = -\infty$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(t,t) = \lim_{t \to +\infty} -t^2 = -\infty$

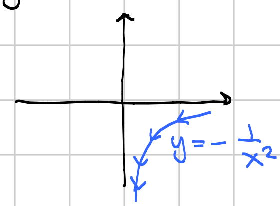
<u>Esempio 5</u> $f(x,y) = x^2 + \arctan(xy)$ $\quad D = \mathbb{R}^2$

$\sup = +\infty$ $\quad \lim_{t \to +\infty} f(t,0) = +\infty$

$\inf \leq 0$ perché $f(0,0) = 0$ $\quad$ Punto a $-\frac{\pi}{2}$: serve x molto vicino a 0, e $xy \sim -\infty$

che è l'inf. teorico

$$\lim_{t \to 0^+} f\left(t, -\tfrac{1}{t^2}\right) = \lim_{t \to 0^+} t^2 + \arctan\left(-\tfrac{1}{t}\right) = -\tfrac{\pi}{2}$$



Esempio 6 Dimostrare la disuguaglianza tra media aritmetica e quadratica

$$\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \leq \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}}$$

o equivalentemente

$$x_1 + \dots + x_n \leq \sqrt{n} \cdot \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

Abbiamo 2 opzioni basate sul fatto che è omogenea.

$\rightarrow$ Fare $\max \{ \underbrace{x_1 + \dots + x_n}_{f} : \underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}_{\phi} = 1 \}$

$\rightarrow$ Fare $\min \{ x_1^2 + \dots + x_n^2 : x_1 + \dots + x_n = 1 \}$

La prima è migliore perché il vincolo è compatto, quindi max esiste. A quel punto uso i moltiplicatori

$\nabla f = \lambda \nabla \phi$

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 2\lambda x_1 \\ 1 &= 2\lambda x_2 \\ &\vdots \\ 1 &= 2\lambda x_n \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_1 = \dots = x_n$$

e a quel punto li trovo con il vincolo.

—o —o —

ANALISI 2 – LEZIONE 023

Titolo nota 16/10/2015

Esercizio (TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)
Dimostrare che ogni polinomio a coeff. complessi ammette almeno una radice complessa

$\boxed{\text{Dim.}}$ Road map → formularlo in termini di max / min
→ fare vedere che il min esiste
→ fare vedere che solo 0 può essere min.

$$p(z) = a_m z^m + \dots + a_1 z + a_0$$

Lo trasformo in una funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$f(x,y) = |p(x+iy)|$$

modulo del numero complesso

A questo punto tesi $\Longleftrightarrow$ $\min\{ f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\} = 0$
Detto (x_0, y_0) un pto di min. si avrà che

$$f(\underbrace{x_0 + i y_0}_{z_0}) = 0$$

$\boxed{\text{Passo 1}}$ Dimostriamo che il minimo esiste (w. generalizzato)
Intanto $f(x,y)$ è continua in $\mathbb{R}^2$.
Mostriamo che

$$\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = +\infty$$

Torniamo al polinomio, che wlog possiamo pensare monico

$$|p(z)| = |z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_1 z + a_0|$$

$$|p(z)| = \underbrace{|z^n|}_{= |z|^n} \cdot \underbrace{\left| 1 + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_0}{z^n} \right|}_{\geq 1 - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \dots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n}}$$

Ho usato una proprietà dei moduli, cioè la disuguaglianza triangolare

$$|p(z)| \geq |z|^n \Big(1 - \underbrace{\frac{|a_{n-1}|}{|z|}}_{\to 0} - \dots - \underbrace{\frac{|a_0|}{|z|^n}}_{\to 0} \Big)$$

Quando $x^2+y^2 \to +\infty$, anche $|z| \to +\infty$ (occhio: $|z| = \rho$)

quindi $\displaystyle\lim_{x^2+y^2 \to +\infty} f(x,y) = \lim_{|z| \to +\infty} |p(z)| = +\infty$

Per W. generalizzato il min. esiste.

$\boxed{\text{Passo 2}}$ Dimostriamo che il minimo è 0. Se per assurdo non fosse 0, facciamo vedere con uno STUDIO LOCALE che si può scendere.

Wlog possiamo assumere che un p.to di minimo sia $(0,0)$ $(z_0 = 0)$ (se così non fosse considero il nuovo polinomio $p(z - z_0)$)

$$p(z) = \underbrace{b_0}_{\neq 0} + \underbrace{b_k}_{\text{primo coeff. successivo ad essere } \neq 0} z^k + b_{k+1} z^{k+1} + \dots + b_n z^n$$

Ora considero i valori di z del tipo $t\underbrace{w}_{\in \mathbb{C}}$ con t piccolo reale

$$p(tw) = b_0 + b_k t^k w^k + o(t^k)$$

Scelgo $w \in \mathbb{C}$ in maniera tale che $b_k w^k = -b_0$, cioè

$w^k = -\frac{b_0}{b_k}$ (ho diviso per $b_k \neq 0$ e basta saper fare le radici k-esime, per le quali c'è una teoria elementare)

Detto w_0 questo w appena scelto, abbiamo

$$p(tw_0) = b_0 - b_0 t^k + o(t^k) = (1-t^k)b_0 + o(t^k)$$

e quindi

$$|p(tw_0)| = |(1-t^k)b_0 + o(t^k)| \underset{\text{triangolare}}{\leq} (1-t^k)|b_0| + |o(t^k)|$$

$$< |b_0| \quad \text{per } t \text{ piccolo}$$

$$(1-t^k)|b_0| + |o(t^k)| = |b_0| - t^k|b_0| + o(t^k) < |b_0|$$

per studio locale.

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato un risultato più forte: dato $p \in \mathbb{C}[z]$ se $z_0 \in \mathbb{C}$ non è una radice, allora c'è una direzione che esce da z_0 nella quale $|p(z)|$ decresce.

Quindi le radici di $p(z)$ sono tutti e soli i p.ti di min. loc. per la funzione $|p(z)|$.

— o — o —

Esercizio Calcolare inf / sup / max / min di $\underbrace{x^2+y^2+z^2}_{f(x,y,z)}$ sull'insieme

$$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, xyz = 3\}$$

Capiamo come è fatto D:

→ è chiuso perché è intersezione di 4 chiusi

→ non è limitato perché $(1, n, \frac{3}{n}) \in D$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e la norma $\to +\infty$

$\Rightarrow$ addio W.

Però abbiamo già dim. che sup $= +\infty$. Infatti

$$\lim_{t \to +\infty} f\Big(\underbrace{1, t, \tfrac{3}{t}}_{\in D}\Big) = \lim_{t \to +\infty} 1 + t^2 + \frac{9}{t^2} = +\infty$$

Ora $\displaystyle\lim_{\substack{x^2+y^2+z^2 \to +\infty \\ (x,y,z) \in D}} f(x,y,z) = +\infty$ perché lo è anche senza la condizione $(x,y,z) \in D$

W generalizzato $\Rightarrow$ esiste il minimo, che posso calcolare con i moltiplicatori o la parametrizzazione

$\nabla f = \lambda \nabla \phi$

$$\begin{cases} 2x = \lambda yz & \cdot x \\ 2y = \lambda xz & \cdot y \\ 2z = \lambda xy & \cdot z \\ xyz = 3 \end{cases} \qquad \begin{aligned} 2x^2 &= \lambda xyz = 3\lambda \\ 2y^2 &= \quad = 3\lambda \\ 2z^2 &= \quad = 3\lambda \end{aligned}$$

Quindi $x = y = z = \sqrt[3]{3}$ e questo è l'unico p.to di minimo.

Con la parametrizz. mi ritrovo $z = \dfrac{3}{xy}$ e mi riduco

a $\min\Big\{ x^2+y^2+\dfrac{9}{x^2y^2} : \underbrace{x \geq 0,\ y \geq 0}_{\text{vincolo non compatto.}} \Big\}$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 024

Titolo nota 21/10/2015

FUNZIONI CONVESSE DI PIÙ VARIABILI

Def Sia V uno sp. vettoriale. Un sottoinsieme $C \subseteq V$ si dice CONVESSO se

$$\boxed{\forall x \in C \quad \forall y \in C \quad \forall \lambda \in [0,1] \quad \underbrace{\lambda x + (1-\lambda) y}_{\text{segmento di estremi } x \text{ e } y} \in C}$$

Def. Sia $C \subseteq V$ convesso e sia $f : C \to \mathbb{R}$.
La funzione f si dice convessa se

$$\boxed{\forall x \in C, \forall y \in C, \forall \lambda \in [0,1] \quad f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)}$$

La funzione f si dice strettamente convessa se vale $<$ quando $x \neq y$ e $\lambda \in (0,1)$.

Lemma Se $C \subseteq V$ è convesso, $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ tali che $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$, allora

$$\underbrace{\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n}_{\text{comb. convessa di } x_1, \dots, x_n} \in C$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Induzione su n. $\boxed{n=2}$ è la def.

$\boxed{n-1 \Rightarrow n}$ wlog $\lambda_n \neq 1$. Allora

$$\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_{n-1} x_{n-1} + \lambda_n x_n = \overbrace{\left(\frac{\lambda_1}{1-\lambda_n} x_1 + \dots + \frac{\lambda_{n-1}}{1-\lambda_n} x_{n-1} \right)}^{\text{comb. conv. di } x_1, \dots, x_{n-1} \Rightarrow \in C} (1-\lambda_n) + \lambda_n x_n.$$

— o — o —

Teorema (Jensen negli sp. vettoriali) Sia $C \subseteq V$ convesso, sia $n \geq 2$, sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa, siano $(x_1, \dots, x_n) \in C^n$, siano $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in [0,1]^n$ t.c. $\lambda_1 + \dots + \lambda_n = 1$.
Allora

$$\boxed{f(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \dots + \lambda_n f(x_n)}$$

Dim. Come ad analisi 1, a partire dalla riga precedente. □

— o — o —

Teoria $\boxed{\text{base}}$ delle funzioni convesse di 1 variabile

Convessità vs continuità
- f è continua in $\mathrm{Int}(C)$
- f è loc. Lip. in $\mathrm{Int}(C)$

Convessità vs derivata prima Supponiamo f derivabile in $\mathrm{Int}(C)$
Allora

f convessa $\iff$ $f'(x)$ deb. cresc. in $\mathrm{Int}(C)$
f strett. conv. $\iff$ $f'(x)$ strett. cresc. in $\mathrm{Int}(C)$

Convessità vs derivata seconda Supponiamo $f''(x)$ esiste in $\mathrm{Int}(C)$
Allora

f convessa $\iff$ $f''(x) \geq 0$ $\forall x \in \mathrm{Int}(C)$
f strett. conv. $\Leftarrow$ $f''(x) > 0$ $\forall x \in \mathrm{Int}(C)$

l'altra è falsa, solo $\geq$

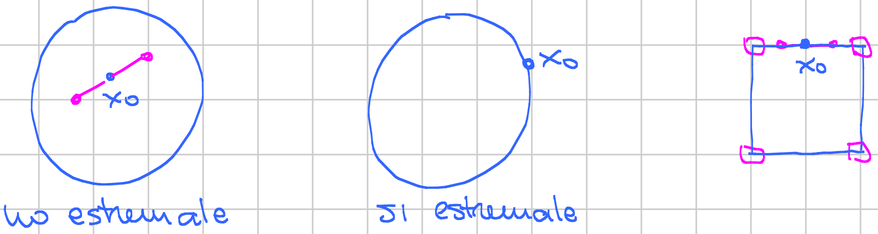
— o — o —

Moralmente il quadro è analogo in $\mathbb{R}^n$.

— o — o —

Def. Sia $C \subseteq V$ un insieme convesso. Un punto $x_0 \in C$ si dice punto estremale se non sta nell'interno di nessun segmento con estremi in C
non sul bordo.

Esempi



→ I punti estremali sono per forza su ∂C
→ I p.ti estremali di $B_r(x_0)$ sono il bordo
→ I p.ti estremali di un poligono sono solo i vertici.

Proposizione Se $C \subseteq \mathbb{R}^n$ è convesso e compatto, e $f: C \to \mathbb{R}$ è continua e convessa,
allora il max (che esiste per W.) è assunto almeno in un p.to estremale.
(Almeno uno dei p.ti di max è estremale)

$\boxed{\text{Dim.}}$ In una variabile una funzione convessa assume il max agli estremi di un intervallo.
Ripetendo il ragionamento sui segmenti che contengono x_0 segue la tesi. □

— o — o —

Fatto: La convessità, anche in $\mathbb{R}^n$, è una faccenda unidimensionale, cioè $f: C \to \mathbb{R}$ è convessa se e solo se sono convesse le sue restrizioni alle rette.
Detto meglio, i seguenti fatti sono equivalenti:
(1) f è convessa in C
(2) $\forall x_0 \in C$, $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(t) := f(x_0 + tv)$ è convessa per i valori di t per cui è definita
(3) $\forall x_0 \in C$, $\forall y_0 \in C$, la funzione
$$\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$$
è convessa in $[0,1]$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ (1) $\Rightarrow$ (3) Devo dimostrare che

$$\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) \le \lambda\varphi(t_1) + (1-\lambda)\varphi(t_2)$$

Ora $\varphi(\lambda t_1 + (1-\lambda)t_2) = f\big(\overbrace{\underbrace{x_0}+\underbrace{\lambda t_1(x_1-x_0)}+\underbrace{(1-\lambda)t_2(x_1-x_0)}}^{S}\big)$

$$\varphi(t_1) = f(\underbrace{x_0 + t_1(x_1-x_0)}_{P}) \qquad \varphi(t_2) = f(\underbrace{x_0 + t_2(x_1-x_0)}_{Q})$$

$$\lambda P + (1-\lambda)Q = \underbrace{\lambda x_0} + \underbrace{\lambda t_1(x_1-x_0)} + \underbrace{(1-\lambda)x_0} + \underbrace{(1-\lambda)t_2(x_1-x_0)}$$

$$f(S) \le \lambda f(P) + (1-\lambda)f(Q)$$

(3) $\Rightarrow$ (1) La tesi è che f è convessa quindi

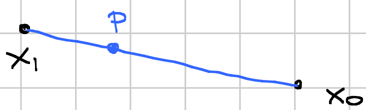
$$\underbrace{f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1)}_{\varphi(1-\lambda)} \le \lambda \underbrace{f(x_0)}_{\varphi(0)} + (1-\lambda)\underbrace{f(x_1)}_{\varphi(1)}$$

So per ipotesi che $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1-x_0))$ è convessa

Spero che LHS sia $\varphi(\lambda 0 + (1-\lambda)\cdot 1) = \varphi(1-\lambda)$

$$\varphi(1-\lambda) = f(x_0 + (1-\lambda)(x_1-x_0)) = f(\cancel{x_0} + x_1 - \cancel{x_0} - \lambda x_1 + \lambda x_0)$$
$$= f(\lambda x_0 + (1-\lambda)x_1).$$

— o — o —



$$f(P) \le \lambda f(x_0) + (1-\lambda)f(x_1)$$

$$\lambda = \frac{|x_1 - P|}{|x_1 - x_0|}$$

— o — o —

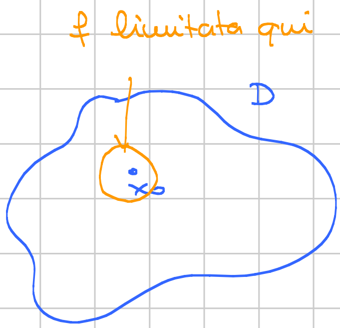
__Def.__ Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ un sottoinsieme qualunque e sia $f: D \to \mathbb{R}$.
Si dice che f è __localmente limitata__ in D se solo se

$$\boxed{\forall \underset{\text{compatto}}{K} \subseteq \mathrm{Int}(D) \quad \exists M \quad \text{t.c.} \quad |f(x)| \leq M \quad \forall x \in K}$$

__Prop.__ Nelle ipotesi di sopra, sono fatti equivalenti

(1) $\forall K \subseteq \mathrm{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R} \quad \forall x \in K \quad |f(x)| \leq M$

(2) $\forall x_0 \in \mathrm{Int}(D) \quad \exists r>0$ t.c. $\overline{B}_r(x_0) \subseteq \mathrm{Int}(D) \quad \exists M \in \mathbb{R}$
$\forall x \in \overline{B}_r(x_0) \quad |f(x)| \leq M$.



ANALISI 2 — LEZIONE 025

Titolo nota 21/10/2015

Dim. prop. fine ora precedente

(1) ⇒ (2) è ovvio perché $\overline{B}_r(x_0)$ è un compatto

(2) ⇒ (1) Sia $K \subseteq \mathrm{Int}(D)$ compatto. $\forall x_0 \in K$ esiste $r > 0$ t.c. f è limitata in $\overline{B_r(x_0)}$.

Ma $\{ B_r(x_0) : x_0 \in K \}$ è un ricoprimento aperto di K, quindi esiste un sottoricoprimento finito
↑dipende da x_0

$$K \subseteq B_{r_1}(x_1) \cup B_{r_2}(x_2) \cup \dots \cup B_{r_n}(x_n)$$

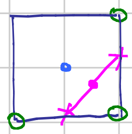
Siano $M_1, \dots, M_n$ le costanti che limitano $|f(x)|$ in queste palle, allora

$$f(x) \le \max \{ M_1, \dots, M_n \} \qquad \forall x \in K.$$

—o —o —

Teorema Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ un convesso e sia $f : C \to \mathbb{R}$ una funzione convessa.
Allora f è loc. limitata dall'alto in $\mathrm{Int}(C)$.
(Non sappiamo ancora che è continua)

Dim. Basta dimostrare che è limitata nei cubetti che contengono un dato p.to.
Detto meglio: $\forall x_0 \in \mathrm{Int}(C)$, f è limitata dall'alto in almeno un cubetto con centro in x_0
Questo è vero perché i p.ti estremali sono un numero finito.



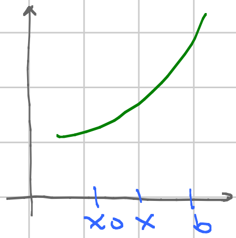
—o —o —

LA PARTE QUI SOTTO È RIFATTA MEGLIO ALLA LEZIONE 26 ↓

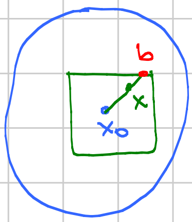
Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : C \to \mathbb{R}$ convessa. Allora f è continua in $\text{Int}(C)$

Dim.

$$|f(x)-f(x_0)| = \underbrace{\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right|}|x-x_0|$$
$$\leq \left|\frac{f(b)-f(x_0)}{b-x_0}\right|$$



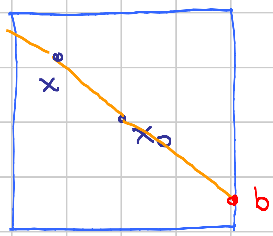
$$f(x)-f(x_0) = \underbrace{\frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}}|x-x_0|$$
$$\leq \frac{f(b)-f(x_0)}{|b-x_0|}|x-x_0|$$
$$\leq \underbrace{\frac{M-f(x_0)}{|b-x_0|}}_{\text{Fisso}} \cdot |x-x_0|$$



A questo punto faccio tendere $x \to x_0$ però mi serve il valore assoluto, cioè vorrei

$$|f(x)-f(x_0)| \leq \frac{M-f(x_0)}{|b-x_0|}|x-x_0|$$

Prendo il b dalla parte in cui si realizza il massimo sul segmento, e a quel p.to il numeratore è positivo.

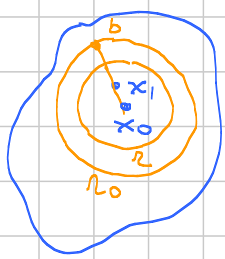


— o — o —

Teorema $f : C \to \mathbb{R}$ convessa $\Rightarrow$ localmente lipschitziana

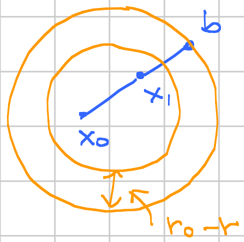
Dim. Prendo due raggi $0 < r < r_0$ t.c.

$$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \text{Int}(C)$$



Ora sappiamo che in $\overline{B}_{r_0}(x_0)$ $f(x)$ ammette massimo M e minimo m, per la continuità appena "dimostrata".
Allora per ogni x_0 e x_1 in $B_r(x_0)$ avremo che

$$|f(x_1)-f(x_0)| = \frac{|f(x_1)-f(x_0)|}{|x_1-x_0|}\,|x_1-x_0|$$
$$\leq \frac{|f(b)-f(x_0)|}{|b-x_0|}\,|x_1-x_0|$$
$$\leq \underbrace{\boxed{\frac{M-m}{r_0-r}}}_{L}\,|x_1-x_0|$$



FINE PARTE RIFATTA (MEGLIO?) ALLA LEZ. 26

— o — o —

Monotonia del gradiente.

Def. Sia $D \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $g: D \to \mathbb{R}^n$ una funzione.
Si dice che g è monotona se

$$\langle g(y)-g(x),\, y-x\rangle \geq 0 \qquad \forall x\in D \quad \forall y \in D$$

se $>$ quando $x \neq y$ allora è strettamente monotona

Teorema $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f: C \to \mathbb{R}$ differenziabile.
Allora

f è convessa $\iff$ $\nabla f(x)$ è monotono

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ Devo dimostrare che

$$\langle \nabla f(x_1)-\nabla f(x_0),\, x_1-x_0\rangle \geq 0 \qquad \forall x_0\in C,\ \forall x_1 \in C$$

Considero $\varphi(t) = f(x_0+t(x_1-x_0))$

Allora φ è convessa e derivabile, quindi $\varphi'(1) \geq \varphi'(0)$

Ma $\varphi'(t) = \langle \nabla f(x_0 + t(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle$ per chain rule

$$\underset{\varphi'(0)}{\underset{\shortparallel}{\langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}} \leq \underset{\varphi'(1)}{\underset{\shortparallel}{\langle \nabla f(x_1), x_1 - x_0 \rangle}}$$

Porto al RHS e ho la tesi.

$\boxed{\Leftarrow}$ Basta dimostrare che tutte le $\varphi(t)$ come sopra sono convesse in $[0,1]$. Essendo φ derivabile basta far vedere che $\varphi'(t)$ è debolmente crescente, cioè

$$\underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_2(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_2)} \geq \underbrace{\langle \nabla f(x_0 + t_1(x_1 - x_0)), x_1 - x_0 \rangle}_{\varphi'(t_1)}$$

per ogni $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$.

Se porto tutto a sx ho

$$\langle \nabla f(\underbrace{x_0 + t_2(x_1 - x_0)}_{a}) - \nabla f(\underbrace{x_0 + t_1(x_1 - x_0)}_{b}), \underbrace{x_1 - x_0}_{(t_1 - t_2)(b-a)} \rangle \geq 0$$

e quindi segue dalla monotonia del gradiente.

— o — o —

In una variabile le funzioni convesse stanno sopra le rette tangenti (se esistono).

A livello di $\varphi(t)$: $\varphi(t) = f(x_0 + t(x_1 - x_0))$

$$\varphi(1) \geq \varphi(0) + 1 \cdot \varphi'(0)$$

$$\shortparallel \qquad\qquad \shortparallel$$

$$f(x_1) \geq \underbrace{f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x_1 - x_0 \rangle}_{\text{equazione del piano tangente nel. p.to } x_0}$$

$$f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0 \rangle$$

Le funzioni convesse stanno sopra il piano tangente.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 026

Titolo nota 23/10/2015

Convessità vs Continuità in più variabili $f : C \to \mathbb{R}$ convessa

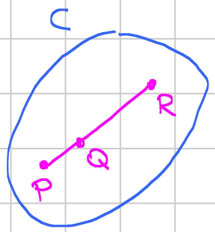
$C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso

ROAD MAP
1. f è loc. limitata dall'alto in Int(C)
2. f è continua in Int(C)
3. f è loc. limitata dall'alto e dal basso in Int(C)
4. f è loc. lipschitziana in Int(C)

① Segue dal fatto che f essendo convessa è limitata dall'alto sui cubi che hanno # finito di p.ti estremali (2^n in $\mathbb{R}^n$)

③ Segue dal p.to ② e dal teo. di Weierstrass.

<u>Lemma</u> (dei 3 rapporti incrementali) Sia $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, e sia $f : C \to \mathbb{R}$ convessa.
Siano P, Q, R tre p.ti di C, con Q che sta sul segmento PR.
Allora

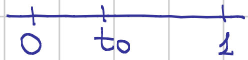


$$\boxed{\frac{f(Q)-f(P)}{|Q-P|} \leq \frac{f(R)-f(P)}{|R-P|} \leq \frac{f(R)-f(Q)}{|R-Q|}}$$

Dim. Considero $\varphi(t) := f(P + t(R-P))$ $t \in [0,1]$
È una funzione convessa.
$\varphi(0) = f(P)$
$\varphi(1) = f(R)$
$\varphi(t_0) = f(Q)$ con $t_0 = \dfrac{|Q-P|}{|R-P|}$ $\left(\text{N.B. } 1 - t_0 = \dfrac{|R-Q|}{|R-P|}\right)$

Scrivo il lemma dei 3 rapporti per la $\varphi(t)$:

$$\frac{\varphi(t_0)-\varphi(0)}{t_0} \le \frac{\varphi(1)-\varphi(0)}{1} \le \frac{\varphi(1)-\varphi(t_0)}{1-t_0}$$



$$\frac{f(Q)-f(P)}{|Q-P|}|R-P| \le \frac{f(R)-f(P)}{1} \le \frac{f(R)-f(Q)}{|R-Q|}|R-P|$$

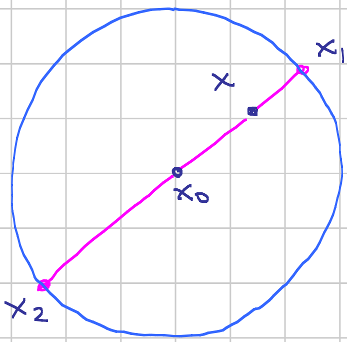
Divido e ho la tesi. $\square$

— o — o —

(2) f è continua in $\mathrm{Int}(C)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Prendo $x_0 \in \mathrm{Int}(C)$ e scelgo $r_0 > 0$ t.c.

$$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \mathrm{Int}(C)$$



Per il punto (1) sappiamo che $f(x)$ è limitata dall'alto in $\overline{B}_{r_0}(x_0)$, diciamo $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) \le M \qquad \forall x \in \overline{B}_{r_0}(x_0)$$

Prendo un qualunque $x \neq x_0$ nella palla.
Applico il lemma dei 3 rapporti con $P = x_0$, $Q = x$, $R = x_1$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|} \le \frac{f(x_1)-f(x_0)}{|x_1-x_0|} \le \frac{M-f(x_0)}{r_0}$$

Applico ora il lemma con $P = x_2$, $Q = x_0$ ed $R = x$:

$$\frac{f(x_0)-M}{r_0} \le \frac{f(x_0)-f(x_2)}{|x_0-x_2|} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|}$$

Abbiamo dim. che

$$-\frac{M-f(x_0)}{r_0} \le \frac{f(x)-f(x_0)}{|x-x_0|} \le \frac{M-f(x_0)}{r_0}$$

cioè

$$\boxed{\frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|} \le \frac{M-f(x_0)}{r_0}}$$

Porto $|x-x_0|$ al RHS e passo al limite per $x \to x_0$ e ho dim. la continuità in x_0.

