A.A. 2015/2016
Corso di Analisi Matematica 2

Stampato integrale delle lezioni

(Volume 2)

Massimo Gobbino

Indice

ANALISI 2 – LEZIONE 048

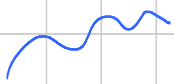
Titolo nota 18/11/2015

CURVE IN $\mathbb{R}^n$

Def. Una $\boxed{\text{CURVA}}$ è una funzione $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$
Si dice $\boxed{\text{SOSTEGNO DELLA CURVA}}$ l'immagine di γ, cioè

$$\{\gamma(t) : t \in [a,b]\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Oss.

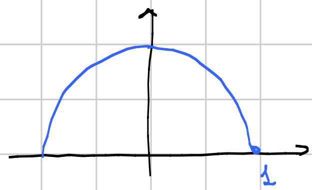


Quello che si disegna è il sostegno, ma lo stesso sostegno può provenire da parametrizz. diverse

Brutalmente, una curva è un modo di percorrere il sostegno.

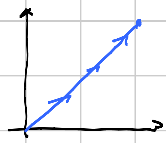
Esempio 1 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi]$

$\gamma_2(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1, 1]$



Sono due curve che hanno lo stesso sostegno.

Esempio 2 $\gamma_1(t) = (t, t) \quad t \in [0,1]$
$\gamma_2(t) = (t^2, t^2) \quad t \in [0,1]$



Stesso sostegno, stesso verso di percorrenza.

Esempio 3 $\gamma_1(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$
$\gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 4\pi]$

Stesso sostegno, ma "numero di giri diverso".

— o — o —

Def. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice

- $\boxed{\text{CHIUSA}}$ se $\gamma(b) = \gamma(a)$

- $\boxed{\text{SEMPLICE}}$ se γ è iniettiva tranne al più agli estremi.
  Detto in modo complicato

$$\boxed{\forall t \in [a,b],\ \forall s \in [a,b] \quad \gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow t = s \text{ oppure } \begin{array}{l} t \in \{a,b\} \\ s \in \{a,b\} \end{array}}$$

Come dimostro che una curva è semplice?

$\boxed{\text{CASO FACILE}}$ Esiste almeno una componente monotona
$\Rightarrow$ la curva è semplice

$$\gamma(t) = \left(t^2 - 7\sin t,\ \arctan t,\ e^{t^2} \right) \qquad t \in [-7,7]$$

è monotona ☺

$$\gamma(t) = \gamma(s) \Rightarrow \arctan t = \arctan s \Rightarrow t = s$$

$\boxed{\text{CASO INTERMEDIO}}$ Riesco a trovare una qualche quantità monotona

$$\gamma(t) = (t \sin t,\ t \cos t) \qquad t \in [12, 127]$$

La distanza di $\gamma(t)$ dall'origine, cioè il ρ delle polari, è $\|\gamma(t)\| = t$ è monotono.

$\boxed{\text{CASO GENERALE}}$ Provo a risolvere il sistema...

Esempio $\gamma(t) = (t - t^2, t - t^3) \qquad t \in [0,1]$

È chiusa perché $\gamma(0) = \gamma(1) = (0,0) \Rightarrow$ addio prime 2 opzioni

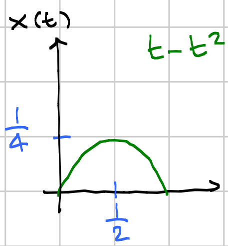
Imposto il sistema $\begin{cases} t-t^2 = s-s^2 \\ t-t^3 = s-s^3 \end{cases}$ $\begin{cases} t-s = (t+s)(t-s) \\ t-s = (t-s)(t^2+ts+s^2) \end{cases}$

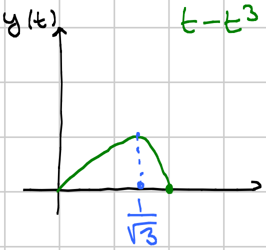
Se $t=s$ sono contento. Altrimenti semplifico

$\begin{cases} 1 = t+s \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases}$ sostituzione, oppure $\begin{cases} 1 = t^2+s^2+2ts \\ 1 = t^2+ts+s^2 \end{cases}$

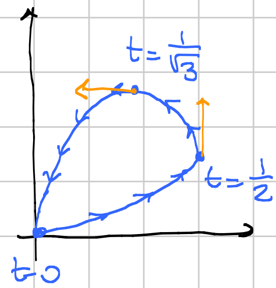
$\leadsto ts = 0$ $\nearrow t=0 \leadsto s=1$, $\searrow s=0 \leadsto t=1$ dalla 1ª eq.

<u>Disegno della curva</u> Facciamo il grafico delle 2 componenti





$1-3t^2=0$, $t=\frac{1}{\sqrt{3}}$



$t \in [0, \frac{1}{2}] \leadsto x(t)$ e $y(t)$ crescono

$t \in [\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}] \leadsto x(t)$ scende e $y(t)$ sale

$t \in [\frac{1}{\sqrt{3}}, 1] \leadsto x(t)$ e $y(t)$ scendono

— o — o —

<u>Def.</u> Supponiamo che γ sia di classe C^1. Allora si definisce retta tangente alla curva nel p.to corrispondente a $t_0 \in [a,b]$ la retta di eq. parametrica

$$\underbrace{\gamma(t_0)} + t\,\underbrace{\dot\gamma(t_0)}$$

vettori

Il vettore $\dot\gamma(t_0)$ si dice $\boxed{\text{VETTORE TANGENTE}}$ alla curva

Nell' esempio precedente

$$\dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t)) = (1-2t, 1-3t^2)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

$$\dot{\gamma}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \left(1-\frac{2}{\sqrt{3}}, 0\right)$$

Oss. Il vettore tangente può essere nullo e in quel caso la retta tangente non è definita.

Oss. Il vettore tangente è la
VELOCITY ⇝ velocità vettoriale
SPEED ⇝ velocità scalare $= \|\dot{\gamma}(t)\|$ aggiunto dopo video

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 049

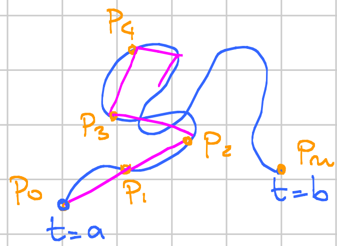
Titolo nota 18/11/2015

LUNGHEZZA DI UNA CURVA

Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva.

Idea intuitiva: fisso dei tempi

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$$



e vedo i corrispondenti punti $P_k = \gamma(t_k)$.
Li unisco con una spezzata di cui calcolo la lunghezza sommando le lungh. dei segmenti.
Tutte le poligonali così ottenute intuitivamente hanno lungh. minore della curva. Quindi si pone

$$\boxed{\text{lunghezza curva} = \text{sup. lungh. poligonali}}$$

Def. Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva. Si definisce

$$\text{lungh}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \|}_{\substack{\text{lungh. segmento} \\ P_{k-1}P_k}} : a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b \right\}$$

La lunghezza $\in [0, +\infty]_{\mathbb{R}}$ può essere anche $+\infty$.

Brutalmente: la lunghezza della curva è quello che indica il contaKm alla fine del percorso, quindi

$$\boxed{\text{TRATTI RIPETUTI CONTANO PIÙ VOLTE}}$$

Def. Una curva si dice <u>rettificabile</u> se ha lunghezza FINITA.

— o — o —

Prop 1 Le curve Lipschitziane sono rettificabili e

$$\text{lungh.} \leq \underset{\text{cost. di Lip}}{L} \cdot \underset{\text{lungh. intervallo}}{(b-a)}$$

Dim. Per ipotesi γ è Lip., quindi

$$\|\gamma(t)-\gamma(s)\| \leq L|t-s| \qquad \forall t \in [a,b] \quad \forall s \in [a,b]$$

Fissati comunque $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, avremo

$$\sum_{k=1}^{n} \|\gamma(t_k)-\gamma(t_{k-1})\| \leq \sum_{k=1}^{n} L|t_k - t_{k-1}| \underset{\text{telescopico}}{=} L(b-a)$$

Quindi tutte le poligonali hanno lungh $\leq L(b-a)$.

— o — o —

Teoremone Sia $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva di classe C^1.
Allora γ è rettificabile e

$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot\gamma(t)\|}_{\text{speed}}\, dt}$$

spazio = integrale della speed rispetto al tempo.

— o — o — o — o —

PARENTESONA <u>Integrale delle funzioni vettoriali</u>

Sia $A \subseteq \mathbb{R}^m$ un insieme misurabile, e sia $f : A \to \mathbb{R}^n$.
Cosa vuol dire

$$\int_A f(x)\,dx$$

È il vettore che ha come componenti $\int_A f_i(x)\,dx$, dove

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)).$$

Lemma 1 (stima dall'ALTO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x)\,dx \right\| \leq \int_A \|f(x)\|\,dx$$

Oss. Non segue banalmente da quello con il valore assoluto.

$\boxed{\text{Dim}}$ Per ogni vettore $v \in \mathbb{R}^n$ vale

$$< v, \int_A f(x)\,dx > = \sum_{k=1}^{n} v_k \int_A f_k(x)\,dx$$

$$= \int_A \sum_{k=1}^{n} v_k f_k(x)\,dx$$

$$= \int_A < v, f(x) > dx$$

(i prodotti scalari entrano negli integr. vettoriali)

$$(\text{c.s.}) \leq \int_A \|v\| \cdot \|f(x)\|\,dx$$

$$= \|v\| \int_A \|f(x)\|\,dx$$

Mettendo insieme LHS e RHS abbiamo ottenuto

$$< v, \int_A f(x)\,dx > \leq \|v\| \int_A \|f(x)\|\,dx$$

Ora pongo

$$v = \int_A f(x)\,dx$$

e trovo

$$\left\| \int_A f(x)\,dx \right\|^2 \leq \left\| \int_A f(x)\,dx \right\| \cdot \int_A \|f(x)\|\,dx$$

Semplifico e ho finito.

— o — o —

Lemma 2 (Stima dal BASSO per integrale vettoriale)

$$\left\| \int_A f(x)\,dx \right\| \geq \int_A \|f(x)\|\,dx - 2\int_A \|f(x)-f(x_0)\|\,dx$$

dove $x_0 \in A$ è un pto qualunque.

$\boxed{\text{Dim.}}$ $$\underbrace{\int_A f(x)\,dx}_{v} = \int_A f(x_0)\,dx + \int_A (f(x)-f(x_0))\,dx$$

$$= \underbrace{\text{meas}(A)\,f(x_0)}_{v_1} + \underbrace{\int_A (f(x)-f(x_0))\,dx}_{v_2}$$

Per la triangolare $\|v\| \geq \|v_1\| - \|v_2\|$

$$\left\| \int_A f(x)\,dx \right\| \geq \text{meas}(A)\,\|f(x_0)\| - \left\| \int_A (f(x)-f(x_0))\,dx \right\|$$

uso Lemma 1 + segno − davanti
$$\geq \text{meas}(A)\,\|f(x_0)\| - \int_A \|f(x)-f(x_0)\|\,dx$$

$$\geq \text{meas}(A)\,\|f(x)\| - \text{meas}(A)\,\|f(x)-f(x_0)\|$$

uso
$\|f(x_0)\| \geq \|f(x)\| - \|f(x)-f(x_0)\|$
$$- \int_A \|f(x)-f(x_0)\|\,dx$$

Integro LHS e RHS su A. Ottengo

$$\text{meas}(A)\left\| \int_A f(x)\,dx \right\| \geq \text{meas}(A)\int_A \|f(x)\|\,dx$$
$$- \text{meas}(A)\int_A \|f(x)-f(x_0)\|\,dx$$
$$- \text{meas}(A)\int_A \|f(x)-f(x_0)\|\,dx$$

Semplifico meas (A) e ho finito.

— o — o —

Dim teorema

Fase facile: fisso $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$.
Allora per ogni $k = 1, \dots, n$ uso Lemma 1 e ottengo

$$\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \| = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot\gamma(t)\, dt \right\|$$
$$\leq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$

Sommo su k e ottengo

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \|}_{\text{lungh. poligonale}} \leq \int_a^b \| \dot\gamma(t) \| \, dt$$

Facendo il sup su tutte le suddivisioni ottengo

$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) \leq \int_a^b \| \dot\gamma(t) \| \, dt.}$$

Fase meno facile. Ottenere la disug. opposta.
Fisso $\varepsilon > 0$, la $t \to \dot\gamma(t)$ è continua, quindi unif. cont.,
quindi prendo il δ corrispondente, cioè

$$|t - s| \leq \delta \implies \| \dot\gamma(t) - \dot\gamma(s) \| \leq \varepsilon \qquad t, s \in [a, b]$$

Ora prendo una qualunque suddivisione $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$
con tutti intervalli minori di δ, cioè $|t_k - t_{k-1}| \leq \delta$.
Allora per il Lemma 2

$$\| \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \| = \left\| \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot\gamma(t)\, dt \right\|$$
$$\geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \dot\gamma(t) \| \, dt - \underbrace{2 \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| \dot\gamma(t) - \dot\gamma(s_k) \| \, dt}_{\geq -2\varepsilon (t_k - t_{k-1})}$$

p.to a caso in $[t_{k-1}, t_k]$

Abbiamo ottenuto

$$\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt - 2\varepsilon (t_k - t_{k-1})$$

Sommando

$$\sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt - 2\varepsilon (b-a)$$

e quindi

$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) \geq \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \, dt - 2\varepsilon (b-a)}$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario è finita

— o — o —

$\boxed{\text{Oss.}}$ Ho usato i lemmi 1 e 2 con $A = [t_{k-1}, t_k]$, ma i lemmi valgono più in generale anche per integrali multipli.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 050

Titolo nota 19/11/2015

Lunghezza di una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$

$$\text{lungh}(\gamma) := \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \; : \; a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b \right\}$$

Teorema Se γ è di classe C^1, allora

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \underbrace{\|\dot\gamma(t)\|}_{\text{speed} \, = \, \|\text{velocity}\|} dt$$

Casi particolari

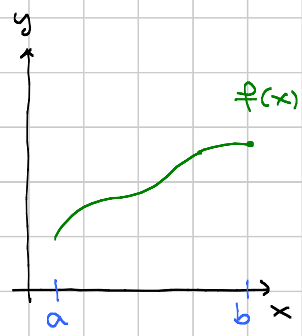
$\boxed{1}$ $n = 2$ $\gamma(t) = (x(t), y(t)) \rightsquigarrow \text{lungh} = \int_a^b \sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}\, dt$

$n = 3$ $\rightsquigarrow \text{lungh} = \int_a^b \sqrt{\dot x^2 + \dot y^2 + \dot z^2}\, dt$

$\boxed{2}$ Curve cartesiane nel piano = tratti del grafico di una funzione

$$\boxed{\gamma(t) := (t, f(t)) \qquad t \in [a,b]}$$

$$\boxed{\text{lungh} = \int_a^b \sqrt{\underset{\dot x}{1} + \underset{\dot y}{\dot f^2(x)}}\, dx}$$



$\boxed{3}$ Curve in coordinate polari : dati $\rho(t)$ e $\theta(t)$, quindi

$$x(t) = \rho(t) \cos\theta(t) \qquad y(t) = \rho(t) \sin\theta(t)$$

Da queste:

$$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\theta - \rho\dot{\theta}\sin\theta \qquad \dot{y} = \dot{\rho}\sin\theta + \rho\dot{\theta}\cos\theta$$

Calcolo la speed^2:

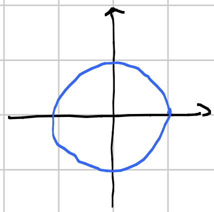
$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\sin^2\theta - 2\rho\dot{\rho}\dot{\theta}\cancel{\sin\theta}\cos\theta$$

$$+ \dot{\rho}^2\sin^2\theta + \rho^2\dot{\theta}^2\cos^2\theta + 2\rho\cancel{\dot{\rho}\dot{\theta}\sin\theta}\cos\theta$$

$$= \dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\theta}^2$$

Quindi
$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{\dot{\rho}^2(t) + \rho^2(t)\dot{\theta}^2(t)}\,dt}$$

<u>Esempio 1</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$

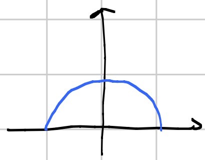


$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \underbrace{\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}}_{1}\,dt = 2\pi$$

la curva è percorsa a velocità unitaria

<u>Esempio 2</u> $\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, \pi] \rightsquigarrow \text{lungh}(\gamma) = \pi$

$\gamma_1(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \qquad t \in [-1, 1]$



$\gamma_2(t) = (-t, \sqrt{1-t^2}) \qquad t \in [-1, 1]$

Se calcolo la speed con γ_1 e γ_2 viene un calcolo più complicato.

— o — o —

Domanda: due curve che percorrono lo stesso sostegno, hanno la stessa lunghezza?

Risposta: sì, se il sostegno viene percorso lo stesso numero di volte in maniera continua.

Enunciato 1 Supponiamo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ una curva C^1.
Supponiamo $\varphi : [c,d] \xrightarrow{\text{surg.}} [a,b]$ una funzione C^1 strettamente monotona (dunque invertibile).
Posso porre $\gamma_1 : [c,d] \to \mathbb{R}^n$ definita come

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$$

(Brutalmente: γ_1 fa lo stesso tragitto di γ, solo a velocità diversa)

Allora $\text{lungh}(\gamma) = \text{lungh}(\gamma_1)$ (non ho detto che γ è iniettiva)

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\dot{\gamma}_1(t) = \underbrace{\dot{\gamma}(\varphi(t))}_{\text{vettore}} \underbrace{\varphi'(t)}_{\text{numero}}$, quindi

$$\|\dot{\gamma}_1(t)\| = \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \, \varphi'(t)$$

assumo φ crescente

Allora
$$\text{lungh}(\gamma_1) = \int_c^d \|\dot{\gamma}_1(t)\| \, dt$$
$$= \int_c^d \|\dot{\gamma}(\varphi(t))\| \, \varphi'(t) \, dt \qquad z = \varphi(t)$$
$$= \int_a^b \|\dot{\gamma}(z)\| \, dz = \text{lungh}(\gamma)$$

Se φ è decrescente devo mettere $-\varphi'(t)$ e invertire gli estremi.

Enunciato 2 Supponiamo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ continua
Supponiamo $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ debolmente monotona e continua e surgettiva.

forse nemmeno serve

$$\gamma_1(t) = \gamma(\varphi(t))$$

e avremo

$$\boxed{\text{lungh}(\gamma) = \text{lungh}(\gamma_1)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Si tratta di dimostrare che ogni poligonale fatta sulla γ corrisponde ad una poligonale fatta sulla γ_1 e viceversa.

Poligonale su γ_1: $c = s_0 < s_1 < \ldots < s_m = d$

$$\gamma_1(s_0), \ldots, \gamma_1(s_m)$$

$$\gamma(\varphi(s_0)), \ldots, \gamma(\varphi(s_m))$$

$\Downarrow$

poligonale su γ con tempi

$$a = \varphi(s_0) < \varphi(s_1) < \ldots < \varphi(s_m) = b$$

(se φ è deb crescente)

Viceversa, data poligonale su γ, corrispondente a

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

scelgo tempi

$$c = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = d$$

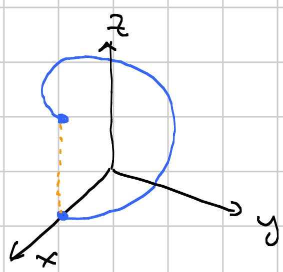
tali che $\varphi(s_i) = t_i$ (posso in maniera non unica grazie a monotonia + surgettività).

— o — o —

Esempio Elica cilindrica $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)$$

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\pi\sqrt{2}$$



Achtung! Per le funzioni a valori in $\mathbb{R}^n$ NON vale un equivalente di Lagrange.

$$\boxed{\underbrace{\gamma(b)-\gamma(a)}_{\text{vettore}} = (b-a)\,\underbrace{\dot\gamma(c)}_{\text{vettore}}}$$

Non è detto che esista $c \in [a,b]$ per cui vale

L'esempio è l'elica: $\gamma(b)-\gamma(a) = (1,0,2\pi)-(1,0,0) = (0,0,2\pi)$

D'altra parte: $\dot\gamma(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$

non possono essere nulle insieme

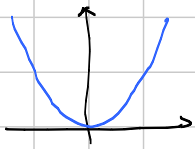
Achtung! Componente per componente vale Lagrange

$$\gamma_i(b) - \gamma_i(a) = (b-a)\,\dot\gamma(c_i)$$

dipende da i, cioè dalla componente

— o — o —

Esempio 1 (t,t^2) : $t \in [a,b]$

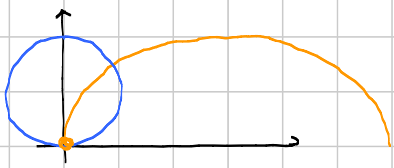


$$\text{lungh}(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1+4t^2}\,dt = \text{si fa}$$

$\dot y^2$

Esempio 2 Cicloide

$\gamma(t) = (t-\sin t, 1-\cos t)$



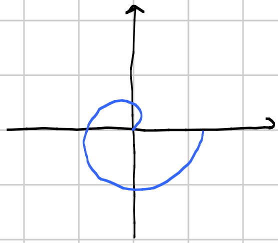
$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1-\cos t)^2+(\sin t)^2}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\cos t+\cos^2 t+\sin^2 t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\,\sqrt{1-\cos t}\,dt$$

si fa con $t = 2z$ + formule per $\cos(2z)$

<u>Esempio 3</u> $\rho(t) = t$, $\theta(t) = t$ $t \in [0, 2\pi]$

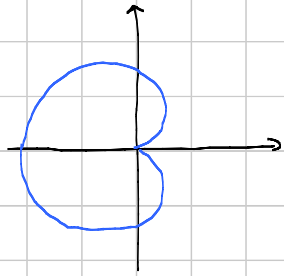


Spirale di eq. polare $\rho = \theta$

$$\text{lungh}(\gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\dot\rho^2 + \rho^2 \dot\theta^2}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{1+t^2}\, dt = \text{solito}$$

<u>Esempio 4</u> Cardioide $\rho = 1 - \cos\theta$



$\theta(t) = t$ $\rho(t) = 1 - \cos t$

Si calcola la lunghezza

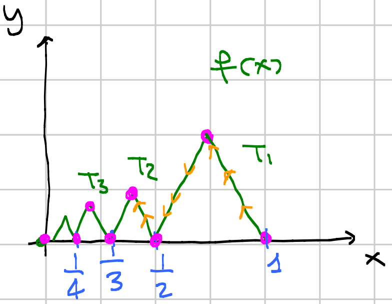
<u>Esercizio</u> Supponiamo $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ CONTINUA.
È vero che posso definire la lunghezza usando solo le poligonali con i tempi equispaziati?

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 051

Titolo nota 19/11/2015

CURVA DI LUNGHEZZA INFINITA



Esempio fatto apposta

Scelgo i triangoli in maniera che abbiano altezza

$$h_n = \frac{1}{n}$$

In questo modo $f(x)$ è continua e la curva

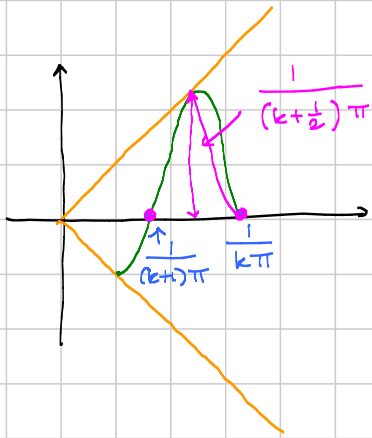
$$\gamma(t) = (1-t, f(1-t))$$

ha lunghezza infinita ... uso come poligonale i vertici dei triangoli e tutti i lati obliqui hanno lungh. $\geq \frac{1}{n}$.