— o — o —

Oss. A seconda del segno di $f(x)-f(x_0)$ basta fare una delle 2 scelte

$x_0 - x - x_1$ oppure $x_2 - x_0 - x$

— o — o —

④ Sia $x_0 \in \mathrm{Int}(C)$ e siano $0 < r_1 < r_0$ t.c.

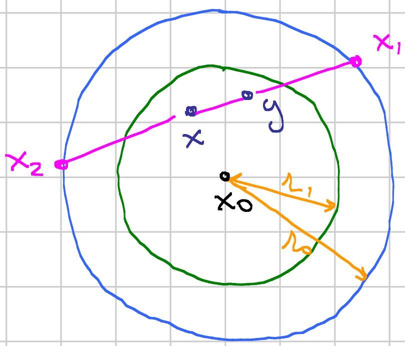
$\overline{B}_{r_0}(x_0) \subseteq \mathrm{Int}(C)$. Allora $f(x)$ ha massimo M e minimo m in $\overline{B}_{r_0}(x_0)$ e

$$|f(y)-f(x)| \le \frac{M-m}{r_0-r_1}|y-x|$$

(Lip. di $f(x)$ in $\overline{B}_{r_1}(x_0)$)

per ogni x e y in $\overline{B}_{r_1}(x_0)$.

Dim.



Uso il solito lemma con $x - y - x_1$:

$$\frac{f(y)-f(x)}{|y-x|} \le \frac{f(x_1)-f(y)}{|x_1-y|} \le \frac{M-m}{r_0-r_1}$$

Questo dimostra la tesi se num. del LHS è ≥ 0.

Uso il solito lemma con $x_2 - x - y$:

$$\frac{m-M}{r_0-r_1} \le \frac{f(y)-f(x_2)}{|y-x_2|} \le \frac{f(y)-f(x)}{|y-x|}$$

pensarci bene! Num. potenzialmente negativi !!!!!

Conclusione come nel caso di ②

Oss. Dimostriamo per bene che $|x_1 - y| \geq r_0 - r_1$

Dim. $r_0 = |x_1 - x_0| = |(x_1 - y) + (y - x_0)| \leq$ (triangolare)

$$\leq |x_1 - y| + |y - x_0| \leq |x_1 - y| + r_1$$

Porto r_1 al LHS e concludo.

— o — o —

$\boxed{\text{Convessità e derivate seconde}}$ $C \subseteq \mathbb{R}^n$ convesso, $f : C \to \mathbb{R}$

Supponiamo che $f \in C^2(\mathrm{Int}(C))$.

Allora

$$\boxed{f \text{ è convessa} \iff Hf \text{ è semidefinita positiva in } \mathrm{Int}(C)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta dimostrare che le funzioni $\varphi(t) = f(x_0 + tv)$ sono convesse dove definite.

Essendo le funzioni φ di classe C^2, sono convesse se e solo se $\varphi''(t) \geq 0$.

Basta dimostrare che

$$\varphi''(t) = \langle \underset{\text{matrice}}{Hf(x_0 + tv)}\, \underset{\text{vettori}}{v, v} \rangle$$

Questo si può vedere calcolando le derivate con la chain-rule o più brevemente usando Taylor.

Mettiamoci in un p.to t_0

$$\varphi(t_0 + h) = \varphi(t_0) + \varphi'(t_0)h + \frac{1}{2}\varphi''(t_0)h^2 + o(h^2)$$

$$\| \qquad \langle \nabla f(y_0), v \rangle h \qquad \frac{1}{2}\langle Hf(y_0)v, v\rangle h^2$$

$$f(\underbrace{x_0 + t_0 v}_{y_0} + \underbrace{h v}_{k})$$

$$f(y_0 + k) = f(y_0) + \langle \nabla f(y_0), k \rangle + \frac{1}{2}\langle Hf(y_0)k, k\rangle + o(|k|^2)$$

— o — o —

La dimostrazione che

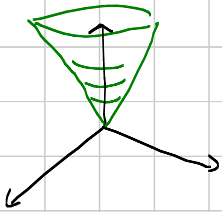
$$f \text{ strett. convessa} \Leftarrow Hf \text{ definito pos. in } \mathrm{Int}(C)$$

è esattamente la stessa.

— o — o —

<u>Esempio</u> (non banale) $f(x) = |x|$

Questa è convessa, ma non è nemmeno C^1.



La convessità si dimostra con la definizione:
dati x e y in $\mathbb{R}^n$ e dati $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ con $\lambda + \mu = 1$,
devo dim. che

$$|\lambda x + \mu y| \overset{?}{\leq} \lambda |x| + \mu |y|$$

Faccio i quadrati (posso perché ...)

$$\cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu \langle x, y \rangle \overset{?}{\leq} \cancel{\lambda^2 |x|^2} + \cancel{\mu^2 |y|^2} + 2\lambda\mu |x| \cdot |y|$$

Quello che resta è Cauchy - Schwarz.

<u>Oss.</u> Sarebbe anche una triangolare, MA ... occhio che ...
La triangolare si dimostra così !!!

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 027

Titolo nota 23/10/2015

Esercizio 1 Consideriamo $f(x,y) = x^a y^b$ definita in

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x>0, y>0\}$$

Determinare per quali valori di a e b reali risulta convessa.

(Fosse in $\mathbb{R}$: $f(x) = x^a$ è convessa per $x>0 \iff a(a-1) \geq 0$)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo C^∞ basta fare Hf

$$f_x = a\, x^{a-1} y^b \qquad f_{xx} = a(a-1)\, x^{a-2} y^b$$
$$f_y = b\, x^a y^{b-1} \qquad f_{yy} = b(b-1)\, x^a y^{b-2}$$
$$f_{xy} = ab\, x^{a-1} y^{b-1}$$

$$Hf = \begin{pmatrix} a(a-1)\, x^{a-2} y^b & ab\, x^{a-1} y^{b-1} \\ ab\, x^{a-1} y^{b-1} & b(b-1)\, x^a y^{b-2} \end{pmatrix}$$

Hf è semidefinita positiva $\iff$
$$\boxed{\begin{array}{ll} a(a-1) \geq 0 & \\ b(b-1) \geq 0 & \\ \text{Det} \geq 0 & a(a-1)b(b-1) - a^2b^2 \geq 0 \end{array}}$$

Esercizio 2 Consideriamo una funzione radiale
$$f(x,y) = g(x^2+y^2)$$
con g di classe C^2.

Capire quali condizioni su g assicurano la convessità di $f(x,y)$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Calcolo le derivate:

$$f_x = g'(x^2+y^2)\cdot 2x \qquad f_{xx} = g''(x^2+y^2)\,4x^2 + 2g'(x^2+y^2)$$
$$f_y = g'(x^2+y^2)\cdot 2y \qquad f_{yy} = g''(x^2+y^2)\,4y^2 + 2g'(x^2+y^2)$$
$$f_{xy} = g''(x^2+y^2)\,4xy$$

$$Hf(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^2 g''(\ldots) + 2g'(\ldots) & 4xy\, g''(\ldots) \\ 4xy\, g''(\ldots) & 4y^2 g''(\ldots) + 2g'(\ldots) \end{pmatrix}$$

Le condizioni sono: $\rightarrow$ due termini sulla diagonale ≥ 0
$\rightarrow$ Det ≥ 0

$$\text{Det} = (4x^2g'' + 2g')(4y^2g'' + 2g') - 16x^2y^2(g'')^2$$
$$= \cancel{16x^2y^2(g'')^2} + 8(x^2+y^2)g''g' + 4(g')^2 - \cancel{16x^2y^2(g'')^2}$$
$$= 4g'(x^2+y^2)\,[2(x^2+y^2)\,g''(x^2+y^2) + g'(x^2+y^2)]$$

La condizione, in termini della $g(x)$, è che

$$\boxed{g'(x)\,[2x\,g''(x) + g'(x)] \geq 0 \qquad \forall x \geq 0}$$

<u>Esempio 3</u> Stabilire dove è convessa la funzione

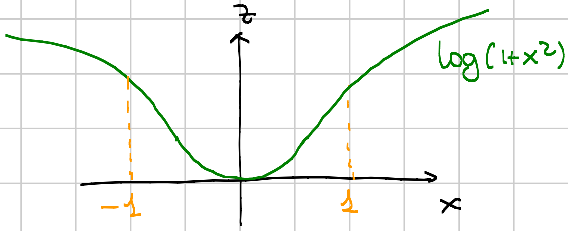
$$f(x,y) = \log(1+x^2+y^2)$$

Siamo nel caso precedente con $g(x) = \log(1+x^2)$. Facciamo i conti:

$$g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} > 0 \text{ per } x > 0 \quad ; \quad g''(x) = \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$$

$$2x\,g''(x) + g'(x) = \frac{4x(1-x^2)}{(1+x^2)^2} + \frac{2x}{1+x^2} = \frac{2x(2-2x^2+1+x^2)}{(1+x^2)^2}$$

Sembrerebbe venire $\frac{2x(3-x^2)}{(1+x^2)^2} \geq 0$ ... controllare.



Come è fatta la funzione?

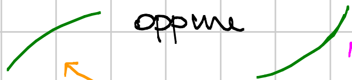
$\log(1+x^2+y^2)$ = rotazione intorno all'asse z del grafico precedente pensato nel piano xz

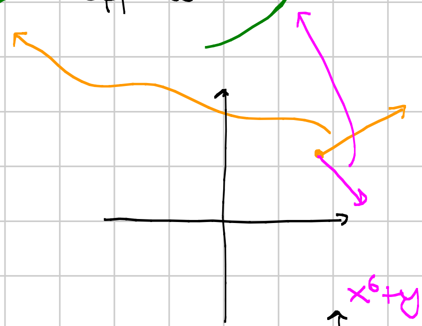
Idea geometrica:

→ vicino all'origine f è convessa

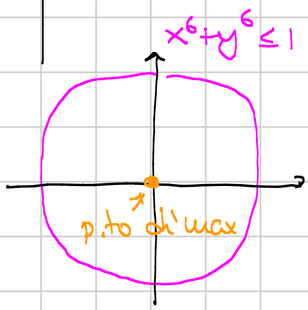
→ lontano dall'origine Det Hf < 0, quindi Hf ha autovalori +− quindi f(x,y) non è né concava, né convessa.

Detto: cammini diversi che passano per un p.to lontano dall'origine possono vedere





Esempio 4 $\max_{\min} \{ \cos x + \cos y : x^6+y^6 \leq 1 \}$



Se fosse su tutto $\mathbb{R}^2$: max = 2, min = −2

Insieme compatto: max e min esistono ☺

→ Singolari interni: $\emptyset$

→ Staz. interni $\begin{cases} -\sin x = 0 \\ -\sin y = 0 \end{cases}$ $x = k\pi$, $y = k\pi$ interni solo (0,0)

Il minimo sarà sul bordo, che tratto con i moltiplicatori

1° sistema: verificare che non ha soluzioni

2° sistema: $\begin{cases} f_x = \lambda \phi_x \\ f_y = \lambda \phi_y \\ \phi = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} -\sin x = 6\lambda x^5 \\ -\sin y = 6\lambda y^5 \\ x^6 + y^6 = 1 \end{cases}$

→ Se $x=0$, allora $y = \pm 1$ ⇝ $(0, \pm 1)$

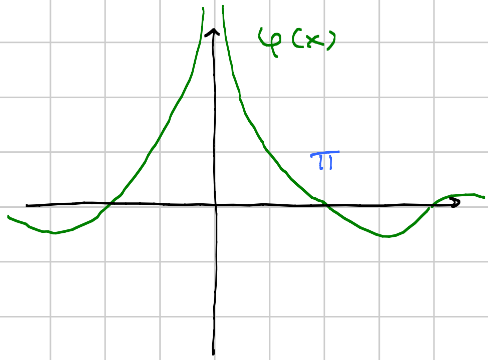
→ Se $y=0$, allora $x = \pm 1$ ⇝ $(\pm 1, 0)$

→ Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ divido e trovo

$$-\frac{\sin x}{x^5} = 6\lambda = -\frac{\sin y}{y^5}$$

Spero proprio tanto che $\frac{\sin x}{x^5}$ sia iniettiva in $[-1, 1]$ così deduco che $x = y$.

Ora è PARI ☹, ma fortunatamente è iniettiva in $[0, 1]$, quindi posso dedurre che $x = \pm y$.



$$\varphi(x) = \frac{\sin x}{x^5}$$

$$\varphi'(x) = \frac{\cos x \cdot x^5 - 5x^4 \cdot \sin x}{x^{10}}$$

Spero $\varphi'(x) \leq 0$ per $x \in [0, 1]$, cioè

$$x^4 \underbrace{(x\cos x - 5\sin x)}_{\text{questa si studia}} < 0$$

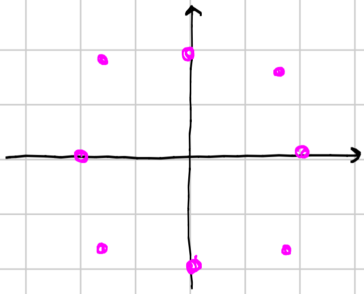
$g(x)$ $\quad g'(x) = \cos x - x\sin x - 5\cos x$

$= -x\sin x - 4\cos x < 0$ in $(0, \frac{\pi}{2})$

Inoltre $g(0) = 0$, quindi $g(x) < 0$ per $x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Una volta dedotto che $y = \pm x$ vengono fuori 4 altre soluzioni del sistema.

Quindi alla fine i candidati sono 8



Non resta che sostituire

Domanda: cosa succede se considero

$$x^6+y^6 = R$$

Per R piccoli il minimo sarà con $x=\pm y$, ad un certo valore R_0 il minimo non sarà più nei p.ti con $x=\pm y$

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 028

Titolo nota 27/10/2015

$\boxed{\text{INTEGRALI DOPPI}}$

1. Come si indicano (notazioni)
2. Significato geometrico
3. Definizione
4. Tecniche di calcolo

1 Notazioni

$$\boxed{\iint}_{A} \boxed{f(x,y)} \boxed{dx\,dy}$$

doppio simbolo di integrale

insieme di integrazione

INTEGRANDA: funzione che voglio integrare

variabili di integrazione

Spesso si abbrevia scrivendo $\int_A f(x,y)\,dx\,dy$

Si parla di integrale PROPRIO se $f: A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e sono verificate due richieste

(i) A limitato (cioè $\exists R>0$ t.c. $A \subseteq B_R(0,0)$)

(ii) f limitata (cioè $\exists M \in \mathbb{R}$ t.c. $|f(x,y)| \leq M$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

Si parla di integrale IMPROPRIO se manca almeno una delle richieste fondamentali.

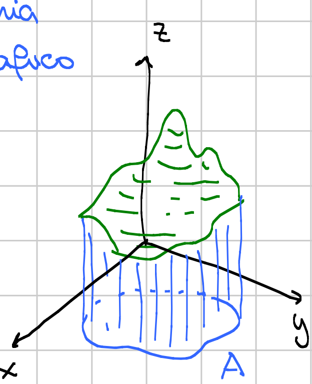
Il "risultato" dell'integrale, posto che esista, è un NUMERO REALE.

—o —o —

$\boxed{2}$ Significato geometrico Supponiamo $f(x,y) \geq 0$ in A.

$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy$ = volume della regione di spazio compresa tra piano base xy e grafico di f.
Formalmente la regione è

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{(x,y) \in A}_{\text{la regione si proietta su } A}, \underbrace{0 \leq z \leq f(x,y)}_{\text{la quota varia da 0 al grafico di } f(x,y)}\}$$



Se $f(x,y) \leq 0$ in A, allora integrale = volume cambiato di segno

Se $f(x,y)$ ha segno variabile, allora

integrale = somma algebrica dei volumi delle varie zone in cui $f(x,y)$ ha segno costante

— o — o —

$\boxed{3}$ Definizione Conviene definire $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$ prendendo come ipotesi che
(ii) f è limitata in $\mathbb{R}^2$
(i) $\exists A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato tale che $f(x,y) = 0$ per ogni $(x,y) \notin A$
(poi può fare 0 anche in p.ti di A)

A questo punto quando vorremo calcolare / definire l'integrale su un certo $B \subseteq \mathbb{R}^2$ potremo

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy := \iint_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(x,y)\,dx\,dy \quad \text{dove}$$

$$\hat{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y) & \text{se } (x,y) \in B \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin B \end{cases}$$

La definizione procede in 3 tappe:
- → caso banale
- → caso semibanale
- → caso generale

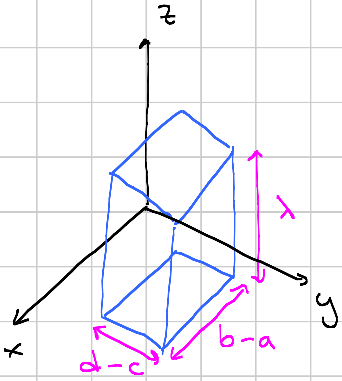
<u>Caso banale</u>: f costante su un rettangolo con lati // agli assi, cioè esistono $[a,b]$ e $[c,d]$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x,y) = \lambda \qquad \text{per } (x,y) \in [a,b] \times [c,d]$$
$$= 0 \qquad \text{al di fuori}$$

In questo caso si pone

altezza con segno del parallelepipedo

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy := \lambda \underbrace{(b-a)(d-c)}_{\text{area rettangolo base}}$$



<u>Caso semibanale</u>: f è combinazione lineare di casi banali, cioè

$$\boxed{f(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, \varphi_{R_i}(x,y)}$$

dove $R_i := [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ e

$$\varphi_{R_i}(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{se } (x,y) \in R_i \\ 0 & \text{se } (x,y) \notin R_i \end{cases}$$

funzione caratteristica del rettangolo R_i

<u>Def.</u> Indichiamo con $SF(\mathbb{R}^2)$ l'insieme delle funzioni di questo tipo, che si chiamano
- → step functions
- → funzioni semplici
- → funzioni a gradino

In questo caso si pone

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy := \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \underbrace{(b_i-a_i)(d_i-c_i)}_{\text{Area } R_i}$$

$\uparrow$ altezza parallelepipedo i-esimo

<u>Oss.</u> Il "grafico" di una $f \in SF(\mathbb{R}^2)$ è una serie di mattoni con lati paralleli agli assi di $\mathbb{R}^3$.

<u>Lemma</u> (fondamentale che avrebbe dimostrato) Se due combinazioni lineari diverse definiscono la stessa funzione, allora l'integrale definito come sopra è lo stesso.

— o — o —

<u>Caso generale</u> Sia ora $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che soddisfa le ipotesi (i) e (ii). Allora si pone

$$\iint^*_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy := \inf\left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dx\,dy \;:\; \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \le \varphi(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\uparrow$ integrale superiore

$$\iint_{*\,\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy := \sup\left\{ \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dx\,dy \;:\; \varphi \in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } f(x,y) \ge \varphi(x,y)\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$

$\uparrow$ integrale inferiore

<u>Lemma</u> (Quasi ovvio) Per ogni $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che verifica (i) e (ii) vale la disuguaglianza

$$\iint_{*\,\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint^*_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

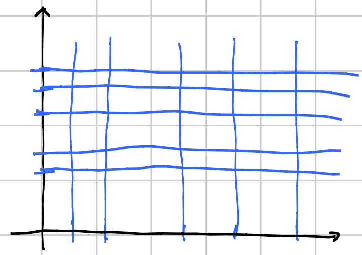
Per dimostrarlo per bene servirebbe sapere che se φ e ψ sono in $SF(\mathbb{R}^2)$ e

$$\varphi(x,y) \le \psi(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{\mathbb{R}^2} \psi(x,y)\,dx\,dy$$

(a sua volta serve un lemma che dice che 2 step functions possono essere pensate definite a partire dagli stessi rettangoli)



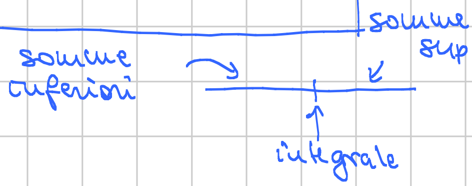
Def. Quando succede che nel lemma quasi ovvio c'è uguaglianza, allora si dice che f è integrabile secondo RIEMANN in $\mathbb{R}^2$ e il valore comune è l'integrale.

Proposizione (Quasi ovvio) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ che soddisfa (i) e (ii). Allora f è integrabile secondo Riemann se e solo se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \varphi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2)$ e $\psi_\varepsilon \in SF(\mathbb{R}^2)$ tali che

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \le f(x,y) \le \psi_\varepsilon(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} [\psi_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)]\,dx\,dy \le \varepsilon$$



Oss

(1) Abbiamo usato (i) e (ii) per essere sicuri che esistono elementi di $SF(\mathbb{R}^2)$ sopra e sotto $f(x,y)$.

(2) Si ottiene la stessa definizione (esercizio) lavorando alla DARBOUX, cioè usando solo funzioni $SF(\mathbb{R}^2)$ ottenute prendendo in ogni rettangolo sup e inf di $f(x,y)$.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 29

Titolo nota 27/10/2015

Teorema (molto misterioso)

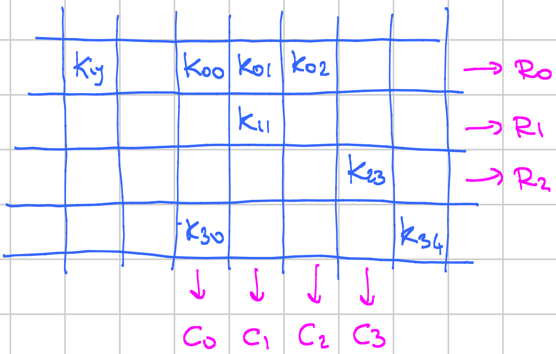
Funzioni decenti (ad esempio continue)
su insiemi decenti (ad esempio poligoni / cerchi / ...)
sono integrabili secondo Riemann.
Inoltre l'integrale si può calcolare con la formula di riduzione

$$\boxed{\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy} = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx$$

FORMULA DI RIDUZIONE

$2 = 1+1$

Oss. Queste formule sono l'analogo di quello che in matematica discreta si chiama DOUBLE COUNTING



$$\sum_{i,j} k_{ij} = \sum_{j} C_j = \sum_{i} R_i$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy\right]}_{\substack{x \text{ è fisso e integro} \\ \text{solo rispetto alla} \\ \text{variabile } y \,= \\ \text{integrale su colonna } x}} dx = \int_{\mathbb{R}} \underbrace{\left[\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx\right]}_{\substack{y \text{ è fisso} \,= \\ \text{integrale sulla} \\ \text{riga ad} \\ \text{altezza } y}} dy$$

Primo caso L'insieme di integrazione è un rettangolo

$$R = [a,b] \times [c,d]$$

$$\boxed{\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d dy\, f(x,y) = \int_c^d dy \int_a^b dx\, f(x,y)}$$

Esempio 1 $R = [0,2]\times[0,1]$ $\quad f(x,y) = y^2 + xy$

$$\iint_R (y^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^2 dx \int_0^1 dy\,(y^2+xy)$$

primitiva rispetto ad y

$$= \int_0^2 dx \left[\frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=1}$$ (sostituisco estremi)

$$= \int_0^2 \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}x\right) dx$$ (Analisi 1 pura)

$$= \left[\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x^2\right]_{x=0}^{x=2} = \frac{2}{3}+1 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

Posso usare formula di riduzione nell'altro senso

$$\iint_R (y^2+xy)\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^2 dx\,(y^2+xy)$$ (Primitiva in x)

$$= \int_0^1 dy \left[xy^2 + \frac{1}{2}x^2y\right]_{x=0}^{x=2}$$ (sostituisco estremi)

$$= \int_0^1 dy\,[2y^2+2y]$$ (Analisi 1)

$$= \left[\frac{2}{3}y^3 + y^2\right]_0^1 = \frac{2}{3}+1 = \boxed{\frac{5}{3}}$$

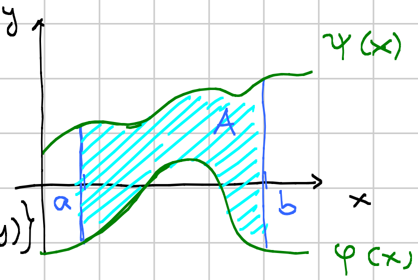
Oss. Fare l'integrale in 2 modi è un'ottima verifica della correttezza del risultato.

$\boxed{\text{INSIEMI NORMALI}}$ Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ si dice

- normale rispetto all'asse x se si può scrivere nella forma

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, \; \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

per opportuni $a < b$ e funzioni $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$, $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$



- normale rispetto all'asse y se si può scrivere come

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq y \leq b, \; \varphi(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

(come prima, ma girato di 90°).

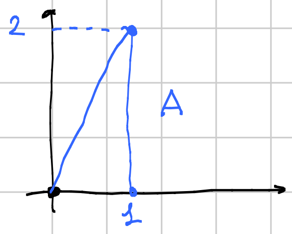
Oss. Se φ e ψ sono continue, l'insieme A rientra tra quelli decenti del teorema misterioso.

$\boxed{\text{Formula di riduzione su insiemi normali}}$

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Asse } x: \quad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy \, f(x,y) \\ &\text{Asse } y: \quad \iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} dx \, f(x,y) \end{aligned}}$$

Esempio A = triangolo con vertici in $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,2)$

$f(x,y) = y$



Scrivo A come normale asse x:

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le x \le 1, \ \ 0 \le y \le 2x \}$$

$$\iint_A y \, dx \, dy = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \cdot y \qquad \text{(primitiva rispetto a } y\text{)}$$

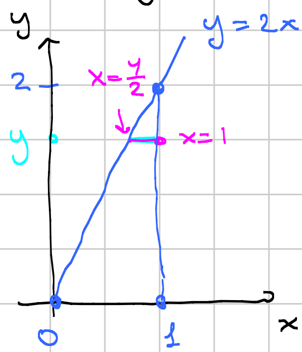
$$= \int_0^1 dx \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=2x} \qquad \text{(sostituisco estremi)}$$

$$= \int_0^1 2x^2 \, dx$$

$$= \left[\frac{2}{3} x^3 \right]_{x=0}^{x=1} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Per verifica, scrivo A come normale rispetto all'asse y

$$A = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le 2, \ \ \tfrac{1}{2} y \le x \le 1 \}$$



$$\iint_A y \, dx \, dy =$$

$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \ y = \qquad \text{(primitiva in } x\text{)}$$

$$= \int_0^2 dy \, [xy]_{x=\frac{1}{2}y}^{x=1} \qquad \text{(sostituisco gli estremi)}$$

$$= \int_0^2 dy \left[y - \frac{1}{2} y^2 \right] = \left[\frac{1}{2} y^2 - \frac{1}{6} y^3 \right]_0^2 = 2 - \frac{4}{3} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

<u>Osservazione</u> Il secondo svolgimento si poteva semplificare

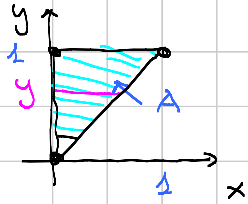
$$\int_0^2 dy \int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \ y \qquad = \int_0^2 y \, dy \underbrace{\int_{\frac{1}{2}y}^1 dx \cdot 1}$$

non dipende da x, quindi può uscire fuori

l'integrale di 1 su un insieme è la lunghezza $1 - \frac{1}{2}y$

$$= \int_0^2 y \left(1 - \tfrac{1}{2} y\right) dy = \text{come prima.}$$

Esempio 2 $\displaystyle\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy$



Normale asse x

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ x \le y \le 1\}$$

$$\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_x^1 dy\, e^{-y^2}$$ (Non so fare la primitiva ☹)

Normale asse y $\qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le 1,\ 0 \le x \le y\}$

$$\iint_A e^{-y^2}\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_0^y dx\, e^{-y^2} = \int_0^1 e^{-y^2}\,dy \int_0^y dx$$

$$= \int_0^1 y\, e^{-y^2}\,dy \quad ☺$$

Per veri duri ...

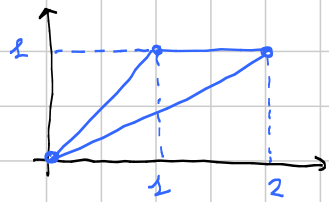
$$\int_0^1 dx \int_x^1 dy\, e^{-y^2} = \int_0^1 dx\, \big[\underset{\uparrow}{F(y)}\big]_x^1 = \int_0^1 dx\, [\underset{\uparrow}{F(1)} - F(x)]$$

una primitiva

se scelgo bene la primitiva fa 0 ☺

L'altro termine lo integro per parti e mi viene $x e^{-x^2}$

— o — o —



Normale asse x

$$\int_0^1 dx \int_{\frac{x}{2}}^{x} dy \ldots + \int_1^2 dx \int_{\frac{x}{2}}^{1} dy \ldots$$

Normale asse y

$$\int_0^1 dy \int_y^{2y} dx \ldots$$

ANALISI 2 — LEZIONE 030

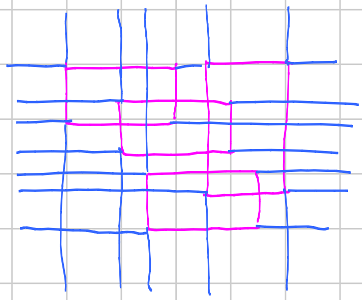
Titolo nota 28/10/2015

Proposizione (criterio di integrabilità) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.
Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono φ_ε e ψ_ε in $SF(\mathbb{R}^2)$ t.c.

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \le f(x,y) \le \psi_\varepsilon(x,y) \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} \underbrace{[\psi_\varepsilon(x,y) - \varphi_\varepsilon(x,y)]}_{\in SF(\mathbb{R}^2) \text{ e } \ge 0} dx\,dy \le \varepsilon$$

Oss. Posso sempre supporre φ_ε e ψ_ε ottenuta a partire da una stessa "rettangolazione" di $\mathbb{R}^2$



Proprietà semplici delle funzioni integrabili

① L'insieme delle funz. int. è uno sp. vett. e l'integrale è un' applic. lineare (LINEARITÀ)

[Dim. date f e g, prendo step. funct. sopra e sotto per f e g e poi le sommo]

② (MONOTONIA) Se f e g sono integrabili e $f \le g$ su $\mathbb{R}^2$, allora

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_{\mathbb{R}^2} g(x,y)\,dx\,dy$$

[Dim. Tutte le s.f. superiori per g sono buone anche per f]

③ (VALORE ASSOLUTO) f integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ integrabile e

$$\left| \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \right| \leq \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x,y)|\,dx\,dy$$

[Dim. prendo φ_ε e ψ_ε per f e costruisco opportune $\hat{\varphi}_\varepsilon$ e $\hat{\psi}_\varepsilon$ per $|f|$ decidendo rettangolo per rettangolo

- se $f \geq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = \varphi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \psi_\varepsilon$
- se $f \leq 0$ in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = -\psi_\varepsilon$, $\hat{\psi}_\varepsilon = -\varphi_\varepsilon$
- se f ha segno variabile in rett., allora $\hat{\varphi}_\varepsilon = 0$, $\hat{\psi}_\varepsilon = \max\{\psi_\varepsilon, -\varphi_\varepsilon\}$

Si verifica che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \hat{\psi}_\varepsilon - \hat{\varphi}_\varepsilon \leq \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \quad]$$

④ (Proprietà di reticolo) Se f e g sono integrabili, allora $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono integrabili

[Dim. Ci sono 2 possibili approcci:

→ costruire s.f. sopra e sotto opportunamente

→ basarsi sul val. assoluto

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2}(|x-y| + x + y) \quad \text{e idem per min. }]$$

⑤ (PRODOTTO) Se f e g sono integrabili, allora $f \cdot g$ è integrabile (e basta: non c'è formula per integrale del prodotto)

[Dim. Due fasi

→ se $f \geq 0$ e $g \geq 0$ si lavora con le step. functions aggiungendo e togliendo il termine misto

→ se f e g sono a segno variabile, introduco parti positive e negative

$$f = f^+ - f^- \qquad f^+ \geq 0,\ f^- \geq 0$$
$$g = g^+ - g^- \qquad g^+ \geq 0,\ g^- \geq 0$$

e moltiplico tutto, oppure osservo che

$$fg = \frac{1}{2}\left[(f+g)^2 - f^2 - g^2 \right]$$

ora f int. $\Rightarrow$ $|f|$ int. e ≥ 0 $\Rightarrow$ f^2 int.

⑥ Additività rispetto alla zona di integrazione

Se f è integrabile in A e in B con $A \cap B = \emptyset$, allora f è integrabile in $A \cup B$ e vale

$$\iint_{A\cup B} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A \ldots + \iint_B \ldots$$

[Dim. non c'è nulla da fare se non osservare che su tutto $\mathbb{R}^2$ si riduce alla somma di funzioni]

— o — o —

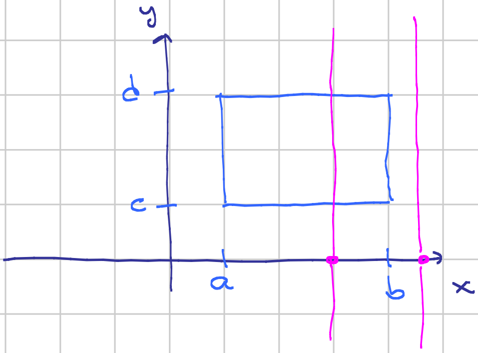
$\boxed{\text{FORMULA DI RIDUZIONE}}$ (FUBINI o FUBINI-TONELLI)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato. Allora

$$\boxed{\iint_{*\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \leq \int_{*\mathbb{R}} dx \int_{*\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}}^{*} dx \int_{\mathbb{R}}^{*} f(x,y)\,dy \leq \iint_{\mathbb{R}^2}^{*} f(x,y)\,dx\,dy}$$

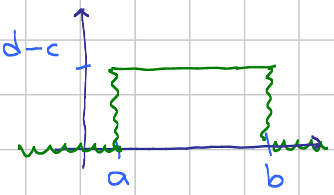
$\boxed{\text{Dim.}}$ Caso banale : $f(x,y)$ = funzione caratteristica di rettangolo $[a,b] \times [c,d]$

RHS e LHS sono $(b-a) \times (d-c)$ per definizione, senza super. o inferiore. Esaminiamo i 2 termini centrali



Fissato x

$$\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \begin{cases} 0 & \text{se } x \notin [a,b] \\ d-c & \text{se } x \in [a,b] \end{cases}$$



quindi è a sua volta una step function nella variabile x
Quando integro rispetto ad x ottengo

$$\int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\, f(x,y) = (b-a)(d-c)$$

senza bisogno di inferiori o super.
Quindi vale la formula con tutti uguale.

<u>Caso semibanale</u> : $f(x,y) \in SF(\mathbb{R}^2)$

Truccaccio : considero $f \to \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$

$$f \to \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} dy\, f(x,y)$$

Sono due applicazioni lineari $SF(\mathbb{R}^2) \to \mathbb{R}$ che coincidono su una base (le caratteristiche di rettangoli). Quindi coincidono, quindi ancora una volta la formula vale con tutti $=$.

<u>Caso generale</u> prendo f qualunque e prendo una qualunque $\varphi \in SF(\mathbb{R}^2)$ con $f(x,y) \leq \varphi(x,y)$ sempre.

Allora per ogni x fissato vale

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} f(x,y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,dy$$

perché $f \leq \varphi$ sulla colonna verticale

Ma allora

$$\int_{\mathbb{R}}^{*} dx \int_{\mathbb{R}}^{*} f(x,y)\,dy \leq \int_{\mathbb{R}} dx \int_{\mathbb{R}} \varphi(x,y)\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} \varphi(x,y)\,dx\,dy$$

Facendo l'inf su tutte le $\varphi(x,y) \geq f(x,y)$ in SF, a destra ottengo

$$\iint^*_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Per concludere basta osservare che

- la disug. a sx si fa uguale con le SF dal basso
- quella centrale è banale perché

$$\int_{*\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \leq \int^*_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

— o — o —

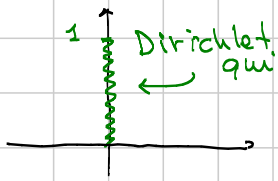
<u>Esercizio</u> (Hard?) Trovare un esempio in cui i 4 numeri sono diversi (addirittura assegnati).

<u>Esempio 1</u> Trovare $f(x,y)$ con $\iint^*_{\mathbb{R}^2} f \neq \iint_{*\mathbb{R}^2} f$

Posso prendere
$f(x,y) = 0$ fuori da $[0,1]\times[0,1]$
$f(x,y) = 1$ se $(x,y) \in \mathbb{Q}^2$ e $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$
$f(x,y) = 0$ altrimenti

<u>Esempio 2</u>

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x=0,\ y \in \mathbb{Q}\cap[0,1] \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$



<u>Esempio 3</u> f non integrabile, ma i due termini centrali coincidono e senza bisogno di integrali inferiori e superiori.

ANALISI 2 — LEZIONE 031

Titolo nota 28/10/2015

Formula di spezzamento (caso speciale)

Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ come sempre.

Supponiamo che

(i) f è integrabile su $\mathbb{R}^2$

(ii) per ogni $x \in \mathbb{R}$ la restrizione alla colonna $y \to f(x,y)$ è integrabile in $\mathbb{R}$. ((ii) non segue da (i))

Allora

il fatto che esiste fa parte della tesi

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} dx \underbrace{\int_{\mathbb{R}} dy\, f(x,y)}_{\text{ho assunto che esiste}}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Scrivo la tesi del teorema generale con tutti = (perché per ipotesi (i) sono uguali RHS e LHS):

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{*\mathbb{R}} dx \overbrace{\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy}^{\text{senza } * \text{ per hp (ii)}}$$

$$= \int_{\mathbb{R}}^{*} dx \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

Questo basta per concludere che la funzione

$$x \to \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy$$

è integrabile su $\mathbb{R}$ e vale l'uguaglianza.

—o—o—

Oss. Vale un enunciato simmetrico per concludere che

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} dy \int_{\mathbb{R}} dx\, f(x,y)$$

<u>Oss.</u> Non basta che gli integrali spezzati esistano senza problemi e coincidano per dedurre l'integrabilità in $\mathbb{R}^2$ (vedi esempio di fine lez. precedente)

— o — o —

INSIEMI MISURABILI

<u>Def.</u> Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$ limitato si dice <u>misurabile</u> se la sua funzione caratteristica è integrabile secondo Riemann su $\mathbb{R}^2$, cioè

$$\iint_A 1 \, dx\,dy \quad \text{esiste.}$$

In tal caso l'integrale si chiama misura di A

<u>Criterio di misurabilità</u> Un insieme limitato $A \subseteq \mathbb{R}^2$ è misurabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due insiemi

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

tali che

(i) B_ε e C_ε sono unioni di rettangoli con lati // agli assi

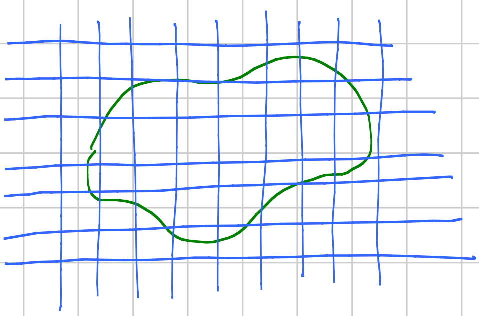
(ii) $\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \varepsilon$

essendo unioni di rettangoli, l'area è quella classica

[Unioni FINITE: precisazione (spero ovvia) aggiunta dopo video]

→ In C_ε prendo tutti i rettangoli R t.c. $R \cap A \neq \emptyset$

→ In B_ε prendo gli R t.c. $R \subseteq A$



Dim (idea) Se la funzione caratt. di A è integrabile, allora esistono S.F. φ_ε e ψ_ε con

$$\varphi_\varepsilon(x,y) \leq \underbrace{1_A(x,y)}_{\text{caratteristica}} \leq \psi_\varepsilon(x,y)$$

con

$$\iint_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)\,dx\,dy \leq \varepsilon$$

Pongo $B_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi_\varepsilon(x,y) > 0\}$

$C_\varepsilon := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \psi_\varepsilon(x,y) > 0\}$

Si verifica che

$$B_\varepsilon \subseteq A \subseteq C_\varepsilon$$

e anche

$$\text{Area}(C_\varepsilon) - \text{Area}(B_\varepsilon) \leq \int_{\mathbb{R}^2} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)\,dx\,dy \leq \varepsilon$$

sarebbe = se facessi φ_ε e ψ_ε alla Darboux

— o — o —

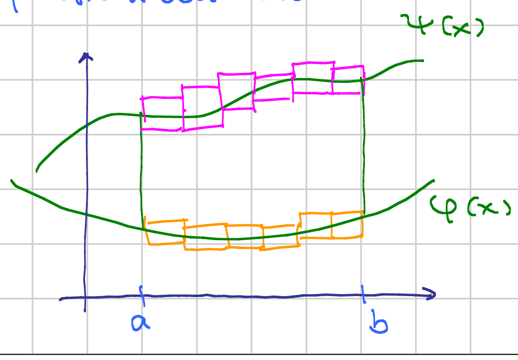
Conseguenza Gli insiemi normali con "tappi" continui sono misurabili

Dim. Prendiamo il caso rispetto all'asse x. Allora

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ \varphi(x) \leq y \leq \psi(x)\}$$

funzioni continue

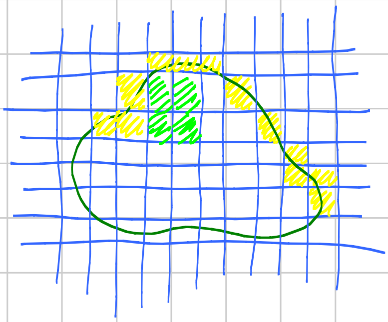
Basta che φ e ψ siano integrabili nel senso dell'analisi 1 per avere B_ε e C_ε come richiesto.
La conclusione è ovvia.



Teorema (più sensato di quello della lezione 29)
Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme limitato e misurabile
Sia $f : A \to \mathbb{R}$ limitata e continua
Allora f è integrabile su $\mathbb{R}^2$

Dim. Pongo $\hat{f}(x,y) = f(x,y) \cdot 1_A(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \text{in } A \\ 0 & \text{fuori} \end{cases}$

Dato $\varepsilon > 0$, devo costruire φ_ε e ψ_ε come nel criterio di integrabilità



Nei rettangolini gialli, pongo
$\varphi_\varepsilon(x,y) = -M$
$\psi_\varepsilon(x,y) = M$
$|f(x,y)| \leq M$

"Pago" $\iint_{\text{gialli}} (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon) \leq 2M \cdot \underbrace{\text{Area gialli}}$

essendo A misurabile, può diventare piccola a piacere.

Pongo $B :=$ unione rettangoli dentro. Allora B è compatto, quindi essendo f continua vale Heine-Cantor (come ad analisi 1) e quindi pur di suddividere abbastanza fitto so che

$$\max\{f(x,y) : (x,y) \in R\} - \min\{f(x,y) : (x,y) \in R\} \leq \varepsilon$$

per ogni rettangolino R.
Definisco ora

$\varphi_\varepsilon(x,y) = \min$ in ogni rettangolino
$\psi_\varepsilon(x,y) = \max$ R che fa parte di B

Pago $\iint_B (\psi_\varepsilon - \varphi_\varepsilon)\,dx\,dy \leq \varepsilon \cdot \text{area}(B)$

diventa piccolo a piacere
(più voglio ε piccolo, più devo prendere i rettangoli R fitti)

—o—o—

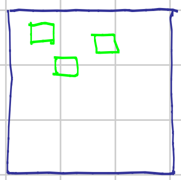
Hint per costruire f non integrabile con sezioni molto buone

Lemma Esiste $D \subseteq [0,1]\times[0,1]$ denso tale che
(i) ogni retta $x = x_0$ contiene al max 1 p.to di D
(ii) " " $y = y_0$ " " " " " " "

Dato il lemma, l'esempio cercato è 1_D (non è integrabile e sulle sezioni viene 0).

Idea per il lemma D è denso se e solo se interseca ogni sottoquadratino con estremi razionali

I sottoquadratini con estremi in $\mathbb{Q}$ sono numerabili, cioè li posso mettere in successione
$Q_1, Q_2, Q_3, \ldots, Q_k, \ldots$



Per induzione posso prendere punti $P_k \in Q_k$ facendo in modo che P_k non stia sulle $(k-1)$ rette orizz. e $(k-1)$ rette verticali già usate prima.

Con la stessa idea forse si può fare l'esempio più difficile.

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 032

Titolo nota 30/10/2015

INTEGRALI DOPPI IN COORDINATE POLARI

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta}$$

FORMULA

$$\underbrace{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{integrale che voglio calcolare}} = \iint_{B} f(\underbrace{\rho\cos\theta}_{x}, \underbrace{\rho\sin\theta}_{y})\,\boxed{\rho}\,d\rho\,d\theta$$

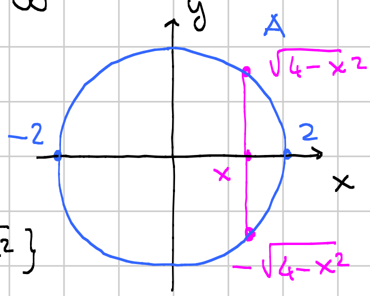
integrale che voglio calcolare

B: Insieme A descritto in coordinate polari

ρ: pagamento

Esempio 1 $\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy$ A = cerchio con centro in (0,0) e raggio 2

1° modo Vedere A come insieme normale rispetto asse x



$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \le x \le 2,\ -\sqrt{4-x^2} \le y \le \sqrt{4-x^2}\}$$

A questo p.to

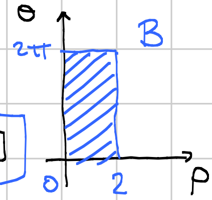
$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int_{-2}^{2} dx \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} (x^2+y^2)\,dy$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \left[x^2 y + \frac{1}{3}y^3 \right]_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}}$$

= resta integrale pieno di radici

Stessa sorte se lo vedevo come normale rispetto asse y.

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Uso coordinate polari



Descrivo A in coord. polari $\boxed{\rho \in [0,2],\ \theta \in [0,2\pi]}$

$$\iint_A (x^2+y^2)\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta}_{\text{B: descrizione di A in coord. polari}} \quad \underbrace{\rho^2}_{f(x,y) \text{ in coord. polari}} \quad \underbrace{\rho}_{\text{pagamento}}$$

$$= \int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\ \rho^3 = \int_0^2 \rho^3 d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi}$$

$$= 2\pi \int_0^2 \rho^3\, d\rho$$

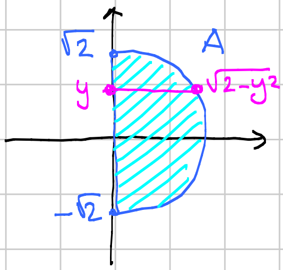
$$= 2\pi \left[\frac{1}{4}\rho^4\right]_0^2 = 8\pi$$

— o — o —

Operativamente: integrare in coord. pol. è comodo quando si ha simmetria radiale.

— o — o —

Esempio 2 $\iint_A y^2\,dx\,dy \qquad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2,\ x \ge 0\}$



Come insieme normale

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \sqrt{2},\ -\sqrt{2-x^2} \le y \le \sqrt{2-x^2}\}$$

$$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{2} \le y \le \sqrt{2},\ 0 \le x \le \sqrt{2-y^2}\}$$

In coord. polari: $0 \le \rho \le \sqrt{2}$, $\underbrace{-\frac{\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}}$ opp. $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{5\pi}{2}$

Non pensare nemmeno $\frac{3\pi}{2} \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

$$\iint_A y^2\,dx\,dy = \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} d\rho \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\theta}_{\text{A in coord. pol.}} \quad \underbrace{\rho^2 \sin^2\theta}_{y^2} \quad \underbrace{\rho}_{\text{pag.}} = \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}} \rho^3 d\rho}_{1} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\, d\theta}_{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}$$

Oss. (rivedere analisi 1) $\qquad k \in \mathbb{Z},\ h \in \mathbb{Z}$

$$\int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta = \int_{k\frac{\pi}{2}}^{h\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta = (h-k)\frac{\pi}{4}$$

In altre parole: l'integrale di $\sin^2\theta$ o di $\cos^2\theta$ tra estremi che sono multipli interi di $\frac{\pi}{2}$ è uguale a metà della lunghezza dell'intervallo.

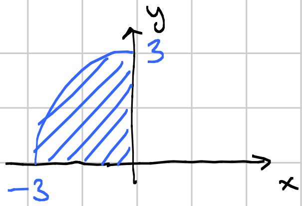
Dim. $C = \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \, d\theta \qquad S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta \, d\theta$

Allora $C = S$ (per simmetria) e $C + S = \int_0^{\pi/2} 1 \, d\theta = \frac{\pi}{2}$

Per riflessione in tutti gli altri intervalli.

Altra cosa da ricordare: $\int_{k\frac{\pi}{2}}^{(k+1)\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, d\theta = \pm 1$ e idem. per $\cos\theta$

Esempio 3 $\iint_A x \, dx \, dy \qquad A$ = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 3 intersecato il 2o quadrante.



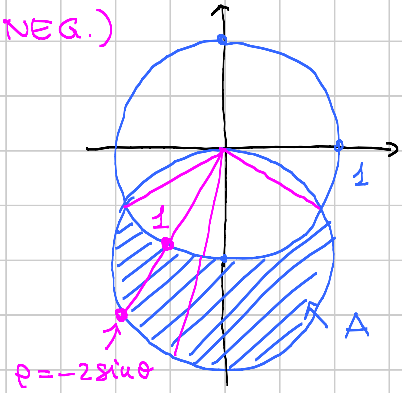
$$= \underbrace{\int_0^3 d\rho \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta}_{A \text{ in coord. polari}} \ \underbrace{\rho\cos\theta}_{x} \ \underbrace{\rho}_{\text{Jac}}$$

$$= \underbrace{\int_0^3 \rho^2 \, d\rho}_{9} \ \underbrace{\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos\theta \, d\theta}_{-1} = -9$$

Oss. Il segno potevo prevederlo dall'inizio perché l'integranda è ≤ 0 nell'insieme di integrazione.

— o — o —

Esempio 4 $\iint_A y \, dx\,dy$ (DEVE VENIRE NEG.)



A = lunetta come in figura

$x^2+y^2=1, \quad x^2+(y+1)^2=1$

$\qquad\qquad\qquad\quad x^2+y^2+2y=0$

In coord. cartesiane sembra complicato.
Proviamo in coord. polari

$x^2+y^2 \geq 1 \quad \rightsquigarrow \quad \rho \geq 1$ (fuori dal primo cerchio)

$x^2+y^2+2y \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \rho^2+2\rho\sin\theta \leq 0$ (dentro il 2° cerchio)

$$\rho+2\sin\theta \leq 0 \quad \rightsquigarrow \quad \rho \leq -2\sin\theta$$

Riassumendo: $\quad 1 \leq \rho \leq -2\sin\theta$

Se suppongo $1 \leq -2\sin\theta$ ottengo dove varia θ: $\sin\theta \leq -\frac{1}{2}$
da cui $\quad \frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}$.