Esempio meno fatto apposta

$$f(x) = x \sin \frac{1}{x} \quad \text{per } x \neq 0$$
$$= 0 \quad \text{per } x = 0$$

$\gamma(t) = (t, f(t))$ ha lungh. infinita



Prendo come poligonale quella che passa per i p.ti in cui

$$\sin \frac{1}{x} = \begin{cases} 0 \\ \pm 1 \end{cases}$$

Ancora una volta i lati sono $\sim \frac{1}{k}$

— o — o —

Esercizio Per ogni $\alpha < 1$ esiste curva α-Hölder di lungh. infinita

INTEGRALI CURVILINEI

1. Notazione
2. Significato geometrico
3. Idea della definizione
4. Tecnica di calcolo

1 NOTAZIONI

$$\int_\gamma f(x)\, ds$$

INTEGRALE DELLA FUNZIONE $f(x)$ LUNGO LA CURVA γ

ds ← indica l'integrale curvilineo

Si intende che

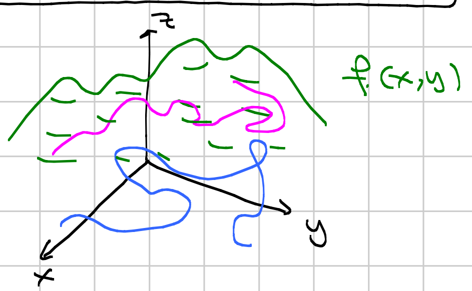
$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è una curva

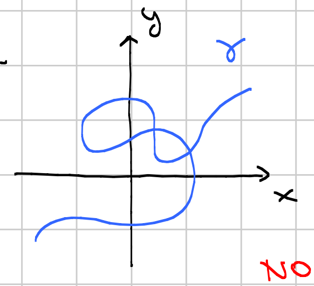
$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione

↑ basta in realtà che $f(x)$ sia definita sul supporto di γ

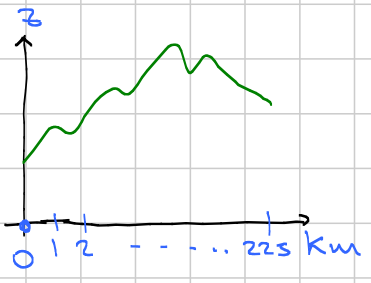
2 SIGNIFICATO GEOMETRICO

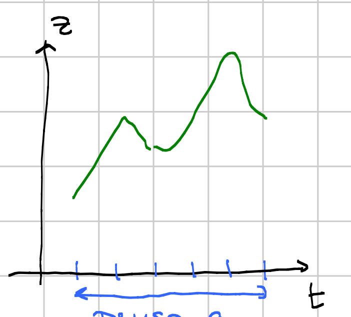
$n = 2$





NON È $f(\gamma(t))$





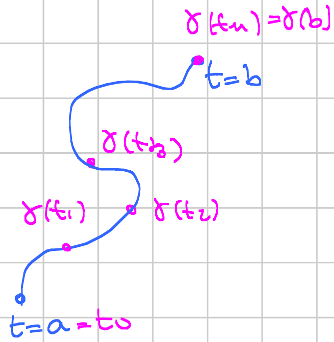
penso a lungh. unif.

(penso di percorrere a velocità costante)

Significato geometrico

$$\int_\gamma f(x)\, ds$$ = integrale del profilo altimetrico della tappa supposta percorsa a velocità unitaria.

3 $\boxed{\text{IDEA DELLA DEFINIZIONE}}$ Facciamo caso semplice: γ e f continue.



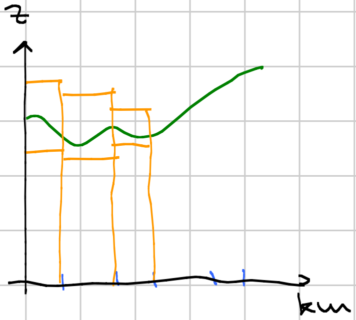
Divido la curva in tanti trattini e poi calcolo somme inferiori e superiori

$$\sum_{k=1}^{n} M_k \ \text{lungh}\left(\gamma(t_{k-1}) \rightsquigarrow \gamma(t_k)\right)$$

max di f nel tratto k-esimo

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \ \text{lungh}\left(\gamma(t_{k-1}) \rightsquigarrow \gamma(t_k)\right)$$

min di f nel tratto



Poi faccio variare le partizioni come sempre.

4 Formula per il calcolo Se $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ è C^1, allora

$$\boxed{\int_\gamma f(x)\, ds = \int_a^b f(\gamma(t))\, \|\dot{\gamma}(t)\|\, dt}$$

Per $n=2$ diventa

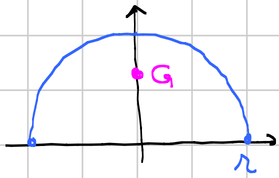
$$\boxed{\int_\gamma f(x,y)\, ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}\, dt}$$

— o — o —

Def. Si definisce baricentro di una curva il p.to G di coord. (nel caso piano)

$$x_G := \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_\gamma x\, ds \qquad y_G := \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \int_\gamma y\, ds$$

<u>Esempio</u> Baricentro della semicirconf.



È chiaro per simmetria che $x_G = 0$.
Calcolo y_G

$$\gamma(t) = (r\cos t, r\sin t) \qquad t \in [0, \pi]$$

$$\text{lungh}(\gamma) = \pi r \qquad \int_\gamma y\, ds = \int_0^\pi \underbrace{r \sin t}_{y(t)} \underbrace{\sqrt{r^2}}_{\text{speed}} = 2r^2$$

Quindi $\quad y_G = \dfrac{2r^2}{\pi r} = \dfrac{2}{\pi} r$

— o — o —

<u>Oss.</u> Anche l'integrale curvilineo NON DIPENDE DALLA PARAMETRIZZAZIONE

[<u>Dim</u>: esercizio di integrazione per sostituzione come con la lunghezza]

— o — o —

$\boxed{\text{Seconda dim. della formula per la lungh. di curve } C^1}$

$$\text{lungh}(\gamma) \le \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt \quad \rightsquigarrow \text{ sempre usando il lemma facile di stima dall'alto.}$$

$$\text{lungh}(\gamma) \ge \int_a^b \|\dot\gamma(t)\| dt$$

Idea: fissare $\varepsilon > 0$ e trovare una poligonale di

$$\text{lungh} \ge \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\, dt - \varepsilon \text{ qualcosa}$$

Tutte le componenti $\dot\gamma_i$ della velocity sono continue, quindi unif. cont., quindi prendo δ con ad ε e faccio vedere che ogni poligonale con $t_k - t_{k-1} \le \delta$ va bene.

$$\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \dot\gamma_i(t)\,dt = (t_k - t_{k-1})\, \dot\gamma_i(\theta_{i,k})$$

tra t_{k-1} e t_k

Aggiunto dopo video: si può ottenere direttamente con Lagrange senza passare dall'integrale

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,dt = (t_k - t_{k-1})\,\|\dot\gamma(s_k)\|$$

intermedio

Allora

$$\underbrace{\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})}_{v_i} = \underbrace{(t_k - t_{k-1})\,\dot\gamma_i(s_k)}_{w_i} + \underbrace{(t_k - t_{k-1})\,(\dot\gamma_i(\theta_{i,k}) - \dot\gamma_i(s_k))}_{u_i}$$

Sono componenti di 3 vettori u, v, w con $v = w + u$, quindi

$$\|v\| \geq \|w\| - \|u\|$$

che vuol dire

$$\underbrace{\|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|}_{\|v\|} \geq \underbrace{(t_k - t_{k-1})\,\|\dot\gamma(s_k)\|}_{\|w\|} - \|u\|$$

Tutte le comp. di u sono + piccole di $(t_k - t_{k-1}) \cdot \varepsilon$

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} \|\dot\gamma(t)\|\,dt \quad - \varepsilon\sqrt{n}\,(t_k - t_{k-1})$$

Sommando su k ho ottenuto

$$\text{lungh. poligonale} \geq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,dt - \sqrt{n}\,(b-a)\,\varepsilon$$

fisso, quindi ok.

— o —— o ——

ANALISI 2 — LEZIONE 052

Titolo nota 24/11/2015

FORME DIFFERENZIALI | Forme Diff. LINEARI 1-FORME | Multilineari k-forme

Def. (Stile corso di servizio) Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto.
Una forma diff. su Ω è un oggetto del tipo

$$\boxed{\omega = \sum_{k=1}^{n} A_k(x)\, dx_k}$$

dove $A_k : \Omega \to \mathbb{R}$ per ogni $k = 1, \dots, n$.

Una forma ω si dice di classe C^m se tutte le $A_k(x)$ sono C^m.

Esempi $\boxed{n=2}$ $\omega = A(x,y)\, dx + B(x,y)\, dy$

$\boxed{n=3}$ $\omega = A(x,y,z)\, dx + B(x,y,z)\, dy + C(x,y,z)\, dz$

$$\omega = \underbrace{(x^2 + e^{xy})}_{A(x,y)} dx + \underbrace{(y \sinh x)}_{B(x,y)} dy$$

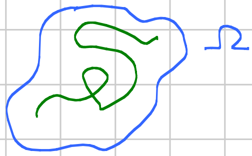
Def. (Ufficiale) Una forma diff. su Ω è un'applicazione da Ω a valori nel duale di $\mathbb{R}^n$.

Oss. Possiamo pensare $dx_1, \dots, dx_n$ come la base canonica del duale di $\mathbb{R}^n$. In tal caso i coeff. $A_k(x)$ sono semplicemente le componenti della forma risp. a questa base.

Oss. Considerando la funzione $\varphi_k(x) = x_k$, si ottiene che il suo diff. in ogni punto (che possiamo indicare con dx_k) è esattamente il k-esimo el. della base canonica di $(\mathbb{R}^n)^*$.

Integrale di una forma diff. lungo una curva

1. Notazione
2. Significato fisico
3. Definizione
4. Tecnica di calcolo



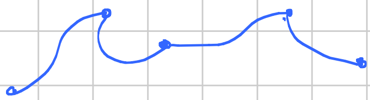
1 Notazione $\boxed{\int_\gamma \omega}$

Si intende che $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto, ω è una forma diff. definita su Ω, e $\gamma : [a,b] \to \Omega$ è una curva di classe C^1 a tratti.

Def. Una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ si dice C^1 a tratti se esistono punti

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$$

tale che γ è C^1 in $[t_{k-1}, t_k]$ per ogni $k = 1, \ldots, n$ e inoltre γ è C^0 in $[a,b]$



3 – 4 La definizione è la seguente

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t))\, \dot\gamma_i(t)\, dt}$$

→ andrebbe spezzato nei vari intervalli $[t_{k-1}, t_k]$ per definire bene $\dot\gamma_i(t)$.

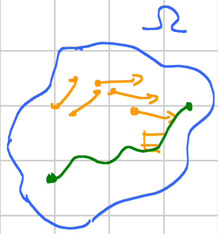
Esempio per $n=2$ $\quad \omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(x(t),y(t))\,\dot x(t) + B(x(t),y(t))\,\dot y(t)\right] dt}$$

Oss. Nella definizione è come se brutalmente avessi fatto

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} \quad \rightsquigarrow \quad dx = \dot{x}(t)\,dt \quad \rightsquigarrow \text{ sostituzione fatta.}$$

[2] Significato fisico Per semplicità prendiamo $n = 2$



Consideriamo l'applicazione $E : \Omega \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$E(x,y) = (A(x,y), B(x,y))$$

Pensiamola come "campo di vettori". La curva $\gamma(t)$ è la traiettoria di un punto che si muove.

Allora $\int_\gamma \omega$ rappresenta il lavoro della forza sul punto,

dove $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$.

Lavoro = $\underset{\vec{E}}{\text{forza}} \cdot \underset{\dot{\gamma}}{\text{velocità}}$

—— o —— o ——

INTEGRALE CURVILINEO VS INTEGRALE DI UNA FORMA

$$\int_\gamma f(x)\,ds \qquad\qquad \int_\gamma \omega$$

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x)\, \dot{\gamma}_i(t) \right) dt$$

se $\|\dot{\gamma}(t)\| \neq 0$ per ogni $t \in [a,b]$

$$= \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n A_i(x) \frac{\dot{\gamma}_i(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \right) \cdot \|\dot{\gamma}(t)\|\,dt$$

L'ultima cosa scritta è l'integrale lungo la curva della funzione

$\boxed{\text{prodotto scalare tra "campo" e versore tangente}}$

In 2 dimensioni diventa

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(x(t),y(t)) \frac{\dot{x}(t)}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} + B(x(t),y(t)) \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \right] \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt$$

— o — o —

Differenza tra una forma diff. in $\mathbb{R}^2$ e una coppia di funzioni in $\mathbb{R}^2$.

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. In Ω posso definire diversi oggetti

$\text{Funz}(\Omega) = \{ \text{funzioni } f : \Omega \to \mathbb{R} \}$
$\text{Curve}(\Omega) = \{ \text{curve } \gamma : [a,b] \to \Omega \}$
$\text{Diff}(\Omega) = \{ \text{forme diff. in } \Omega \}$.

Supponiamo di avere due aperti $A \subseteq \mathbb{R}^2$ e $B \subseteq \mathbb{R}^2$.
Supponiamo di avere $\varphi : A \to B$, diciamo di classe C^1.

La φ induce delle applicazioni a livello di Funz, Curve, Diff.

$$\text{Funz}(B) \ni g \overset{f_\#}{\rightsquigarrow} g \circ \varphi \in \text{Funz}(A)$$

$$\text{Curve}(A) \ni \gamma \overset{f_\#}{\rightsquigarrow} \varphi \circ \gamma \in \text{Curve}(B)$$

Le forme diff. vanno indietro, cioè data ω su B e una curva γ su A, definisco una forma $f_\# \omega$ su A mediante la formula

$$\int_\gamma \underbrace{f_\# \omega}_{\substack{\text{forma che voglio}\\ \text{trasformare su } A}} \overset{\text{def}}{=} \int_{\underbrace{f_\# \gamma}_{\substack{\text{curva trasportata}\\ \text{su } B}}} \omega$$

Se io definissi $f_\# \omega$ facendo il pull-back dei coefficienti A e B della forma ω, la relazione NON sarebbe soddisfatta. Quindi le forme tornano indietro, ma non come le funzioni.

<u>Esercizio</u> Capire come tornano indietro le forme, cioè data

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

definita su un certo aperto $B \subseteq \mathbb{R}^2$, trovare la formula per ω_1 tale che

$$\int_\gamma \omega_1 = \int_{\varphi \circ \gamma} \omega$$

per ogni curva $\gamma : [a,b] \to A$.

<u>Analogo di algebra lineare</u>

$$\begin{tikzcd} f : V \arrow[r] \arrow[d] & W \arrow[d] \\ V_1 \arrow[r, "?"] & W_1 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} f^* : W^* \arrow[r] & V^* \\ W_1^* \arrow[u] \arrow[r, "?"] & V_1 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 053

Titolo nota 24/11/2015

Cosa succede se riparametrizzo la curva

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, ω forma diff. in Ω, $\gamma : [a,b] \to \Omega$ curva C^1

Sia ora

$$\varphi : [c,d] \to [a,b]$$

Possiamo definire una nuova curva $\gamma_1 : [c,d] \to \Omega$ come

$$\gamma_1(t) := \gamma(\varphi(t))$$

Qual è la relazione tra $\int_\gamma \omega$ e $\int_{\gamma_1} \omega$?

Basta usare la formula

$$\int_c^d \left[\sum_{i=1}^n A_i(\gamma_1(t)) \, \dot{\gamma}_{1i}(t) \right] dt \qquad \text{ora}$$

$$\dot{\gamma}_{1i}(t) = \frac{d}{dt} \left(\gamma_i(\varphi(t)) \right) = \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \, \varphi'(t)$$

Quindi l'integrale diventa

$$\int_c^d \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(\varphi(t))) \, \dot{\gamma}_i(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt$$

$s = \varphi(t)$
$ds = \varphi'(t)\, dt$

$$= \int \sum_{i=1}^n A_i(\gamma(s)) \cdot \dot{\gamma}_i(s) \, ds$$

Gli estremi di integrazione sono a e b se $\varphi(c) = a$ e $\varphi(d) = b$

sono b e a se $\varphi(c) = b$ e $\varphi(d) = a$

quindi può cambiare il segno.

Conclusione

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \qquad \text{se } \varphi \text{ conserva i versi } (\varphi(c)=a, \varphi(d)=b)$$

$$= -\int_{\gamma_1} \omega \qquad \text{se } \varphi \text{ inverte i versi } (\varphi(c)=b, \varphi(d)=a)$$

Quindi

- per l'integrale curvilineo se inverto il verso, il segno resta lo stesso. Inoltre tratti ripetuti avanti/indietro si sommano,
- per l'integrale di una forma se inverto il verso, il segno cambia. Inoltre i tratti ripetuti avanti/indietro si cancellano.

— o — o —

FORME DIFF. ESATTE | CAMPI CONSERVATIVI

<u>Def</u>. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma differ. in Ω di classe C^0.
Si dice che ω è esatta $\boxed{\text{in } \Omega}$ se esiste una funzione $V : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\boxed{A_k(x) = \frac{\partial V}{\partial x_k}(x) \qquad \forall x \in \Omega}$$

Quando succede, la funzione $V(x)$ si dice PRIMITIVA della forma o POTENZIALE.

<u>Oss. 1</u> Bisogna sempre precisare DOVE una forma è esatta, cioè la stessa forma può essere esatta in un insieme, ma non in un altro. Ancora peggio: una forma può essere esatta in Ω_1 e in Ω_2, ma non in $\Omega_1 \cup \Omega_2$.

Oss. La differenza tra due primitive di una stessa forma ω (posto che esistano) è una funzione con gradiente nullo ovunque, quindi è costante sulle componenti connesse di Ω.

Proposizione 1 Sia ω una forma diff. esatta in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$.
Sia F una primitiva di ω
Sia $\gamma : [a,b] \to \Omega$ una curva C^1 a tratti.

Allora

$$\boxed{\int_\gamma \omega = \underbrace{F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))}}$$

Diff. tra i valori della primitiva agli estremi

Dim. Fare il conto

$$\int_\gamma \omega \underset{\text{def}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n A_i(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_i(t) \right] dt$$

$$\underset{\omega \text{ esatta}}{=} \int_a^b \left[\sum_{i=1}^n \frac{\partial F}{\partial x_i}(\gamma(t))\, \dot{\gamma}_i(t) \right] dt$$

$$\underset{\text{chain rule}}{=} \int_a^b \frac{d}{dt} F(\gamma(t))\, dt \underset{\text{integrale di una derivata}}{=} \Big[F(\gamma(t)) \Big]_{t=a}^{t=b} = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))$$

Questo funziona se γ è di classe C^1. Se è solo C^1 a tratti si fa lo stesso discorso tratto per tratto e tutti i termini intermedi si eliminano telescopicamente.

—o—o—

Oss. Per $n=2$ la dimostrazione diventa

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b [A(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)]\,dt$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial x}(x(t),y(t))\,\dot{x}(t) + \frac{\partial F}{\partial y}(x(t),y(t))\,\dot{y}(t)\right] dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} F(x(t),y(t))\,dt \quad = \text{come sopra}$$

— o — o —

Teorema (Caratterizzazione dell'esattezza)
Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^0.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti
(i) ω è esatta
(ii) per ogni coppia di curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi vale l'uguaglianza

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

(iii) per ogni curva γ CHIUSA vale

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Corollario ciclistico Se faccio un giro in bici e ho sempre vento contrario, allora di sicuro il vento non è gradiente di un potenziale

Dim

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{vento}}}{\vec{E}}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t)\rangle\,dt \underset{\substack{\uparrow\\ \text{se ho vento}\\ \text{contrario}}}{<} 0$$

, quindi non si annulla

$\boxed{\text{Dim. teorema}}$ (i) $\Rightarrow$ (ii) è la proposizione di prima
(i) $\Rightarrow$ (iii) pure

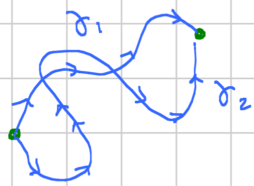
(ii) $\Rightarrow$ (iii) segue usando $\gamma_1(t)$ = curva $\gamma(t)$ data
$\gamma_2(t)$ = curva costante in $\gamma(a) = \gamma(b)$.

Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega = 0$$

nella formula ho $\dot{\gamma}_2(t) \equiv 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) Costruisco una nuova curva γ facendo prima avanti lungo γ_1, poi indietro lungo γ_2 [scrive espressione formale]



$$0 = \int_{\gamma} \omega = \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega$$

γ è chiusa

perché γ_2 è percorsa al contrario.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Devo definire la primitiva. Fisso un punto a caso $x_0 \in \Omega$. Per ogni altro $x \in \Omega$ definisco

$$F(x) = \int_{\gamma} \omega$$

dove γ è una <u>qualunque</u> curva che unisce x_0 a x (per l'ipotesi (ii) non dipende dalla curva). Sto supponendo che Ω sia connesso per curve C^1 a tratti (cosa che per gli aperti è equivalente alla connessione).

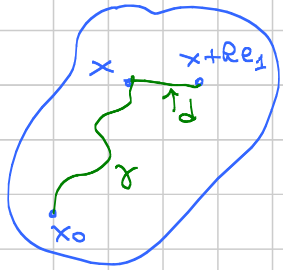
Devo dimostrare che

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = A_k(x) \qquad \forall x \in \Omega$$

Facciamolo per x_1.

$$F(x+Re_1) = \int_\gamma \omega + \int_d \omega$$

direttissima



$$F(x) = \int_\gamma \omega$$

$$\frac{F(x+Re_1)-F(x)}{R} = \frac{1}{R}\int_d \omega \qquad d(t) = (x+te_1) \quad t \in [0,R]$$

$$= \frac{1}{R}\int_0^R \sum_{i=1}^{n} A_i(x+te_1)\,\dot{d}_i(t)\,dt = \frac{1}{R}\int_0^R A_1(x+te_1)\,dt$$

sono tutti nulli tranne $\dot{d}_1(t) \equiv 1$

$= A_1(x)$

Analisi 1

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 054

Titolo nota 25/11/2015

FORME DIFF. CHIUSE $\omega = \sum_{i=1}^{n} A_i(x)\, dx_i$

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1.
Si dice che ω è **chiusa** se

$$\boxed{\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad \text{per ogni } i,k = 1,\dots,n}$$

Casi speciali $\boxed{n=2}$ $\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$

chiusa $\iff$ $\boxed{\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}}$

$\boxed{n=3}$ $\omega = A(x,y,z)\,dx + B(x,y,z)\,dy + C(x,y,z)\,dz$

chiusa $\iff$ $\boxed{A_y = B_x, \quad A_z = C_x, \quad B_z = C_y}$

Oss. Per una forma in n variabili le condizioni sono $\binom{n}{2}$

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE e sia ω una forma diff. in Ω di classe C^1.
Allora vale l'implicazione

$$\boxed{\omega \text{ esatta} \implies \omega \text{ chiusa}}$$

Conseguenza al contrario Se ω non è chiusa, allora non è nemmeno esatta.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Essendo la forma esatta si ha che

$$A_k(x) = \frac{\partial F}{\partial x_k}(x)$$

per una opportuna primitiva $F : \Omega \to \mathbb{R}$. Ma allora

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial F}{\partial x_k}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_k}$$

$$\frac{\partial A_i}{\partial x_k} = \ldots = \frac{\partial^2 F}{\partial x_k \partial x_i}$$

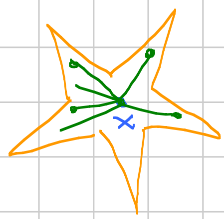
coincidono per il teo. di scambio dell'ordine di deriv.