L'insieme A in coord. polari è $\boxed{\frac{7\pi}{6} \leq \theta \leq \frac{11\pi}{6}, \quad 1 \leq \rho \leq -2\sin\theta}$

Normale rispetto all'asse θ

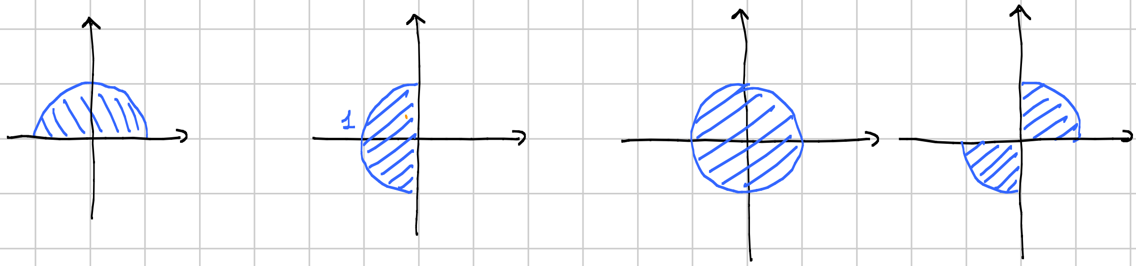
$$\iint_A y\,dx\,dy = \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} d\theta \int_1^{-2\sin\theta} \rho\sin\theta \, \boxed{\rho} \, d\rho$$

pag.

$$= \int_{\frac{7\pi}{6}}^{\frac{11\pi}{6}} \sin\theta \, d\theta \int_1^{-2\sin\theta} \rho^2 \, d\rho = \text{conti analisi 1.}$$

— o — o —

Oss. Spesso le simmetrie posso semplificare dei calcoli mostrando che certi integrali sono nulli.



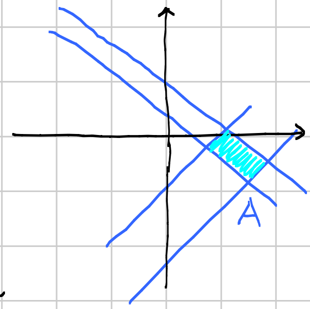
INTEGRANDE	SEGNO PREVISTO DELL'INTEGRALE			
x	0	<0	0	0
y	>0	0	0	0
xy	0	0	0	>0
$x^7 \arctan y$	0	0	0	>0
$\sin x \cos y$	0	<0	0	0

ANALISI 2 — LEZIONE 033

Titolo nota 30/10/2015

FORMULA DI CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

$$\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy \qquad (x^2-y^2) = u\cdot v$$



$$A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2 \le \overbrace{x+y}^{u} \le 3,\ 7 \le \overbrace{x-y}^{v} \le 11\}$$

Si può fare come insieme normale, ma richiede vari spezzamenti

Mi piacerebbe tanto scrivere $\displaystyle\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_2^3 du \int_7^{11} dv\ (uv)\ \underbrace{J(u,v)}_{\text{pagamento}}$

Domanda: come calcolare $J(u,v)$ ← JACOBIANO

Formula: $\displaystyle\underbrace{\iint_A f(x,y)\,dx\,dy}_{\text{ciò che voglio calcolare}} = \iint_{B} \boxed{g(u,v)}\ \boxed{J(u,v)}\,du\,dv$

B: A descritto nelle variabili u e v

$g(u,v)$: $f(x,y)$ nelle nuove variabili

$J(u,v)$: pagam.

Ricetta per ottenere J:
1. ricavare x e y in funzione di u e v
2. scrivere la matrice jacobiana della trasformazione
3. $J(u,v) = |\mathrm{Det}|$

Nell'esempio: (1) $u = x+y \qquad v = x-y$

$$\rightsquigarrow\ x = \frac{u+v}{2} \qquad y = \frac{u-v}{2}$$

(2) Matrice jacobiana $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = |\mathrm{Det}| = \left|-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$

Quindi nell' esempio $\iint_A (x^2-y^2)\,dx\,dy = \int_2^3 du \int_7^{11} dv\,(uv)\,\underset{\uparrow\ J(u,v)}{\frac{1}{2}}$

$= \text{banalità}$

— o — o —

Verifica: cosa succederebbe nel caso delle coord. polari

① $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_\rho & x_\theta \\ y_\rho & y_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho\sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix}$$

③ $|\mathrm{Det}| = \rho\cos^2\theta + \rho\sin^2\theta = \rho$

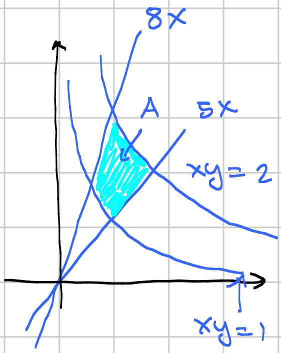
— o — o —

Esempio $\iint_A y\,dx\,dy$

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le \underbrace{xy}_{u} \le 2, \ 5x \le y \le 8x\}$

$5 \le \underbrace{\frac{y}{x}}_{v} \le 8$

In cartesiane si farebbe



Nelle nuove coordinate l' insieme è

$\boxed{1 \le u \le 2 \qquad 5 \le v \le 8}$

① Ricavo x e y : $u = xy$ $\quad v = \frac{y}{x}$

$y = \sqrt{uv}$ $\quad x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ $\qquad f(x,y)$ è diventata $\sqrt{uv}$

② Matrice

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{uv}} & -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{u}}{v\sqrt{v}} \\ \frac{\sqrt{v}}{2\sqrt{u}} & \frac{\sqrt{u}}{2\sqrt{v}} \end{pmatrix}$$

③ $J(u,v) = |\text{Det}| = \left| \frac{1}{4}\frac{1}{v} + \frac{1}{4}\frac{1}{v} \right| = \frac{1}{2v}$

In conclusione

$$\iint_A y\,dx\,dy = \underbrace{\int_1^2 du \int_5^8 dv}_{\text{insieme } A \text{ nelle coord. } u \text{ e } v} \quad \underbrace{\sqrt{uv}}_{y} \cdot \underbrace{\frac{1}{2v}}_{J(u,v)} = \text{facile.}$$

<u>Procedura alla rovescia per calcolare $J(u,v)$</u>

① Scrivo u e v in funzione di x e y: $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$

② Faccio la matrice in questa direzione

$$\begin{pmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{pmatrix};$$

③ Calcolo $|\text{Det}| = \frac{2y}{x} = 2v$

④ Faccio l'inverso $J(u,v) = \frac{1}{2v}$ come prima.

<u>Oss.</u> È come se partissi dall'integrale in (u,v) e volessi trasformarlo in (x,y).

— o — o —

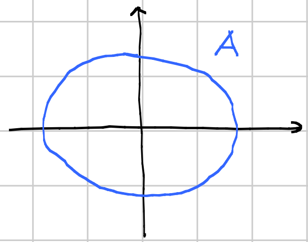
<u>Casi speciali utili</u>

① <u>Traslazioni</u>: $u = x+a$, $v = y+b$ $\rightsquigarrow$ $J(u,v) = 1$

② <u>Dilatazioni lungo gli assi</u> $u = ax$, $v = by$ $\rightsquigarrow$ $J(u,v) = (ab)^{-1}$

③ <u>Affinità</u>: $(x,y) = A(u,v) + (a,b)$ $\rightsquigarrow$ $J(u,v) = |\text{Det}\, A|^{-1}$

Esempio 1 $\iint_A y^2 \, dx \, dy$ $\quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + 3y^2 \le 5\}$



Risolvo l' insieme

$$(\underbrace{\sqrt{2}x}_{u})^2 + (\underbrace{\sqrt{3}y}_{v})^2 \le 5 \qquad u^2 + v^2 \le 5$$

① $x = \dfrac{u}{\sqrt{2}} \quad y = \dfrac{v}{\sqrt{3}}$ ② $\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

③ $J(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

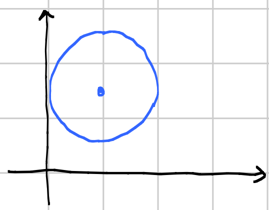
Conclusione $\displaystyle\iint_A y^2 \, dx \, dy = \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \le 5}}_{\text{nuovo insieme}} \underbrace{\frac{v^2}{3}}_{y^2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{6}}}_{J(u,v)} du \, dv$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \iint_{u^2+v^2 \le 5} v^2 \, du \, dv \underset{\substack{\text{coord.} \\ \text{polari}}}{=} \frac{1}{3\sqrt{6}} \int_0^{\sqrt{5}} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \; \rho^2 \sin^2\theta \; \rho$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{6}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{5}} \rho^3 \, d\rho}_{\frac{25}{4}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta}_{\pi} = \frac{1}{3\sqrt{6}} \cdot \frac{25}{4} \cdot \pi$$

Esempio 2 $\iint_A x \, dx \, dy$ $\quad A =$ cerchio con centro in $(2,3)$ e raggio 2

Deve venire positivo



$$(\underbrace{x-2}_{u})^2 + (\underbrace{y-3}_{v})^2 \le 4$$

Traslazione $\Rightarrow J(u,v) = 1$

Quindi

$$\iint_A x \, dx\, dy = \iint_{u^2+v^2 \leq 4} (u+2) \cdot 1 \, du\, dv$$

$$= \underbrace{\iint_{u^2+v^2\leq 4} u \, du\, dv}_{\substack{\shortparallel \\ 0 \\ \text{per simmetria}}} + 2 \underbrace{\iint_{u^2+v^2 \leq 4} 1 \, du\, dv}_{\text{Area cerchio} = 4\pi} = 8\pi$$

Oss 1 In generale $\iint_A 1 \, dx\, dy = \text{Area}(A)$

Oss. 2 Il discorso delle simmetrie si dimostra con un cambio di variabili usando la simmetria stessa.

Giustificazione ULTRA-BRUTALE della procedura

→ se vale per i rettangoli, vale per tutte le funzioni

→ se la trasformazione è una affinità, allora rettangolo ⇝ parallelogrammo, la cui area è un determinante

→ se il rettangolo è abbastanza piccolo, posso approx. la trasformazione al 1° ordine con Taylor, quindi con una affinità.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 034

Titolo nota 03/11/2015

INTEGRALI TRIPLI

1. Notazione
2. Significato geometrico / fisico
3. Definizione
4. Tecniche di calcolo

[1] Notazione

$$\iiint_{A} \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{integranda}} \, dx\, dy\, dz$$

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ zona di integr.

Si intende: → A è limitato

→ f è limitata

[2] Significato fisico

$A \subseteq \mathbb{R}^3$ limitato pensato come un solido

$f(x,y,z) \geq 0$ pensata come densità del materiale di cui è fatto il solido

Supponiamo di voler definire il peso totale del solido.

Idea: pensare di scomporre il solido in tanti "mattoncini" piccoli in ciascuno dei quali la densità è circa costante.

Posso approssimare il peso del solido con la somma dei pesi dei mattoncini che so calcolare facendo

$$\text{peso mattone} = \underbrace{\text{densità nel mattone}}_{\text{supposta costante}} \cdot \underbrace{\text{Volume}}_{\text{parallelepipedo.}}$$

Matematicamente ho costruito una somma di Riemann.

③ Definizione Andiamo a definire $\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$

→ Caso banale f = costante in un parallelepipedo $[a_1,b_1]\times[a_2,b_2]\times[a_3,b_3]$ e $=0$ fuori

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \lambda \prod_{i=1}^{3}(b_i-a_i)$$

→ Caso semibanale f = comb. lineare di casi banali. L'integrale è def. come comb. lineare degli integrali

→ Caso generale : integrale inf. e sup. come sempre e poi se coincidono ...

Valgono le solite propr. di sempre (linearità, monotonia, valore assoluto, prodotto) con le solite dimostrazioni.

Oss. Che nel procedimento di approx le step functions "sforano" rispetto al bordo dell'insieme in cui $f\neq 0$.

④ Tecniche di calcolo Formule di riduzione

$\boxed{3 = 1+1+1}$ $\boxed{3 = 2+1}$ $\boxed{3 = 1+2}$

$\boxed{\text{Formula } 3 = 1+1+1}$ $A = [a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ = parallelepipedo

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f dz\; f(x,y,z)}$$

Oss. Cambiando i nomi alle variabili ottengo 6 formule diverse

↑ l'ordine

Esempio $A = [0,1] \times [0,2] \times [1,3]$ $f(x,y,z) = x + yz$

$$\iiint_A (x+yz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz\,(x+yz) = \text{(primit. in } z\text{)}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy \left[xz + \frac{1}{2} y z^2 \right]_{z=1}^{z=3}$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^2 dy\,[2x + 4y] \qquad \text{(primitiva in } y\text{)}$$

$$= \int_0^1 dx\,[2xy + 2y^2]_{y=0}^{y=2} = \int_0^1 dx\,(4x+8)$$

$$= [2x^2 + 8x]_{x=0}^{x=1} = 10.$$

Stesso esercizio, in modo forse più pratico

$$\iiint_A x\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dx \int_0^2 dy \int_1^3 dz\, x = \int_0^1 x\,dx \underbrace{\int_0^2 dy \int_1^3 dz}_{\substack{\text{Area } [0,2]\times[1,3] \\ \text{quindi } 4}}$$

$$= \int_0^1 4x\,dx = [2x^2]_0^1 = 2$$

$$\iiint_A yz\,dx\,dy\,dz = \int_0^2 dy \int_1^3 dz \int_0^1 yz\,dx = \underbrace{\int_0^2 y\,dy}_{\left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 2} \underbrace{\int_1^3 z\,dz}_{\left[\frac{1}{2}z^2\right]_1^3 = 4} \underbrace{\int_0^1 dx}_{=1}$$

$= 8$ (+2 di prima = 10)

— o — o —

$\boxed{\text{Formula } 3 = 2+1}$ $\boxed{\text{INTEGRALE PER COLONNE}}$

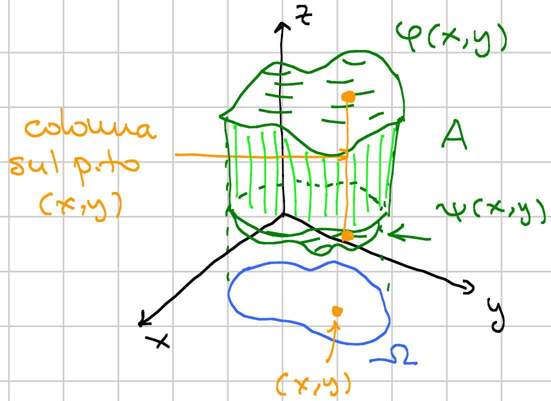
Definizione Un insieme $A \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice NORMALE rispetto al piano xy se è della forma

base — tappo sotto – sopra

$$\boxed{A = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, \ \psi(x,y) \le z \le \varphi(x,y) \}}$$

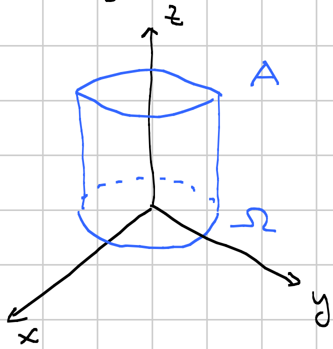
La formula di integrazione diventa

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} f(x,y,z)\,dz}_{\substack{\text{integrale in una variabile } (z) \\ \text{tra } \psi(x,y) \text{ e } \varphi(x,y)}}}$$



<u>Esempio</u> $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le 2,\ \underset{\psi(x,y)}{0} \le z \le \overset{\varphi(x,y)}{3}\}$

$f(x,y,z) = z$



A è normale rispetto al piano xy con base $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 2\}$

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_0^3 dz \cdot z}_{\text{colonna}}$$

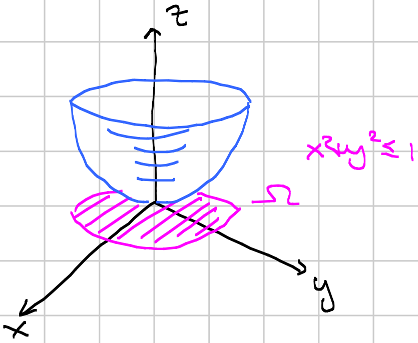
$$\text{(primitiva in } z\text{)} \quad = \iint_\Omega dx\,dy \left[\frac{1}{2}z^2\right]_{z=0}^{z=3} = \frac{9}{2}\iint_\Omega dx\,dy$$

$$= \frac{9}{2}\,\text{Area}(\Omega) = \frac{9}{2}\cdot 2\pi = 9\pi$$

<u>Esempio</u> $f(x,y,z) = z$, $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+y^2}_{\psi(x,y)} \le z \le \underbrace{1}_{\varphi(x,y)}\}$

"sopra il paraboloide $z = x^2+y^2$, sotto il piano $z=1$"

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \overbrace{x^2+y^2 \le 1}^{\Omega},\ \underbrace{x^2+y^2 \le z \le 1}_{\text{colonna}}\}$$



A questo punto

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_{x^2+y^2}^{1} dz\; z}_{\text{integrale sulla colonna}} \quad \text{(primitiva in } z\text{)}$$

$$= \iint_\Omega dx\,dy \left[\frac{1}{2} z^2\right]_{z=x^2+y^2}^{z=1}$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Omega \left[1-(x^2+y^2)^2\right] dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\iint_\Omega 1\,dx\,dy - \frac{1}{2}\iint_\Omega (x^2+y^2)^2\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{2}\,\text{Area}(\Omega) - \frac{1}{2}\int_0^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\; \rho^4 \cdot \underset{J}{\rho}$$

$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{\cancel{2}}\cdot \cancel{2}\pi \int_0^1 \rho^5\, d\rho$$

$$= \frac{1}{2}\pi - \frac{1}{6}\pi = \boxed{\frac{1}{3}\pi}$$

ANALISI 2 — LEZIONE 035

Titolo nota 03/11/2015

Formula di riduzione $3 = 1+2$ | Integrazione per SEZIONI

$$\boxed{\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} f(x,y,z)\,dx\,dy}$$

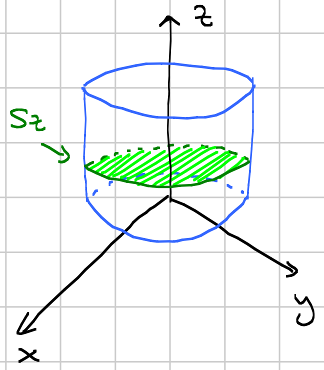
dove

→ $[a,b]$ è l'insieme in cui varia z in A

→ S_z è la sezione di A ad altezza z, cioè

$$S_z = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x,y,z)\in A\}$$

Esempio 1 Esercizio della lezione precedente con $f(x,y,z) = z$ e $A = \text{cilindro} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2\le 2,\ 0\le z\le 3\}$



$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \int_0^3 dz \iint_{S_z} dx\,dy\ z$$

$$= \int_0^3 z\,dz \iint_{S_z} dx\,dy$$

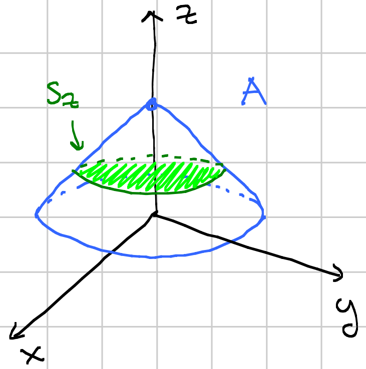
$$= \int_0^3 dz\ \ z\cdot \text{Area}(S_z)$$ cerchio di raggio $\sqrt{2}$

$$= 2\pi \int_0^3 z\,dz = \pi\,[z^2]_{z=0}^{z=3} = 9\pi$$

Esempio 2 $f(x,y,z) = \sin x + z^2$

A = cono con base $x^2+y^2 = 36$ e vertice in $(0,0,1)$

Abbiamo almeno 2 opzioni



→ normale rispetto al piano (x,y)

$$A = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad x^2+y^2 \le 36 \quad \leftarrow \text{base } \Omega \atop \underbrace{0 \le z \le 1 - \tfrac{1}{6}\sqrt{x^2+y^2}} \right\}$$

colonna sul p.to (x,y) in cui uso eq. del cono per il "tappo alto"

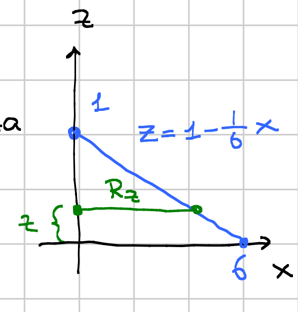
$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_0^{1-\frac{1}{6}\sqrt{x^2+y^2}} (\sin x + z)\,dz$$

↑ per colonne $\qquad = (\text{fare} \ldots)$

→ per sezioni

$$\iiint_A \ldots = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\,dy\,(\sin x + z)$$

Bisogna capire chi è S_z = cerchio di raggio R_z che dipende dall'altezza



$$z = 1 - \tfrac{1}{6} R_z, \quad 6z = 6 - R_z, \quad R_z = 6(1-z)$$

(controllo per $z=0$, $z=1$ viene sensato)

$$\iiint_A z\,dx\,dy\,dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\,dy\; z = \int_0^1 dz \cdot z \cdot \text{Area}(S_z) =$$

$$= \int_0^1 z \cdot 6^2 (1-z)^2 \pi \, dz = \text{Analisi 1}$$

$$\iiint_A \sin x \,dx\,dy\,dz = 0 \quad \text{per simmetria !!!}$$

Utilizzo delle simmetrie per semplificare alcuni calcoli

Caso degli integrali di Analisi 1:

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0 \qquad \text{se } f \text{ dispari}$$

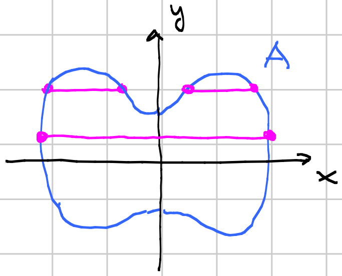
$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx \qquad \text{se } f \text{ è pari}$$

Slogan: f dispari in x, insieme simmetrico (cioè $[-a,a]$)
$\Rightarrow \int_A f = 0$.

Caso degli integrali doppi

Slogan: $\rightarrow$ $A \subseteq \mathbb{R}^2$ simmetrico rispetto all'asse y, cioè
$(x,y) \in A \iff (-x,y) \in A$
$\rightarrow$ $f(x,y)$ dispari in x, cioè
$f(-x,y) = -f(x,y) \qquad \forall (x,y) \in A$

Allora $\displaystyle\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 0$



[Dim. quando integro in dx sono nella stessa situazione di Analisi 1]

Se invece $f(-x,y) = f(x,y) \quad \forall (x,y) \in A$ simmetrico come sopra
allora

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = 2\iint_{A^+} f(x,y)\,dx\,dy$$

A^+: metà destra di A (o sinistra)

Gli stessi discorsi valgono, con la stessa dim., in 3 o più variabili

Tornando all'esempio $\iiint_A \sin x \, dx\,dy\,dz = 0$

perché: → $\sin x$ è dispari in x
→ l'insieme A è simmetrico nel senso che
$(x,y,z) \in A \iff (-x,y,z) \in A$.

— o — o —

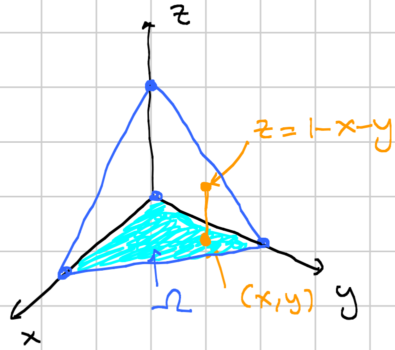
Analogamente, sullo stesso A, sarebbero nulli gli integrali di

xy, $\underbrace{x^2 \arctan y}_{\text{dispari in } y}$, $\underbrace{\sin(xz)}_{\text{dispari in } x}$ ma non x^2y^2

Esempio (Esercizio della tavola) $f(x,y,z) = x$

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x+y+z \leq 1\}$

$x+y+z=1$ ⇝ piano per i 3 vettori della base canonica

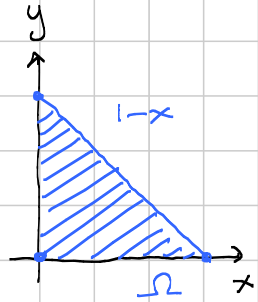


A è un tetraedro particolare.

Per colonne l'integrale diventa

$$\iiint_A x \, dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \underbrace{\int_0^{1-x-y} dz \; x}_{\text{colonna su } (x,y)}$$

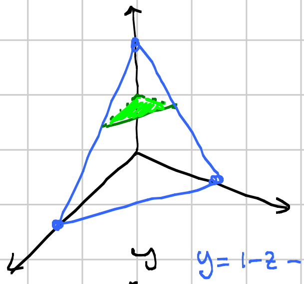
$$= \iint_\Omega x \, dx\,dy \int_0^{1-x-y} dz$$



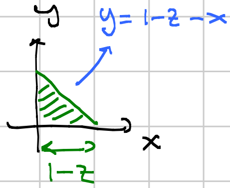
$$= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz \; x = \int_0^1 x\,dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} dz$$

Avessi voluto procedere per sezioni

$$\iiint_A x \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} x \, dx\, dy = (\star)$$



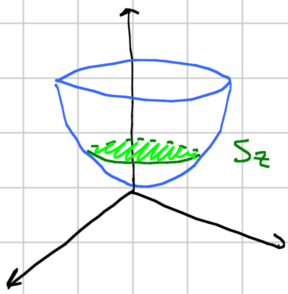
Ora S_z è un triangolo descritto da



$$S_z = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ x+y \leq 1-z \}$$

$$(\star) = \int_0^1 dz \underbrace{\int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} dy}_{\text{triangolo } S_z \text{ come insieme normale risp. asse } x} \ x$$

Esempio Rifacciamo l'esempio con



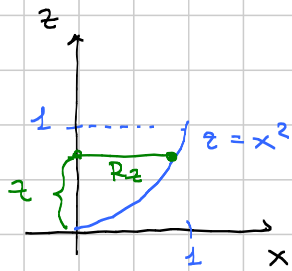
$$x^2+y^2 \leq z \leq 1 \qquad \text{e} \qquad f(x,y,z) = z$$

Per sezioni diventa:

$$\iiint_A z \, dx\, dy\, dz = \int_0^1 dz \iint_{S_z} dx\, dy \ z$$

$$= \int_0^1 z \, dz \iint_{S_z} dx\, dy = \int_0^1 z \cdot \text{Area}(S_z) \, dz = (\star)$$

S_z = cerchio di raggio R_z, quindi



$z = R_z^2$, cioè $R_z = \sqrt{z}$

$$= \int_0^1 z \cdot \pi z \, dz = \pi \int_0^1 z^2 dz = \frac{1}{3}\pi.$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 036

Titolo nota 04/11/2015

COORDINATE CILINDRICHE (in $\mathbb{R}^3$)

(x, y, z) cartesiane $\qquad$ $(\underbrace{\rho, \theta}_{\text{polari corrispondenti a } x \text{ e } y}, \overset{\text{quota}}{z})$ cilindriche

$$\boxed{x = \rho\cos\theta \qquad y = \rho\sin\theta \qquad z = z}$$

Esempio $\quad A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \le 3, \ |z| \le 4\}$

cu coord. cilindriche diventa

$$0 \le \rho \le \sqrt{3} \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad -4 \le z \le 4$$

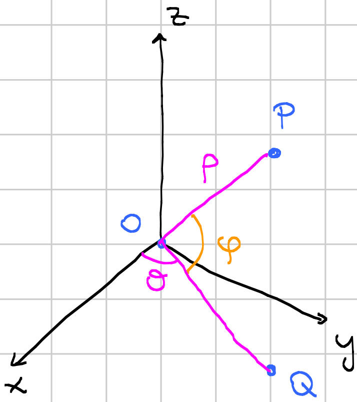
Negli integrali

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{\underset{\text{Descrizione di } A \text{ cu coord. cilindriche}}{B}} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\,\underset{J = \text{pagamento}}{\boxed{\rho}}\,d\rho\,d\theta\,dz$$

—o—o—

COORDINATE SFERICHE

Coord. sferiche (alla moda dei geografi).



Dato $P \in \mathbb{R}^3$, si definisce Q come la proiezione di P sul piano xy e poi si definisce

→ ρ = lunghezza di OP $\quad (\rho \ge 0)$

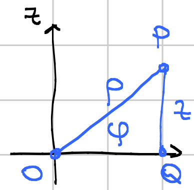
→ φ = angolo tra OP e OQ (angolo tra OP e piano xy) $\quad (\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$

→ θ = "θ di Q" = angolo tra OQ e semiasse $x > 0$ $\quad (\theta \in [0, 2\pi])$

Interpretazione geografica:

→ φ è la LATITUDINE di P $\varphi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
→ θ è la LONGITUDINE di P $\theta \in [0, 2\pi]$

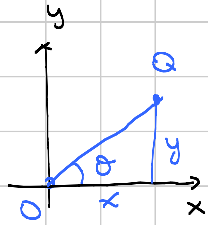
Casi particolari:
→ l'origine ha $\rho = 0$ e θ e φ con poco senso
→ i p.ti dell'asse z che hanno $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ e θ non definito.



Formule di passaggio:

$z = \rho \sin\varphi$ $x = \rho \cos\varphi \cos\theta$

$z = PQ = OP \cdot \sin\varphi$ $x = OQ \cdot \cos\theta = \rho \cos\varphi \cos\theta$



$y = OQ \cdot \sin\theta = \rho \cos\varphi \sin\theta$

In conclusione

$$\boxed{x = \rho \cos\varphi \cos\theta \qquad y = \rho \cos\varphi \sin\theta \qquad z = \rho \sin\varphi}$$

Viceversa $\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Determinante J da usare negli integrali.
Si parte dalla matrice

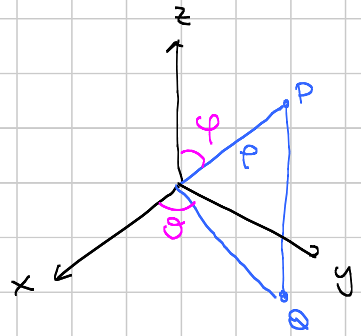
$$\begin{pmatrix} x_\rho & y_\rho & z_\rho \\ x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_\varphi & y_\varphi & z_\varphi \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} \overset{\text{esercizio}}{=} \boxed{\rho^2 \cos\varphi}$$

Formula per gli integrali

$$\iiint_A f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{B} f(\rho\cos\varphi\cos\vartheta, \ldots, \ldots)\,\rho^2\cos\varphi\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi$$

$\uparrow$ Descrizione di A in coord. sferiche

Achtung! Molti (in particolare i fisici) usano un'altra convenzione per le sferiche con



$\rightarrow$ φ = angolo tra OP e semiasse positivo delle z

Conseguenze

$\rightarrow$ φ varia in $[0,\pi]$

$\rightarrow$ nelle formule si scambiano $\sin\varphi$ e $\cos\varphi$

Esempio 1 $\iiint_S z^2\,dx\,dy\,dz$ $\quad S$ = sfera con centro in O e raggio 2

$$= \underbrace{\int_0^2 d\rho \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi}_{\text{sfera in coordinate sferiche}} \quad \underbrace{\rho^2\sin^2\varphi}_{z^2} \quad \underbrace{\rho^2\cos\varphi}_{J}$$

$$= \underbrace{\int_0^2 \rho^4\,d\rho}_{\frac{32}{5}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\vartheta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\varphi\cos\varphi\,d\varphi}_{\left[\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} = \frac{2}{3}} = \frac{128}{15}\pi$$

Esempio 2 $\iiint_S x^2\,dx\,dy\,dz$ è uguale per simmetria, ma il calcolo con la formula sarebbe più complicato (c'è anche ϑ)

Cambio di variabili in generale: funziona come in $\mathbb{R}^2$ solo che il Det da fare è 3×3.

Esempio 3 $\iiint_S y^2\,dx\,dy\,dz$ S = sfera di raggio 2 e centro in $(5,3,4)$

Equazione sfera: $\underbrace{(x-5)}_{u}{}^2 + \underbrace{(y-3)}_{v}{}^2 + \underbrace{(z-4)}_{w}{}^2 \le 4$

$$\iiint_S y^2\,dx\,dy\,dz = \iiint_{S'} (v+3)^2\,du\,dv\,dw$$

$J=1$ perché è una traslazione

S' → sfera $u^2+v^2+w^2 \le 4$

$$= \iiint_{S'} (\underbrace{v^2}_{\frac{128}{15}\pi} + \underbrace{6v}_{0} + \underbrace{9}_{9\cdot \mathrm{Vol}(S') = 9\cdot\frac{4}{3}\pi\, 2^3})\,du\,dv\,dw = \frac{128}{15}\pi + \frac{9\cdot 32}{3}\pi$$

Esempio 4 Volume della sfera di raggio R $= \iiint_S 1\,dx\,dy\,dz$

$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Coord. sferiche

$$\int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \cdot 1 \cdot \rho^2\cos\varphi = \underbrace{\int_0^R \rho^2\,d\rho}_{\frac{1}{3}R^3} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi\,d\varphi}_{2}$$

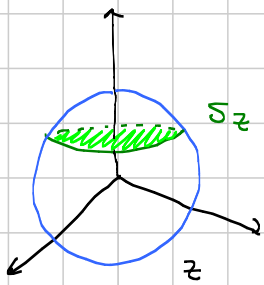
$$= \frac{4}{3}\pi R^3$$

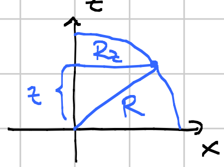
$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Per sezioni

$$\int_{-R}^{R} dz \underbrace{\iint_{S_z} 1\,dx\,dy}_{\text{Area}(S_z)} = \int_{-R}^{R} \text{Area}(S_z)\,dz$$

$$= \int_{-R}^{R} \pi R_z^2\,dz$$

$$= \pi\int_{-R}^{R} (R^2 - z^2)\,dz \quad \text{— si conclude}$$





$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Proviamo per colonne.

Base $= \Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \Omega, -\sqrt{R^2-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2-x^2-y^2}\}$$

Quindi

$$\iiint_S 1 \, dx\,dy\,dz = \iint_\Omega dx\,dy \int_{-\sqrt{\dots}}^{\sqrt{\dots}} 1 \, dz = 2 \iint_\Omega dx\,dy \sqrt{R^2-x^2-y^2}$$

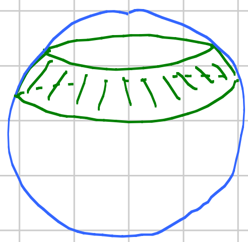
$$= 2 \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{R^2-\rho^2} \underset{J}{\rho} = 4\pi \int_0^R \rho \sqrt{R^2-\rho^2} \, d\rho$$

$$= 4\pi \left[\frac{2}{3} [R^2-\rho^2]^{3/2} \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^R$$

$$= \frac{4\pi}{3} R^3$$

<u>Esempio 5</u> Segmento sferico $\{(x,y,z) \in S : a \leq z \leq b\} = S_{ab}$

Per sezioni promette bene



$$\iiint_{S_{a,b}} 1 \, dx\,dy\,dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} 1 \, dx\,dy$$

$$= \pi \int_a^b R_z^2 \, dz$$

$$= \pi \int_a^b (R^2 - z^2) \, dz$$

$$= \pi \left\{ R^2(b-a) - \frac{1}{3}(b^3-a^3) \right\}$$

Casi speciali : $a=0$ e $b=R$ $\rightsquigarrow$ $\pi \left\{ R^3 - \frac{1}{3}R^3 \right\} = \frac{2\pi}{3} R^3$

$a=-R$ e $b=R$ $\rightsquigarrow$ tutta la sfera.

ANALISI 2 – LEZIONE 037

Titolo nota 04/11/2015

SOLIDI DI ROTAZIONE

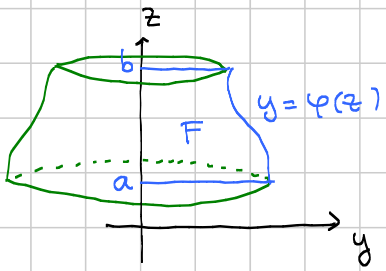


Figura F nel piano yz che ruotando intorno all' asse z descrive un solido S.

Nel caso nel disegno

$$F = \{ (y,z) \in \mathbb{R}^2 : a \le z \le b, \ 0 \le y \le \underbrace{\varphi(z)}_{\text{descrive il profilo della figura } F} \}$$

Descrizione del solido S :

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : a \le z \le b, \ 0 \le \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}_{\text{distanza dall' asse } z} \le \varphi(z) \}$$

In coordinate cilindriche diventa

$$\boxed{a \le z \le b \qquad 0 \le \theta \le 2\pi \qquad 0 \le \rho \le \varphi(z)}$$

Se mi interessa solo la sup. laterale, l' eq. è $\sqrt{x^2+y^2} = \varphi(z)$

Esempio

$x^2+y^2+z^4 = 8$

$x^2+y^2 = 8-z^4$

$\sqrt{x^2+y^2} = \underbrace{\sqrt{8-z^4}}_{\varphi(z)}$

Solido rot. intorno asse z

$x^2+y^4+z^2 = 8$

$x^2+z^2 = 8-y^4$

$\sqrt{x^2+z^2} = \sqrt{8-y^4}$

solido rotaz. intorno asse y

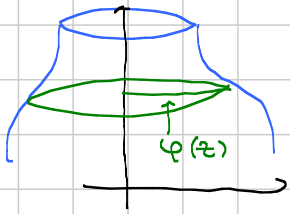
$x^4+y^4+z^2 = 8$

NO solido di rot.

Volume di un solido di rotazione

$$S = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ a \le z \le b, \quad 0 \le x^2+y^2 \le \varphi^2(z) \}$$

$\boxed{1^o \text{ modo}}$ Per sezioni



$$\iiint_S 1\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dz \iint_{S_z} dx\, dy$$

$$= \int_a^b \text{Area}(S_z)\, dz$$

$$= \pi \int_a^b \varphi^2(z)\, dz$$

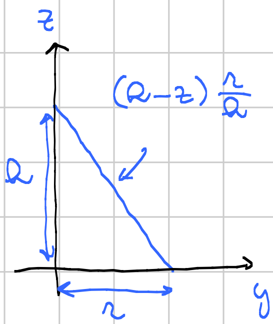
$$\boxed{\text{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\, dz}$$

$\boxed{2^o \text{ modo}}$ Coord. cilindriche

$$\int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\varphi(z)} d\rho\, \underset{J}{\rho} = \int_a^b dz \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{1}{2}\rho^2 \right]_{\rho=0}^{\rho=\varphi(z)}$$

$$= \frac{1}{2} \int_a^b dz \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta\, \varphi^2(z)}_{2\pi} = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\, dz$$

— o — o —



Esempio Volume cono $\quad \varphi(z) = \frac{r}{R}(R-z)$

$$\text{Vol(cono)} = \int_0^R \frac{r^2}{R^2}(R-z)^2\, dz \cdot \pi$$

$$= \text{controllare che venga } \frac{1}{3}\pi r^2 R$$

BARICENTRI E MOMENTI D'INERZIA

<u>Def.</u> Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^2$, si dice BARICENTRO di A il punto $G = (x_G, y_G)$ dove

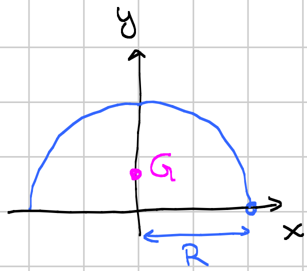
$$\boxed{x_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A x \, dx\, dy} \qquad \boxed{y_G = \frac{1}{\text{Area}(A)} \iint_A y \, dx\, dy}$$

valor medio della coordinata x in A — valor medio di y in A

<u>Oss.</u> Se approssimo una figura con tanti quadratini e faccio il baricentro dei centri dei quadratini, sto costruendo le somme di Riemann per i 2 integrali.

<u>Def</u> In $\mathbb{R}^3$ è analogo, solo che ho 3 coordinate e divido per il Volume

<u>Esempio 1</u> Baricentro di una semicirconferenza



$$\text{Area} = \frac{\pi}{2} R^2 \qquad x_G = 0 \text{ per simmetria}$$

$$\iint_A y \, dx\, dy = \int_0^R d\rho \int_0^\pi d\theta \; \rho \sin\theta \cdot \rho$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^2 \, d\rho}_{\frac{1}{3}R^3} \; \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta \, d\theta}_{2} = \frac{2}{3} R^3$$

Quindi $$y_G = \frac{\iint y}{\text{Area}} = \frac{2}{3} R^3 \cdot \frac{2}{\pi} \frac{1}{R^2} = \frac{4}{3\pi} R$$

<u>Oss.</u> Se ho densità $\rho(x,y)$ variabile, allora

$$x_G := \frac{\iint_A \rho(x) \cdot x \, dx\, dy}{\iint_A \rho(x) \, dx\, dy} \qquad y_G := \text{stessa cosa}$$

Esempio 2 Baricentro della semisfera $x_G = y_G = 0$

Volume $= \frac{2}{3}\pi R^3$

$$\iiint_S z \, dx\,dy\,dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \, \underbrace{\rho \sin\varphi}_{z} \, \underbrace{\rho^2 \cos\varphi}_{J}$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi}_{\left[-\frac{1}{4}\cos(2\varphi)\right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}} = \frac{\pi}{4} R^4$$

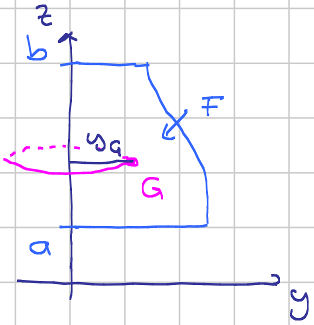
Quindi $z_G = \frac{\cancel{\pi}}{4} R^4 \frac{3}{2\cancel{\pi} R^3} = \frac{3}{8} R$

Confronto con semicerchio $\frac{3}{8} \overset{?}{<} \frac{4}{3\pi} \iff 9\pi < 32$

Il baricentro della semisfera sta sotto quello della semicirconf.

$\boxed{\text{TEOREMA GULDINO 1}}$ Il volume di un solido di rotazione è uguale all'area della figura che ruota moltiplicata per la lungh. della circ. descritta dal baricentro della figura durante la rotazione.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Devo dimostrare che



$$\text{Vol}(S) = \text{Area}(F) \cdot 2\pi y_G$$

Calcolo $y_G = \frac{1}{\text{Area}(F)} \cdot \iint_F y \, dy\,dz$

quindi devo dim che $\text{Vol}(S) = 2\pi \iint_F y \, dy\,dz$

Ma

$$\iint_F y \, dy \, dz = \int_a^b dz \int_0^{\varphi(z)} y \, dy = \int_a^b dz \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{y=0}^{y=\varphi(z)}$$

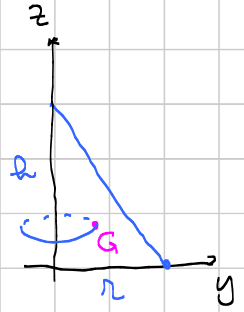
$$= \frac{1}{2} \int_a^b \varphi^2(z) \, dz$$

Quindi mi sono ridotto a $\quad \mathrm{Vol}(S) = \pi \int_a^b \varphi^2(z)\, dz$

che è la formula trovata all'inizio.

— o — o —

Esempi



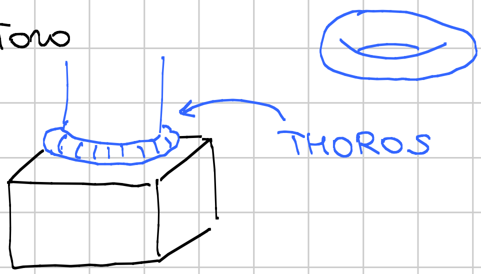
① Cono : Area $(F) = \frac{1}{2} R r$

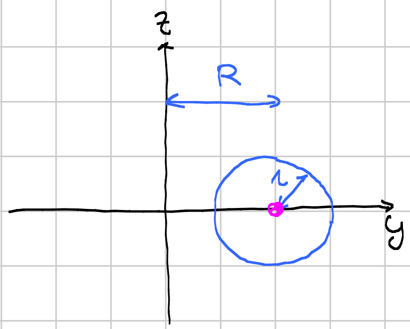
Baricentro : $G = \left(\underbrace{\frac{1}{3} r} , \frac{1}{3} R \right)$

$$\mathrm{Volume} = \underbrace{\frac{1}{2} R r}_{\text{Area}} \cdot 2\pi \frac{1}{3} r = \frac{1}{3} \pi r^2 R$$

② Sfera e cilindro vengono facili.

③ Toro





$$\mathrm{Vol}(\mathrm{Toro}) = \underbrace{\pi r^2}_{\text{area}} \; \underbrace{2\pi R}_{2\pi y_G} = 2\pi^2 r^2 R$$

Oss. Guldino 1 vale per qualunque figura F contenuta nel semipiano $y \geq 0$

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 038

Titolo nota 06/11/2015

Piccolo commento sulle formule di riduzione

Per esempio prendiamo la $3 = 2+1$

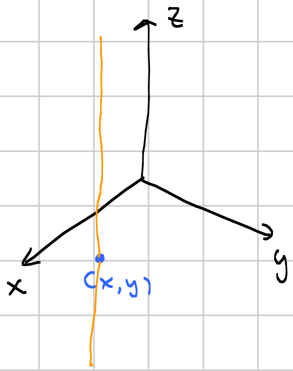
$$\iiint_{*\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz \leq \iint_{*\mathbb{R}^2} dx\,dy \int_{*\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz$$

$$\leq \iint^*_{\mathbb{R}^2} dx\,dy \int^*_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz \leq \iiint^*_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

volendo potrei definire

$$c_*(x,y) = \int_{*\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz$$

$$c^*(x,y) = \int^*_{\mathbb{R}} f(x,y,z)\,dz$$



Con queste notazioni posso riscrivere

$$\boxed{\iiint_{*\mathbb{R}^3} f \leq \iint_{*\mathbb{R}^2} c_*(x,y) \leq \iint^*_{\mathbb{R}^2} c^*(x,y) \leq \iiint^*_{\mathbb{R}^3} f}$$

Questa formula vale per ogni $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ limitata e nulla fuori da un limitato.

Se suppongo che per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ valga $c_*(x,y) = c^*(x,y)$, e che $f(x,y,z)$ sia integrabile su $\mathbb{R}^3$, allora

→ la funzione $c(x,y)$ è integrabile su $\mathbb{R}^2$

→ valgono tutti gli = nella formula.

La formula generale si dimostra come in $\mathbb{R}^2$, cioè

→ si osserva che è banale per i parallelepipedi con lati // assi

→ si estende per linearità alle SF

→ nel caso generale si considera SF $\geq f$ e $\leq f$ e si fa sup e inf.

La formula per sezioni è la stessa cosa

$$\iiint_{*\mathbb{R}^3} f \leq \int_{*\mathbb{R}} S_*(z)\,dz \leq \int^*_{\mathbb{R}} S^*(z)\,dz \leq \iiint^*_{\mathbb{R}^3} f$$

dove

$$S_*(z) = \iint_{*\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dx\,dy \qquad S^*(z) = \iint^*_{\mathbb{R}^2} f(x,y,z)\,dx\,dy$$

Quando abbiamo integrali su $\mathbb{R}^n$ abbiamo formule analoghe del tipo $n = k + (n-k)$.

— o — o —

<u>Teorema della media integrale</u>

Sia $x_0 \in \mathbb{R}^n$, sia $r > 0$, e sia $f : \overline{B}_r(x_0) \to \mathbb{R}$. chiusa

Supponiamo f continua in tutto l'insieme.

Allora esiste almeno un p.to $c \in \overline{B}_r(x_0)$ t.c.

$$\boxed{\int_{\overline{B}_r(x_0)} f(x) = f(c) \cdot \underbrace{\operatorname{meas}(\overline{B}_r(x_0))}_{= \int_{\overline{B}_r(x_0)} 1}}$$

<u>Dim.</u> (stessa di Analisi 1) Sia m ed M il min e max di f nella palla (esistono per W.). Allora

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \forall x \in \overline{B}_r(x_0)$$

Per monotonia e linearità dell'integrale

$$m \int_B 1 \leq \int_B f \leq M \boxed{\int_B 1} = \operatorname{meas}(B)$$

Ma allora $m \leq \dfrac{1}{\operatorname{meas}(B)} \int_B f \leq M$. Visto che f è continua e B è connessa esiste un p.to t.c. $f(c) =$

— o — o —

Oss. Non è importante essere in $\overline{B}_r(x_0)$, ma basta un compatto, connesso, misurabile.

Oss. La media integrale è il valore che dovrebbe avere una funzione costante per avere lo stesso integrale di $f(x)$.

— o — o —

$\boxed{\text{MOMENTO D'INERZIA}}$ (Di una figura piana/solida rispetto ad un asse)

Per definizione è

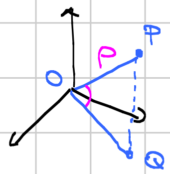
$$\boxed{\int_F \text{dist}^2(x, \text{asse})\, dx}$$

assumendo densità costante

doppio o triplo a seconda dei casi

$$\boxed{\int_F \rho(x)\cdot \text{dist}^2(x, \text{asse})\, dx}$$

Esempio 1 Calcolare momento di inerzia di una sfera rispetto ad un asse passante per il centro.



$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2 \le R^2\} \qquad \text{Asse } z$$

$$\iiint_S \underbrace{(x^2+y^2)}_{\text{dist}^2 \text{ dall'asse } z}\, dx\, dy\, dz = \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \underbrace{\rho^2\cos^2\varphi}_{x^2+y^2} \cdot \underbrace{\rho\cos\varphi}_{J}$$

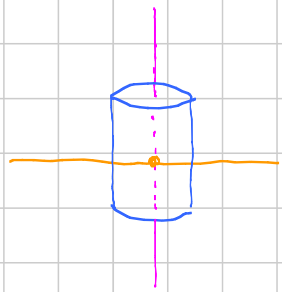
$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3\, d\rho}_{\frac{1}{4}R^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\ \cos^3\varphi}_{\text{un passaggio per parti}}$$

Esempio 2 Momento d'inerzia di un cilindro rispetto all'asse.

$$C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le r^2,\ 0 \le z \le R\} \qquad \text{asse } z$$

$$\iiint_C (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz \underset{\text{cilindriche}}{=} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R dz\ \rho^2 \cdot \rho =$$

$$= \underbrace{\int_0^R \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4} r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} \underbrace{\int_0^R dz}_{R} = \frac{1}{2}\pi r^4 R$$



Esempio 3 Momento di un cilindro rispetto ad un asse passante per il centro e perpendicolare all'asse del cilindro stesso.

$$C = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \le r^2, -\frac{R}{2} \le z \le \frac{R}{2} \}$$

Così il centro è nell'origine e posso usare l'asse x

$$\iiint_C \underbrace{(y^2+z^2)}_{\text{distanza}^2\text{ del generico pto }(x,y,z)\text{ dall'asse }x} dx\,dy\,dz \underset{\text{cilindriche}}{=} \int_0^r d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz \underbrace{(\rho^2 \sin^2\theta + z^2)}_{y^2+z^2} \underset{J}{\rho}$$

Lo spezzo in 2 integrali

$$\underbrace{\int_0^r \rho^3 d\rho}_{\frac{1}{4}r^4} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin^2\theta \, d\theta}_{\pi} \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} dz}_{R} = \frac{\pi}{4} r^4 R$$

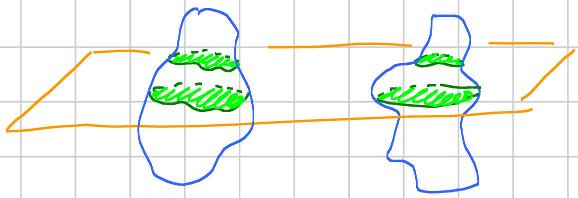
$$\underbrace{\int_0^r \rho \, d\rho}_{\frac{1}{\cancel{2}}r^2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{\cancel{2}\pi} \underbrace{\int_{-\frac{R}{2}}^{\frac{R}{2}} z^2 dz}_{\frac{1}{3} 2 \frac{R^3}{8}} = \frac{\pi}{12} r^2 R^3$$

— o — o —

PRINCIPIO DI CAVALIERI

In versione $\mathbb{R}^3$: due figure solide che determinano sezioni di area uguale rispetto ad una stessa famiglia di piani paralleli hanno lo stesso volume.

[Dim: calcolo del volume per sezioni



$$\mathrm{Vol}(S) = \int_{z_{min}}^{z_{max}} \underbrace{\mathrm{Area}(S_z)}_{\text{se le aree sono uguali, i volumi sono uguali}} \, dz$$

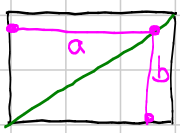
Preliminarmente, ho sistemato gli assi in modo che i piani paralleli siano quelli $z = \lambda$]

In $\mathbb{R}^2$ vale lo stesso discorso, solo con la lunghezza delle sezioni.