— o — o —

Def. Un insieme aperto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice

- $\boxed{\text{CONVESSO}}$ se $\forall x \in \Omega$, $\forall y \in \Omega$, $\forall \lambda \in [0,1]$ si ha che

$$\lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$$



- $\boxed{\text{STELLATO}}$ (star shaped) se

$$\exists x \in \Omega \ \forall y \in \Omega \ \forall \lambda \in [0,1] \quad \lambda x + (1-\lambda) y \in \Omega$$

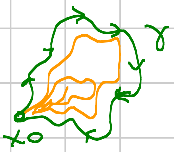
- $\boxed{\text{CONNESSO}}$ se non lo posso scrivere come unione disgiunta di due aperti non banali, cioè

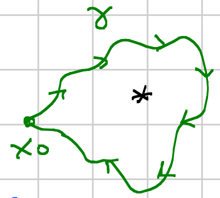
$$A \text{ aperto}, B \text{ aperto} \neq \emptyset, \ A \cap B = \emptyset, \ A \cup B = \Omega \Rightarrow A = \emptyset$$

Oss. Per aperti di $\mathbb{R}^n$ la connessione è equivalente alla connessione per archi, cioè per ogni $x \in \Omega$ e ogni $y \in \Omega$ esiste $\gamma : [a,b] \to \Omega$ t.c. $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$.
continua

È equivalente anche alla connessione per archi di classe C^∞.

• $\boxed{\text{SEMPLICEMENTE CONNESSO}}$ Ogni curva chiusa è omotopa ad una curva costante



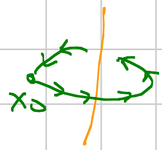


Posso ritrarre una curva su un p.to in $\mathbb{R}^2$

In $\mathbb{R}^2 \setminus \{*\}$ non posso ritrarre una curva che "gira intorno al buco"

Brutalmente: Ω è semplicemente connesso se non ha buchi capaci di fermare la retrazione di una curva.

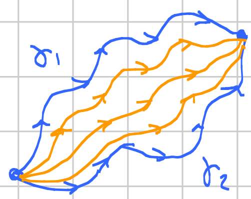
Esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{p.to}\}$ è semplicemente connesso
$\mathbb{R}^3 \setminus$ retta NON è sempl. connesso



Def. più formale di omotopia.

Siano $\gamma_1 : [a,b] \to \Omega$ e $\gamma_2 : [a,b] \to \Omega$ due curve continue con gli stessi estremi $\gamma_1(a) = \gamma_2(a)$
$\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$

Si dice che le curve sono omotope mediante una omotopia che lascia gli estremi fissi se esiste



$$\Phi : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$$

tale che
(i) Φ è continua
(ii) $\Phi(t,0) = \gamma_1(t)$ per ogni $t \in [a,b]$
(iii) $\Phi(t,1) = \gamma_2(t)$ " "
(iv) $\Phi(a,s) = \gamma_1(a)$ per ogni $s \in [0,1]$
(v) $\Phi(b,s) = \gamma_1(b)$ " " "

$\boxed{\text{FATTO GENERALE}}$ Ω è sempl. connesso se e solo se per ogni coppia di curve continue con gli stessi estremi esiste un'omotopia tra l'una e l'altra.

$\boxed{\text{Teorema misterioso}}$ Dato $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto QUALUNQUE e date due curve γ_1 e γ_2 di classe C^1 con gli stessi estremi e omotope tra di loro, allora esiste un'omotopia non solo C^0, ma C^1 e oltre, cioè t.c.

Φ_t, Φ_s, Φ_{ts} sono continue

— o — o —

Oss. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto. Allora

NB: solo se si definisce semi connessi

$$\boxed{\text{convesso} \Rightarrow \text{stellato} \Rightarrow \text{sempl. connesso} \Rightarrow \text{connesso}}$$

Non vale nessuna delle implicazioni inverse (fare disegni in $\mathbb{R}^2$)

$\boxed{\text{Teorema}}$ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto SEMPL. CONNESSO.
Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω.
Allora

$$\boxed{\omega \text{ chiusa} \Rightarrow \omega \text{ esatta}}$$

Achtung! Se ω è chiusa, ma Ω non è sempl. connesso, allora BOH, cioè può essere esatta oppure no.

Esempio banale ω = la forma nulla $0\,dx + 0\,dy$
Ω = corona circolare in $\mathbb{R}^2$

Banalmente è esatta e chiusa

Esempio meno banale

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y}{x^2+y^2}\,dy$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. ← Non è sempl. connesso

Dico che ω è CHIUSA

$$A_y = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2} = B_x$$

Dico che è ESATTA vedendo ad occhio la primitiva:

$$F(x,y) = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

(verifica diretta).

— o —

ANALISI 2 — LEZIONE 055

Titolo nota 25/11/2015

Teorema fondamentale Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE. Sia ω una forma diff. di classe C^1 in Ω CHIUSA. Sia γ_1 e γ_2 due curve C^1 a tratti OMOTOPE, con gli stessi estremi. Allora

$$\boxed{\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega}$$

Questo teorema implica l'esattezza delle forme chiuse sugli aperti sempl. connessi.

Dim. dell'implicazione Per avere l'esattezza basta mostrare che

$$\int_\gamma \omega = 0 \quad \text{per ogni } \gamma \text{ chiusa a valori in } \Omega$$

Poiché Ω è sempl. connesso ogni curva γ chiusa è omotopa ad una curva γ_0 costante e per il teorema fondamentale

$$\int_\gamma \omega \underset{\text{teo. fond.}}{=} \int_{\gamma_0} \omega = 0$$

banalità: ogni forma ha integrale nullo sulle curve costanti.

— o — o —

ESEMPIO DI FORMA CHIUSA MA NON ESATTA

LA SOLITA

$$\boxed{\omega = \frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy}$$

$\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non sempl. connesso

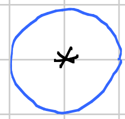
È CHIUSA ?

$$A_y = \frac{-1}{x^2+y^2} + \frac{y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{-x^2-y^2+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$B_x = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

È ESATTA ? NO : basta trovare una curva chiusa su cui l'integrale viene $\neq 0$.

Provo con $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$



$$\int_\gamma \omega \underset{\text{def.}}{=} \int_0^{2\pi} [A(\cos t, \sin t)(-\sin t) + B(\cos t, \sin t) \cos t]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi \neq 0.$$

— o — o —

Oss. La solita ammette primitiva in tutti questi insiemi, che sono stellati ($\Rightarrow$ sempl. connessi)

- $\{x>0\}$, $\{y>0\}$, $\{x<0\}$, $\{y<0\}$
- $\mathbb{R}^2 - \{(x,0) : x \geq 0\}$

Una primitiva per $x>0$ è $F(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$

$$F_x = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{-y}{x^2+y^2} \quad ; \quad F_y = \frac{1}{1+\frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+y^2}$$

È anche primitiva per $x<0$.

Una primitiva per $y \neq 0$ è $F_2(x,y) = -\arctan \frac{x}{y}$

Fare il conto per esercizio.

<u>Nota bene</u>: nel primo quadrante $F(x,y)$ e $F_2(x,y)$ sono primitive della stessa forma, dunque DEVONO differire per una costante. Ed infatti

$$F(x,y) - F_2(x,y) = \arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y} = \frac{\pi}{2}$$

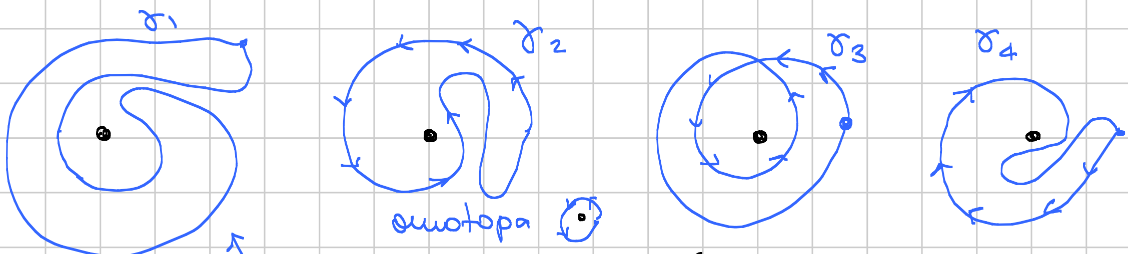
Ricorso: $\arctan \alpha + \arctan \frac{1}{\alpha} = \frac{\pi}{2} \quad \forall \alpha > 0$

Se pongo

$$F_3(x,y) = \begin{cases} F(x,y) & \text{se } x > 0 \\ F_2(x,y) + \frac{\pi}{2} & \text{se } y > 0 \end{cases}$$

ho ottenuto una primitiva definita nel 1°, 2° e 4° quadrante. Procedendo allo stesso modo posso estenderla su $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiasse neg. delle x.
Questa primitiva coincide a meno di costanti con quella definita per $y < 0$, ma le costanti sul 3° e 4° quadrante sono diverse.

<u>Esempio</u> ω = la solita. Quanto fa l'integrale sulle curve disegnate qui sotto



$\int_{\gamma_1} \omega = 0$ omotopa costante $\qquad \int_{\gamma_2} \omega = 2\pi \qquad \int_{\gamma_3} \omega = 4\pi$ 2 giri $\qquad \int_{\gamma_4} \omega = -2\pi$

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Ho una forma ω chiusa in $\mathbb{R}^2 \setminus$ origine.
Come faccio a sapere se è esatta?
La testo su una curva che fa un giro intorno al buco, ad esempio $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$.

- Se viene $\neq 0$, addio esattezza
- Se viene $= 0$, allora verrà 0 su ogni altra curva, perché ogni altra curva è omotopa a un multiplo di quella, quindi la forma è esatta.

Oss generale Dato una forma chiusa ω in un $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto qualunque, per avere l'esattezza basta testare su una famiglia di curve che generano il gruppo fondamentale.

Perché la solita è la solita? Sia ω_s la solita
Sia ω un'altra forma CHIUSA in $\mathbb{R}^2 \setminus$ origine.
Allora esiste una costante c tale che

$$\omega + c\omega_s \quad \text{è esatta}$$

quindi in particolare $\omega = -c\omega_s +$ forma esatta

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta trovare c in maniera tale che

$$\int_\gamma \omega + c\omega_s = 0$$

dove γ è la solita circ. che fa un giro intorno al buco

$$0 = \int_\gamma \omega + c\omega_s = \underbrace{\int_\gamma \omega}_{\text{lo calcolo}} + c \underbrace{\int_\gamma \omega_s}_{2\pi} \quad \leadsto \text{trovo } c.$$

$\square$

Oss. Tutte le forme chiuse e non esatte su $\mathbb{R}^2 \setminus 2$ p.ti sono del tipo

$$\text{esatta} + a\,\omega_S + b\,\omega_{S'}$$

solite traslate in maniera da avere problemi nei 2 p.ti

Oss. In $\mathbb{R}^3 \setminus$ retta tutte le forme chiuse ma non esatte sono del tipo

$$\text{esatta} + a\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{x}{x^2+y^2}\,dy + 0\,dz\right)$$

(se la retta è l'asse z)

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 056

Titolo nota 27/11/2015

INTEGRALI DIPENDENTI DA PARAMETRO

Caso semplice: $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $[t_1, t_2] \subseteq \mathbb{R}$

$f : [a,b] \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ continua

$f(x,t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_a^b f(x,t)\, dx$$

(integrale dipendente da un parametro)

Più in generale $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ limitato, compatto, misurabile

$f : \Omega \times [t_1, t_2] \to \mathbb{R}$ continua

$f(x,t)$

Poniamo

$$\varphi(t) := \int_\Omega f(x,t)\, \underbrace{dx}_{\text{in } n \text{ variabili}}$$

Domande: $\varphi(t)$ è continua? È derivabile?

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Avendo assunto $f(x,t)$ continua, la funzione $\varphi(t)$ risulta continua in $[t_1, t_2]$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Direttamente nel caso generale (in $\mathbb{R}^n$). Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$ e fisso $\varepsilon > 0$. La funzione $f(x,t)$ è continua, dunque unif. cont. in $\Omega \times [t_1, t_2]$, dunque esiste $\delta > 0$ t.c.

$$|(x_1, s_1) - (x_2, s_2)| \leq \delta \Rightarrow |f(x_1, s_1) - f(x_2, s_2)| \leq \varepsilon$$

Preso un qualunque $t \in [t_1, t_2]$ con $|t - t_0| \leq \delta$ avremo pertanto

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)| = \left| \int_\Omega [f(t,x)-f(t_0,x)]\,dx \right|$$

$$\leq \int_\Omega |f(t,x)-f(t_0,x)|\,dx$$

distano meno di δ

$$\leq \int_\Omega \varepsilon \, dx = \varepsilon \operatorname{meas}(\Omega)$$

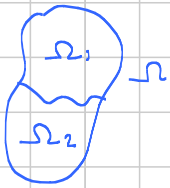
Questo mostra la continuità. $\square$

— o — o —

<u>Oss.</u> Non abbiamo usato l'unif. cont. nelle 2 variabili, ma solo l'uniforme uniforme continuità (doppio avverbio) nella variabile t, cioè

$$\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0 \ \text{ t.c. } \ |s_2-s_1|\leq\delta \Rightarrow |f(s_2,x)-f(s_1,x)|\leq\varepsilon \quad \forall x\in\Omega$$

Non abbiamo nemmeno usato la continuità rispetto ad x.
Per esempio il teorema vale se



$$f(x,t) = \begin{cases} \alpha_1(t) & \text{se } x\in\Omega_1 \\ \alpha_2(t) & \text{se } x\in\Omega_2 \end{cases}$$

Se $\alpha_1(t)$ e $\alpha_2(t)$ sono continue, allora l'integrale dipendente da parametro è continuo.

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ Supponiamo $f:\Omega\times[t_1,t_2]$ sia continua (in (x,t)) e derivabile parzialmente rispetto a t con $f_t(x,t)$ continua in $\Omega\times[t_1,t_2]$.

Allora φ è derivabile in $[t_1,t_2]$ e

$$\varphi'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx \qquad \forall t\in[t_1,t_2]$$

(Brutalmente: porto dentro la derivata)

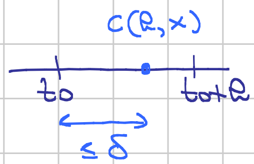
$\boxed{\text{Dim.}}$ Faccio il rapporto incrementale e passo al limite sfruttando l' unif. cont. di $f_t(x,t)$.
Fisso $t_0 \in [t_1, t_2]$, fisso $\varepsilon > 0$

$$\frac{\varphi(t_0+h) - \varphi(t_0)}{h} - \int_\Omega f_t(x,t_0)\,dt$$

e voglio dim. che tende a 0 per $h \to 0$

$$\frac{1}{h}\left[\int_\Omega f(x,t_0+h)\,dx - \int_\Omega f(x,t_0)\,dx\right] - \int_\Omega f_t(x,t_0)\,dt$$

$$= \int_\Omega \Big[\underbrace{\frac{f(x,t_0+h) - f(x,t_0)}{h}}_{\text{Lagrange in } t} - f_t(x,t_0)\Big]\,dx$$



$$= \int_\Omega \underbrace{\left[f_t(x, t_0 + c(x,h)) - f_t(x,t)\right]}\,dx$$

Questo in valore assoluto è $\leq \varepsilon$ se h è sufficientemente piccolo (basta che h sia + piccolo del δ dell' unif. contin. di f_t)

La conclusione è come prima.

— o — o —

Caso speciale In una variabile

$$\frac{d}{dt}\int_a^b f(x,t)\,dx = \int_a^b f_t(x,t)\,dx$$

se f_t esiste ed è continua.

Più in generale in una variabile considero la funzione

$$F(a,b,t) := \int_a^b f(x,t)\,dx$$

Chi sono le derivate parziali di F rispetto ad a, b, t ?

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \int_a^b f_t(x,t)\,dx$$ (fatto prima)

$$\frac{\partial F}{\partial b}(a,b,t) = f(b,t)$$ (Analisi 1)

$$\frac{\partial F}{\partial a}(a,b,t) = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{estremo "sotto"}}}{-} f(a,t)$$ (Analisi 1)

Conseguenza:

$$\varphi(t) := \int_{a(t)}^{b(t)} f(x,t)\,dx$$

Funzione dentro variabile
Estremi variabili

Allora (posto che $a'(t)$, $b'(t)$ e $f_t(x,t)$ esistano continue

$$\boxed{\varphi'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} f_t(x,t)\,dx + f(b(t),t)\,b'(t) - f(a(t),t)\,a'(t)}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta osservare che $\varphi(t) = F(a(t), b(t), t)$
e applicare la CHAIN RULE:

$$\varphi'(t) = F_a\, a' + F_b\, b' + F_t$$

e sostituire F_a, F_b e F_t calcolati sopra.

— o — o —

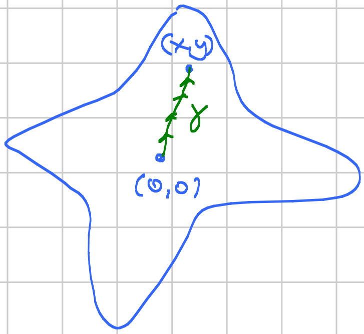
$\boxed{\text{TEOREMA 1}}$ Una forma diff. $\boxed{\text{chiusa}}$ in un aperto $\boxed{\text{stellato}}$ è esatta, cioè ammette primitiva

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per semplicità la facciamo in 2 variabili.

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

con A e B di classe C^1 in Ω stellato con $A_y = B_x$.
A meno di traslazioni posso suppore Ω stellato rispetto a $(0,0)$

Pongo



$$F(x,y) := \int_\gamma \omega$$

dove γ è la "direttissima" che unisce $(0,0)$ e (x,y), cioè

$$\gamma(t) = (\underbrace{xt}_{x(t)}, \underbrace{yt}_{y(t)}) \qquad t \in [0,1]$$

Allora $$F(x,y) = \int_0^1 [\underbrace{A(xt,yt)}_{A(x(t),y(t))} \underbrace{x}_{\dot{x}(t)} + B(xt,yt)\underbrace{y}_{\dot{y}(t)}]\,dt$$

Devo verificare che $F_x = A$ e $F_y = B$.

$$F_x(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\int_0^1 \dots$$

(derivata di un integrale dipendente da parametro, con x parametro e t variabile di integrazione)

$$= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x}[A(xt,yt)x + B(xt,yt)y]\,dt$$

$$= \int_0^1 [A_x(xt,yt)tx + A(xt,yt)\cdot 1 + B_x(xt,yt)ty]\,dt$$

NIENTE PANICO: l'integranda è una derivata rispetto a t ...

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiusura}}}{=} \int_0^1 \left[A_x(xt,yt)\,t\,x + A(xt,yt) + A_y(xt,yt)\,t\,y \right] dt$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt}\left[t\,A(xt,yt) \right] dt$$ (verificare mentalmente che torna!)

$$= \left[t\,A(xt,yt) \right]_{t=0}^{t=1} = A(x,y)$$

La verifica che $F_y = B$ è del tutto analoga. □

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 057

Titolo nota 27/11/2015

TEOREMA 2 Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto QUALUNQUE.
Sia ω una forma diff. in Ω CHIUSA.
Siano γ_1 e γ_2 due curve a valori in Ω di classe C^1 a tratti, con gli STESSI ESTREMI e OMOTOPE.
Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$$

Corollario: Se Ω è sempl. connesso e ω è chiusa, allora ω è esatta.

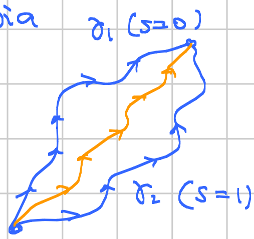
Dim. In $\mathbb{R}^2$ sotto ipotesi legg. più forti (in apparenza), cioè γ_1 e γ_2 curve C^1 con omotopia C^1 e altre.
Fissiamo le notazioni:

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy \qquad A_y = B_x$$

Omotopia la indico con $(x(t,s), y(t,s))$

s: parametro che descrive l'omotopia

$$\gamma_1(t) = (x(t,0), y(t,0)) \qquad t \in [a,b]$$
$$\gamma_2(t) = (x(t,1), y(t,1)) \qquad t \in [a,b]$$



Definisco

$$\varphi(s) := \int_{\gamma_s} \omega \qquad \gamma_s(t) = (x(t,s), y(t,s))$$

$$= \int_a^b \left[A(x(t,s),y(t,s))\,x_t(t,s) + B(x(t,s),y(t,s))\,y_t(t,s)\right] dt$$

La tesi è equivalente a dimostrare che $\varphi(s)$ è costante, cioè $\varphi'(s)=0$ per ogni $s\in[0,1]$.

Questo è un integrale dipendente da parametro (s è il param., t la variabile di integrazione)

$$\varphi'(s) = \int_a^b \Big[\boxed{A_x x_s x_t} + A_y y_s x_t + \boxed{A x_{ts}} + \boxed{B_x x_s y_t} + B_y y_s y_t + B y_{ts} \Big]\, dt$$

Niente panico: integrare per parti i termini con la deriv. 2^a,

$$\int_a^b A x_{ts}\, dt = \int_a^b A\, (x_s)_t\, dt = \Big[A x_s\Big]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s\, dt$$

si annulla per $t=a$ e $t=b$ perché gli estremi sono fissi

$$= -\int_a^b \frac{\partial}{\partial t} A \cdot x_s\, dt = -\int_a^b (A_x x_t + A_y y_t)\, x_s\, dt$$

$$= -\int_a^b \Big[\boxed{A_x x_t x_s} + \underbrace{\boxed{A_y y_t x_s}}_{B_x y_t x_s} \Big]\, dt$$

Analogamente integrando per parti $B y_{ts}$ si eliminano gli altri due termini. $\square$

<u>Esercizio</u> Rifare le dim. dei teoremi 1 e 2 in n variabili (esercizio di gestione degli indici).

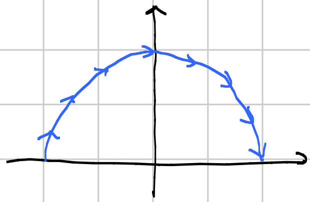
— o — o —

<u>COME calcolo l'integrale di una forma lungo una curva?</u>

① Formula usata bovinamente
② Formula dopo aver riparametrizzato la curva
③ Esattezza + primitiva
④ Chiusura + scelta curva omotopa a quella data

Esempio 1 $\omega = x^2y\,dx + y^2dy$

$\gamma(t) = (t, \sqrt{1-t^2}) \quad t \in [-1,1]$



ω non è chiusa, quindi non è esatta, quindi ③ e ④ addio.
La ① sembra calcolosa.
Provo la ② usando la parametrizzazione $\overbrace{(\cos t, \sin t)}^{\gamma_1(t)}$ con $t \in [0,\pi]$. Achtung! Il verso è diverso, quindi metto segno $-$:

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_1} \omega = -\int_0^\pi [\cos^2 t \sin t(-\sin t) + \sin^2 t \cdot \cos t]\,dt = \text{si fa}$$

percorre stessa curva, solo in verso opposto

formula

[Provare a vedere che succede con la ①]

Esempio 2 $\omega = xy^2dx + (x^2y + y^3)\,dy$

$\gamma(t) = (te^t, t^2\sin t) \quad t \in [0,\pi]$

$A_y = 2xy \quad B_x = 2xy \Rightarrow$ è chiusa $\Rightarrow$ su tutto $\mathbb{R}^2$ è esatta ☺

Cerco a occhio una primitiva

$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + C(y) \qquad F_y(x,y) = x^2y + \boxed{C'(y)}$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\;\; = x^2y + \boxed{y^3}$

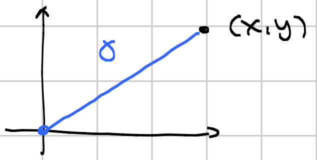
Quindi una primitiva è

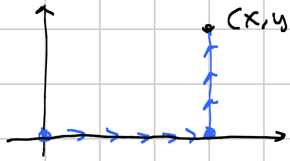
$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^2 + \frac{1}{4}y^4$$

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(\pi)) - F(\gamma(0)) = F(\pi e^\pi, 0) - F(0,0) =$$

banale sostituzione.