Esempio

Tutte le sezioni con rette // asse x hanno la stessa lungh.

Oss. È importante che sia la STESSA famiglia di piani o rette parallele.



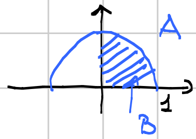
$a > b$ per ogni p.to della diagonale

ANALISI 2 — LEZIONE 039

Titolo nota 06/11/2015

INTEGRALI CON VALORI ASSOLUTI

Strategie : → cavarsela con le simmetrie
→ spezzare la zona di integrazione



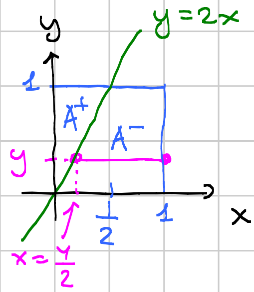
Esempio 1 $\iint_A |y|\, dx\, dy = \iint_A y\, dx\, dy$

$= 2\iint_B y\, dx\, dy = 2\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} \rho \sin\theta \cdot \rho \, d\theta$

$= 2\underbrace{\int_0^1 \rho^2 d\rho}_{\frac{1}{3}} \underbrace{\int_0^{\pi/2} \sin\theta\, d\theta}_{1} = \frac{2}{3}$

Esempio 2 $\iint_A |x|\, dx\, dy$ A = semicerchio di prima

$= 2\iint_B |x|\, dx\, dy = 2\iint_B x\, dx\, dy = \frac{2}{3}$ come prima



Esempio 3 $\iint_A |y-2x|\, dx\, dy$ $A = [0,1]\times[0,1]$

$$|y-2x| = \begin{cases} y-2x & \text{in } A^+ \\ -y+2x & \text{in } A^- \end{cases}$$

$\iint_A |y-2x|\, dx\, dy = \iint_{A^+} (y-2x)\, dx\, dy + \iint_{A^-} (2x-y)\, dx\, dy$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\iint_{A^-} (y-2x)\, dx\, dy$

$= \int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_{2x}^1 dy\, (y-2x) + \underbrace{\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{2x} dy\, (2x-y) + \int_{\frac{1}{2}}^1 dx \int_0^1 dy\, (2x-y)}_{\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 dx\, (2x-y)}$

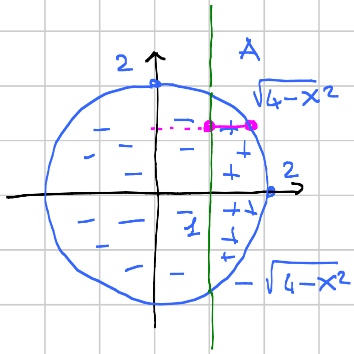
= conti

<u>Oss.</u> Si poteva fare

$$\iint_A |y-2x|\,dx\,dy = \underbrace{\iint_A (2x-y)\,dx\,dy}_{\text{quadrato}} + 2\underbrace{\iint_{A^+} (y-2x)\,dx\,dy}_{\text{triangolo}}$$

$$\iint_{A^+} (2x-y) + \iint_{A^-} (2x-y)$$

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\iint_A |x-1|\,dx\,dy$



$$= \iint_{A^+} (x-1)\,dx\,dy - \iint_{A^-} (x-1)\,dx\,dy$$

oppure come nell' osservazione precedente

$$\underbrace{\iint_A (1-x)\,dx\,dy}_{\text{Banale: Area } = 4\pi} + 2\iint_{A^+} (x-1)\,dx\,dy$$

Resta da calcolare $\displaystyle\iint_{A^+} (x-1)\,dx\,dy$. Tre strategie possibili

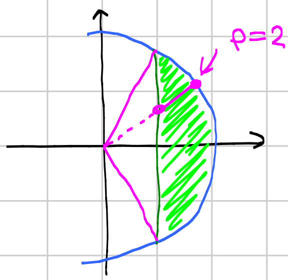
$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ Normale asse x:

$$\int_1^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} (x-1)\,dy = \int_1^2 (x-1)\cdot 2\sqrt{4-x^2}\,dx = \text{analisi 1}$$

secante

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Normale asse y: $\displaystyle\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} dy \int_1^{\sqrt{4-y^2}} dx\,(x-1) = $ si fa

$\boxed{3^\circ \text{ modo}}$ Polari dirette $\quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$



$x = 1 \qquad \rho\cos\theta = 1 \qquad \rho = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$$\frac{1}{\cos\theta} \le \rho \le 2$$

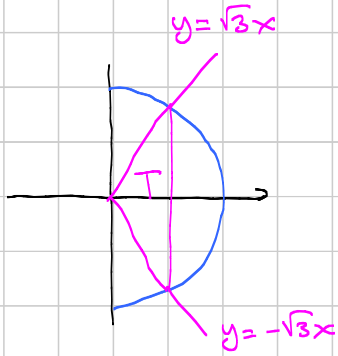
L'integrale diventa

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{1} d\rho\ [\underbrace{\rho\cos\theta - 1}_{x-1}]\ \underbrace{\rho}_{J}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{1} d\rho\ [\rho^2\cos\theta - \rho] = 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\ \left[\frac{1}{3}\rho^3\cos\theta - \frac{1}{2}\rho^2\right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{1}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{3}} d\theta\ \left(\frac{1}{3}\cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{3}\frac{1}{\cos^2\theta} + \frac{1}{2}\frac{1}{\cos^2\theta}\right) = \text{analisi 1 facile}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2\theta} = \tan\theta$$



$\boxed{4° \text{ modo}}$ Settore − triangolo

$$\iint_{A^+} = \overbrace{\int_0^2 d\rho \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta\ (\rho\cos\theta - 1)\rho}^{\text{settore}} - \underbrace{\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{3}x}^{\sqrt{3}x} dy\ (x-1)}_{\text{triangolo in cartesiane}}$$

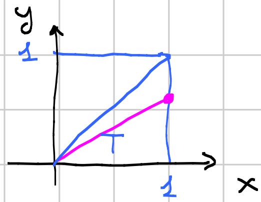
<u>Esempio 5</u> $\iiint_S |x-1|\, dx\, dy\, dz$ $\quad S$ = sfera con centro nell'origine e raggio 2

Osservo che è uguale a $\iiint_S |z-1|\, dx\, dy\, dz$ e questo lo faccio per sezioni lungo asse z.

$$\iiint_S |z-1|\, dx\, dy\, dz = \int_{-2}^{2} dz\ |z-1| \cdot \text{Area}(S_z)$$

$$= \int_{-2}^{2} dz\ |z-1| \cdot \pi \underbrace{R_z^2}_{R_z^2} = \pi \int_{-2}^{2} |z-1|\,(4-z^2)\, dz$$

= analisi 1 con valore assoluto.



Esempio 6 $\displaystyle\iint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad Q=[0,1]\times[0,1]$

$$= \int_0^1 dx \int_0^1 dy \underbrace{\sqrt{x^2+y^2}}$$

si fa con la comoda sostituzione

$y = x \sinh t$

Provo in polari. Per simmetria

$$\iint_Q \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy = 2\iint_T \sqrt{x^2+y^2}\,dx\,dy \qquad \rho\cos\theta = 1 \quad \rho = \frac{1}{\cos\theta}$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta}} \underbrace{\rho}_{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \rho\, d\rho$$

$$= \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} d\theta \left[\rho^3\right]_0^{\frac{1}{\cos\theta}} = \frac{2}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta$$

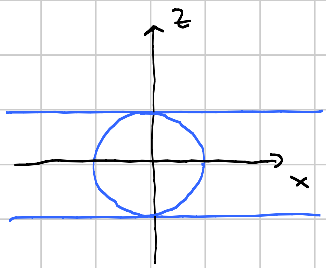
$$\int \frac{1}{\cos^3\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta}\,d\theta = \int \frac{\cos\theta}{(1-\sin^2\theta)^2}\,d\theta = \int \frac{dt}{(1-t^2)^2}$$

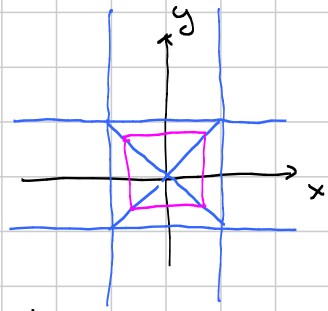
$=$ si fa.

Esempio 7 $S = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \underbrace{x^2+z^2\le 1}_{\text{cilindro asse } y},\ \underbrace{y^2+z^2\le 1}_{\text{cilindro asse } x}\}$

$\text{Vol}(S) =$

$$= \int_{-1}^{1} dz \ \text{Area}(S_z)$$





Chi è S_z ?

Fisso z, e voglio capire dove variano x e y: dalle equazioni

$x^2 \le 1-z^2$, $y^2 \le 1-z^2$, cioè $|x| \le \sqrt{1-z^2}$ $\quad |y| \le \sqrt{1-z^2}$

La sezione è un quadrato di lato $2\sqrt{1-z^2}$

In conclusione

$$\int_{-1}^{1} \text{Area}(S_z)\,dz = 4\int_{-1}^{1} (1-z^2)\,dz = \text{si fa banale}$$

<u>Oss.</u> L'area $4(1-z^2)$ è, a meno di fattori π, la stessa che si ottiene sezionando una sfera.
Quindi per il principio di Cavalieri

$$\text{Vol}(S) = \frac{4}{\pi}\,\text{Vol}(\text{sfera di } R=1) = \frac{4}{\pi}\,\frac{4}{3}\pi = \frac{16}{3}$$

<u>Esercizio vero</u>: aggiungere il terzo cilindro lungo asse z e trovare

→ volume

→ numero di "facce"

→ superficie (in futuro)

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 040

Titolo nota 10/11/2015

CAMBIO DI VARIABILI NEGLI INTEGRALI MULTIPLI

Def. Siano A e B due aperti di $\mathbb{R}^n$. Si dice DIFFEOMORFISMO tra A e B una qualunque funzione $\varphi : A \to B$ di classe C^1 con inversa $\psi : B \to A$ pure lei di classe C^1.

Oss. La matrice jacobiana $J\varphi(x)$ è invertibile in ogni p.to $x \in A$ e idem per $J\psi(x)$ per $x \in B$. Inoltre per il teo. delle funzioni composte

$$J\psi(\varphi(x)) \cdot J\varphi(x) = Id \quad \forall x \in A \qquad\qquad J\varphi(\psi(x))\, J\psi(x) = Id \quad \forall x \in B$$

Teorema Sia $\varphi : A \to B$ un diffeomorfismo.
Sia $f : B \to \mathbb{R}$ una funzione limitata con supporto compatto $K \subseteq B$ (cioè $f(x) = 0$ per ogni $x \notin K$).
Allora

$$\boxed{\int^*_B f(y)\, dy = \int^*_A f(\varphi(x)) \cdot |\operatorname{Det} J\varphi(x)|\, dx}$$

e idem per gli integrali inferiori.

Oss. In un certo senso generalizza il cambio di variabili di analisi 1:

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(y)\, dy = \int_a^b f(\varphi(x))\, \varphi'(x)\, dx \qquad y = \varphi(x)$$

$$\varphi : \underbrace{[a,b]}_{A} \to \underbrace{[\varphi(a), \varphi(b)]}_{B}$$

Non c'è il valore assoluto, ma gli estremi possono venire "scambiati". Ad analisi 1 φ non era per forza invertibile.

Oss. Visto che abbiamo usato $\int^*$ e $\int_*$ la formula vale sempre. Inoltre la funzione al LHS è integrabile $\Leftrightarrow$ lo è quella al RHS ed in tal caso vale tutto con integrali veri.

— o — o —

$\boxed{\text{ROAD MAP}}$

(1.1) La formula si comporta bene per composizione

(1.2) Se vale per i rettangoli (cioè f è la funzione caratt. di un rett. $[a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$), e vale con integrali veri, allora vale sempre

(2.1) La formula vale se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ è una trasformazione affine speciale

(2.2) Vale per le trasformazioni affini in generale

FINE PRIMA PARTE

$\boxed{1.1}$ Siano $\varphi_1 : A \to B$ e $\varphi_2 : B \to C$. Se vale per φ_1 e φ_2, allora vale per $\varphi_3 : A \to C$ definita da $\varphi_3(x) = \varphi_2(\varphi_1(x))$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $f : C \to \mathbb{R}$ ammissibile. Allora

$$\int_C^* f(z)\,dz \underset{\text{vale per } \varphi_2}{=} \int_B^* \overbrace{f(\varphi_2(y)) \cdot |\text{Det } J\varphi_2(y)|}^{\hat{f} \text{ su } B}\,dy$$

$$\underset{\text{vale per } \varphi_1}{=} \int_A^* f(\varphi_2(\varphi_1(x))) \cdot |\text{Det } J\varphi_2(\varphi_1(x))| \cdot |\text{Det } J\varphi_1(x)|\,dx$$

$$= \int_A^* f(\varphi_3(x)) \underbrace{|\text{Det } J\varphi_3(x)|}_{\text{Funzione composta}}\,dx$$

e idem per gli integrali inferiori.

— o — o —

$\boxed{1.2}$ Se vale per i rettangoli (con int. veri) per ogni φ appartenente ad una classe di trasformazioni chiusa rispetto al passaggio all'inversa, allora vale per tutte le f per tutte le trasformazioni della classe.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Step 1 Se vale per i rettangoli con integrali veri, allora vale per le step functions, sempre con integrali veri.

$$\int_B f_R(y)\,dy = \int_A f_R(\varphi(x))\,|\mathrm{Det}\,J_\varphi(x)|\,dx \qquad f_R(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in R \\ 0 & \text{se } y \notin R \end{cases}$$

$I_1(f) = \text{LHS}$, $I_2(f) = \text{RHS}$ sono applicazioni lineari definite su SF e coincidono in una base, quindi coincidono ovunque. Qui serve che siano integrali veri.

Step 2 Se vale sulle SF, allora prendo una f qualunque e prendo una qualunque SF $g \geq f$ in B (g nulla fuori da B) Allora

$$\int_B g(y)\,dy = \int_A \underbrace{g(\varphi(x))}_{\geq f(\varphi(x))} \cdot |\mathrm{Det}\,J_\varphi(x)|\,dx$$

$$\geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\mathrm{Det}\,J_\varphi(x)|\,dx$$

Fatto generale: se $g_1 \geq g_2$ e g_1 è integrabile, allora $\int g_1 \geq \int^* g_2$

Facendo l'inf. su tutte le $g \geq f$ ottengo

$$\int_B^* f(y)\,dy \geq \int_A^* f(\varphi(x)) \cdot |\mathrm{Det}\,J_\varphi(x)|\,dx = (\star)$$

Step 3 Ora abbiamo assunto che tutto ciò valga non solo per φ, ma anche per la sua inversa $\psi : B \to A$. Ma allora

$$(\star) \geq \int_B^* f(\underbrace{\varphi(\psi(x))}_{x}) \underbrace{|\mathrm{Det}\,J_\varphi(\psi(x))| \cdot |\mathrm{Det}\,J_\psi(x)|}_{1}\,dx = \int_B^* f(x)\,dx$$

Quindi sono tutte uguaglianze. Idem per gli integrali inferiori

— o — o —

$\boxed{2.1}$ Trasf. affini speciali

(A) Traslazioni: è banale che vale per i rettangoli, sono stabili per inversa, quindi vale per le traslazioni

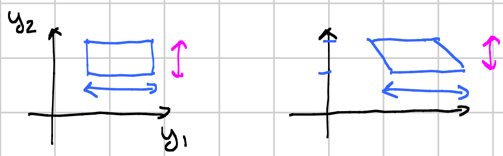
(B) Scambi di coordinate: $M_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ = scambiare x_i e x_j
Per queste vale banalmente sui rettangoli, ognuna è l'inversa di se stessa, quindi per queste vale

(C) Dilatazione sulla prima coord: $M_\lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, x_2, \dots, x_n)$

Vale per i rettangoli perchè il $|\det| = |\lambda|$ compensa il cambio di "volume" del rettangolo. La classe è chiusa per inversa, quindi anche qui vale per ogni funzione.

(D) Somma prime due coordinate $S(x_1, \dots, x_n) = (x_1 + x_2, x_2, \dots, x_n)$
$|\operatorname{Det} S| = 1$. L'effetto su un rettangolo

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_R(y)\, dy = \int_{\mathbb{R}^n} f_R(\varphi(x))\, dx$$



Ancora una vale per i rettangoli, dunque vale in generale perché l'inversa è dello stesso tipo.

$\boxed{2.2}$ Trasformazioni affini generali

Ogni trasformazione affine è composizione di trasformazioni di tipo (A), (B), (C), (D) (lemma di algebra lineare).
Grazie al pto $\boxed{1.1}$ se vale per le singole trasformazioni vale anche per la composizione.

<u>Corollario</u> Sia $\varphi(x) = Lx$ una trasformazione lineare.
Sia $S \subseteq B$ un insieme misurabile
Allora

$$\int_B f_S(y)\,dy = \int_A f_S(\varphi(x))\,|\mathrm{Det}\, L|\,dx \qquad \begin{array}{l}\varphi : A \to B\\ \psi : B \to A\end{array}$$

$$\text{meas}(S) = |\mathrm{Det}\, L|\ \text{meas}(\psi(S))$$

Questo dice come si trasforma la misura degli insiemi.

Analogamente, dato un insieme $K \subseteq A$ misurabile

$$\boxed{\text{meas}(\varphi(K)) = |\mathrm{Det}\, L|\ \text{meas}(K)}$$

<u>Dim.</u> Basta usare la riga di sopra con $S = \varphi(K)$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 041

Titolo nota 10/11/2015

CAMBIO DI VARIABILI IN GENERALE

ROAD MAP : (1) Se vale per i cubi con integrali veri per una classe di trasformazioni chiusa rispetto all' inversa, allora vale in generale

(2) Se vale per i cubi piccoli a meno di ε (da specificare), allora vale per i cubi

punto vero → (3) Vale per i cubi piccoli a meno di ε

[1] La teoria degli integrali con SF costruite usando i rettangoli coincide con la teoria fatta a partire dai cubi.

"Dim" [1° passo] Posso fare la teoria usando solo rettangoli ad estremi razionali

estremi reali

estremi in $\mathbb{Q}$

Nelle zone "interne" non modifico la step function.
Nelle zone "ai bordi" la pongo $\pm M$, dove M è la costante che limita la funzione.
In termini di integrale la diff può essere resa piccola.

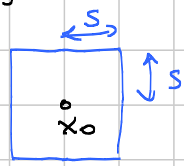
[2° passo] I rettangoli ad estremi razionali sono unione di cubi.

— o — o —

$\boxed{2}$ **Notazione** $\qquad \|x\| := \max_{1 \le i \le n} |x_i|$

Si definisce $\quad C(x_0, s) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| \le s\}$

↑ cubo con centro in x_0 e semilato s



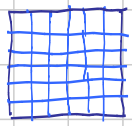
Supponiamo che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall$ cubo $C(y_0, s) \subseteq B$ con $s \le \delta$ vale la formula

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \ldots \qquad \le \int_B f_C(y)\, dy \le (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x))\, |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x)|\, dx$$

↑ vale a meno di ε sui cubi piccoli (di semilato $s \le \delta$)

Allora vale su tutti i cubi senza l'epsilon.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Preso un cubo C grande, fisso $\varepsilon > 0$ e scrivo C come unione di cubi piccoli (rispetto ad ε) essenzialmente disgiunti (senza pti interni in comune)



$$C = \bigcup_{i=1}^{k} C_i$$

Ma allora $\quad f_C(y) = \sum_{i=1}^{k} f_{C_i}(y)$

Uso la linearità a LHS, CHS, RHS e ottengo

$$\frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A \ldots \qquad \le \int_B f_C(y)\, dy \le (1+\varepsilon)^{m+1} \int_A f_C(\varphi(x))\, |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x)|\, dx$$

Poiché vale per ogni $\varepsilon > 0$ facendo tendere $\varepsilon \to 0^+$ ho la tesi.

— o — o —

<u>Cubi e diffeomorfismi</u> Sia $R: U \to V$ un diffeomorfismo. Sia

$$R^{-1}: V \to U \quad \text{la sua inversa.}$$

Come posso stimare $\| R(u_1) - R(u_2) \|$?
Uso Lagrange sulle singole componenti

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| = \langle \nabla R_i(\theta_i), u_1 - u_2 \rangle = \langle \text{vettore}, \text{vettore} \rangle$$

$$|\langle v, w \rangle| = |v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n| \leq |v_1| \cdot |w_1| + \ldots + |v_n| \cdot |w_n|$$
$$\leq (|v_1| + \ldots + |v_n|) \, \|w\|$$

Quindi

$$|R_i(u_1) - R_i(u_2)| \leq \|u_1 - u_2\| \cdot \text{somma elementi della riga } i\text{-esima di } J_R$$

Questa vale per ogni i, quindi

$$\| R(u_1) - R(u_2) \| \leq \max_{u \in U} \| J_R(u) \| \cdot \| u_1 - u_2 \|$$

dove $\|J\| = \max_{1 \leq i \leq n} \| \text{riga } i\text{-esima} \|$

$$\begin{pmatrix} |*|+|*|+|*| \\ |*|+|*|+|*| \\ |*|+|*|+|*| \end{pmatrix} \begin{matrix} \to R_1 \\ \to R_2 \\ \to R_3 \end{matrix}$$

$\downarrow$ max
$\|J\|$

Data una matrice J:

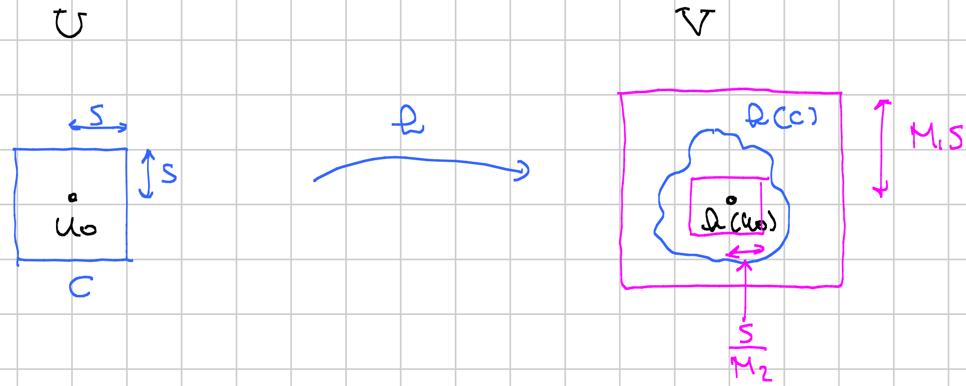
$$\underbrace{\| Jx \|}_{\text{max comp}} \leq \underbrace{\|J\|}_{\text{max somma riga}} \cdot \underbrace{\|x\|}_{\text{max comp.}}$$

Aggiunto dopo video: da qui in poi è fatto forse meglio alla LEZ. successiva

—o—o—o—o—o—o—o—o—

$\boxed{\text{Lemma dei cubetti}}$ Se $R: U \to V$ è un diffeomorfismo, allora esistono 2 costanti M_1 ed M_2 t.c.

$$\boxed{C\left(R(u_0), \frac{s}{M_2}\right) \subseteq R(C(u_0, s)) \subseteq C(R(u_0), M_1 s)}$$



La cosa non ovvia è che M_1 ed M_2 non dipendono dal cubo in partenza, ma solo da $\mathcal{R}$.
In particolare posso prendere

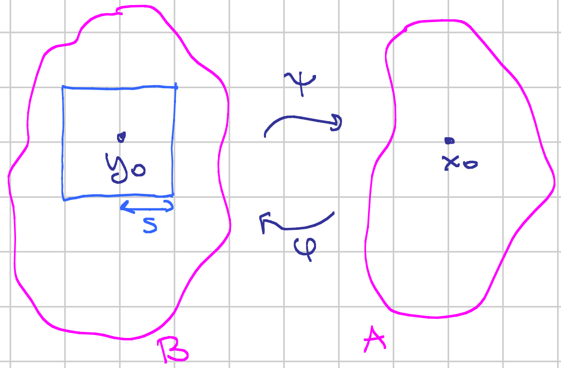
$$M_1 := \sup \{ \| J_{\mathcal{R}}(u) \| : u \in \mathcal{U} \}$$

$$M_2 := \sup \{ \| J_{\mathcal{R}^{-1}}(v) \| : v \in V \}$$

Dato per buono il lemma, dimostriamo che la formula vale a meno di ε per i cubi piccoli.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso il lemma usando $\mathcal{R}(y) = J_{\varphi}(x_0)\,(\psi(y))$

non sto tornando indietro, ma quasi



$$J_{\mathcal{R}}(y) = J_{\varphi}(x_0) \cdot J_{\psi}(y)$$

Per $y = y_0$ è la matrice identica, quindi se s è abbastanza piccolo $J_{\mathcal{R}}(y)$ è vicina all'identità, quindi $\| J_{\mathcal{R}}(y) \|$ e $\| J_{\mathcal{R}^{-1}}(y) \|$ sono vicine a 1.

Prendiamo la piccolezza in modo che M_1 ed M_2 siano $\leq 1+\varepsilon$.
Allora

$R(C(y_0,s)) \subseteq C(R(y_0),(1+\varepsilon)s)$ quindi

$$\text{meas}(\underset{\shortparallel}{R}(C(y_0,s))) \leq \text{meas}(C(R(y_0),(1+\varepsilon)s))$$
$$= 2^n \cdot (1+\varepsilon)^n s^n$$

$$\text{meas}(J_\varphi(x_0)\,\psi(C(y_0,s)))$$
$\shortparallel \leftarrow$ ho usato come le trasformazioni lineari cambiano la misura
$$|\text{Det}\, J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\psi(C(y_0,s)))$$

A questo punto

$$\int_A f_C(\varphi(x))\,|\text{Det}\, J_\varphi(x)|\,dx = \int_{\psi(C)} |\text{Det}\, J_\varphi(x)|\,dx$$
$$\boxed{\sim} \int_{\psi(C)} |\text{Det}\, J_\varphi(x_0)|\,dx$$
$$= |\text{Det}\, J_\varphi(x_0)| \cdot \text{meas}(\psi(C))$$
$$\leq (1+\varepsilon)^n \cdot 2^n \cdot s^n$$
$$= (1+\varepsilon)^n \cdot \text{meas}(C)$$
$$= (1+\varepsilon)^n \cdot \int_B f_C(y)\,dy$$

Preciso il passaggio $\sim$. Voglio dire che $|\text{Det}\, J_\varphi(x)| \sim |\text{Det}\, J_\varphi(x_0)|$ se x è vicino a x_0. Pur di scegliere il cubo iniziale abbastanza piccolo, avremo che

$$|\text{Det}\, J_\varphi(x)| \leq |\text{Det}\, J_\varphi(x_0)| \cdot (1+\varepsilon)$$

e questo sostituito porta alla formula

$$\int_A f_C(\varphi(x)) \cdot |\text{Det}\, J_\varphi(x)|\,dx \leq (1+\varepsilon)^{n+1} \int_B f_C(y)\,dy$$

che è una delle 2 che volevo.

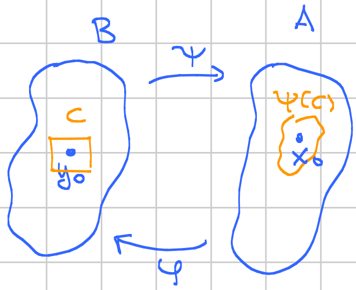
ANALISI 2 – LEZIONE 042

Titolo nota 11/11/2015

Back to cambio variabili

In modo standard si arriva al punto

"se vale la formula a meno di ε sui cubi piccoli, allora vale in generale"



Brutale: perché è vero sui cubi piccoli?

$$\int_A f_C(\varphi(x))\,|\mathrm{Det}\,J\varphi(x)|\,dx =$$

$$= \int_{\psi(C)} |\mathrm{Det}\,J\varphi(x)|\,dx$$

$$\sim \int_{\psi(C)} |\mathrm{Det}\,J\varphi(x_0)|\,dx$$

[Se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo, quindi $|\mathrm{Det}\,J\varphi(x)| \sim |\mathrm{Det}\,J\varphi(x_0)|$ $\forall x\ \psi(C)$]

$$= |\mathrm{Det}\,J\varphi(x_0)|\,\mathrm{meas}(\underbrace{\psi(C)}_{S})$$

[$\mathrm{meas}(L(S)) = |\mathrm{Det}\,L| \cdot \mathrm{meas}(S)$ per ogni L lineare]

$$= \mathrm{meas}(J\varphi(x_0)(\psi(C)))$$

$$= \mathrm{meas}(Q(C)) \quad \text{dove } Q = J\varphi(x_0) \circ \psi$$

$$\overset{(*)}{\sim} \mathrm{meas}(C) = \int_B f_C(y)\,dy$$

$JQ(y) = J\varphi(x_0) \cdot J\psi(y)$ se $y = y_0$ allora $JQ(y) = Id$, ma allora se C è piccolo $JQ(y) \sim Id$, quindi Q moralmente è una traslazione.

— o — o —

Notazioni $\|x\| = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$ $C(y_0, s) := \{y \in \mathbb{R}^n : \|y - y_0\| \le s\}$ ↑ cubo

Data una matrice M, si pone

$$\|M\| = \max_{1 \le i \le n} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} |M_{ij}|}$$ ← somma sulla riga i-esima

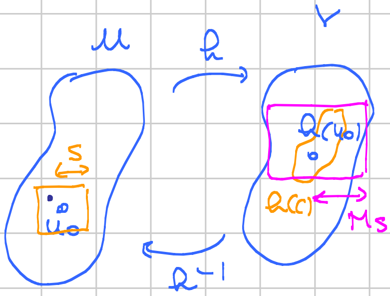
$\boxed{\text{LEMMA DEL CUBETTO ESTERNO}}$ Dato un generico diffeomorfismo

$$\mathcal{R} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V} \qquad (\mathcal{U} \text{ e } \mathcal{V} \text{ sono aperti in } \mathbb{R}^n)$$

e dato un cubo $C(u_0, s) \subseteq \mathcal{U}$ vale la relazione

$$\mathcal{R}(C(u_0,s)) \subseteq C(\mathcal{R}(u_0), Ms)$$

dove $M = \max\limits_{u \in C(y_0,s)} \|J_{\mathcal{R}}(u)\|$.



$\boxed{\text{Dim.}}$ Si tratta di far vedere che

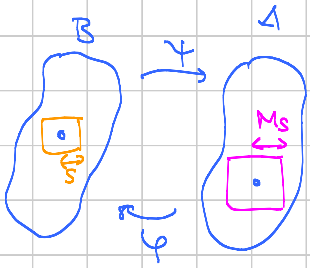
$$\|\mathcal{R}(u) - \mathcal{R}(u_0)\| \leq M \|u - u_0\| \quad \text{dove } M \text{ è definito come sopra}$$
$$\leq Ms$$

La disuguaglianza segue da Lagrange (ved. las. 41)

— o — o —

<u>Conseguenza 1</u> Applico il lemma con $\mathcal{R} = \psi : B \longrightarrow A$

Posto $\hat{M} := \sup\limits_{y \in B} \|J_\psi(y)\|$ che suppongo finito



avremo che

$$\psi(C(y_0,s)) \subseteq C(\psi(y_0), Ms)$$

indipendente dal cubo

[Abbiamo detto meglio: "se C è piccolo, allora $\psi(C)$ è piccolo"]

— o — o —

<u>Conseguenza 2</u> Dalla conseguenza 1 segue che

$$\overset{*}{\text{meas}}(\psi(C(y_0,s))) \leq M^n \underbrace{\text{meas}(C(y_0,s))}_{(2s)^n}$$

$*$ ${}^{*}1$ sull'insieme

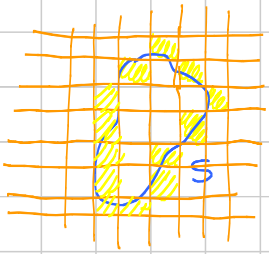
<u>Dim</u>: banale da sopra

Conseguenza 3 ↑Esercizio

Se $S \subseteq B$ è misurabile, allora $\psi(S)$ è misurabile

$\boxed{\text{Dim.}}$ S è misurabile $\iff$ $\forall \varepsilon > 0$ posso ricoprire ∂S con cubetti di misura totale $< \varepsilon$, cioè

$$\partial S \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} C_i$$



Ma allora $\partial\psi(S) = \psi(\partial S) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \psi(C_i)$

↑ ψ è diffeom.

↑ a sua volta contenuti in cubi di semilato un po' più grande

Allora $\partial\psi(S)$ è contenuta in cubi di misura totale $< M^n\varepsilon$, e quindi $\psi(S)$ è misurabile.

—o—o—

Oss. Grazie alla conseguenza 3 posso risparmiare un po' di integrali inferiori e superiori

—o—o—

$\boxed{\text{Scelta della piccolezza dei cubi}}$ Scelgo $\delta > 0$ abbastanza piccolo in maniera tale che valgano 2 proprietà ($\varepsilon > 0$ è dato)

→ $|\text{Det } J\varphi(x_1)| \leq (1+\varepsilon)\, |\text{Det } J\varphi(x_2)|$ $\forall x_1 \text{ e } x_2$ in A con $\|x_1 - x_2\| \leq \hat{M}\delta$

→ $\underbrace{\| J\varphi(\psi(y_1))\, J\psi(y_2) \|}_{\substack{\text{se } y_1 = y_2 \text{ la matrice è} \\ \text{l' identità e } \|Id\| = 1}} \leq (1+\varepsilon)$ $\forall y_1 \in B\ \forall y_2 \in B$ con $\|y_1 - y_2\| \leq \delta$

Queste due sono possibili se $J\varphi$ e $J\psi$ sono unif. continue

$$|\text{Det } J\varphi(x_1)| \leq |\text{Det } J\varphi(x_2)| + |\text{Det } J\varphi(x_1) - \text{Det } J\varphi(x_2)|$$

Divido per $|\text{Det } J\varphi(x_2)|$ e ottengo

$$\frac{|\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_1)|}{|\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_2)|} \leq 1 + \frac{|\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_1) - \mathrm{Det}\, J_\varphi(x_2)|}{\boxed{|\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_2)|}}$$

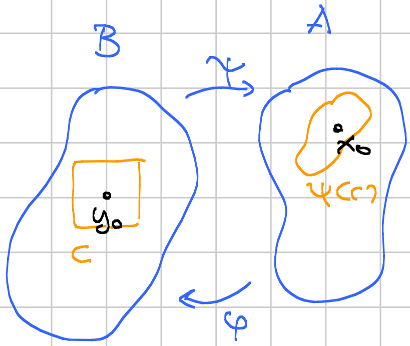
piccolo quanto voglio se x_1 e x_2 sono opp. vicini

assumo che in A questo $\geq$ costante positiva fissa

<u>Esercizio</u> Dimostrare altrettanto per bene (o meglio) che anche la seconda richiesta è possibile.

— o — o —

Gran finale: giustificazione del brutale iniziale per cubi $C(y_0, S)$ con $S \leq \delta$



$$\int_A^* f_C(\varphi(x))\, |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x)|\, dx$$

$$= \int_{\psi(C)}^* |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x)|\, dx$$

$$\leq (1+\varepsilon) \int_{\psi(C)}^* |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_0)|\, dx$$

ho usato che $\|x - x_0\| \leq \hat{M} S \leq \hat{M}\delta$ più la prima propr di δ $(x \in \psi(C))$

$$= (1+\varepsilon)\, |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x_0)|\, \mathrm{meas}^*(\psi(C))$$

$$= (1+\varepsilon)\, \mathrm{meas}\left(J_\varphi(x_0)(\psi(C))\right)$$

$\leftarrow$ proprietà appl. lineari

$$= (1+\varepsilon)\, \mathrm{meas}\,(Q(C))$$

con $Q = J_\varphi(x_0) \circ \psi$

$$\leq (1+\varepsilon)\, \underbrace{(1+\varepsilon)^m}_{M^m}\, \mathrm{meas}\,(C)$$

Ho usato che $J_Q(y) = J_\varphi(\underset{\psi(y_0)}{x_0})\, J_\psi(y)$ più la seconda proprietà di δ

$$= (1+\varepsilon)^{m+1} \int_B f_C(y)\, dy$$

Mettendo insieme abbiamo ottenuto

$$\int_B f_C(y)\, dy \geq \frac{1}{(1+\varepsilon)^{m+1}} \int_A^* f_C(\varphi(x))\, |\mathrm{Det}\, J_\varphi(x)|\, dx$$

Resterebbe da ottenere la disuguaglianza opposta. Quella si fa allo stesso modo partendo dal

$\boxed{\text{LEMMA DEL CUBETTO INTERNO}}$ $R : \mathcal{U} \to V$ diffeom.
$C(u_0, s) \subseteq \mathcal{U}$

Allora

$$R(C(u_0,s)) \supseteq C\left(R(u_0), \frac{s}{M}\right)$$

con M opportuna

$\boxed{\text{Dim}}$ Esercizio (molto meno banale di quanto sembri). Capire perché non posso fare R^{-1} a dx e sx, il che banalizzerebbe la cosa. $\square$

— o — o —

Oss. Abbiamo dimostrato il teorema

$$\int_B f(y)\,dy = \int_A f(\varphi(x)) \cdot |\mathrm{Det}\, J\varphi(x)|\,dx$$

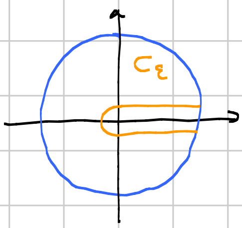
con integrali inferiori e superiori assumendo

- $\varphi : A \to B$ e $\psi(B) \to A$ una l'inversa dell'altra
- $J\varphi$ e $J\psi$ esistono e sono unif. continue in A / B
- $|\mathrm{Det}\, J\varphi| \geq a_0 > 0$ in A e $|\mathrm{Det}\, J\psi| \geq b_0 > 0$ in B.

Quindi non vale per le polari ☹ : ① perché $J = \rho$ si può annullare

② $\theta = 0$ e $\theta = 2\pi$ si rincollano

Come se ne esce?



C_ε = cerchio meno pezzettino
Su C_ε posso usare la formula e poi passo al limite per $\varepsilon \to 0$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 043

Titolo nota 11/11/2015

$\boxed{\text{INTEGRALI MULTIPLI IMPROPRI}}$

Un integrale multiplo si dice IMPROPRIO se la zona di integrazione è non limitata e/o la funzione è non limitata.

$\boxed{\text{Grossa differenza con Analisi 1}}$

Dato $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e data $f: A \to \mathbb{R}$ a segno qualunque se

$$\int_A |f(x)|\, dx = +\infty$$

allora per definizione si pone l'integrale indeterminato senza indagare oltre (non è completamente vero).

In generale si pone $f(x) = \underbrace{f_+(x)}_{\text{parte posit.}} - \underbrace{f_-(x)}_{\text{parte neg.}}$ e si definisce

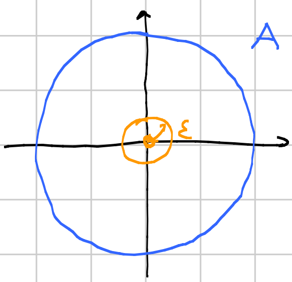
$$\int_A f(x)\, dx = \int_A f_+(x)\, dx - \int_A f_-(x)\, dx$$

e si sviluppa la teoria solo per integrande ≥ 0 in A.
Quindi d'ora in poi ci limitiamo al caso $f(x) \geq 0$ in A.

—o—o—

Esempio 1 $\iint_A \underbrace{\frac{|x|}{x^2+y^2}}_{f(x,y)}\, dx\, dy$ A = cerchio con centro in $(0,0)$ e raggio 1.

Per $(x,y) \to (0,0)$ la $f(x,y)$ ha liminf 0 e limsup $+\infty$, dunque non è limitata e l'integrale è improprio.



Definizione ovvia ma non troppo (problema in un solo p.to)

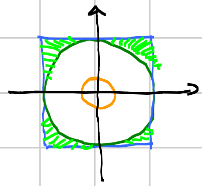
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{A_\varepsilon} f(x,y)\,dx\,dy$$

$A \setminus$ cerchio di raggio ε.

Per ogni $\varepsilon > 0$ l'integrale su A_ε ha senso (è proprio).
Tutto sta ad indagare l'esistenza del limite.

$$\iint_{A_\varepsilon} \frac{|x|}{x^2+y^2}\,dx\,dy = \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\, \frac{\cancel{\rho}\,|\cos\theta|}{\cancel{\rho^2}} \cdot \cancel{\rho} = 4\int_\varepsilon^1 d\rho \to 4$$

<u>Esempio 2</u> Stessa funzione su $Q = [-1,1]\times[-1,1]$



$Q_\varepsilon = Q \setminus$ cerchio e procediamo come prima

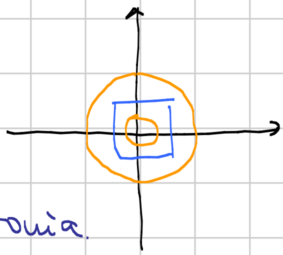
Osservazione comoda $\displaystyle\int_Q = \int_A + \underbrace{\int_{Q\setminus A}}$

cerchio di prima

integrale proprio, quindi un numero

$\Rightarrow \int_Q$ converge a $\displaystyle\int_A \ldots + \int_{Q\setminus A} \ldots$

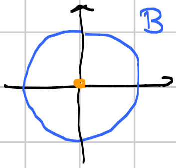
$\boxed{\text{Oss. teorica}}$ Se $f(x) \geq 0$ nella zona di integrazione, allora il limite fatto togliendo cerchi o quadrati o triangoli è lo stesso.



Idea: per ogni cerchio esiste un quadrato contenuto e viceversa.
Inoltre il $\lim_{\varepsilon\to 0^+}$ esiste sempre per monotonia.

Esercizio: formalizzare il discorso.

Achtung! Se $f(x)$ ha segno variabile, posso ottenere risultati diversi togliendo figure diverse.
L'esempio si può fare.
Questo è il motivo per una teoria con integrande ≥ 0.



Esempio classico $\displaystyle\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy$

Per quali α converge?

$$\iint_B \frac{1}{(x^2+y^2)^\alpha}\,dx\,dy = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \iint_{B_\varepsilon} \dots$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \ \frac{1}{\rho^{2\alpha}}\cdot \rho$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}} \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 2\pi \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{2\alpha-1}}$$

Analisi 1: questo converge $\iff 2\alpha-1<1 \iff \alpha<1$

Occhio che per $\alpha=1$ il denominatore è quadratico.

Stesso esempio in $\mathbb{R}^3$

$$\iiint_S \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^\alpha}\,dx\,dy\,dz = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \frac{1}{\rho^\alpha}\,\rho^2\cos\varphi$$

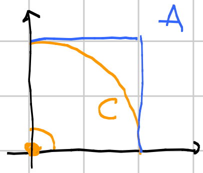
sfera...

$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-2}} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\,\cos\varphi}_{\text{Numero}}$$

$$= \text{numero} \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-2}}$$

e questo converge $\iff \alpha<3$

<u>Esempio</u> $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x+y}\,dx\,dy$ $\qquad A = [0,1]\times[0,1]$



Converge perché denom $\sim \rho$

$$\iint_A \text{ converge} \iff \iint_C \text{ converge} =$$

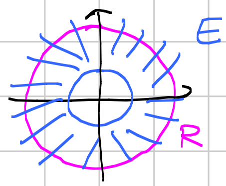
$$= \lim_{\varepsilon\to 0^+} \int_\varepsilon^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \, \frac{1}{\cancel{\rho}(\cos\theta+\sin\theta)}\cdot\cancel{\rho} = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\,d\theta$$

Questo è un integrale proprio: infatti $\exists\, m>0$ t.c.

$$\cos\theta+\sin\theta \geq m \qquad \forall\theta\in[0,\tfrac{\pi}{2}]$$

(Infatti il LHS ha minimo per W in un certo $\theta_0 \in \frac{\pi}{2}$ e in θ_0 non si possono annullare insieme $\cos\theta_0$ e $\sin\theta_0$)

<u>Esempio</u> (n+1) $\displaystyle\iint_E \frac{1}{\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^\alpha}\,dx\,dy$



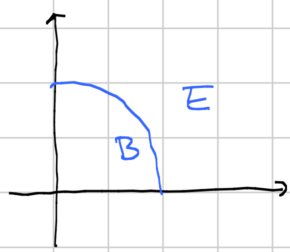
$$= \lim_{R\to+\infty} \iint_{\text{corona}} \ldots = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \, \frac{1}{\rho^\alpha}\rho$$

$$= 2\pi \int_1^{+\infty} \frac{d\rho}{\rho^{\alpha-1}} \quad \text{e questo converge} \iff$$

$$\alpha-1>1 \iff \alpha>2$$

—o —o —

<u>Esempio</u> $\displaystyle\iint_Q \frac{\arctan x^3}{x^4+y^4}\,dx\,dy$ $\qquad Q := [0,+\infty)\times[0,+\infty)$



ha 2 problemi quindi va spezzato

Su B normalmente $f(x,y)\sim\frac{1}{\rho}$ quindi l'integrale converge (esponente < dim.)

Su E normalmente $\underbrace{f(x,y)\sim\frac{1}{\rho^4}}$ quindi converge

rigoroso: $\exists M\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x,y)\leq \dfrac{M}{(x^2+y^2)^2}$ $\quad\forall (x,y)\in E$

ANALISI 2 – LEZIONE 044

Titolo nota 13/11/2015

INTEGRALI IMPROPRI

Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua (ma basta meno) tale che $f(x,y) \geq 0$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^n$.
È ragionevole porre

esiste $\in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy$$

dove $B_R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq R^2\}$.

Prop. Sia $\{A_k\}$ una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ tali che
(i) A_k è limitato e misurabile per ogni $k \in \mathbb{N}$
(ii) A_k "invade $\mathbb{R}^2$" nel senso che

$$\forall R > 0 \qquad A_k \supseteq B_R \quad \text{definitivamente}$$

Allora

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{A_k} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy$$

Brutalmente: $\iint_{\mathbb{R}^2}$ non dipende da come si invade $\mathbb{R}^2$.

Dim. Ci sono due casi a seconda che il limite al RHS sia $\in \mathbb{R}$ oppure $+\infty$. Faccio solo il caso in cui è $L \in \mathbb{R}$ (l'altro è più semplice)
Fisso $\varepsilon > 0$ e dimostro che

$$L - \varepsilon \leq \iint_{A_k} \ldots \leq L \qquad \text{definitivamente}$$

La disug. di destra vale per ogni $k \in \mathbb{N}$. Infatti ogni A_k per l'ipotesi (i) è contenuto in una certa B_{R_k} con R_k opportuno quindi

$$\iint_{A_k} \ldots \leq \iint_{B_{R_k}} \ldots \leq L$$

perché il limite a RHS è il sup

Per la disug. di sx so che esiste $R_\varepsilon > 0$ t.c.

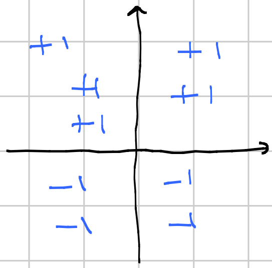
$$\iint_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy \geq L-\varepsilon \qquad \forall R \geq R_\varepsilon$$

Ma definitivamente $A_k \supseteq B_{R_\varepsilon}$ e quindi $\iint_{A_k} \ldots \geq \iint_{B_{R_\varepsilon}} \geq L-\varepsilon$.

— o — o —

Achtung! Il discorso non vale se $f(x,y)$ ha segno variabile, anche se è limitata.

Esempio $f(x,y) = \begin{cases} +1 & \text{nel } 1^\circ \text{ e } 2^\circ \text{ quadrante} \\ -1 & \text{nel } 3^\circ \text{ e } 4^\circ \end{cases}$



$$\lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} f(x,y)\,dx\,dy = 0$$

$$A_k = [-k,k]\times[-k,k+1]$$

$$\lim_{k\to+\infty} \iint_{A_k} \ldots = +\infty$$

Posso fare in modo che il limite sia un qualunque $L \in \mathbb{R}$ oppure anche che non esiste.

Domanda C'è un esempio in cui il limite su B_R oppure su $[-k,k]\times[-k,k]$ è diverso?

— o — o —

Oss. Il discorso è lo stesso per qualunque integrale improprio in più variabili.

— o — o —

Esercizio Calcolare l'integrale su $\mathbb{R}^2$ di $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{B_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta\; e^{-\rho^2}\rho = 2\pi \lim_{R\to+\infty} \int_0^R \rho e^{-\rho^2}\,d\rho$$

$$= \pi \lim_{R\to+\infty} \left[-e^{-\rho^2}\right]_0^R = \pi \lim_{R\to+\infty} \left[-e^{-R^2}+1\right] = \pi$$

Lo stesso limite lo posso calcolare con $A_k = [-k,k] \times [-k,k]$

$$\iint_{A_k} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \int_{-k}^{k} dx \int_{-k}^{k} dy\, e^{-x^2-y^2}$$

$$= \underbrace{\int_{-k}^{k} e^{-x^2}\,dx}_{I_k} \underbrace{\int_{-k}^{k} e^{-y^2}\,dy}_{I_k} = I_k^2$$

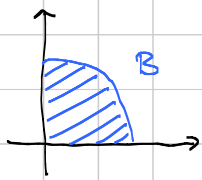
Confrontando con il precedente $\lim_{k\to+\infty} I_k^2 = \pi$, quindi $(I_k > 0)$

$$\lim_{k\to+\infty} I_k = \sqrt{\pi} \quad \text{MA} \quad \lim_{k\to+\infty} I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$$

Questo dimostra l'integrale gaussiano

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}}$$

— o — o —



Esercizio 1 $\displaystyle\iint_B \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy$

Caso fortunato

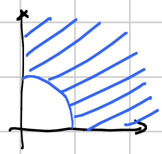
$$\frac{1}{x^2+y^4} \geq \frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{appena } y \leq 1$$

quindi

$$\iint_B \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy \geq \iint_B \frac{1}{x^2+y^2} = +\infty$$

$$\uparrow \frac{1}{\rho^2}$$

Vale anche se il raggio è ≥ 1: basta spezzare in 2.



Esercizio 2 $\displaystyle\iint_E \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy$

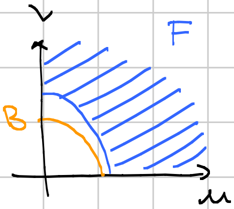
Ora la disug. non ci aiuta

Slogan: cambiare variabile per $\boxed{\text{PAREGGIARE GLI ESPONENTI}}$

Pongo $x = u^2$, $y = v$. Devo calcolare J

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow 2u = J$$

Allora $\displaystyle\iint_E \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy = \iint_F \frac{1}{u^4+v^4}\cdot 2u\,du\,dv$



Chi è F? $\quad E = x^2+y^2 \geq 1 \qquad F = u^4+v^2 \geq 1$

$v \geq \sqrt{1-u^4}$

$$\iint_F \frac{2u}{u^4+v^4}\,du\,dv \text{ converge} \iff \iint_B \frac{2u}{u^4+v^4}\,du\,dv \text{ converge}$$

e converge perché è del tipo $\frac{1}{\rho^3}$

Detto rigorosamente: $\displaystyle\iint_B \frac{u}{u^4+v^4}\,du\,dv = \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho\cos\theta \cdot \rho}{\rho^4(\cos^4+\sin^4\theta)}$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho^2}\,d\rho}_{\text{converge}} \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\cos\theta}{\cos^4\theta+\sin^4\theta}\,d\theta}_{}$$

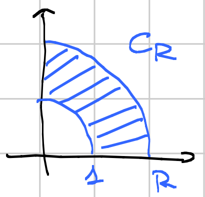
numero perché è un integrale proprio perché

$\cos^4\theta + \sin^4\theta \geq m_0 > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi]$

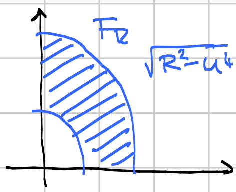
(funzione continua, ammette minimo, bla bla bla)

<u>Oss.</u> Ho fatto il cambio di variabili direttamente sull'integrale improprio. Il tutto andrebbe giustificato.
Il modo di farlo è standard

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy = \lim_{R\to+\infty} \iint_{C_R} \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy$$



$$= \lim_{R\to+\infty} \iint_{F_R} \frac{2u}{u^4+v^4}\,du\,dv$$



$$= \iint_F \frac{2u}{u^4+v^4}\,du\,dv$$

(Ho usato l'indipendenza dal "modus invadendi").