Oss. Se uno è disperato, saputo che ω è esatta può cercare la primitiva integrando lungo una curva che congiunge un p.to base (x_0, y_0) (magari l'origine) con il p.to generico (x,y).
Curve furbe:





Esempio 3 $\quad \omega = xy^2\,dx + (x^2y + e^{y^2})\,dy$

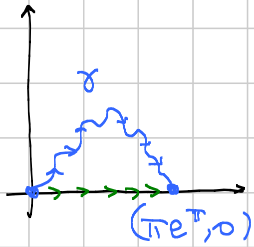
$$\gamma(t) = (te^t,\ t^2 \sin t) \qquad t \in [0,\pi]$$

Come prima ω è esatta e una primitiva è

$$\frac{1}{2}x^2y^2 + \text{primitiva di } e^{y^2} \ldots$$

Posso lasciarla indicata e vedere cosa succede, oppure uso strategia ④ perché la forma è chiusa.

Sostituisco γ con la direttissima



$$\gamma_1(t) = (t, 0) \qquad t \in [0, \pi e^\pi]$$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1} \omega \underset{\substack{\uparrow \\ \text{formula}}}{=} \int_0^{\pi e^\pi} 0\,dt = 0 \ !!!$$

[Vedere che succedeva con la strategia ①!]

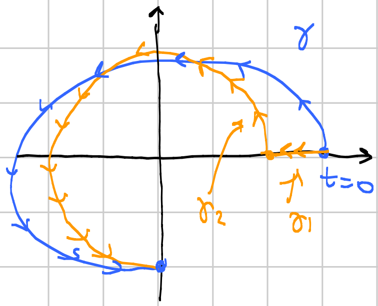
Esempio 4

$$\omega = \left(\frac{y}{x^2+y^2} + x^2\right) dx + \left(y^3 - \frac{x}{x^2+y^2}\right) dy$$

$\gamma(t)$ è la curva descritta in coord. polari da

$$\rho(t) = 3 + \sin t \qquad \theta(t) = t \qquad t \in \left[0, \tfrac{3\pi}{2}\right]$$

Volendo



$$\gamma(t) = \Big(\underbrace{(3+\sin t)\cos t}_{x(t)}, \underbrace{(3+\sin t)\sin t}_{y(t)}\Big)$$

Si vede che ω è chiusa, ma non esatta su tutto $\mathbb{R}^2 \setminus$ origine.
Cerco una curva omotopa a γ ma più semplice

$$\int_\gamma \omega = -\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega \qquad \begin{array}{ll} \gamma_1(t) = (t, 0) & t \in [2,3] \\ \gamma_2(t) = (\cos t, \sin t) & t \in \left[0, \tfrac{3\pi}{2}\right] \end{array}$$

Entrambi si calcolano usando la formula

Oss 1 Se uno non è così convinto che siano omotope, o non ha voglia di dimostrarlo, può usare l'esattezza in $\mathbb{R}^2 \setminus$ semiretta che è sempl. connesso in quanto stellato e lì due curve qualunque danno lo stesso integrale.

Oss. 2 Chi vuole risparmiare può anche girare in senso opposto, ma tenendo conto del $\pm 2\pi$.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 058

Titolo nota 01/12/2015

SUPERFICI (Superfici 2-dim. in $\mathbb{R}^3$)

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ (connesso, compatto, chiusura di un aperto, misur.)
Una superficie è una applicazione $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

Ipotesi classiche: → Φ iniettiva in $\mathrm{Int}(\Omega)$
→ Φ differenziabile in Ω
→ $J\Phi$ abbia rango 2 in ogni p.to di $\mathrm{Int}(\Omega)$

Si definisce supporto della superficie l'immagine di Φ

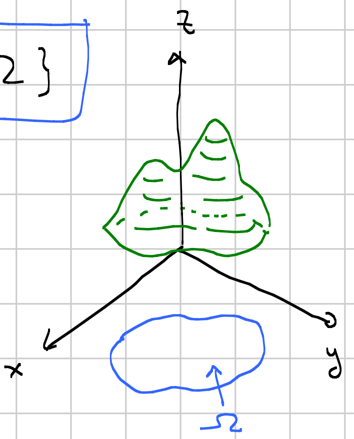
SUPERFICI CARTESIANE "pezzi di grafico di funzioni"

Data $f : \Omega \to \mathbb{R}$ la superficie cartesiana è $z = f(x,y)$.
Il suo supporto è

$$\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = f(x,y),\ (x,y) \in \Omega \}$$

Una sua possibile parametrizzazione è

$$\boxed{\Phi(u,v) = \{ (u,v,f(u,v)) : (u,v) \in \Omega \}}$$



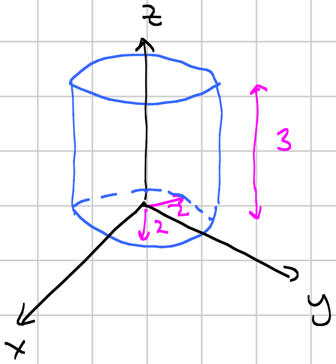
Notazione Indicheremo una superficie come

$$\boxed{\Phi(u,v) = (x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v))}$$

Esempio 1 $\quad \Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \qquad \Omega = [0,1]\times[0,1]$

Pezzo di paraboloide $z = x^2+y^2$ con $(x,y) \in [0,1]\times[0,1]$

Esempio 2 Cilindro con asse lungo asse z



raggio di base $= 2$

altezza $= 3$

$(2\cos\theta, 2\sin\theta, z) \qquad (\theta, z) \in \Omega$

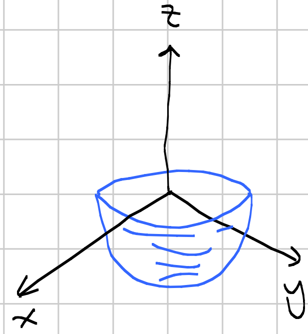
$\Omega = [0, 2\pi] \times [0,3]$

Nota bene: la parametrizzazione è iniettiva in Int (Ω), ma non ovunque.

$$J = \begin{pmatrix} x_\theta & y_\theta & z_\theta \\ x_z & y_z & z_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2\sin\theta & 2\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Si vede che rango $(J) = 2$ ovunque.

Esempio 3 Semisfera "sotto" con centro in $(0,0,0)$ e raggio 2



Una parametrizzazione è (cartesiana)

$\Phi(u,v) = (u, v, -\sqrt{4-u^2-v^2}) \qquad \Omega = \{(u,v)\in\mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \le 4\}$

Un'altra parametrizzazione (in coord. sferiche) è

$\Phi(\theta,\varphi) = (2\cos\varphi\cos\theta,\ 2\cos\varphi\sin\theta,\ 2\sin\varphi)$ con

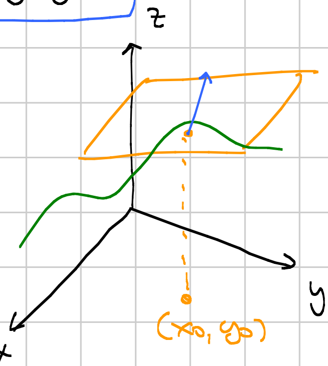
$\Omega = [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, 0]$

PIANO TANGENTE E VETTORE NORMALE

Vettore normale = vettore perpendicolare al piano tangente

Nel caso cartesiano il piano tangente ha equazione

$$\boxed{z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}$$



Posso riscrivere il piano nella forma

$$f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0) - 1\,(z - \underbrace{f(x_0,y_0)}_{z_0})$$

Vettore normale è

$$\boxed{(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1)} = \vec{n}$$

Nel caso generale l'equazione del piano tangente in forma parametrica è

$$\begin{aligned}(x,y,z) = {} & (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0)) + \\ & t\,(x_u(u_0,v_0), y_u(u_0,v_0), z_u(u_0,v_0)) + \\ & s\,(x_v(u_0,v_0), y_v(u_0,v_0), z_v(u_0,v_0))\end{aligned}$$

In forma più breve

$$\boxed{(x,y,z) = \Phi(u_0,v_0) + t\,\Phi_u(u_0,v_0) + s\,\Phi_v(u_0,v_0)}$$

cioè è il piano affine passante per il punto $\Phi(u_0,v_0)$ e giacitura generata da $\Phi_u(u_0,v_0)$ e $\Phi_v(u_0,v_0)$, che sono linearmente indip. per ipotesi.

Brutalmente: l'equazione del piano tangente è il Taylor di ordine 1 della funzione vettoriale Φ.

Per ottenere un vettore normale devo trovare un vettore perpendicolare a Φ_u e Φ_v. Questo si ottiene con la formula per il "prodotto vettore".

$\boxed{\text{Formula misteriosa}}$ Dati due vettori (a_1, b_1, c_1) e (a_2, b_2, c_2) si ottiene un vettore $\perp$ ad entrambi calcolando i 3 determinanti

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow (b_1 c_2 - c_1 b_2, -a_1 c_2 + c_1 a_2, a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Il vettore prodotto da questa formula, se i primi 2 sono lin. indip., è tale che i 3 vettori nell'ordine costituiscono una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica cioè la matrice di passaggio ha det. positivo

Esempio $(1,0,0)$ $(0,1,0)$ $(0,0,1)$
$(0,1,0)$ $(0,0,1)$ $(1,0,0)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ Det 1 stessa orient.

$(0,1,0)$ $(1,0,0)$ $(0,0,1)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} = -1 \Rightarrow \text{orientazione opposta}$$

Chi è il vettore normale ?
Devo applicare la formula con Φ_u e Φ_v

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow \boxed{(y_u z_v - z_u y_v, -x_u z_v + z_u x_v, x_u y_v - y_u x_v)}$$

VETTORE NORMALE "CANONICO"

Indichiamo con M_1, M_2, M_3 le componenti di questo vettore. Allora

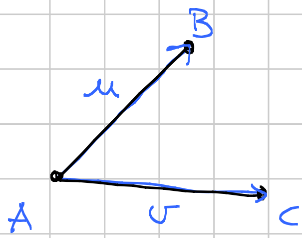
$$\|(M_1, M_2, M_3)\|^2 \neq 0 \text{ se il rango di } J\Phi \text{ è due}$$

$$= \|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2 - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2$$

$$= \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \|\Phi_u\|^2 & \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle & \|\Phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ Fare il contaccio.

Interpretazione geometrica: dati 3 punti nello spazio, come calcolo l'area del Δ di cui sono vertici ?



Calcolo a partire da u e v il vettore normale $\vec{n}$ con la formula misteriosa. Allora

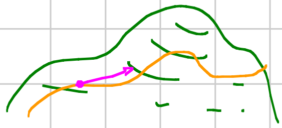
$$\text{Area} = \frac{1}{2} \|\vec{n}\|^2$$

ANALISI 2 — LEZIONE 059

Titolo nota 01/12/2015

Prop. Se una curva è contenuta in una superficie, allora in ogni punto della curva la retta tangente alla curva è contenuta nel piano tangente alla super. in quel punto

Dim. Indichiamo la superficie con



$$(x(u,v),\ y(u,v),\ z(u,v)) \qquad (u,v)\in\Omega$$

Una curva a valori nella superficie la possiamo pensare ottenuta a partire da una curva $(u(t),v(t))$ $t\in[a,b]$ a valori in Ω.
In questo modo la curva si ottiene per composiz.

$$\gamma(t) = (x(u(t),v(t)),\ y(u(t),v(t)),\ z(u(t),v(t))) \qquad t\in[a,b]$$

$$[a,b]\ni t \xrightarrow{(u,v)} \underset{\Omega}{\underset{\cap}{(u(t),v(t))}} \xrightarrow{\Phi} \gamma(t) \in \mathbb{R}^3$$

Fisso un $t_0\in[a,b]$. La retta tangente alla curva ha equazione parametrica

$$\gamma(t_0) + t\,\dot\gamma(t_0) \qquad t\in\mathbb{R}$$

Ora $\dot\gamma(t_0)$ si calcola con la chain rule e viene

$$\dot\gamma = (x_u\dot u + x_v\dot v,\ y_u\dot u + y_v\dot v,\ z_u\dot u + z_v\dot v)$$

$$= \dot u\,(x_u,y_u,z_u) + \dot v\,(x_v,y_v,z_v) = \dot u\,\Phi_u + \dot v\,\Phi_v$$

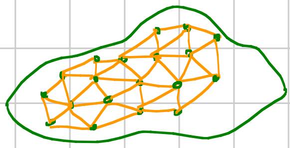
Quindi $\dot\gamma$ è comb. lineare di Φ_u e Φ_v, quindi sta nella giacitura del piano tangente alla sup. nel p.to $\gamma(t_0)$.

— o — o —

AREA DI UNA SUPERFICIE

Per le curve: so fare la lungh. dei segmenti, e a partire da quella approssimo le curve con le poligonali e definisco la lungh. di una curva per approx come sup. delle lungh. delle poligonali.

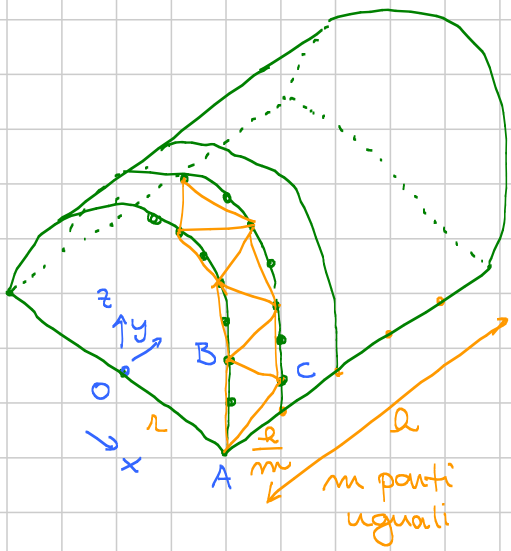
Per le superfici: vorrei approssimare con dei triangoli di cui so fare l'area e fare il sup delle "triangolazioni".



Come $\boxed{\text{non}}$ si definisce l'area?
Con il sup dei triangolini !!!

Motivo: il sup viene praticamente sempre $+\infty$.

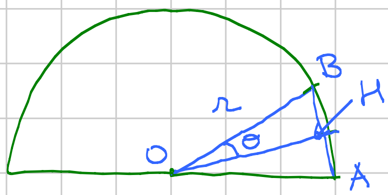
Esempio di Schwarz



Divido l'altezza in m parti
Divido la semicirc in $2n$ parti

Calcoliamo l'area di ogni triangolo.

Base $= AB = 2r\sin\theta = \boxed{2r\sin\frac{\pi}{2n}}$



Altezza del triangolo = lunghezza di CH

con H p.to medio della base

Scriviamo le coordinate di C e H

$$C = \left(r \cos \frac{\pi}{2n} , \frac{R}{m} , r \sin \frac{\pi}{2m} \right)$$

$$H = \left(OH \cos\theta , 0 , OH \sin\theta \right) = \left(r \cos\theta \cos\theta , 0 , r \cos\theta \sin\theta \right)$$

$$= \left(r \cos^2 \frac{\pi}{2n} , 0 , r \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} \right)$$

Ma allora, posto $\theta = \frac{\pi}{2n}$,

$$CH^2 = \left(r\cos\theta - r\cos^2\theta \right)^2 + \frac{R^2}{m^2} + \left(r\sin\theta - r\sin\theta\cos\theta \right)^2$$

$$= r^2\cos^2\theta \left(1-\cos\theta\right)^2 + \frac{R^2}{m^2} + r^2\sin^2\theta \left(1-\cos\theta\right)^2$$

$$\boxed{CH^2 = r^2 \left(1-\cos\theta\right)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

L'area di ogni triangolo è

$$\text{Area} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} r \sin\theta \sqrt{r^2 (1-\cos\theta)^2 + \frac{R^2}{m^2}}$$

Quanti sono i triangoli? Considerando tutto il cilindro (sopra e sotto) sono $4n$ in ogni fascia, quindi in totale $4nm$.

Quindi alla fine l'area totale è

$$\boxed{\text{Area tot} = 4nm \, r \sin \frac{\pi}{2n} \cdot \sqrt{r^2 \left(1-\cos\frac{\pi}{2n}\right)^2 + \frac{R^2}{m^2}}}$$

Facciamo il limite prendendo $m = n$

Sviluppando al 1° ordine diventa

$$\sim \cancel{4}^{2}\, \cancel{n} \cdot \cancel{m} \cdot r \, \frac{\pi}{\cancel{2m}} \sqrt{r^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \right)^2 n^2 + \frac{R^2}{\cancel{m^2}}} \longrightarrow 2 r \pi R$$

$\shortparallel$ sup. che ci aspettiamo

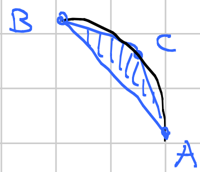
<u>Oss.</u> Otteniamo lo stesso limite prendendo $m = n^\alpha$ con $\alpha < 2$ o più in generale $m = o(n^2)$

Se prendo invece $m = n^3$

$$\sim \cancel{4}^{2}\, \cancel{n} \cdot n^3 \, r \, \frac{\pi}{\cancel{2n}} \sqrt{r^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \right)^2 \underset{n^6}{\uparrow} + \frac{R^2}{\cancel{n^6}}} \longrightarrow +\infty$$

Morale: a seconda di come faccio i triangoli, il limite cambia! Posso anche farlo venire $2015\, \pi r R$ pur di scegliere $m = \alpha n^2$ con α opportuno.

Quando $m \to +\infty$ molto più velocemente di n c'è un "effetto fisarmonica" per cui le aree dei singoli triangoli non tendono a zero.



Detto meglio matematicamente:

→ se in una curva prendo una suddivisione molto fitta, i segmenti approssimano le rette tangenti

→ in una sup. i triangolini, anche se diventano piccoli, possono non approssimare il piano tangente.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 060

Titolo nota 02/12/2015

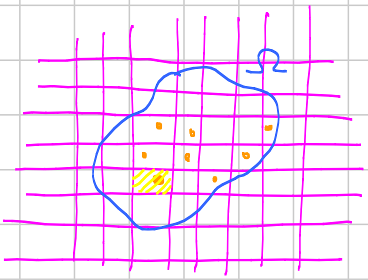
Ambientazione: superficie $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$

$$\Phi(u,v) = (\underbrace{X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)}_{\text{componenti}}) \qquad (u,v) \in \Omega$$

AREA DI UNA SUPERFICIE

① Come non si definisce? Con le triangolazioni ⇝ effetto fisarmonica dell'esempio di Schwarz

② Come si definisce? Approssimando con pezzi di piano tangente.



→ suddivido Ω in rettangolini $R_1, \dots, R_k$ (solo quelli che toccano Ω)

→ scelgo un punto (u_i, v_i) in ogni rettangolo R_i

→ su ogni rettangolo R_i approssimo la superficie, cioè la funzione Φ, con il suo sviluppo di Taylor di ordine 1, nel punto (u_i, v_i) che è una mappa affine.

→ considero l'immagine di R_i mediante la mappa affine appena considerata. L'immagine di R_i è un parallelogrammo contenuto nel piano tg. alla sup nel p.to $\Phi(u_i, v_i)$

→ Brutalmente, sto "piastrellando" la superficie con dei parallelogrammi contenuti in piani tangenti.

→ Considero la somma delle aree dei parall. come una approx. dell'area della sup.

→ Infittisco la suddivisione e passo al limite.

Domanda: quanto vale l'area di ognuno dei parallelogrammi?
Domanda più generale: data un'affinità

$$\varphi(x) = Ax + b \qquad \varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$$
A matrice 3×2

come si trasformano le aree dei rettangoli?

risposta: vengono moltiplicate per $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}$
dove M_1, M_2, M_3 sono i 3 minori 2×2 della matrice A.

Nel nostro caso $A = J\Phi(u_i, v_i)$, quindi

$$\text{somma aree parallelogrammi} = \sum_{i=1}^{k} \text{Area}(R_i) \underbrace{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}}_{\text{calcolato in } (u_i, v_i)}$$

Questa è una somma di Riemann per l'integrale

$$\boxed{\int_\Omega \sqrt{M_1^2(u,v) + M_2^2(u,v) + M_3^2(u,v)}\ du\,dv}$$

dove

$$\boxed{\begin{aligned} M_1 &= (Y_u Z_v - Y_v Z_u) \\ M_2 &= (-X_u Z_v + X_v Z_u) \\ M_3 &= (X_u Y_v - X_v Y_u) \end{aligned}}$$

$$J_\Phi = \begin{pmatrix} X_u & X_v \\ Y_u & Y_v \\ Z_u & Z_v \end{pmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \Phi_u & \Phi_v \end{array}$$

Conclusione:

$$\boxed{\text{area superficie} = \int_\Omega \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv}$$

Altri modi di scrivere l'integranda

$$M_1^2 + M_2^2 + M_3^2 = \| \Phi_u \wedge \Phi_v \|^2 \qquad \Phi_u \wedge \Phi_v = (M_1, M_2, M_3)$$

$$= \|\Phi_u\|^2 \|\Phi_v\|^2 - \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle^2$$

$$= \operatorname{Det} \begin{pmatrix} \|\Phi_u\|^2 & \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle \\ \langle \Phi_u, \Phi_v \rangle & \|\Phi_v\|^2 \end{pmatrix}$$

$$= \operatorname{Det} (J_\Phi)^t J_\Phi$$

— o — o —

Superfici equivalenti a meno di riparametrizzazione

$$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3 \qquad \varphi : \hat{\Omega} \longrightarrow \Omega \qquad \hat{\Omega} \subseteq \mathbb{R}^2$$

diffeomorfismo

Posso costruire una nuova superficie

$$\hat{\Phi} : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^3 \qquad \hat{\Phi}(u,v) = \Phi(\varphi(u,v))$$
$$\hat{\Phi} = \Phi \circ \varphi$$

$\boxed{\text{Proposizione}}$ $\quad \text{Area}(\hat{\Phi}) = \text{Area}(\Phi)$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Uso l'ultima caratterizzazione di $M_1^2 + M_2^2 + M_3^2$.

$$\text{Area}(\hat{\Phi}) = \int_{\hat{\Omega}} \sqrt{\text{Det}\,(J\hat{\Phi})^t\,(J\hat{\Phi})}\,du\,dv = (\star)$$

osservo che $\qquad J\hat{\Phi} = J\Phi \cdot J\varphi$, quindi

$$(J\hat{\Phi})^t\, J\hat{\Phi} = J\varphi^t\, J\Phi^t\, J\Phi\, J\varphi$$

$$\text{Det}\,(J\hat{\Phi})^t\, J\hat{\Phi} = \text{Det}\,(J\Phi)^t\, J\Phi\, (\text{Det}\, J\varphi)^2$$

Quindi

$$(\star) = \int_{\hat{\Omega}} |\text{Det}\, J\varphi|\, \sqrt{\text{Det}\,(J\Phi)^t\,(J\Phi)}\,du\,dv$$

calcolato in $\varphi(u,v)$

$$= \int_{\varphi(\hat{\Omega}) = \Omega} \sqrt{\text{Det}\,(J\Phi)^t\,(J\Phi)}\,du\,dv$$

calcolato in (u,v)

cambio di variabili negli integrali doppi

$$= \text{Area}\,(\Phi).$$

— o — o —

$\boxed{\text{Caso speciale 1}}$ Superficie cartesiana $\quad (u, v, f(u,v))$

$$J\Phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix} \qquad (M_1, M_2, M_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$$

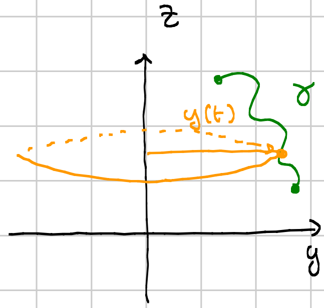
$$= (-f_u, -f_v, 1)$$

Quindi

$$\boxed{\text{Area sup. cartesiana} = \int_\Omega \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}\, du\, dv}$$