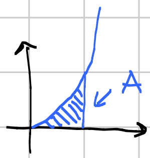
<u>Esempio 3</u> $\displaystyle\iint_E \frac{x^a}{x^2+y^4}\,dx\,dy$ per quali a converge

Pareggio gli esponenti $x = u^2$, $y = v$ $\rightsquigarrow$ $J = 2u$

Diventa $\displaystyle\iint_F \frac{u^{2a}}{u^4+v^4}\cdot 2u\,du\,dv$ $\rightsquigarrow$ come prima $\displaystyle\frac{\rho^{1+2a}}{\rho^4} = \frac{1}{\rho^{3-2a}}$

Converge $\iff 3-2a > 2 \iff 2a < 1 \iff a < \frac{1}{2}$

<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\iint_A \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy$



dove $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$

$$\le \frac{1}{x^2+y^4} \le \frac{1}{x^2}$$

Lo imposto in cartesiane

$$\iint_A \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\,\frac{1}{x^2+y^4} \le \int_0^1 dx \int_0^{x^2} dy\,\frac{1}{x^2}$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx\,\underbrace{\int_0^{x^2} dy}_{x^2} = \int_0^1 \frac{1}{x^2}\cdot x^2\,dx = 1$$

ANALISI 2 – LEZIONE 045

Titolo nota 13/11/2015

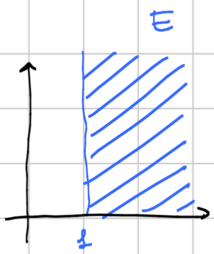
Oss. Proviamo a fare $\iint_E \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy$ direttamente in polari

$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \frac{\rho}{\rho^2\cos^2\theta + \rho^4\sin^4\theta} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\rho}\,d\rho \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2\theta+\rho^2\sin^4\theta}\,d\theta}$$

per ogni $\theta \in [0,2\pi]$ converge, ma ad un valore dipendente da ρ in modo misterioso

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \underbrace{\int_1^{+\infty} d\rho \frac{1}{\rho\cos^2\theta+\rho^3\sin^4\theta}}$$

converge per quasi ogni valore di θ, meglio per $\theta \neq 0, \pi, 2\pi$, ma il valore dipende da θ in modo misterioso



Altra via (perversa?)

$$\iint_E \frac{1}{x^2+y^4}\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2+y^4}$$
$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} dy \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+\frac{y^4}{x^2}} = \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\,dx \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{y^4}{x^2}}\,dy = (\star)$$

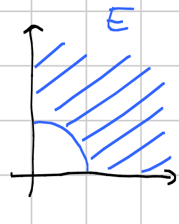
Pongo $\frac{y^2}{x} = z$, quindi $y^2 = xz$, quindi $y = \sqrt{x}\sqrt{z} \rightsquigarrow dy = \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{z}}dz$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+\frac{y^4}{x^2}}\,dy = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+z^2}\sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{z}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}\underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{z}\,(1+z^2)}}_{\text{Numero}}$$

$$(\star) = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx\,\frac{1}{2}\sqrt{x}\,.\,\text{numero} = \frac{\text{numero}}{2}\cdot\int_1^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx < +\infty$$

—— o —— o ——

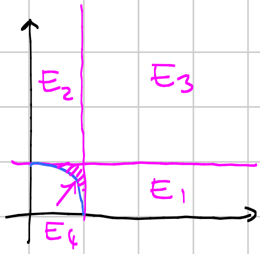
$$\iint_E \underbrace{\frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2}}_{f(x,y)}\,dx\,dy$$



$f(x,y) \leq \frac{1}{\rho^2}$, ma questo non aiuta ...

Brutale: x^2y^2 mi può dare una mano, essendo un ρ^4,
ma solo lontano dagli assi.

Idea: separo le zone (DIVIDE ET IMPERA)



zona E_4: no problem
le zone E_1 ed E_2 sono simmetriche, quindi
posso studiare solo E_1

$$\iint_{E_1} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2+y^2+x^2y^2}$$

$$\leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^2} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$$

Resta la zona E_3

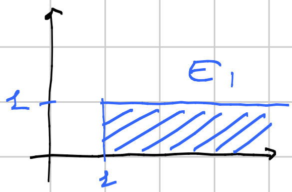
$$\iint_{E_3} f(x,y)\,dx\,dy = \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy\, f(x,y) \leq \int_1^{+\infty} dx \int_1^{+\infty} dy \frac{1}{x^2y^2}$$

$$= \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx}_{\mathrm{I}} \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{1}{y^2}\,dy}_{\mathrm{I}} < +\infty$$

— o — o —

Esempio E_1 di prima

$$\iint_{E_1} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dx\,dy \quad \text{Per quali } a \text{ converge}$$



$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \leq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{x^{2a}} = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{2a}}\,dx$$

converge se $a > \frac{1}{2}$. Ho dimostrato che l'integrale iniziale
converge per $a > \frac{1}{2}$.

Per gli altri $a \leq \frac{1}{2}$ non posso dire nulla.

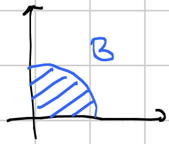
Per studiare i valori $a \leq \frac{1}{2}$ serve disug. dall'altra parte

$$\int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+y^2)^a} \geq \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \frac{1}{(x^2+1)^a} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^a}$$

e questo diverge per $a \leq \frac{1}{2}$ completando la risposta.

— o — o —

Esempio $\displaystyle\iint_B \frac{\log(1+x)\,\sin y}{(x^2+y^2)^a}\,dx\,dy$



per quali a converge ?

Brutale : $f(x,y) \sim \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \dfrac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \dfrac{1}{\rho^{2a-2}}$ quindi converge $\iff 2a-2<2$ $\iff a<2$

Disuguaglianza dall'alto

Esistono 2 costanti M_1 ed M_2 tali che

$$\log(1+x) \leq M_1 x \quad \forall x \in [0,1]$$
$$\sin y \leq M_2 y \quad \forall y \in [0,1]$$

Banale Analisi 1 dopo aver diviso e fatto il limite

quindi $f(x,y) \leq M_1 M_2 \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$

Questo faccio in polari e vedo che converge per $a<2$.

Disuguaglianza dal basso Esistono M_3 ed M_4 strett. positive tali che

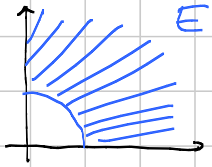
$\log(1+x) \geq M_3 x$ $\forall x \in [0,1]$ $\sin y \geq M_4 y$ $\forall y \in [0,1]$

$f(x,y) \geq M_3 M_4 \dfrac{xy}{(x^2+y^2)^a}$ in polari

$$\int_0^1 d\rho \int_0^{\pi/2} d\theta \frac{\cos\theta \sin\theta\, \rho^2}{\rho^{2a}} \cdot \rho = \int_0^1 \frac{1}{\rho^{2a-3}}\,d\rho \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta\, d\theta}_{\neq 0}$$

— o — o —

<u>Esempio</u> $\displaystyle\iint_E \frac{xy}{(x^2+y^4)^a}\,dx\,dy$



$x = u^2, \quad y = v \quad \rightsquigarrow \quad J = 2u$

$$\iint_E \dots = \iint_F \frac{u^2 \cdot v}{(u^4+v^4)^a} \cdot 2u\,du\,dv \qquad \sim \frac{\rho^4}{\rho^{4a}} = \frac{1}{\rho^{4a-4}}$$

zona simile

quindi l'idea è che converge
$\iff 4a-4 > 2 \iff a > \frac{3}{2}$

Occhio a fare bene la parte dal basso

— o — o —

<u>Esempio</u> $\displaystyle\iiint_E \frac{x y^a z}{x^2+y^4+z^6}\,dx\,dy\,dz \qquad E: x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \geq 1$

Pareggio gli esponenti ponendo: $x = u^6, \quad y = v^3, \quad z = w^2$

$$\begin{pmatrix} 6u^5 & 0 & 0 \\ 0 & 3v^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2w \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 36\,u^5 v^2 w$$

$$\iiint_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_F \frac{u^6 v^{3a} w^2}{u^{12}+v^{12}+w^{12}}\, u^5 v^2 w\,du\,dv\,dw$$

dello stesso tipo di E: $u \geq 0, v \geq 0, w \geq 0, \ u^{12}+v^6+w^4 \geq 1$

Brutale: funzione $\displaystyle\sim \frac{\rho^{16+3a}}{\rho^{12}} = \frac{1}{\rho^{-4-3a}}$

e questo converge $\iff -4-3a > 3$
$3a < 7 \quad a < \frac{7}{3}$

Nella dimostrazione
→ la disug. dall'alto è facile
→ quella dal basso un po' più delicata e bisogna passare in sferiche

Domanda: come posso controllare il termine $u^{12}+v^{12}+w^{12}$.

Uscita rapida: esistono 2 costanti POSITIVE k_1 e k_2 t.c.

$$k_2(u^2+v^2+w^2)^6 \leq u^{12}+v^{12}+w^{12} \leq k_1(u^2+v^2+w^2)^6$$

per ogni $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$. Tutto si riduce a

$$k_2 \leq \frac{u^{12}+v^{12}+w^{12}}{(u^2+v^2+w^2)^6} \leq k_1$$

per ogni $(u,v,w) \in$ sfera $(u^2+v^2+w^2)=1$

e sulla sfera max e min esistono per W.

Achtung! Se pareggio gli esponenti per fare un limite, NON devo mettere J. Per gli integrali sì.

ANALISI 2 — LEZIONE 046

Titolo nota 17/11/2015

VOLUME PALLA n-DIMENSIONALE

Dato $R>0$, consideriamo $B_R := \{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \ldots + x_n^2 \le R^2\}$

Voglio calcolare

$$\text{meas}_n(B_R)$$

Ci aspettiamo che sia del tipo $\omega_n R^n$, con ω_n succ. opportuna

1° approccio Sezioni rispetto ad una variabile, ad esempio x_n

$$\text{meas}_n(B_R) = \int_{-R}^{R} dx_n \underbrace{\int_{S_{x_n}} 1 \, dx_1 \ldots dx_{n-1}}$$

la sezione è una palla in dimensione $n-1$ di raggio $\sqrt{R^2 - x_n^2}$

$x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \le R^2 - x_n^2$ ← descrive la sezione S_{x_n}

$$= \int_{-R}^{R} dx_n \; \text{meas}_{n-1}\left(B_{\sqrt{R^2-x_n^2}}\right)$$

ipotesi induttiva → $$= \int_{-R}^{R} dx_n \; \omega_{n-1} (R^2 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$= \omega_{n-1} \int_{-R}^{R} R^{n-1} \left(1 - \left(\frac{x_n}{R}\right)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} dx_n$$

$x_n = Rz$

$dx_n = R\,dz$

$$= \omega_{n-1} R^n \int_{-1}^{1} (1-z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz$$

$z = \sin t$

$dz = \cos t \, dt$

$$= \omega_{n-1} R^n \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

Abbiamo ottenuto

$$\omega_n = \omega_{n-1} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$$

↗ c'è una formula ricorrente che lega n ad $n-2$

$\boxed{2^\circ \text{approccio}}$ Provare a scendere di due con la dimensione

$$\text{meas}_m(B_R) = \underset{\substack{\uparrow \\ x_1^2+x_2^2 \le R^2}}{\iint} dx_1 dx_2 \underbrace{\iint\dots\int}_{\substack{\uparrow \\ x_3^2+\dots+x_m^2 \le R^2-x_1^2-x_2^2}} dx_3 \dots dx_m$$

$$= \iint_{x_1^2+x_2^2 \le R^2} dx_1 dx_2 \underbrace{\text{meas}_{m-2}\left(B_{\sqrt{R^2-x_1^2-x_2^2}}\right)}_{\text{ipotesi induttiva}}$$

$$= \omega_{m-2} \iint_{x_1^2+x_2^2 \le R^2} (R^2-x_1^2-x_2^2)^{\frac{m-2}{2}} dx_1 dx_2$$

$$= \omega_{m-2} \int_0^R d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \quad (R^2-\rho^2)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \rho$$

$$= \pi\, \omega_{m-2} \int_0^R 2\rho\, (R^2-\rho^2)^{\frac{m}{2}-1}$$

$$= \pi\, \omega_{m-2} \left[-(R^2-\rho^2)^{\frac{m}{2}} \frac{2}{m} \right]_{\rho=0}^{\rho=R}$$

$$= \frac{2\pi}{m} \omega_{m-2} R^m$$

Da qui ricaviamo $\boxed{\omega_m = \frac{2\pi}{m}\omega_{m-2}}$

Visto che $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = \pi$, da qui si ricavano ricorsivamente tutti gli ω_m. Si ottiene

$$\boxed{\omega_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}} \qquad \omega_{2k+2} = \frac{2\pi}{2k+2}\omega_{2k} = \frac{\pi}{k+1}\frac{\pi^k}{k!} = \frac{\pi^{k+1}}{(k+1)!}$$

$$\omega_{2k+1} = 2 \cdot \frac{2\pi}{3} \cdot \frac{2\pi}{5} \cdot \frac{2\pi}{7} \cdot \dots \cdot \frac{2\pi}{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{\underset{\substack{\uparrow \\ \text{fatto solo sui dispari}}}{(2k+1)!!}} \cdot \frac{2\cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k}{2\cdot 4\cdot \dots \cdot 2k}$$

$$\boxed{\omega_{2k+1} = \frac{2(4\pi)^k \cdot k!}{(2k+1)!}}$$

Oss. C'è una formula che le contiene entrambe ed è

$$\boxed{\omega_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}}$$

dove Γ è la funzione Gamma di Eulero

Per verificare l'uguaglianza basta ricordare che

- $\Gamma(k) = (k-1)!$ per k intero ≥ 1
- $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ (integrale gaussiano)
- $\Gamma(x) = x\,\Gamma(x-1)$ per ogni $x > 0$

— o — o —

INTEGRALI IMPROPRI IN DIM n

Caso con probl. in 0

$$\int_{B_R} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx \quad \begin{array}{ll} \nearrow \text{converge} & \alpha < n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \geq n \end{array}$$

Caso con probl. all'∞

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_R} \frac{1}{|x|^\alpha}\,dx \quad \begin{array}{ll} \nearrow \text{converge} & \alpha > n \\ \searrow \text{diverge} & \alpha \leq n \end{array}$$

Per dimostrarlo ci sono 2 modi

① Introdurre coordinate "sferiche" in $\mathbb{R}^n$: ad esempio in $\mathbb{R}^4$ userei 2 latitudini φ_1 e φ_2.
Indicate le cartesiane con x, y, z, w si può porre

$$w = \rho \sin\varphi_2 \qquad \begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi_2 \cdot \\ y &= \rho\cos\varphi_2 \cdot \\ z &= \rho\cos\varphi_2 \cdot \end{aligned} \left[\begin{array}{l} \text{coordinate sferiche} \\ \text{classiche in } \mathbb{R}^3 \\ \end{array}\right] \begin{array}{l} \cos\varphi_1 \cos\theta \\ \cos\varphi_1 \sin\theta \\ \sin\varphi_1 \end{array}$$

Si tratta ora di dim. per indut. che $J = \rho^{n-1} \cdot$ roba trigonom.

② Procedere direttamente per induzione. Facciamo il pbm. in 0

Integro sul cubo

$$C_n := \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq 1 \text{ per ogni } i = 1, \dots, n\}$$

$$\int_{C_n} \frac{1}{|x|^\alpha} dx \underset{\text{cartesiano}}{=} \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^{1} dx_n \frac{1}{(\underbrace{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2}_{b^2} + x_n^2)^{\alpha/2}}$$

$$= \int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \int_{-1}^{1} \frac{1}{(b^2 + x_n^2)^{\alpha/2}} dx_n$$

Parentesi di analisi 1

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(b^2+t^2)^{\alpha/2}} dt \qquad \begin{matrix} t = bz \\ dt = b\,dz \end{matrix} \qquad = \int_{-\frac{1}{b}}^{1/b} \frac{b}{(b^2+b^2z^2)^{\alpha/2}} dz$$

$$= \frac{b}{b^\alpha} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} = \frac{1}{b^{\alpha-1}} \int_{-\frac{1}{b}}^{\frac{1}{b}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}$$

Due casi

- se $1 < \alpha < n$, allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, quindi

$$\text{int. iniziale} \leq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}}}_{\text{converge per hp induttiva}} \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}}}_{\text{numero}}$$

- se $\alpha \geq n$, allora $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}} < +\infty$, ma non mi serve perché

$$\text{int. iniziale} \geq \underbrace{\int_{C_{n-1}} dx_1 \dots dx_{n-1} \frac{1}{b^{\alpha-1}}}_{\text{Diverge per hp induttiva}} \underbrace{\int_{-\frac{1}{n-1}}^{\frac{1}{n-1}} \frac{dz}{(1+z^2)^{\alpha/2}}}_{\text{numero} > 0}$$

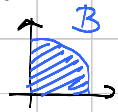
- se $\alpha \leq 1$ ho ancora convergenza perché

$$\frac{1}{|x|^\alpha} \leq \frac{1}{|x|^\beta} \quad \text{per ogni } |x| \leq 1 \text{ e ogni } \alpha < \beta \text{ e basta scegliere } \beta \in (1, n)$$

ANALISI 2 — LEZIONE 047

Titolo nota 17/11/2015

Esercizio 1 $\iint_B \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a}\,dx\,dy$ Per quali a converge



Brutale: $\frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{xy}{(x^2+y^2)^a} \sim \frac{\rho^2}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-2}}$

quindi converge $\iff 2a-2<2 \iff a<2$

Dim. che per $a<2$ converge usando la disug. $\arctan t \leq t$ per $t \geq 0$

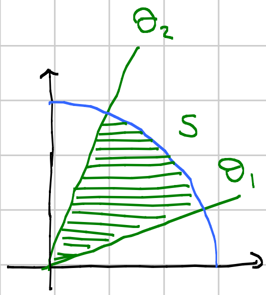
$$f(x,y) \leq \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}, \text{ quindi}$$

$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy \leq \iint_B \frac{xy}{(x^2+y^2)^a}\,dx\,dy$$ e questo si calcola con le polari

Per dimostrare che diverge per $a \geq 2$ posso usare la disug. opposta

$$\arctan t \geq \frac{t}{27}$$ che vale per $t \in [0,t_0]$ per $t_0>0$ opportuno

In alternativa posso restringermi ad un settore circolare abbastanza stretto



$$\iint_B f(x,y)\,dx\,dy \geq \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

$\geq m_0 > 0$ se $\theta \in [\theta_1,\theta_2]$

$$= \int_0^1 d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\, \frac{\arctan(\rho^2 \sin\theta\cos\theta)}{\rho^{2a}}\cdot\rho$$

$$\geq \int_0^1 d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta\, \frac{\arctan(m_0\rho^2)}{\rho^{2a}}\,\rho$$

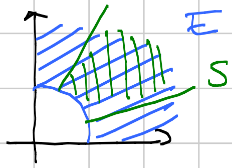
$$= (\theta_2 - \theta_1) \int_0^1 \frac{\arctan(m_0 \rho^2)}{\rho^{2a-1}} \, d\rho .$$

e questo si fa per confronto asintotico di analisi 1.
Quindi converge $\iff a < 2$.

<u>Esercizio 1 bis</u> Stessa cosa su tutto il cerchio.

- Per $a < 2$ converge e converge a 0
- Per $a \geq 2$ è indeterminato $\iint f_+ = +\infty = \iint f_-$
  (buchi diversi producono limiti diversi)

<u>Esercizio 2</u> $\displaystyle\iint_E \frac{\arctan(xy)}{(x^2+y^2)^a} \, dx\, dy$



Facile: convergenza per $a > 1$

$f(x,y) \leq \frac{\pi}{2} \frac{1}{\rho^{2a}}$ converge per $2a > 2$, cioè $a > 1$

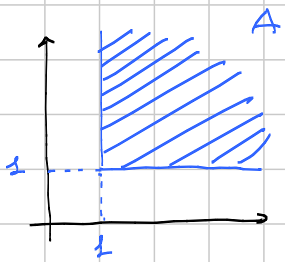
Voglio dim. che diverge per $a \leq 1$. Stimo con il settore come prima

$$\iint_E f(x,y) \, dx\, dy \geq \iint_S f(x,y) \, dx\, dy$$
$$= \int_1^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\arctan(\rho^2 \overbrace{\cos\theta \sin\theta}^{\geq m_0 > 0})}{\rho^{2a}} \cdot \rho \, d\theta$$

e concludo come prima

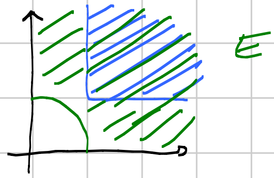
— o — o —

<u>Esercizio 3</u> $\displaystyle\iint_A \frac{x^2 y}{(x^2+y^2)^a} \, dx\, dy$



Brutale: $f(x,y) = \frac{\rho^3}{\rho^{2a}} = \frac{1}{\rho^{2a-3}}$

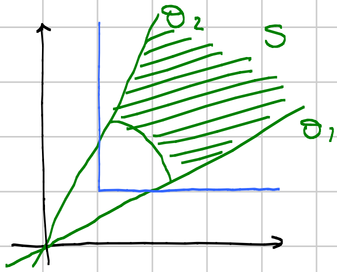
quindi converge $\iff 2a - 3 > 2 \iff a > \frac{5}{2}$



• Dimostro che converge per $a > \frac{5}{2}$

$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \le \iint_E f(x,y)\,dx\,dy$$

si fa in polari e converge se $a > \frac{5}{2}$



• Dimostro che diverge per $a \le \frac{5}{2}$

Scelgo un settore $0 < \theta_1 \le \theta \le \theta_2 < \frac{\pi}{2}$ e $R \ge R_0$

Se R_0 è abbastanza grande, allora $S \subseteq A$

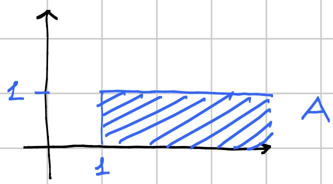
$$\iint_A f(x,y)\,dx\,dy \ge \iint_S f(x,y)\,dx\,dy$$

si fa in polari e diverge per $a \le \frac{5}{2}$

$$\int_{R_0}^{+\infty} d\rho \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \, \frac{\rho^3 \boxed{\cos^2\theta \sin\theta}}{\rho^{2a}} \cdot \rho$$

Serve che $\cos^2\theta \sin\theta \ge m_0 > 0$ per $\theta \in [\theta_1, \theta_2]$.

— o — o —



<u>Esempio 4</u> $\displaystyle\iint_A \frac{x^a y}{x^6 + y^8}\,dx\,dy$

$$= \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \, \frac{x^a y}{x^6 + y^8} = (\star)$$

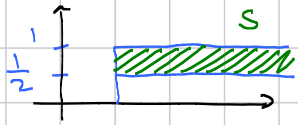
Vediamo quando converge

$$(\star) \le \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \, \frac{x^a}{x^6} = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{6-a}}$$ che converge per $a < 5$

Vediamo se diverge per $a \ge 5$

$$(\star) \ge \int_1^{+\infty} dx \int_0^1 dy \, \frac{0}{x^6 + 1}$$ ☹

$$(\star) \geq \int_1^{+\infty} dx \int_{\frac{1}{2}}^{1} dy \, \frac{\frac{1}{2} x^9}{x^6+1}$$ ☺



Oss. Anche senza restringere l'insieme, potevo lasciare la y sopra e fare l'integrale in dy

— o — o —

Esempio 5 Consideriamo $I_n = \int_{E_n} \frac{1}{x^4+y^2} \, dx\,dy$

dove $E_n = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, \ y \geq 0, \ x^2+y^2 \geq n^2\}$

Dimostrare che I_n è ben definito, $I_n \to 0$ per $n \to +\infty$, e se riesce calcolare ordine di infinitesimo e parte principale.

Basta dim. che converge. Pareggio gli esponenti $x = u$, $y = v^2$

Calcolo J

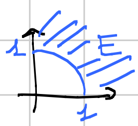
$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow J = 2v$$

e mi riduco a $\iint_{F_n} \frac{1}{u^4+v^4} \cdot 2v \, du\,dv$ e questo $\sim \frac{1}{\rho^3}$, quindi formale

insieme diverso, ma "fatto allo stesso modo"

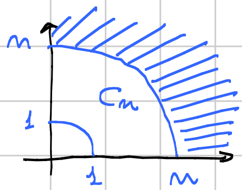
Perchè $I_n \to 0$? Per un fatto generale!

Se $\iint_E f(x,y)\,dx\,dy < +\infty$ con $E =$



allora $\lim_{n \to +\infty} \iint_{E_n} f(x,y)\,dx\,dy = 0$ per ogni successione E_n che invade E

Sostanzialmente si usa che



$$\iint_E = \iint_{E_n} + \iint_{C_n}$$ $\longrightarrow \iint_E$ per definizione

quindi

$$\iint_{E_n} = \iint_{E} - \underbrace{\iint_{C_n}}_{\downarrow\ \iint_E}$$

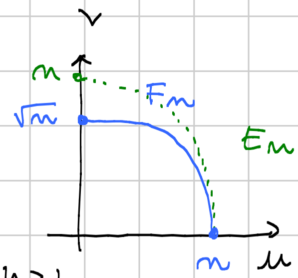
Come possiamo stimare l'integrale I_n ?

Prima idea: che vada come $\displaystyle\int_n^{+\infty} \frac{1}{\rho^3}\cdot \rho \, d\rho \sim \frac{1}{n}$

Ma F_n non esattamente E_n, detto meglio

$$F_n = \{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 + v^4 \geq n^2 \}$$

$$v \geq \sqrt[4]{n^2 - u^2}$$



Per ora possiamo dire solo che $F_n \supseteq E_n$ per $n \geq 1$, quindi posso dire solo che

$$\iint_{F_n} \frac{2v}{u^4+v^4}\, du\, dv \geq \iint_{E_n} \frac{2v}{u^4+v^4}\, du\, dv \sim \frac{1}{n}$$

Per avere una stima dall'altra parte per il momento ho solo

$$\iint_{F_n} \leq \iint_{E_{\sqrt{n}}}$$ che però va come $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Provare a vedere se si trova l'andamento giusto!

— o — o —