$\boxed{\text{Caso speciale 2}}$ Superficie di rotazione

Considero una curva a valori nel piano yz



$$\gamma(t) = (y(t), z(t)) \qquad t \in [a,b]$$

Ruotando intorno all'asse z la curva genera una sup. parametrizzata da

$$\left(y(t)\cos\theta,\ y(t)\sin\theta,\ z(t) \right) \qquad \begin{array}{l} t \in [a,b] \\ \theta \in [0,2\pi] \end{array}$$

$$J\phi = \begin{pmatrix} \dot{y}(t)\cos\theta & -y(t)\sin\theta \\ \dot{y}(t)\sin\theta & y(t)\cos\theta \\ \dot{z}(t) & 0 \end{pmatrix}$$

$$(M_1, M_2, M_3) = \left(-y\dot{z}\cos\theta,\ y\dot{z}\sin\theta,\ y\dot{y} \right)$$

$$\boxed{\text{Area superficie}} = \int_a^b dt \int_0^{2\pi} d\theta \sqrt{y^2\dot{z}^2 + y^2\dot{y}^2}$$

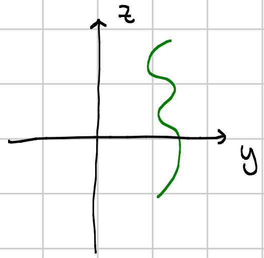
$$\boxed{= 2\pi \int_a^b |y| \sqrt{\dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt}$$

ANALISI 2 — LEZIONE 061

Titolo nota 02/12/2015

SUP. DI ROTAZIONE $\gamma(t) = (y(t), z(t))$ $t \in [a,b]$

$y(t) \geq 0$



Superficie

$(y(t)\cos\theta, y(t)\sin\theta, z(t))$

$(t,\theta) \in \Omega = [a,b] \times [0,2\pi]$

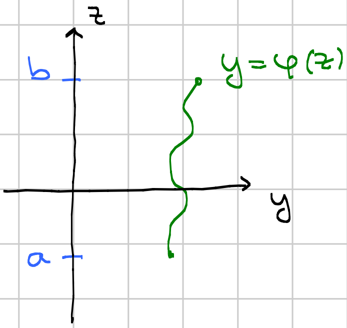
$$\boxed{\text{Area sup.} = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{\dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\, dt}$$

Oss. Usando gli integrali curvilinei possiamo riscrive la formula

$$\boxed{\text{Area sup} = 2\pi \int_\gamma y \, ds}$$

Caso speciale: curva cartesiana rispetto all'asse z, cioè

$\gamma(t) = (\varphi(t), t)$ $t \in [a,b]$



Allora

$$\boxed{\text{Area sup} = 2\pi \int_a^b \varphi(t) \sqrt{1 + \dot{\varphi}^2(t)}\, dt}$$

— o — o —

TEOREMA (GULDINO 2)

$$\text{Area sup rotazione} = \text{lungh}(\gamma) \cdot \overbrace{2\pi y_G}^{\text{lungh. circ. descritta da G durante la rotazione}}$$

dove → γ è la curva che ruota

→ y_G è la coord. y del baricentro della curva

Dim Basta usare le definizioni

$$y_G = \frac{1}{\text{lungh}(\gamma)} \cdot \int_\gamma y \, ds \qquad \text{(per definizione)}$$

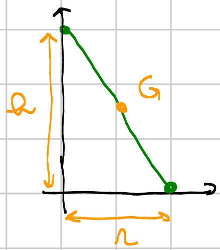
Se moltiplico per $2\pi \, \text{lungh}(\gamma)$ ottengo proprio la sup in uno dei tanti modi di scriverla. □

— o — o —

Esempio 1 Cilindro

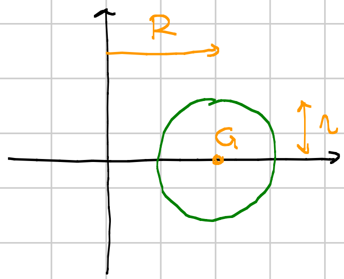
$$\text{Area sup laterale} = \text{lungh}(\gamma) \cdot 2\pi y_G = R \cdot 2\pi r$$

Esempio 2



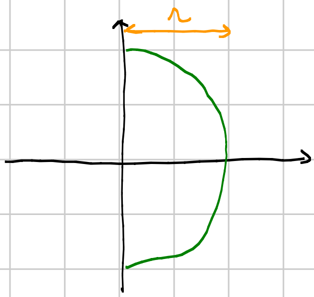
$$\text{Area sup. laterale} = \text{lungh}(\gamma) \cdot 2\pi y_G = \sqrt{r^2+R^2} \cdot 2\pi \frac{r}{2}$$

Esempio 3 Toro



$$\text{Area sup. totale} = \text{lungh}(\gamma) \cdot 2\pi y_G = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 r R$$

Esempio 4 Sfera



1° modo: uso il baricentro della semicirc. calcolato qualche lezione fa.

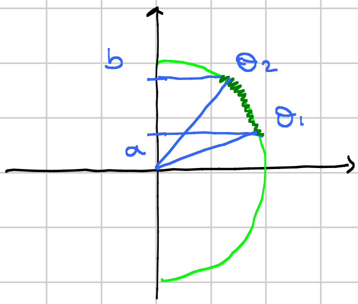
2° modo: uso direttamente la formula

$$\text{Area sup} = 2\pi \int_\gamma y \, ds \qquad \gamma(t) = (\underbrace{r\cos t}_{y(t)}, \underbrace{r\sin t}_{z(t)}) \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$= 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} r\cos t \sqrt{r^2\sin^2 t + r^2\cos^2 t} \, dt$$

$$= 2\pi r^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = 4\pi r^2$$

Esempio 5 Segmento sferico



Posso usare la stessa formula con diversi estremi di integrazione

$$\text{Area sup} = 2\pi r^2 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \cos t \, dt$$

$$= 2\pi r^2 (\sin\theta_2 - \sin\theta_1) \qquad b = r\sin\theta_2, \; a = r\sin\theta_1$$

$$= 2\pi r \, (b - a)$$

— o — o —

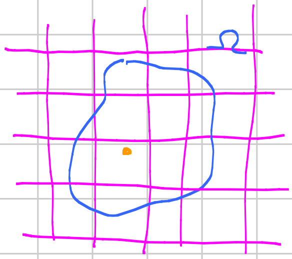
$\boxed{\text{INTEGRALI SUPERFICIALI}}$

$$\int_S f(x,y,z)\, d\sigma$$

integrale superficiale

$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$

funzione di 3 variabili definita almeno sul sostegno della sup.



Idea della definizione

→ Partizione Ω come nella def. di area in rettangoli R_i

→ fisso punti (u_i, v_i) in ogni R_i

→ considero il parallelogramma P_i trasformato di R_i

→ considero la somma di Riemann

$$\sum_{i=1}^{k} \text{Area}(P_i)\, f(\Phi(u_i, v_i))$$

→ infittisco la suddivisione mandando a 0 il lato dei rettangoli.

Al limite ottengo

$$\boxed{\int_S f(x,y,z)\, d\sigma = \int_\Omega f(\Phi(u,v)) \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2}\, du\, dv}$$

$\boxed{\text{Integrale di flusso}}$ Dato un campo di vettori

$$E(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$$

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, d\sigma = \text{flusso di } \vec{E} \text{ attraverso } \sigma$$

$\boxed{\text{VERSORE}}$ normale alla superficie

Ora $\vec{m} = (M_1, M_2, M_3)$ diviso la sua norma che va a semplificare la radice.

Quindi

$$\boxed{\int_S \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma = \int_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3)\, du\, dv}$$

— o — o —

<u>Esempio</u> Integrale superficiale su una sfera

$$\Phi(\theta, \varphi) = (r\cos\varphi\cos\theta,\ r\cos\varphi\sin\theta,\ r\sin\varphi)$$

... conto di J_Φ ... $\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + M_3^2} = r^2\cos\varphi$

Quindi

$$\int_{\text{sfera}} f(x,y,z)\, d\sigma = \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \ \underbrace{f(x,y,z)}_{\text{sostituisco coord. sferiche}} \overset{\text{FISSO}}{r^2} \cos\varphi$$

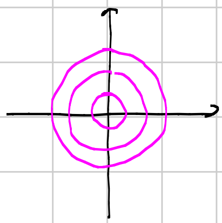
— o — o —

Finestra sul futuro: formule di coarea

<u>Coord. polari</u>

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\, dx\, dy = \int_0^{+\infty} d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \ f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \cdot \rho$$

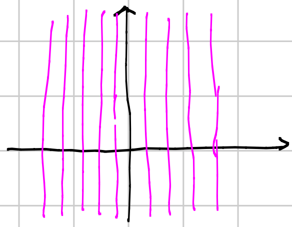
$$= \int_0^{+\infty} d\rho \int_{\underset{\text{circ. di raggio } \rho}{\gamma_\rho}} f(x,y)\, ds$$



Coord. sferiche

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \ldots = \int_0^{+\infty} d\rho \int_{S_\rho} f(x,y,z)\,d\sigma$$

Fubini–Tonelli
$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{\mathbb{R}} dx \int_{R_x} dy\, f(x,y)$$

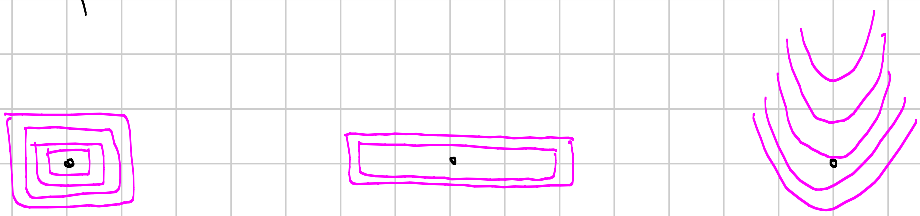


Esercizio Provare a scrivere e vedere se funzionano dei Fubini Tonelli

→ quadrati

→ rettangolari

→ parabolici



ANALISI 2 — LEZIONE 062

Titolo nota 04/12/2015

$\boxed{\text{GRADIENTE, LAPLACIANO, DIVERGENZA, ROTORE}}$

Setting: data una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto
dato un campo di vettori

$$\vec{E} : \Omega \to \mathbb{R}^3 \quad \text{con} \quad \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\vec{E}(x,y,z) = (A(x,y,z), B(x,y,z), C(x,y,z))$$

Operatori differenziali: mandano funzioni / vettori in funzioni / vettori facendo un po' di derivate

$\boxed{\text{GRADIENTE}}$ $\boxed{\text{FUNZIONE} \rightsquigarrow \text{VETTORE}}$

$$f(x,y) \rightsquigarrow \nabla f(x,y) = (f_x(x,y), f_y(x,y))$$

$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \nabla f(x_1, \dots, x_n)$ è il vettore che ha come componenti $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n)$

$\boxed{\text{LAPLACIANO}}$ $\boxed{\text{FUNZIONE} \rightsquigarrow \text{FUNZIONE}}$

$$f(x,y) \rightsquigarrow \Delta f(x,y) = f_{xx}(x,y) + f_{yy}(x,y)$$

↑Delta

$$f(x_1, \dots, x_n) \rightsquigarrow \Delta f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} f(x_1, \dots, x_n)$$

Oss. Il Laplaciano è la traccia della matrice Hessiana Hf

$\boxed{\text{DIVERGENZA}}$ $\boxed{\text{VETTORE} \rightsquigarrow \text{FUNZIONE}}$

$\vec{E} = (A, B, C)$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = A_x + B_y + C_z$

$\vec{E} = (A_1, \dots, A_n)$ $\quad \operatorname{div} \vec{E} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_k}(x_1, \dots, x_n)$

funzione di n variabili

$\boxed{\text{ROTORE}}$ $\boxed{\text{CURL}}$ in inglese

$\boxed{\text{VETTORE} \rightsquigarrow \text{VETTORE}}$ $\boxed{\text{VALE SOLO IN } \mathbb{R}^3}$

$\vec{E} = (A, B, C)$ $\quad$ rot $\vec{E}$ è lo sviluppo formale del det

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, \; -C_x + A_z, \; B_x - A_y)}$$

<u>Oss.</u> In fisica spesso si usa il rotore anche in dimensione due, intendendo che c'è una terza componente nulla

$$\operatorname{rot}(A, B) = \operatorname{rot}(A, B, 0) = (0, 0, B_x - A_y)$$

dipendono solo da x e y

<u>Oss.</u> (Finestra sul futuro) Il rotore è una semplificazione in $\mathbb{R}^3$ di una cosa più generale, che è il differenziale di 1-forme differenziali.

— o — o —

Osservazioni

① $\boxed{\mathrm{div}\,(\nabla f) = \Delta f}$

Mettiamoci in $\mathbb{R}^3$:

$$\mathrm{div}\,(\nabla f) = \mathrm{div}\,(f_x, f_y, f_z) = f_{xx} + f_{yy} + f_{zz} = \Delta f$$

② $\boxed{\mathrm{rot}\,(\nabla f) = 0}$ (inversione ordine di derivazione)

Sempre in $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{rot}\,(\nabla f) = \mathrm{rot}\,(f_x, f_y, f_z) =$

$$\mathrm{Det}\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ f_x & f_y & f_z \end{pmatrix} = (f_{zy} - f_{yz}, -f_{zx} + f_{xz}, f_{xy} - f_{yx})$$

Ultra brutal: operatorialmente la seconda e terza riga sono lin. dipendenti

Osservazione Funziona anche in due variabili con il rotore dei fisici.

③ $\boxed{\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = 0}$

In $\mathbb{R}^3$: $\mathrm{div}\,(\mathrm{rot}\,\vec{E}) = \mathrm{div}\,(C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$

$$= (C_y - B_z)_x + (-C_x + A_z)_y + (B_x - A_y)_z$$

$$= \cancel{C_{yx}} - \cancel{B_{zx}} - \cancel{C_{xy}} + \cancel{A_{zy}} + \cancel{B_{xz}} - \cancel{A_{yz}} = 0.$$

Oss. Molte cose non hanno senso: $\mathrm{div}\, f$, $\mathrm{rot}\, f$, $\Delta\,(\mathrm{rot})$
$\nabla\,(\mathrm{rot})$, $\mathrm{rot}\,(\mathrm{div})$

GRADIENTE Data f funzione

→ Se $\nabla f = 0$, allora f è localmente costante, quindi
vettore costante se Ω è connesso.

→ Se $\nabla f_1 = \nabla f_2$, allora $f_1 - f_2$ è costante se Ω è connesso

ROTORE Dato $\vec{E} = (A, B, C)$

→ Se $\operatorname{rot} \vec{E} = 0$, allora la forma diff. $A\,dx + B\,dy + C\,dz$ è chiusa, quindi se Ω è semplicemente connesso segue che $\vec{E}$ è il gradiente di una qualche funzione f.

(Stessa cosa in $\mathbb{R}^2$ con il rotore dei fisici e forma $A\,dx + B\,dy$)

→ Se $\operatorname{rot} \vec{E}_1 = \operatorname{rot} \vec{E}_2$ e Ω è sempl. connesso, allora esiste una funzione $f : \Omega \to \mathbb{R}$ tale che

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \nabla f$$

Oss. Se siamo in $\mathbb{R}^2 \setminus$ p.to (con il rot. dei fisici) o in $\mathbb{R}^3 \setminus$ retta, allora

$\operatorname{rot} \vec{E} = 0 \iff \vec{E} = \nabla f +$ multiplo dei coeff. della solita forma chiusa e non esatta.

— o — o —

$\boxed{\text{DIVERGENZA}}$ Dato $\vec{E} = (A, B, C)$ in $\mathbb{R}^3$

$\to$ Se $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, allora sotto opportune ipotesi su Ω esiste un campo $\vec{F}$ tale che

$$\vec{E} = \operatorname{rot} \vec{F}$$

Ad esempio questo vale se Ω è $\boxed{\text{stellato}}$

$\to$ Se $\operatorname{div} \vec{E}_1 = \operatorname{div} \vec{E}_2$, e Ω è stellato, allora

$$\exists \vec{F} \text{ tale che } \quad \vec{E}_1 = \vec{E}_2 + \operatorname{rot} \vec{F}$$

Oss. $\vec{F}$ non è per nulla unico, in quanto basta aggiungere ad $\vec{F}$ il gradiente di una funzione ed il suo rotore non cambia.

— o — o —

Esercizio Calcolare, dato $\vec{E} = (A, B, C)$

$$-\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) + \nabla(\operatorname{div} \vec{E}) = (\Delta A, \Delta B, \Delta C)$$

$$\nabla(\operatorname{div} \vec{E}) = \nabla(A_x + B_y + C_z) =$$

$$= (A_{xx} + \cancel{B_{yx}} + \cancel{C_{zx}}, A_{xy} + B_{yy} + C_{zy}, A_{xz} + B_{yz} + C_{zz})$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{Det} \begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ C_y - B_z & A_z - C_x & B_x - A_y \end{pmatrix}$$

$$= (\cancel{B_{xy}} - A_{yy} - A_{zz} + \cancel{C_{zx}}, \ldots, \ldots)$$

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 063

Titolo nota 04/12/2015

TEOREMA DI GAUSS-GREEN | **Caso nel piano $n=2$**

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\boxed{\int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\,dy}$$

$\vec{n}$: versore normale esterno ad Ω

Si intende che
- $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto limitato con $\partial\Omega$ abbastanza regolare
- $f : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}$ è una funzione suff. regolare con $\hat{\Omega} \supseteq \overline{\Omega}$
- $E : \hat{\Omega} \to \mathbb{R}^2$ è un campo di vettori suff. regolare

Ora
- al LHS c'è l'integrale doppio di una funzione
- il primo termine al RHS è un integrale curvilineo di una funzione
- il secondo termine al RHS è l'integrale doppio di una funzione.

— o — o —

TEOREMA DELLA DIVERGENZA | **Sempre in $\mathbb{R}^2$**

Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds}$$

$\boxed{\text{Dim}}$ (Del teo. div. dato Gauss-Green) Prendo $f(x,y) := 1$.

— o — o —

Esercizio Data una funzione f ed un campo E, calcolare $\operatorname{div}(f\vec{E})$

$$\boxed{\operatorname{div}(f\vec{E}) = \langle \nabla f, \vec{E} \rangle + f \operatorname{div} \vec{E}}$$

Direttamente in $\mathbb{R}^n$: $\vec{E} = (A_1, A_2, \dots, A_n)$

$f\vec{E} = (fA_1, fA_2, \dots, fA_n)$

$$\operatorname{div}(f\vec{E}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}(fA_k) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k + f \frac{\partial A_k}{\partial x_k}$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k} \cdot A_k}_{\langle \nabla f, \vec{E} \rangle} + \underbrace{f \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial A_k}{\partial x_k}}_{f \operatorname{div} \vec{E}}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Dim.}}$ (di Gauss-Green a partire dal teorema della div).

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy = + \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \quad \text{(teo. div.)}$$

Lo applico con $f\vec{E}$ al posto di $\vec{E}$. Al LHS

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(f\vec{E}) \, dx\, dy \underset{\text{esercizio}}{=} \int_{\Omega} \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\, dy + \int_{\Omega} f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy$$

Al RHS ottengo

$$\int_{\partial\Omega} \langle f\vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

Riorganizzando i termini ottengo G-G. $\square$

— o — o —

$\boxed{\text{Corollario di G.G}}$ Sotto opportune ipotesi vale la formula

$$\boxed{\int_\Omega \Delta u \cdot v \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} v \underline{\langle \nabla u, \vec{n} \rangle} \, ds - \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle \, dx\, dy}$$

dove $u : \Omega \to \mathbb{R}$, $v : \Omega \to \mathbb{R}$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Basta usare GG con $f = v$ e $\vec{E} = \nabla u$

$$\int_\Omega f \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds - \int_\Omega \langle \nabla f, \vec{E} \rangle \, dx\, dy$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$v \underbrace{\operatorname{div}(\nabla u)}_{= \Delta u} \qquad v \langle \nabla u, \vec{n} \rangle ds \qquad \langle \nabla v, \nabla u \rangle$$

— o —

<u>Oss.</u> $\langle \nabla u, \vec{n} \rangle$ è la derivata di u nella direzione uscente da Ω.

— o — o —

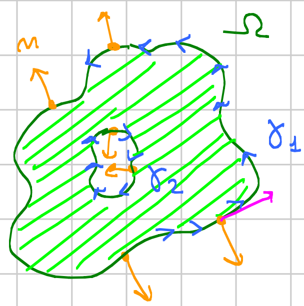
In dimensione 2, l'integrale sul bordo può essere interpretato usando le forme diff.

Prendiamo il teo. della div. con $\vec{E} = (A, B)$:

$$\overbrace{\int_\Omega (A_x + B_y) \, dx\, dy}^{\operatorname{div} \vec{E}} = \int_{\partial\Omega} \overbrace{(A \cdot n_1 + B n_2)}^{\langle \vec{E}, \vec{n} \rangle} \, ds \qquad \vec{n} = (n_1, n_2)$$

Prendiamo nel disegno due curve γ_1 e γ_2 che percorrono il bordo.

$\boxed{\text{Se}}$ le curve percorrono il bordo $\partial\Omega$ lasciandosi Ω a $\boxed{\text{sinistra}}$, allora $\vec{n}$ si ottiene ruotando di $90°$ in senso ORARIO il versore tangente alla curva.



Quindi se $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ come sopra $\dot\gamma(t) = (\dot x(t), \dot y(t))$ $t \in [a,b]$

$$\text{versore tangente} = \left(\frac{\dot x(t)}{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}}, \frac{\dot y(t)}{\sqrt{\dot x^2(t) + \dot y^2(t)}} \right)$$

e infine

$$\vec{n} = \left(\frac{\dot y}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}, \frac{-\dot x}{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}} \right)$$

algebra lineare

Ma allora

int. curvilineo

$$\int_{\partial\Omega} (A n_1 + B n_2)\, ds = \int_a^b \left(A \frac{\dot y}{\cancel{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}} - B \frac{\dot x}{\cancel{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}} \right) \cancel{\sqrt{\dot x^2 + \dot y^2}}\, dt$$

$$= \int_a^b (A \dot y - B \dot x)\, dt$$

$$= \int_\gamma \underbrace{(-B\, dx + A\, dy)}_{\text{Forma differenziale}}$$

curva che percorre $\partial\Omega$ lasciando Ω a sinistra

Conclusione

$$\boxed{\int_\Omega (A_x + B_y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} \underbrace{(-B\, dx + A\, dy)}_{\text{forma}}}$$

curva che percorre $\partial\Omega$ lasciandolo a sx.

Oss 1 "Lasciare Ω a sinistra" è un modo brutale di dire che $\{\vec{n}, \dot{\gamma}\}$ sono una base di $\mathbb{R}^2$ orientata come quella canonica.

Oss.2 GG è la formula di integrazione per parti degli integrali multipli.

ANALISI 2 — LEZIONE 064

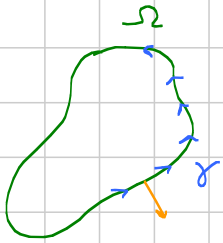
Titolo nota 09/12/2015

Teorema della divergenza e applicazioni

Sotto opportune ipotesi

$$\boxed{\int_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds}$$

Ci sono 2 modi di pensare il RHS:



1. come integrale di flusso
2. come integrale di una forma differenziale

$\vec{E} = (A(x,y), B(x,y))$

$t \in [a,b]$

$\partial\Omega$ sia il supporto di una o più curve $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ che lo percorrono "lasciando Ω a sinistra". In queste ipotesi

$$\text{versore tangente} = \left(\frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}, \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \right) \qquad \vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \underbrace{(+\dot{y}, -\dot{x})}_{\text{ruotato orario del tangente}}$$

Quindi

$$\boxed{\int_{\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds = \int_a^b A\dot{y} - B\dot{x}\, dt = \int_{\gamma} -B\,dx + A\,dy}$$

In conclusione possiamo riscrivere il teorema come

$$\boxed{\int_{\Omega} (A_x + B_y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} -B\,dx + A\,dy}$$

↑ una o più curve che percorrono $\partial\Omega$ come previsto

Applicazioni classiche

① Calcolo di integrali di flusso

② Calcolo di integrali su domini descritti mediante il bordo.

$\boxed{\text{Caso tipico: calcolo dell'area}}$ Data una curva chiusa $\gamma(t)$ nel piano, calcolare l'area del dominio che racchiude. Supponiamo la curva semplice e che lasci il dominio a sx.

Applico la formula precedente con $\vec{E} = (\underset{A}{x}, \underset{B}{0})$

Allora

$$\text{Area}(\Omega) = \int_\Omega 1 \, dx\, dy = \int_\gamma y\, dx$$

In alternativa posso prendere $\vec{E} = (0, y)$ da cui

$$\text{Area}(\Omega) = \int_\gamma -x\, dy$$

Oss. È evidente che le due formule danno lo stesso risultato cioè

$$\int_\gamma y\, dx = -\int_\gamma x\, dy$$

perché

$$\int_\gamma y\, dx + x\, dy = 0$$

perché la forma $y\,dx + x\,dy$ è chiusa (quindi esatta su $\mathbb{R}^2$) e la curva è chiusa.

<u>Oss.</u> Posso ottenere altre formule 'mixando' le 2 precedenti

$$\text{Area}(\Omega) = \int_\gamma \frac{1}{2} y\,dx - \frac{1}{2} x\,dy$$

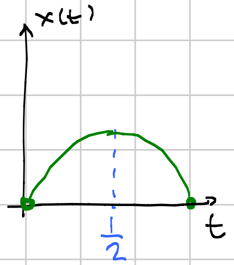
$$= \int_\gamma \lambda y\,dx - (1-\lambda)\,x\,dy \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

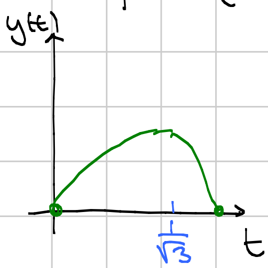
$$\boxed{\text{Area}(\Omega) = \int_\gamma y\,dx = -\int_\gamma x\,dy = \text{mix vari}}$$

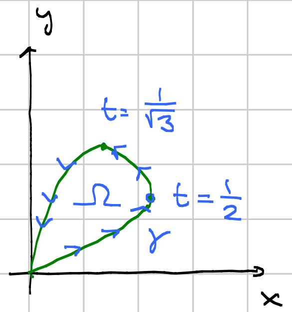
Se $\gamma(t)$ percorre nel verso sbagliato, bisogna cambiare i segni.

<u>Esempio 1</u> $\gamma(t) = (\underbrace{t-t^2}_{x(t)}, \underbrace{t-t^3}_{y(t)}) \qquad t \in [0,1]$

Questa è una curva semplice (verifica!)







$$y'(t) = 1-3t^2$$

$$\text{Area}(\Omega) = \int_\gamma y\,dx = \int_0^1 y(t)\,\dot{x}(t)\,dt = \int_0^1 (t-t^3)(1-2t)\,dt$$

In alternativa

$$\text{Area}(\Omega) = -\int_\gamma x\,dy = -\int_0^1 x(t)\,\dot{y}(t)\,dt = -\int_0^1 (t-t^2)(1-3t^2)\,dt$$

Il secondo integrale si ottiene dal 1° mediante integrazione per parti.

Esempio 2 Calcolare $\displaystyle\int_\Omega (x^2+y)\,dx\,dy$, dove Ω è quello precedente

$$\int_\Omega (A_x + B_y)\,dx\,dy = \int_\gamma -B\,dx + A\,dy$$

Scelgo $\vec{E} = (A,B) = \left(\frac{1}{3}x^3, \frac{1}{2}y^2\right)$

$$\int_\Omega (x^2+y)\,dx\,dy = \int_\gamma -\frac{1}{2}y^2\,dx + \frac{1}{3}x^3\,dy$$

$$= \int_0^1 \Big[-\frac{1}{2}\underset{\substack{\uparrow\\ y^2}}{(t-t^3)^2}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \dot{x}}}{(1-2t)} + \frac{1}{3}\underset{\substack{\uparrow\\ x^3}}{(t-t^2)^3}\,\underset{\substack{\uparrow\\ \dot{y}}}{(1-3t^2)} \Big]\,dt$$

$=$ si fa.

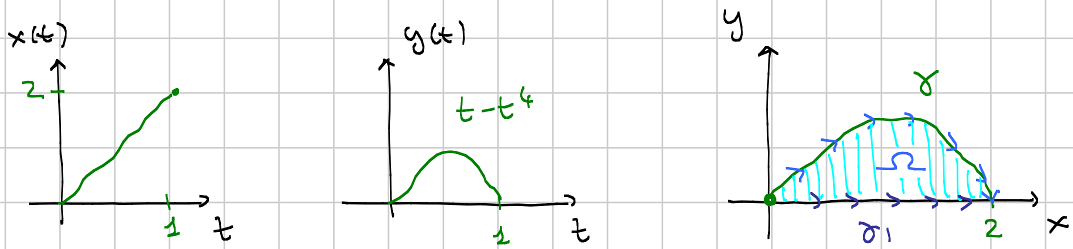
In alternativa potevo usare

$$\vec{E} = \left(0, x^2y + \frac{1}{2}y^2\right) \quad \text{oppure} \quad \vec{E} = \left(\frac{1}{3}x^3 + xy, 0\right)$$

o mix opportuni.

— o — o —

Esempio 3 Sia Ω limitato dalla curva $\gamma(t) = (t+t^3, t-t^4)$, $t \in [0,1]$ e dall'asse x.



Calcolare $\displaystyle\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy$

$\partial\Omega^+$ è fatto da 2 curve $\gamma_1(t) = (t,0)$ con $t \in [0,2]$

$\gamma_2(t) = \gamma$ percorsa al contrario

quindi

$$\iint_\Omega A_x + B_y \, dx\,dy = \int_{\gamma_1} -B\,dx + A\,dy \underset{\substack{\uparrow \\ \gamma \text{ va percorsa al contrario}}}{-} \int_\gamma (-B\,dx + A\,dy)$$

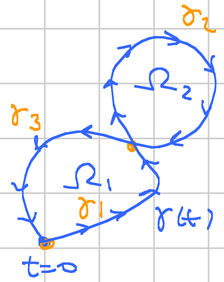
Posso scegliere $(A,B) = \left(\frac{1}{2}x^2y^2, 0\right)$. In questo modo

$$\int_{\gamma_1} -\underbrace{B}_{=0}\,dx + A\,\underbrace{dy}_{=0} = 0$$

$$\iint_\Omega xy^2\,dx\,dy = -\int_\gamma \frac{1}{2}x^2y^2\,dy = -\int_0^1 \frac{1}{2}\underbrace{(t+t^3)^2}_{x(t)}\underbrace{(t-t^4)^2}_{y(t)}\underbrace{(1-4t^3)}_{\dot y(t)}\,dt$$

$$= \text{si fa.}$$

—o—o—

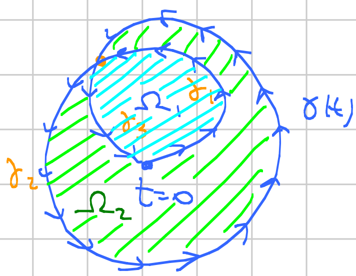


<u>Oss.</u> Se la curva non è semplice, le cose si complicano.

Cosa succede nell'esempio se calcolo

$$\int_\gamma y\,dx = \text{Area}(\Omega_1) - \text{Area}(\Omega_2)$$

$$= \underbrace{\int_{\gamma_1} y\,dx + \int_{\gamma_3} y\,dx}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} y\,dx}_{-\text{Area}(\Omega_2)}$$



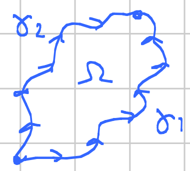
$$\int_\gamma y\,dx = \underbrace{\int_{\gamma_1} y\,dx + \int_{\gamma_3} y\,dx}_{\text{Area}(\Omega_1)} + \underbrace{\int_{\gamma_2} y\,dx}_{\text{Area}(\Omega_1 \cup \Omega_2)}$$

$$= 2\,\text{Area}(\Omega_1) + \text{Area}(\Omega_2)$$

ANALISI 2 – LEZIONE 065

Titolo nota 09/12/2015

$$\boxed{\iint_\Omega (A_x + B_y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B\,dx + A\,dy)}$$



Prendiamo una forma diff. $\omega = C\,dx + D\,dy$

Prendiamo due curve γ_1 e γ_2 con gli stessi estremi e nessuna altra intersezione.

Supponiamo che ω sia definita e suff. regolare in tutto l'insieme Ω delimitato dalle due curve. Allora

$$\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = \int_{\partial\Omega^+} \omega = \int_{\partial\Omega^+} (C\,dx + D\,dy) \qquad D = A,\ B = -C$$

$$= \iint_\Omega \underbrace{(D_x - C_y)}_{\overset{\shortparallel}{0}\ \text{se } \omega \text{ è chiusa}}\, dx\, dy$$

Quindi

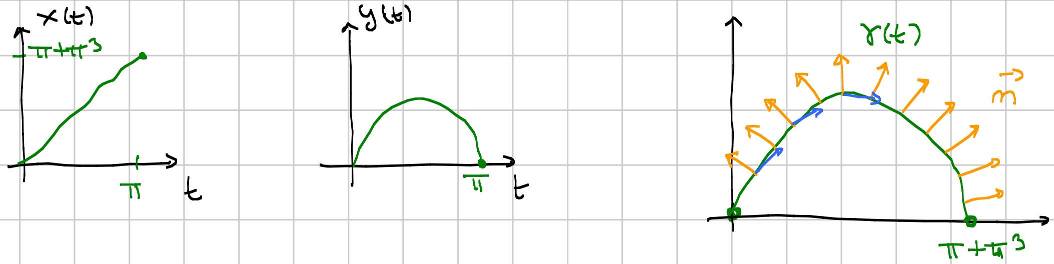
ω chiusa $\Rightarrow \int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ pur di sapere che γ_1 e γ_2 percorrono il bordo $\partial\Omega$ di un Ω su cui ω è ben definita.

—o—o—

Esempio 1 $\vec{E} = (y^2 \arctan y,\ x \sin(x^3))$

$$\gamma(t) = (t + t^3, \sin t) \qquad t \in [0, \pi]$$

Calcolare il flusso di $\vec{E}$ lungo γ pensando al flusso dal basso verso l'alto.



$\gamma(t)$ è una curva semplice non chiusa.

$\boxed{1° \text{ modo}}$ Scrivo il versore $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}} \underbrace{(-\dot{y}, \dot{x})}$

rotazione antioraria del tangente

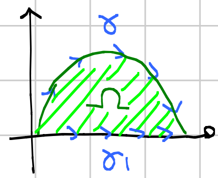
Quindi calcolo l'integrale

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_\gamma -A\,dy + B\,dx$$

$$= \int_0^\pi (\sin t)^2 \arctan(\sin t)\cdot(\cos t) + \dots$$

$$= \text{contaccio.}$$

$\boxed{2° \text{ modo}}$ Provo ad usare il teo. della divergenza.
Considero l'insieme Ω delimitato dalla curva γ e dall'asse x.
Applico teo della divergenza



$$\iint_\Omega \underbrace{\operatorname{div} \vec{E}}_{=0} \, dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$\gamma_1(t) = (t, 0) \quad t \in [0, \pi^3+\pi]$

$$= \int_{\gamma_1} (-B\,dx + A\,dy) - \int_\gamma (-B\,dx + A\,dy)$$

Quindi

$$\int_\gamma -B\,dx + A\,dy = \int_{\gamma_1} (-B\,dx + \underbrace{A\,dy}_{=0}) = -\int_0^{\pi^3+\pi} \underbrace{t}_{x} \sin(\underbrace{t^3}_{x}) \underbrace{1}_{\dot{x}} \, dt$$

$$= \text{si fa}$$

Occhio all'orientazione. Quello che mi serve è

$$\int_\gamma \langle \vec{E}, \vec{m} \rangle \, ds = \int_\gamma -A\,dy + B\,dx$$

, quindi alla fine devo cambiare il segno.

vedi formula per $\vec{m}$ ottenuta nel primo modo.

— ○ — ○ —

LAPLACIANO IN COORDINATE POLARI

Motivazione Data una funzione $u(x,y)$ il suo laplaciano è

$$\Delta u(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y)$$

La funzione u la posso pensare in coord. polari

$$u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = v(\rho,\theta)$$

Posso fare la stessa operazione sul laplaciano, cioè

$$\Delta u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Domanda: quale operazione sulla $v(\rho,\theta)$ produce lo stesso risultato?

Esempio $u(x,y) = x^2y + y^3$ $\quad u_x = 2xy \quad u_{xx} = 2y$
$\quad u_y = x^2+3y^2 \quad u_{yy} = 6y$

Quindi

$$\Delta u(x,y) = 8y \qquad \Delta u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = 8\rho\sin\theta$$

$$v(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) = \rho^3\cos^2\theta\sin\theta + \rho^3\sin^3\theta$$
$$= \rho^3\sin\theta$$

Quale operazione su v produce $8\rho\sin\theta$

Conto $v(\rho,\theta) = u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$. Calcolo con la chain rule le derivate parziali

$v_\rho = u_x \cos\theta + u_y \sin\theta$ $\qquad$ $v_\theta = -u_x \rho\sin\theta + u_y \rho\cos\theta$

$$v_{\rho\rho} = u_{xx}\cos^2\theta + 2u_{xy}\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\sin^2\theta$$
$$v_{\theta\theta} = u_{xx}\rho^2\sin^2\theta - 2u_{xy}\rho^2\cos\theta\sin\theta + u_{yy}\rho^2\cos^2\theta - u_x\rho\cos\theta - u_y\rho\sin\theta$$

Quindi

$$v_{\rho\rho}(\rho,\theta) + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta}(\rho,\theta) = u_{xx}(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) + u_{yy}(\dots,\dots) - u_x\frac{1}{\rho}\cos\theta - u_y\frac{1}{\rho}\sin\theta \rightsquigarrow \frac{1}{\rho}v_\rho$$
$$= \Delta u(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

Concludendo $\boxed{\Delta u = v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho}v_\rho}$

Nell'esempio in effetti $v = \rho^3\sin\theta$

$v_\rho = 3\rho^2\sin\theta$ $\qquad$ $v_\theta = \rho^3\cos\theta$

$v_{\rho\rho} = 6\rho\sin\theta$ $\qquad$ $v_{\theta\theta} = -\rho^3\sin\theta$

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho^2}v_{\theta\theta} + \frac{1}{\rho}v_\rho = 6\rho\sin\theta - \rho\sin\theta + 3\rho\sin\theta = 8\rho\sin\theta$$

<ins>Esercizio</ins> trovare tutte le funzioni radiali tali che $\Delta u = 0$

Passando in coord. polari si ottiene che $v(\rho,\theta)$ non dipende da θ, quindi $v_{\theta\theta} = 0$. Quindi bisogna risolvere

$$v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho = 0$$

Ponendo $y(\rho) = v_\rho(\rho)$ abbiamo $\dot{y} + \frac{1}{\rho}y = 0$

che è una equazione del 1° ordine a variabili separabili

$$\dot{y} = -\frac{1}{\rho} y \quad \rightsquigarrow \quad \frac{dy}{y} = -\frac{d\rho}{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \log|y| = -\log\rho + c$$

$\rightsquigarrow \; |y| = \frac{k}{\rho}$ per una opportuna costante $k \in \mathbb{R}$, quindi

$$v_\rho(\rho) = \frac{k}{\rho} \quad \rightsquigarrow \quad \boxed{v(\rho) = k \log\rho + c}$$

Tranne quella con $k=0$, tutte le altre divergono nell'origine.

—o—o—

Esercizio Fare Laplaciano in coord. sferiche e trovare le sol. radiali di $\Delta u = 0$ in $\mathbb{R}^3$.

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 066

Titolo nota 11/12/2015

DIMOSTRAZIONI DI GAUSS-GREEN IN DIMENSIONE 2

Teo. divergenza

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds$$

Se poniamo $\vec{E} = (A, B)$ si può riscrivere come

$$\boxed{\iint_\Omega (A_x + B_y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} (-B\, dx + A\, dy)}$$

curva o insieme di curve che percorrono $\partial\Omega$ con l'orientazione giusta

Corollario (Dimenticato a suo tempo)
Data $f(x,y)$ e dato $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ vale la formula

$$\boxed{\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial v}(x,y)\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\, ds}$$

Dim. Posto $\vec{v} = (v_1, v_2)$, allora $\frac{\partial f}{\partial v} = v_1 f_x(x,y) + v_2 f_y(x,y)$

Applico teo. divergenza con $\vec{E} = (v_1 f, v_2 f)$. Allora

$$\iint_\Omega \frac{\partial f}{\partial v}\, dx\, dy = \iint_\Omega \operatorname{div} \vec{E}\, dx\, dy = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds \qquad \vec{n} = (n_1, n_2)$$

$$= \int_{\partial\Omega} (v_1 f n_1 + v_2 f n_2)\, ds$$

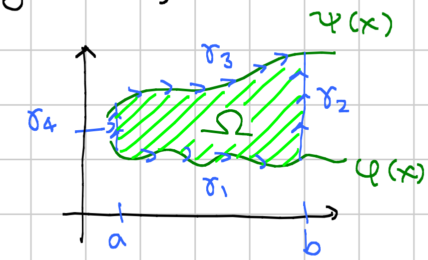
$$= \int_{\partial\Omega} f \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle\, ds. \qquad \square$$

— o — o — o —

$\boxed{\text{CASI SPECIALI DEL TEO. DIV.}}$

$\boxed{\text{Caso di insieme normale risp. asse } x}$ Supponiamo

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a,b],\ \varphi(x) \le y \le \psi(x)\}$$



Voglio dimostrare due formule

$$\iint_\Omega B_y(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+} -B\,dx$$

$$\iint_\Omega A_x(x,y)\,dx\,dy = \int_{\partial\Omega^+} A\,dy$$

$\boxed{\text{Dim. con } B}$

$$\iint_\Omega B_y(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} dy\,[B_y(x,y)]$$

$$= \int_a^b dx\,[B(x,y)]_{y=\varphi(x)}^{y=\psi(x)}$$

$$= \int_a^b [B(x,\psi(x)) - B(x,\varphi(x))]\,dx$$

$$\iint_{\partial\Omega^+} -B(x,y)\,dx = -\int_{\gamma_1} - \underbrace{\int_{\gamma_2}}_{0} + \int_{\gamma_3} + \underbrace{\int_{\gamma_4}}_{0} = (*)$$

dove

$\gamma_1(t) = (t, \varphi(t))$ $t \in [a,b]$ $\gamma_2(t) = (b,t)$ $t \in [\varphi(b), \psi(b)]$

$\gamma_3(t) = (t, \psi(t))$ $t \in [a,b]$ $\gamma_4(t) = (a,t)$ $t \in [\varphi(a), \psi(a)]$

$$(*) = -\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_3} = -\int_a^b B(t,\varphi(t))\,dt + \int_a^b B(t,\psi(t))\,dt$$

e questo dimostra la formula.

$\boxed{\text{Dim A}}$

$$\iint_\Omega A_x(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x,y)\,dy}$$

Introduco una nuova funzione

$$H(x) := \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A(x,y)\,dy$$ (integrale dipendente da parametro)

Calcolo

$$H'(x) = \frac{dH}{dx} = \underbrace{\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} A_x(x,y)\,dy} + A(x,\psi(x))\psi'(x) - A(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

vado a sostituire sopra

$$\iint_\Omega A_x(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \left\{\frac{dH}{dx}(x) - A(x,\psi(x))\psi'(x) + A(x,\varphi(x))\varphi'(x)\right\}$$

$$= -\int_a^b A(x,\psi(x))\psi'(x)\,dx + \int_a^b A(x,\varphi(x))\varphi'(x)\,dx + H(b) - H(a)$$

Vado ora a calcolare il pezzo di bordo:

$$\int_{\partial\Omega^+} A(x,y)\,dy = \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} - \int_{\gamma_3} - \int_{\gamma_4}$$

$$\int_{\gamma_1} A(x,y)\,dy = \int_a^b A(t,\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

$$\int_{\gamma_2} A(x,y)\,dy = \int_{\varphi(b)}^{\psi(b)} A(b,t)\,dt = H(b)$$

Analogamente

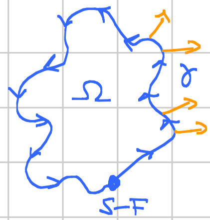
$$\int_{\gamma_4} A(x,y)\,dy = -H(a) \quad \text{e} \quad \int_{\gamma_3} A(x,y)\,dy = \text{pezzo mancante}$$

— o — o —

Analogamente si dimostra il teo. della div. negli insiemi normali rispetto all'asse y. (Fare per esercizio)

$\boxed{\text{Interpretazione ciclistica del teo. div.}}$

Se faccio un giro in bici e sento sempre il vento provenire da destra (o da sinistra), allora di sicuro il campo velocità del vento non può avere divergenza nulla!

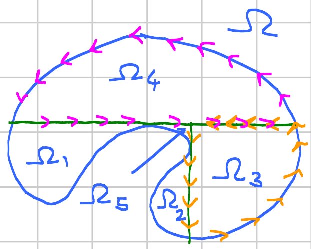


Se il vento viene da dx, allora $<\vec{E},\vec{n}> < 0$ su tutta la curva, quindi

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy < 0$$

— o — o —

Conclusione $\boxed{\text{MOLTO BRUTALE}}$ della dimostrazione nel caso generale



→ Dato un insieme qualunque Ω (con frontiera ragionevolmente regolare) lo posso suddividere come unione di insiemi normali

→ In ogni sottoinsieme Ω_i applico il teo. div. che so essere vero

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy = \sum_{i=1}^{n} \iint_{\Omega_i} \operatorname{div} \vec{E} \, dx\, dy$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega_i} <\vec{E},\vec{n}> ds$$

L'ultima somma è fatta da pezzi di $\partial\Omega$ percorsi con il verso giusto, e dai vari tratti intermedi aggiunti fatti due volte con due versi opposti, e che quindi si cancellano.

— o — o —

$\boxed{\text{Notazione}}$ Spesso i fisici usano notazioni diverse per divergenza, laplaciano, rotore.
In particolare

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{E}} = (\partial_x, \partial_y) \cdot (A, B) = A_x + B_y = \operatorname{div} \vec{E}$$

$$\boxed{\nabla^2 f} = f_{xx} + f_{yy} = \Delta f$$

$$\boxed{\nabla \wedge \vec{E}} = \operatorname{rot} \vec{E}$$ (in fondo è la matrice che calcola rot $\vec{E}$)

— o — o —

Teorema (esercizio) Se vale il teo. della divergenza in un insieme Ω, allora vale in un insieme Ω' ottenuto ruotando Ω di un angolo a piacere.

— o — o —

ANALISI 2 — LEZIONE 067

Titolo nota 11/12/2015

PARTIZIONI DELL'UNITÀ

Problema generale: c'è un enunciato che funziona in situazioni speciali locali (ad esempio il teo. div. sugli insiemi normali). Voglio dire che funziona in grande.

LOCALE ⇝ GLOBALE

Supponiamo nel piano di avere una successione $\{R_n\}$ di rettangoli tali che

(i) ricoprono tutto il piano $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{Int}(R_n)$

(ii) ogni compatto $K \subseteq \mathbb{R}^2$ interseca solo un numero finito di rettangoli.

Ad esempio, posso prendere una "quadrettatura allargata" del piano

Allora esiste una successione di funzioni $\psi_n : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ con queste proprietà:

→ $\psi_n(x) = 0$ se $x \notin R_n$ (ψ_n è nulla fuori da R_n)

→ $\psi_n(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$

→ $\underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(x)}$ $= 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

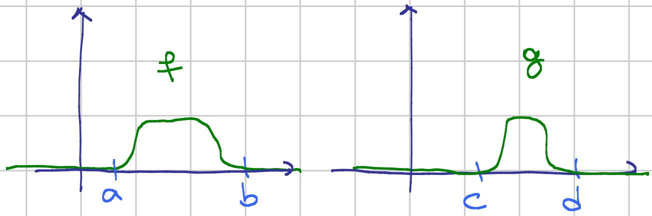
questa somma ha un numero finito di addendi
per ogni $x \in \mathbb{R}^2$ per la (ii)

La succ. $\{\psi_n\}$ si dice $\boxed{\text{PARTIZIONE DELL'UNITÀ}}$ relativa ad $\{R_n\}$.

$\boxed{\text{Dim. dell' esistenza}}$ In ogni rettangolo costruisco una funzione C^∞ che è nulla fuori dal rettangolo e positiva dentro. La chiamo $\varphi_n(x)$

$R = [a,b] \times [c,d]$
basta porre

$$\varphi(x,y) = f(x) \cdot g(y)$$



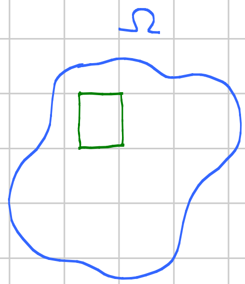
A questo punto pongo

$$\boxed{\psi_n(x) = \frac{\varphi_n(x)}{\sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k(x)}}$$

Osservo che il denominatore è una funzione C^∞ perché in ogni palla B_R è somma di un numero finito di funzioni C^∞.

— o — o —

$\boxed{\text{Ancora casi speciali del teorema della divergenza}}$

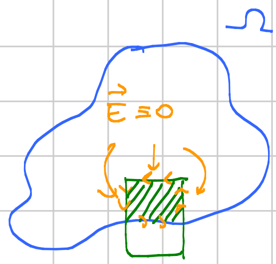


$\boxed{1}$ Supporto di A e B contenuto in un rettangolo $R \subseteq \mathrm{Int}(\Omega)$. Allora vale il teorema della divergenza

$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{E} = \iint_R \operatorname{div} \vec{E} = \underset{\substack{\uparrow \\ R \text{ è normale}}}{=} \iint_{\partial R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds \underset{\substack{\uparrow \\ A \text{ e } B \text{ si} \\ \text{annullano su } \partial R}}{=} 0 = \iint_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

... su $\partial\Omega$

$\boxed{2}$ Supporto di A e B contenuto in un rettangolo R la cui intersezione con Ω è un insieme normale. Allora anche qui vale teo. div.



$$\iint_\Omega \operatorname{div} \vec{E} = \iint_{R \cap \Omega} \operatorname{div} \vec{E} = \int_{\partial(R \cap \Omega)} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

$$= \int_{\partial\Omega \cap R} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds = \int_{\partial \Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, ds$$

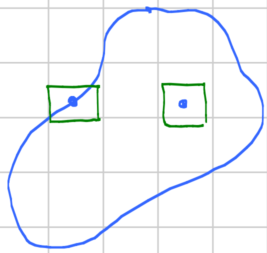
Dim. generale di teo. div.

① Prendo Ω. Per ogni punto x costruisco un rettangolo R_x in questo modo

→ se $x \in \mathrm{Int}(\Omega)$ faccio in modo che $R_x \subseteq \mathrm{Int}(\Omega)$

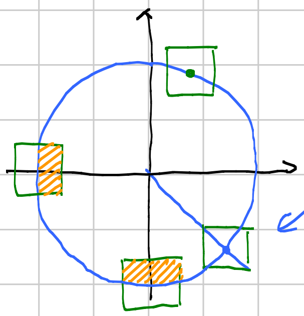
→ se $x \in \partial\Omega$ faccio in modo che $R_x \cap \Omega$ sia un insieme normale

In ogni caso x è il centro di R_x

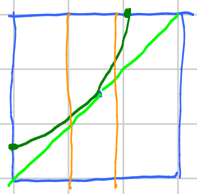


Oss. In alcuni testi si trova la stessa costruzione con i quadrati, ma non funziona!!!

Esempio

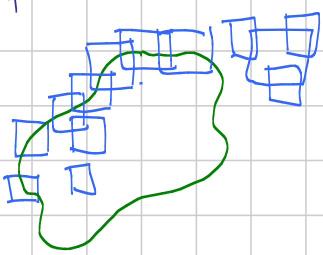


in ogni quadrato centrato in un p.to della diagonale la restrizione tocca due lati adiacenti



I vari R_x pensati come rettangoli aperti, costituiscono un ricoprimento di $\overline{\Omega}$, quindi posso estrarre un sottoricoprimento finito, avendo così un numero finito di rettangoli le cui parti interne ricoprono $\overline{\Omega}$.

A questi posso aggiungere altri rettangoli che NON intersecano $\overline{\Omega}$ in modo da ricoprire $\mathbb{R}^2$ come nella partizione dell'unità.



Prendo una partizione dell'unità relativa a questi rettangoli.

uso solo rettangoli che ricoprono $\overline{\Omega}$

$$\iint_\Omega A_x \, dx\, dy = \iint_\Omega \left(\sum_{n=1}^{k} \psi_n A \right)_x dx\, dy$$

$$= \sum_{n=1}^{k} \iint_\Omega \underbrace{(\psi_n A)}_{}{}_x \, dx\, dy$$

il supporto è contenuto in un rettangolo "buono", quindi qui vale teorema della divergenza come visto sopra

$$= \sum_{n=1}^{k} \int_{\partial\Omega^+} (\psi_n A)\, dy$$

$$= \int_{\partial\Omega^+} \left(\sum_{n=1}^{k} \psi_n A \right) dy = \int_{\partial\Omega^+} A \, dy$$

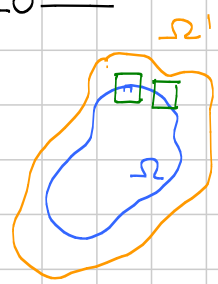
Nello stesso identico modo si dimostra che

$$\iint_\Omega B_y \, dx\, dy = \int_{\partial\Omega^+} -B\, dx$$

e questo completa la dimostrazione (che volendo si poteva fare direttamente con $\vec{E}$).

— o — o —

<u>Sotto quali ipotesi abbiamo dimostrato teo. divergenza</u>



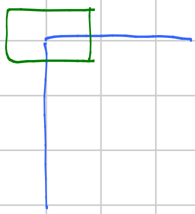
→ Le componenti di E sono di classe C^1 su un aperto $\Omega' \supseteq \overline{\Omega}$

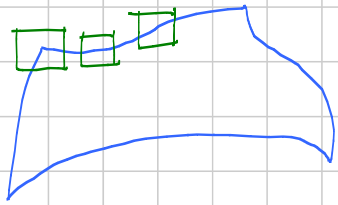
→ In ogni punto di $\partial\Omega$ esiste un rettangolino R centrato in quel punto tale che

$$\Omega \cap R$$

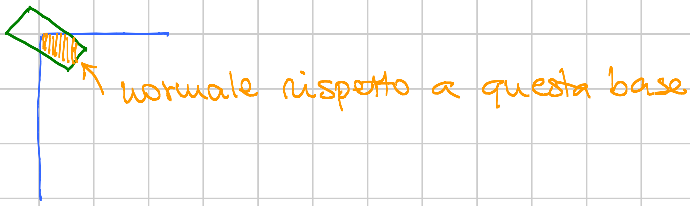
è un insieme normale rispetto all'asse x o all'asse y.

<u>Osservazione</u> Questo sistema il teorema se Ω è regolare.
Se ci sono degli angoli





Negli angoli non c'è un rettangolino "diritto", ma magari c'è un rettangolo ruotato



Morale: se dimostro la formula per gli insiemi ruotati posso gestire anche insiemi Ω con $\partial\Omega$ regolare a tratti (e volendo usare sempre i quadrati)

ANALISI 2 — LEZIONE 068

Titolo nota 15/12/2015

ORIENTAZIONE DI UNA SUPERFICIE

Una <u>orientazione</u> di una superficie è una scelta continua del versore normale.

Se la sup. è descritta parametricamente da

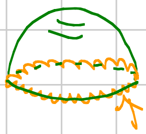
$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3 \quad \text{con } \Omega \subseteq \mathbb{R}^2$$

allora le due orientazioni possibili sono date da

$$\boxed{\vec{n} = \pm \frac{(n_1, n_2, n_3)}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}} \qquad \text{dove } (n_1, n_2, n_3) = \Phi_u \wedge \Phi_v$$

Orientazione del bordo di una superficie

<u>Achtung!</u> Il bordo di una superficie NON è la sua frontiera topologica !!!



bordo della semisfera

Se S è il supporto della semisfera, la sua frontiera topologica è lei stessa

<u>Semidef.</u> Se la superficie è data una parametrizzazione

$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3$$

chiusura di un aperto in $\mathbb{R}^2$

allora definiamo bordo della superficie la curva (o le curve) che si ottengono come immagine di $\partial\Omega$

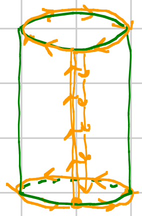
frontiera topologica di Ω in $\mathbb{R}^2$

Achtung! Pensiamo ad un cilindro:

$$(\vartheta, z) \longrightarrow (\cos\vartheta, \sin\vartheta, z) \in \mathbb{R}^3$$

$$\uparrow$$

$$[0,2\pi]\times[0,4] = \Omega$$



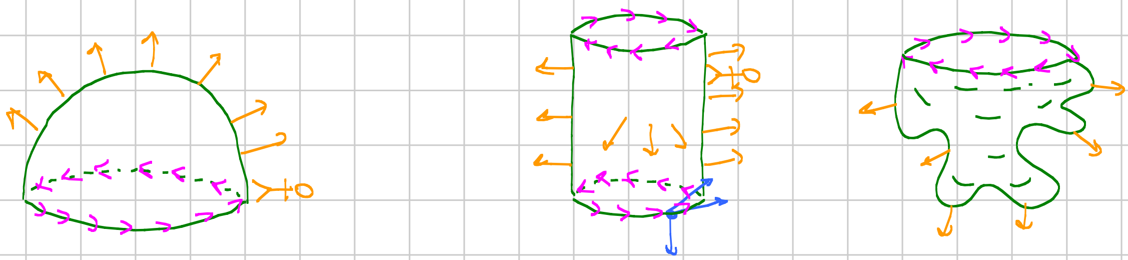
In questo caso l'immagine di $\partial\Omega$ è.

Orientare il bordo di una sup. vuol dire scegliere un verso di percorrenza in ogni curva che compone il bordo. Quale scegliere?

Orientazione canonica del bordo di una sup. orientata

È il verso in cui deve percorrere il bordo un omino in piedi secondo l'orientazione della sup. in modo da lasciare la sup. alla sua sinistra

Esempi



Detto meglio: i seguenti 3 vettori nell'ordine
→ normale esterna alla sup (mi metto nel piano tg. e p.nto fuori)
→ tangente al bordo
→ vettore normale alla sup
devono essere una base di $\mathbb{R}^3$ orientata come la base canonica

Fatto generale: se la sup. è orientata da $\Phi_u \wedge \Phi_v$, allora il bordo è orientato prendendo $\partial\Omega$ lasciando Ω a sx.

FORMULA DI STOKES TEOREMA DEL ROTORE

Sotto opportune ipotesi vale la formula

versore tangente al bordo

$$\boxed{\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, ds}$$

Detto dai fisici: il flusso del rotore di $\vec{E}$ attraverso la superficie è uguale alla $\boxed{\text{circuitazione}}$ di $\vec{E}$ lungo il bordo della superficie.

Supponiamo $\vec{E} = (A, B, C)$ e supponiamo S parametrizzata da $\Phi: \Omega \to \mathbb{R}^3$.
Allora

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma = \int_\Omega (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) \cdot \frac{(M_1, M_2, M_3)}{\cancel{\|(M_1, M_2, M_3)\|}} \cdot \cancel{\|(M_1, M_2, M_3)\|} \, du \, dv$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma = \int_\Omega M_1 (C_y - B_z) + M_2 (-C_x + A_z) + M_3 (B_x - A_y) \, du \, dv$$

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S^+} A \, dx + B \, dy + C \, dz$$

bordo di S orientato come indicato precedentemente

Supponiamo che $x(t), y(t), z(t)$ percorrano ∂S. Allora

$$\int_{\partial S} \langle \vec{E}, \vec{\tau} \rangle \, d\sigma = \int (A, B, C) \cdot \frac{(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \sqrt{\ldots} \, dt = \int A\dot{x} + B\dot{y} + C\dot{z}$$

$\boxed{\text{COME DETERMINO SE UN CERTO VETTORE È UN ROTORE?}}$

$(x+y,\ x-y+z^2,\ z-3)$

Guardo la divergenza! Se div $\neq 0$, allora NON può essere un rotore!!! Abbiamo visto infatti che div (rot $\vec{E}$) = 0

$1-1+1=1 \neq 0 \Rightarrow$ no rotore

Se invece la div = 0, allora può essere un rotore e lo è se l'insieme di definizione è un parallelepipedo

<u>Esempio</u> $\vec{F} = (x+y,\ y+zx,\ -2z+x^2y)$

div $\vec{F} = 1+1-2 = 0$. $\vec{F}$ è definito ovunque, quindi esiste E tale che rot $\vec{E} = \vec{F}$.

Come trovo $\vec{E}$? Pongo $\vec{E} = (A, B, C)$. Devo risolvere

$$\begin{cases} C_y - B_z = x+y \\ -C_x + A_z = y+zx \\ B_x - A_y = -2z + x^2y \end{cases}$$

Battezziamo $C \equiv 0$: $\quad -B_z = x+y \quad \rightsquigarrow B = -xz - yz + \varphi(x,y)$

$A_z = y + zx \quad \rightsquigarrow A = yz + \frac{1}{2}z^2x + \psi(x,y)$

$B_x - A_y = -2z + x^2y$

Battezzo $=0$ una delle due funzioni φ e ψ, ad esempio $\psi(x,y)$

$B = -xz - yz + \varphi(x,y)\,, \quad A = yz + \frac{1}{2}z^2x$

Sostituisco nella 3ª relazione e trovo $\varphi(x,y)$:

$B_x - A_y = \cancel{-z} + \varphi_x \cancel{-z} = -\cancel{2z} + x^2 y$ $\qquad \varphi_x = x^2 y$

la semplificazione segue dalla div = 0

$\rightsquigarrow \varphi = \frac{1}{3} x^3 y.$

In conclusione $\vec{E} = \left(yz + \frac{1}{2} z^2 x, -xz - yz + \frac{1}{3} x^3 y, 0 \right)$

Domanda successiva: come sono fatti tutti gli $\vec{E}$ t.c. $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{F}$

Se ho un'altra soluzione $\operatorname{rot} \vec{E}_1 = \vec{F}$, allora

$\operatorname{rot} (\vec{E}_1 - \vec{E}) = 0 \rightsquigarrow \vec{E}_1 - \vec{E} = \nabla f$ per una opportuna $f(x,y,z)$

Se volessi ottenere $y \sinh z$ alla terza componente, basta aggiungere

$$\nabla (y \cosh z)$$

<u>Conclusione</u>: c'è tanta libertà nella scelta di $\vec{E}$ tale che $\operatorname{rot} \vec{E} = \vec{F}$ dato.

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 069

Titolo nota 15/12/2015

QUATTRO STRATEGIE PER CALCOLARE UN INTEGRALE DI FLUSSO

Situazione classica: sono dati
→ una superficie
→ una orientazione della sup.
→ un campo $\vec{E} = (A, B, C)$

Obiettivo: calcolare

$$\boxed{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}$$

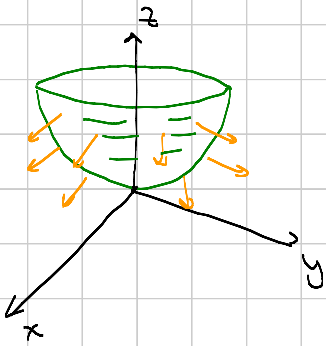
Flusso di $\vec{E}$ attraverso la superficie

ROAD MAP 1 Usare formula diretta, quindi

① Scrivo una param. di S
② Controllo il segno da mettere a (M_1, M_2, M_3) per avere l'orientazione giusta
③ Calcolo

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iint_\Omega (AM_1 + BM_2 + CM_3) \, du \, dv.$$

Esempio
$z = x^2 + y^2, \quad z \leq 1$
$\vec{n}$ = "verso il basso"
$\vec{E} = (x, y-z, xy - 2z)$



① È una sup. cartesiana, quindi

$$\Phi(u,v) = (u, v, u^2+v^2) \quad \text{con } \Omega = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u^2+v^2 \leq 1\}$$

② $\Phi_u = (1, 0, 2u)$
$\Phi_v = (0, 1, 2v)$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2u \\ 0 & 1 & 2v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (-2u, -2v, 1)$$

Ha il segno giusto? Nell' origine diventa $(0,0,1)$, quindi il segno è sbagliato, quindi bisogna mettere un $-$

③ Calcolo finale

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle d\sigma = -\int_\Omega A M_1 + B M_2 + C M_3 \, du\, dv$$

$$= -\int_\Omega \underset{A}{u} \underset{M_1}{(-2u)} + \underset{B}{(v-u^2-v^2)} \underset{M_2}{(-2v)} + \underset{C}{(uv-2u^2-2v^2)} \underset{M_3}{1}$$

$$= \int_{u^2+v^2 \leq 1} \left[2u^2 + 2v(v-u^2-v^2) + (2u^2+2v^2-uv) \right] du\, dv$$

= integrale doppio tranquillo.

$\boxed{\text{Vantaggi / svantaggi della RM 1}}$ $\to$ si può usare sempre
$\to$ occorre calcolare (M_1, M_2, M_3)

—o —o —

$\boxed{\text{ROAD MAP 2}}$ Sperare in Stokes

① Spero che $\vec{E}$ sia il rotore di un certo $\vec{F}$
② TROVO $\vec{F}$
③ Uso Stokes

Applichiamolo all' esempio di prima

① $\vec{E} = (x, y-z, xy-2z)$ $\quad$ div $\vec{E} = 1+1-2 = 0$ $\quad$ SI! ☺

② Trovo $\vec{F}$ $\quad (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y) = \vec{E}$

Poniamo $B = 0$ $\quad C_y = x \qquad C = xy + \varphi(x,z)$

$-C_x + A_z = y - z$

$-A_y = xy - 2z \qquad A = -\frac{1}{2}xy^2 + 2zy$

Sostituisco nella 2ª:

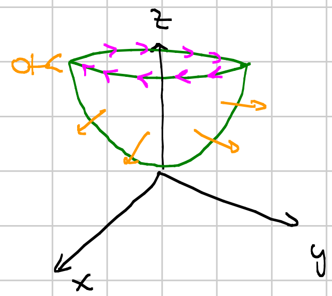
$$-\cancel{y} - \varphi_x + 2\cancel{y} = \cancel{y} - z \quad \rightsquigarrow \quad \varphi(x,z) = zx$$

Conclusione $\quad \vec{F} = (\underbrace{-\frac{1}{2}xy^2 + 2zy}_{\hat{A}}, \underbrace{0}_{\hat{B}}, \underbrace{xy + xz}_{\hat{C}})$

③ Uso Stokes

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S^+} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds = \int_{\partial S^+} \hat{A}\,dx + \hat{B}\,dy + \hat{C}\,dz$$

Non resta che scrivere per bene ∂S, con l'orientazione giusta!



$(\cos\theta, \sin\theta, 1) \qquad \theta \in [0, 2\pi]$

con l'$\underbrace{\text{orientazione cambiata}}$.

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = - \int_0^{2\pi} \Big(\underbrace{-\frac{1}{2}\cos\theta \sin^2\theta + 2\sin\theta}_{\hat{A}}\Big) \underbrace{(-\sin\theta)}_{\dot{x}} \, d\theta$$

I termini con $\hat{B}\,dy$ vengono 0 e anche $\hat{C}\,dz$ produce solo 0 perché $\dot{z}(t) = 0$.

= si fa in un istante (controllare che venga lo stesso).

Vantaggi / svantaggi $\rightarrow$ serve $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ $\qquad \rightarrow$ l'integrale finale

$\rightarrow$ bisogna trovare $\vec{F}$ $\qquad$ è 1-dim

$\boxed{\text{ROAD MAP 3}}$ Uso Stokes senza invertire il rotore

① Spero che $\vec{E}$ sia rot $\vec{F}$ per un certo $\vec{F}$

② Cambio la sup. con una che ha lo stesso bordo.

③ Calcolo il flusso sulla nuova superficie.

Oss. Fondamentale Se $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$ e $\partial S_1 = \partial S_2$, allora

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

$\boxed{\text{Dim.}}$

$$\int_{S_1} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma \overset{\vec{E} = \text{rot} \vec{F}}{=} \int_{S_1} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

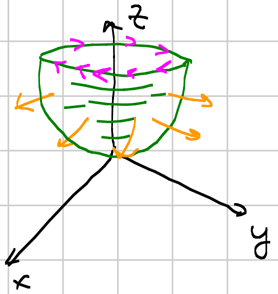
$$\text{Stokes} \rightarrow = \int_{\partial S_1} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

$$\text{stesso bordo} \rightarrow = \int_{\partial S_2} \langle \vec{F}, \vec{\tau} \rangle \, ds$$

$$= \int_{S_2} \langle \text{rot } \vec{F}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Nell' esempio

① Ok, $\vec{E} = \text{rot } \vec{F}$



② Scelgo una sup. con lo stesso bordo.
In questo caso prendo il cerchio superiore, orientato con la normale verso il basso.

$$S_2 = (x, y, 1) \qquad \Omega = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2 \leq 1 \}$$

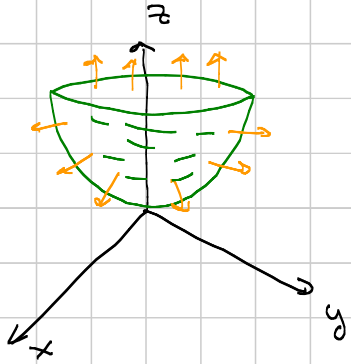
③ Calcolo il flusso su S_2

$$\int_{S_2} \langle \vec{E}, \underset{(0,0,-1)}{\vec{n}} \rangle \, d\sigma = \int_{x^2+y^2 \leq 1} (xy-2) \cdot (-1) \, dx \, dy = \text{banale}$$

Vantaggi / svantaggi : → serve $\operatorname{div} \vec{E} = 0$
→ non serve trovare $\vec{F}$
→ resta integrale 2-dim.

—— o —— o ——

$\boxed{\text{ROAD MAP 4}}$ Uso Gauss-Green dopo aver chiuso il dominio !!



① Chiudo il dominio
② Uso Gauss-Green

Nell'esempio, considero il solido $V \subseteq \mathbb{R}^3$ definito da

$$V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2 \leq 1, \; x^2+y^2 \leq z \leq 1 \}$$

Gauss-Green dice che

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz = \iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

normale esterna a V

e nel nostro caso $\displaystyle\iint_{\partial V} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \underbrace{\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma}_{\text{quello che serve a noi}} + \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$

$(0,0,1)$

Quindi

$$\int_S \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} \, dx\,dy\,dz - \int_{S_2} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma$$

Vantaggi / svantaggi

→ Funziona sempre (non serve che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$)
→ Bisogna calcolare un integrale 3-dim. e uno 2-dim.

—— o —— o ——

ANALISI 2 — LEZIONE 070

Titolo nota 16/12/2015

Dimostrazione della formula di Stokes

Strategia: parametrizzo la superficie, riporto tutto in $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e lì uso Gauss-Green

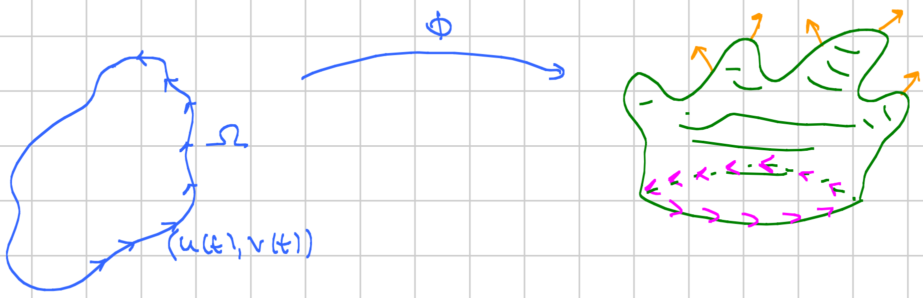
$$\boxed{\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S^+} A\,dx + B\,dy + C\,dz} \qquad \vec{E} = (A, B, C)$$

Fissiamo una parametrizzazione di S:

$\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^3$ con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ chiusura di un aperto abbastanza regolare

Chiamiamo (u, v) le variabili in Ω e poniamo

$$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v), Z(u,v))$$



Supponiamo che $\partial\Omega$ sia il supporto di una o più curve

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \qquad t \in [a,b]$$

che lo percorrono lasciando Ω a sinistra. In queste ipotesi il bordo ∂S è percorso positivamente dalla curva

$$(x(t), y(t), z(t)) = (X(u(t),v(t)), Y(u(t),v(t)), Z(u(t),v(t)))$$

$\boxed{\text{Dim. di Stokes}}$ Scrivo RHS e LHS usando la parametrizz.

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ \partial_x & \partial_y & \partial_z \\ A & B & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \operatorname{rot} \vec{E} = (C_y - B_z, -C_x + A_z, B_x - A_y)$$

$$\begin{pmatrix} i & j & k \\ X_u & Y_u & Z_u \\ X_v & Y_v & Z_v \end{pmatrix} \rightsquigarrow (M_1, M_2, M_3) = (Y_u Z_v - Z_u Y_v, -X_u Z_v + Z_u X_v, X_u Y_v - Y_u X_v)$$

Allora

$$LHS = \int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{m} \rangle \, d\sigma = \iint_\Omega (C_y - B_z)(Y_u Z_v - Z_u Y_v) + (-C_x + A_z)(-X_u Z_v + Z_u X_v) + (B_x - A_y)(X_u Y_v - Y_u X_v) \, du\,dv$$

Volendo posso espandere il prodotto ... limitiamoci a scrivere i 4 termini con la A ...

$$\boxed{A_z (-X_u Z_v + Z_u X_v) - A_y (X_u Y_v - Y_u X_v)}$$

$$A_z(X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)) [-X_u(u,v) Z_v(u,v) + \ldots]$$

Occupiamoci ora del RHS:

$$RHS = \int_{\partial S^+} A\,dx + B\,dy + C\,dz$$

$$= \int_a^b A(x(t), y(t), z(t))\, \dot{x}(t) + B(\ldots)\, \dot{y}(t) + C(\ldots)\, \dot{z}(t) \, dt$$

$$x(t) = X(u(t), v(t)) \rightsquigarrow \dot{x}(t) = X_u(u(t), v(t))\, \dot{u}(t) + X_v(\ldots)\, \dot{v}(t)$$

$$\rightsquigarrow \dot{y}(t) = Y_u(\ldots)\, \dot{u}(t) + Y_v(\ldots)\, \dot{v}(t)$$

$$\rightsquigarrow \dot{z}(t) = Z_u(\ldots)\, \dot{u}(t) + Z_v(\ldots)\, \dot{v}(t)$$

Quindi

$$RHS = \int_a^b A(\dots)(X_u \dot{u} + X_v \dot{v}) + B(\dots)(Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}) + C(\dots)(Z_u \dot{u} + Z_v \dot{v})$$

$$= \int_a^b (\underbrace{A X_u}_{A(X(u(t),v(t)),Y(u(t),v(t)),Z(u(t),v(t)))\,X_u(u(t),v(t))} + B Y_u + C Z_u)\dot{u} + (A X_v + B Y_v + C Z_v)\dot{v} \quad dt$$

$$= \int_{\partial\Omega} \underbrace{(A X_u + B Y_u + C Z_u)}_{\hat{D}} du + \underbrace{(A X_v + B Y_v + C Z_v)}_{\hat{E}} dv$$

= integrale di una forma differenziale su $\partial\Omega$

Applico Gauss-Green in Ω

$$\boxed{\iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v)\, du\, dv = \int_{\partial\Omega} \hat{D}\, du + \hat{E}\, dv}$$

Questa arriva dalla classica

$$\iint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{E}\, du\, dv = \int_{\partial\Omega} \langle \vec{E}, \vec{n} \rangle\, ds \qquad \vec{E} = (A, B)$$

$$\iint_{\Omega} (A_u + B_v)\, du\, dv = \int_{\partial\Omega} \underbrace{A}_{\hat{E}}\, dv \underbrace{- B}_{\hat{D}}\, du$$

Morale

$$RHS = \int_{\partial\Omega} \hat{D}\, du + \hat{E}\, dv = \iint_{\Omega} (\hat{E}_u - \hat{D}_v)\, du\, dv$$

$$= \iint_{\Omega} (A X_v + B Y_v + C Z_v)_u - (A X_u + B Y_u + C Z_u)_v$$

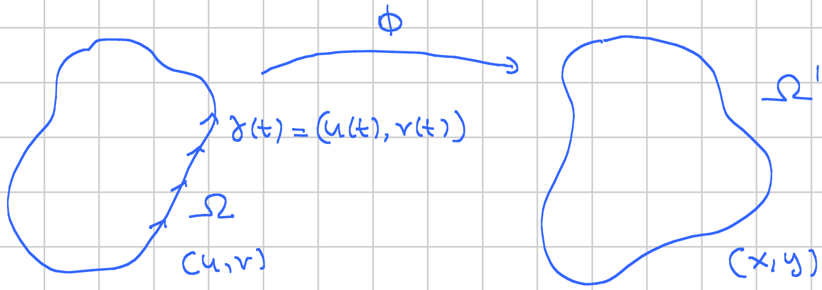
Se faccio le derivate o ottengo quello che c'era al LHS ho finito.

Nel fare il conto, limitiamoci ai termini con la A:

$$A_x \cancel{X_u X_v} + A_y Y_u X_v + A_z Z_u X_v + A \cancel{X_{vu}}$$
$$- A_x \cancel{X_v X_u} - A_y Y_v X_u - A_z Z_v X_u - A \cancel{X_{uv}}$$
$$= \boxed{A_y (Y_u X_v - Y_v X_u) - A_z (Z_v X_u - Z_u X_v)}$$

— o — o — o —

Back to cambio di variabili negli integrali Due variabili



Aggiunto dopo video: a guardarla bene questa dimostrazione non usa che $\operatorname{Det} J\Phi$ ha un segno fisso in Ω. Basta sapere se Φ conserva o no il verso di percorrenza del bordo per sistemare i segni (e ovviamente che $\Phi(\partial\Omega) = \partial\Omega'$).

$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))$ invertibile

$\partial\Omega'$ è parametrizzato, non so in che verso, da $\Phi(\gamma(t))$, cioè

$$(x(t), y(t)) = (X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t)))$$

Data $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ voglio calcolare $\iint_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy$.

Introduco una funzione $F(x,y)$ t.c. $F_x(x,y) = f(x,y)$.

Inizio il conto:

$$\iint_{\Omega'} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Omega'} \operatorname{div}(F(x,y), 0)\,dx\,dy$$

$$\text{(Gauss-Green)} = \int_{\partial\Omega'} F(x,y)\,dy$$

$$= \pm \int_a^b F(x(t), y(t))\, \dot{y}(t)\, dt$$

$$= \pm \int_a^b F(X(u(t), v(t)), Y(\ldots)) [Y_u \dot{u} + Y_v \dot{v}]\, dt$$

$$= \pm \int_a^b F(\ldots) Y_u \dot{u} + F(\ldots) Y_v \dot{v}\, dt$$

$$= \pm \int_{\partial\Omega} F(\ldots) Y_u\, du + \underbrace{F(\ldots)}_{F(X(u,v), Y(u,v)) Y_v(u,v)} Y_v\, dv$$

$$= (\text{Gauss-Green in } \Omega) = \pm \iint_\Omega [F Y_v]_u - [F Y_u]_v\, du\, dv$$

$$= \pm \iint_\Omega \{ F_x X_u Y_v + F_y \cancel{Y_u} Y_v + \cancel{F Y_{vu}} - F_x X_v Y_u - F_y \cancel{Y_v} Y_u - \cancel{F Y_{uv}} \}$$

$$= \pm \iint_\Omega f(X(u,v), Y(u,v)) \underbrace{\{X_u Y_v - X_v Y_u\}}_{J_\phi(u,v)}\, du\, dv$$

Per decidere il segno, uso $f(x,y) \equiv 1$: all'inizio trovo Area(Ω'), alla fine

$$\pm \iint_\Omega J_\phi(u,v)\, du\, dv$$

sempre pos. o sempre negativo, quindi il segno giusto è quello che fa comparire il valore assoluto.

— o — o —

Vantaggi di questa dim.: dura $\frac{1}{3}$ di lez. contro 3 lezioni

Svantaggi:
- → è semplice solo in $\mathbb{R}^2$ → serve $\partial\Omega$ regolare
- → ho usato che ϕ è C^2 e si estende fino al bordo
- → ho assunto f almeno continua
- → usa G.G. che è avanzato rispetto agli integrali.

ANALISI 2 — LEZIONE 071

Titolo nota 16/12/2015

BACK TO INVERSIONE ROTORE

Dato campo $\vec{E}$, trovare $\vec{F}$ tale che rot $\vec{F} = \vec{E}$

① Cond. nec. è che div $\vec{E} = 0$. Se non succede, non è possibile.

② Se div $\vec{E} = 0$ e siamo su un parallelepipedo, allora è possibile trovare $\vec{F}$

$\boxed{\text{Dim}}$ $\vec{E} = (A, B, C)$ $\hat{F} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ e voglio che

$$\text{rot}\,\vec{F} = (\hat{C}_y - \hat{B}_z, -\hat{C}_x + \hat{A}_z, \hat{B}_x - \hat{A}_y)$$

Prima semplificazione: scelgo $\hat{C} \equiv 0$ e mi riduco a risolvere

$-\hat{B}_z = A$ ⇝ Pongo $\hat{B} = -\overbrace{\text{primitiva di } A \text{ in } z}^{\bar{A}} + \varphi(x,y)$

$\hat{A}_z = B$ ⇝ Pongo $\hat{A} = \underbrace{\text{primitiva di } B \text{ in } z}_{\bar{B}} + \psi(x,y)$

$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C$

Seconda semplificazione: scelgo $\varphi(x,y) \equiv 0$. Sostituisco nella terza equazione e ritrovo

$$\hat{B}_x - \hat{A}_y = C \rightsquigarrow -\bar{A}_x - \bar{B}_y - \psi_y = C \rightsquigarrow$$

$$\longrightarrow \psi_y = \underbrace{\bar{A}_x + \bar{B}_y + C}$$

deve essere funzione di solo x e y

Non dipende da z

$$(\bar{A}_x + \bar{B}_y + C)_z = \bar{A}_{xz} + \bar{B}_{yz} + C_z = A_x + B_y + C_z = \text{div}\,\vec{E} = 0.$$

— o — o —

Domanda: dove ho usato che siamo in un parallelepipedo?

(3) Se non siamo in un parallelepipedo, la condizione $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ NON implica in generale che $\vec{E}$ è un rotore.

Esempio $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus$ origine

$$\vec{E} = \frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = (A,B,C)$$

$$A_x = \left[\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}\right]_x = \frac{1}{(\ldots)^{3/2}} - x\,\frac{3}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}x}{(\ldots)^{5/2}}$$

$$= \frac{x^2+y^2+z^2-3x^2}{(\quad)^{5/2}}$$

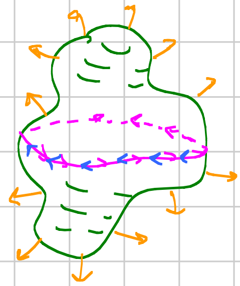
Facendo l'analogo per B_y e C_z scopro che $\operatorname{div} \vec{E} = 0$.

$\boxed{\text{Fatto generale}}$ Il flusso di un rotore attraverso una sup. chiusa (non topologicamente, ma senza bordo) è sempre uguale a zero.

$\boxed{\text{Dim. un po' brutale}}$ $\displaystyle\int_S \langle \operatorname{rot} \vec{E}, \vec{n} \rangle \, d\sigma = \int_{\partial S^+} \ldots$

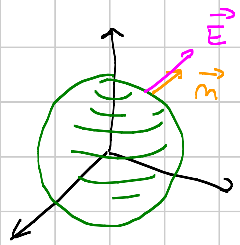
se è $\emptyset$ viene 0.

In alternativa, si può pensare la sup. chiusa come unione di 2 sup. con bordo. Facendo i 2 Stokes i termini di bordo si elidono.



Criterio Per dimostrare che $\vec{E}$ non è un rotore basta trovare una sup. chiusa sulla quale abbia flusso $\neq 0$.

Per il campo $\vec{E}$ dato precedentemente basta prendere una sfera centrata nell'origine ed il flusso diventa positivo



Oss. Il campo $\vec{E}$ precedente si può scrivere come rotore in tutti i semispazi del tipo $z>0$, $z<0$, $x>0$, $x+y<0$.
Volendo è un rotore pure in $\mathbb{R}^3 \setminus$ semiasse qualunque (provare a scrivere di cosa è rotore)

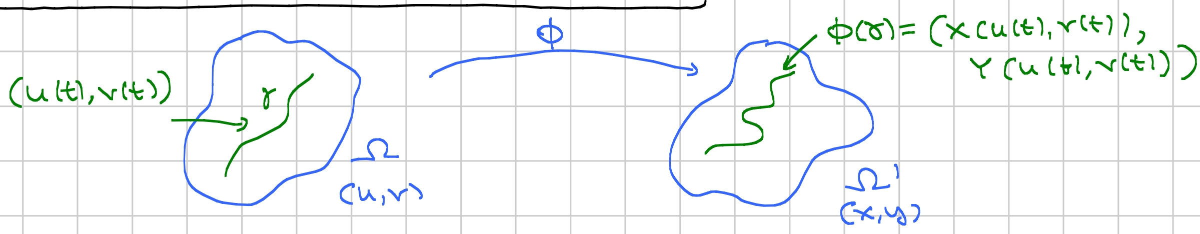
Nella dim. del p.to ②, così come nella dim. del cambio di variabili a partire da GG, il passaggio non scontato sono le primitive rispetto ad una variabile.
Non è così scontato che dati $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ e data $f: \Omega \to \mathbb{R}$ continua, esiste $F: \Omega \to \mathbb{R}$ tale che $F_z(x,y,z) = f(x,y,z)$ in tutto Ω.
Questo è evidente solo localmente, ad esempio in un parallelepipedo.

Se voglio la primitiva in y potrei porre

$$F(x,y) = \int_0^y f(x,t)\,dt$$

— o — o —

PULL BACK DI FORME DIFFERENZIALI



$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))$. Data una forma diff. in Ω'

$$\omega = A(x,y)\,dx + B(x,y)\,dy$$

Posso ottenere una forma ω' su Ω tale che

$$\int_\gamma \omega' = \int_{\phi(\gamma)} \omega$$

per ogni curva $\gamma : [a,b] \to \Omega$. Chi è ω' ?
Facciamo il conto

$$\int_{\phi(\gamma)} \omega = \int_a^b [A(x(t),y(t))\dot{x}(t) + B(x(t),y(t))\dot{y}(t)]\,dt$$

$$= \int_a^b [A(\ldots)[X_u\dot{u}+X_v\dot{v}] + B(\ldots)[Y_u\dot{u}+Y_v\dot{v}]\;dt$$

$$= \int_a^b (AX_u+BY_u)\dot{u} + (AX_v+BY_v)\dot{v}$$

$$= \int_\gamma [A(X(u,v),Y(u,v))X_u(u,v) + B(\ldots)Y_u(\ldots)]\,du$$

$$+ [A(\ldots)X_v + B(\ldots)Y_v]\,dv$$

Quindi $\boxed{\omega' = (A(\ )X_u + BY_u)\,du + (AX_v+BY_v)\,dv}$

Interpretazione brutale di come tornano indietro le forme

$$x = X(u,v) \qquad y = Y(u,v)$$
$$dx = X_u\,du + X_v\,dv \qquad dy = Y_u\,du + Y_v\,dv$$

$$A\,dx + B\,dy \rightsquigarrow A(X(u,v),Y(u,v))(X_u\,du + X_v\,dv)$$
$$+ B(\ldots\qquad)(Y_u\,du + Y_v\,dv)$$

Facendo il conto brutale torna la formula ottenuta rigorosamente sopra.

ANALISI 2 — LEZIONE 072

Titolo nota 24/02/2016

Seconda parte di Analisi 2	Teoria	Esercizi
① Spazi metrici	80 %	20%
② Varietà : → teo. funzione implicita → " " inversa → moltiplicatori di Lagrange	70 %	30 %
③ Successioni e serie di Funzioni	30 %	70 %
④ Equazioni differenziali	30 %	70 %

—o —o —

SPAZI METRICI – BANACH – HILBERT

X → insieme
→ nozione di convergenza ("lista delle succ. convergenti")
→ spazio topologico
→ spazio metrico
→ spazio di Banach
→ " " Hilbert
→ $\mathbb{R}^n$

spazi vettoriali

DISTANZA Sia X un insieme. Una distanza su X è una funzione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ tale che

(d1) $d(x,y) \geq 0$ per ogni x e y in X

(d2) $d(x,y) = 0$ se e solo se $x = y$

(d3) $d(x,y) = d(y,x)$ per ogni x e y in X (simmetria)

(d4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ per ogni x,y,z (disug. triang.)

Def. Uno spazio metrico è una coppia (X,d) dove
- X è un insieme
- d è una distanza su X.

Achtung! Nel verificare che d è una distanza, occorre controllare anche

(d0) d è definita su tutto $X \times X$.

Esempi

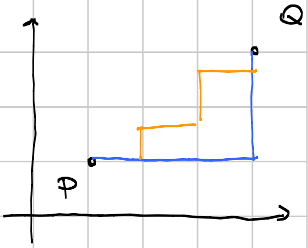
① "Distanza discreta": X insieme qualunque

$$d(x,y) = \delta_{xy} = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y \\ 1 & \text{se } x \neq y \end{cases}$$

② $\mathbb{R}^n$ con la distanza Euclidea $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$d(x,y) := \left\{ \sum (y_i - x_i)^2 \right\}^{1/2}$$

③ $\mathbb{R}^n$ con la distanza "taxi driver"



$$d(x,y) := \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|$$

④ $\mathbb{R}^n$ con la distanza del max:

$$d(x,y) := \max\{ |y_i - x_i| : i = 1, \ldots, n \}$$

⑤ $\mathbb{R}^n$ con la "distanza p-esima" $(p \geq 1)$

$$d_p(x,y) := \left\{ \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i|^p \right\}^{1/p}$$

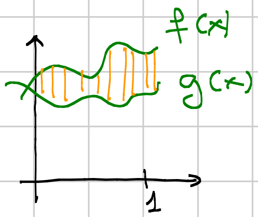
$p = 1 \rightsquigarrow$ taxi driver

$p = 2 \rightsquigarrow$ Euclidea

$p = +\infty \rightsquigarrow$ max

(la triangolare non è ovvia)

⑥ $X = \{ f : [0,1] \to \mathbb{R}$ limitate $\}$



$$d(f,g) := \sup\{ |f(x) - g(x)| : x \in [0,1] \}$$

NORMA Sia V uno sp. vett. reale. Una norma su V è una funzione $n: V \to \mathbb{R}$ tale che

(n0) $n(v) \geq 0$ per ogni $v \in V$

(n1) $n(v) = 0 \iff v = 0$

(n2) $n(\lambda v) = |\lambda| \cdot n(v)$ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ e per ogni $v \in V$

(n3) $n(v+w) \leq n(v) + n(w)$ per ogni v e w in V

Notazione: $n(v) = \|v\|$

Fatto decisivo Se $\|v\|$ è una norma, allora

$$d(v,w) := \|v - w\|$$

è una distanza su V

PRODOTTO SCALARE ... funzione $\langle v, w \rangle$ ...

- bilineare
- simmetrico
- definito positivo (cioè $\langle v, v \rangle > 0$ per ogni $v \in V$)

Fatto decisivo Dato un prodotto scalare in V

$$\|x\| := \langle x, x \rangle^{1/2}$$

è una norma su V.

— o — o —

Dalla metrica segue una nozione di convergenza:
se (X, d) è sp. metrico e $\{x_n\} \subseteq X$ e $x_\infty \in X$, allora

$$\underbrace{x_n \to x_\infty}_{\text{limite in } X} \quad \text{se} \quad \underbrace{d(x_n, x_\infty) \to 0}_{\text{limite in } \mathbb{R}}$$

Dalla metrica segue tutto il linguaggio topologico
→ p.to interno, parte interna, aperto
→ " aderente, chiusura, chiuso
→ frontiera
→ p.ti isolati
→ p.ti di accumulazione, insieme derivato.

Def. Uno spazio metrico (X, d) si dice COMPLETO se tutte le successioni di Cauchy a valori in X convergono.
Una succ. $\{x_n\} \subseteq X$ si dice di Cauchy se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \forall m \geq n_0 \quad d(x_n, x_m) \leq \varepsilon}$$

Def. Spazio di Banach = sp. vett. con norma che lo rende completo
Spazio di Hilbert = stessa cosa con in più la norma che deriva da un prodotto scalare.

Lemma In uno sp. metrico (X, d) le succ. conv. sono di Cauchy

Dim. Dato $\varepsilon > 0$, per def. di lim. so che esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$d(x_n, x_\infty) \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_0$$

Dico che n_0 va bene nella def. di succ. di Cauchy.
Infatti per ogni $n \geq n_0$ e $m \geq n_0$ si ha

$$d(x_n, x_m) \leq \underbrace{d(x_n, x_\infty)}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{d(x_\infty, x_m)}_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Lipschitzianità e Hölderianità sono proprietà metriche

Def. Siano $(\mathbb{X}, d)$ e $(\mathbb{Y}, \delta)$ due spazi metrici.
Una $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ si dice α-Hölderiana con costante H se

$$\delta(f(x), f(y)) \leq H\,[d(x,y)]^{\alpha} \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{X}^2$$

Def. La stessa f si dice unif. continua se

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0$ tale che

$$\delta(f(x), f(y)) \leq \varepsilon \qquad \forall (x,y) \in \mathbb{X}^2 \text{ con } d(x,y) \leq \delta$$

Esercizio Il prodotto di due funzioni $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$
$g : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$
uniformemente continue e limitate è ancora u.c.

ANALISI 2 — LEZIONE 073

Titolo nota 24/02/2016

Continuità in spazi metrici

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due spazi metrici.
Sia $f : X \to Y$ una funzione.
Sia $x_0 \in X$.
Cosa vuol dire che f è continua in x_0.

Per succ. Per ogni succ. $x_n \to x_0$ in X si ha che $f(x_n) \to f(x_0)$ in Y

ε-δ Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste almeno un $\delta > 0$ tale che

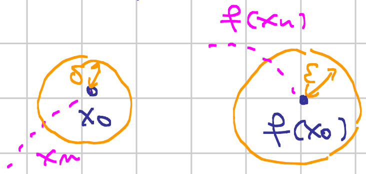
$\forall x \in X$ con $d_X(x, x_0) \leq \delta$ si ha $d_Y(f(x), f(x_0)) \leq \varepsilon$

Teorema f è continua per succ. $\Longleftrightarrow$ f è continua ε-δ

Dim. (stessa di Analisi 1)

$\Leftarrow$ Prendo $x_n \to x_0$ e voglio far vedere che $f(x_n) \to f(x_0)$.
Prendo $\varepsilon > 0$ e trovo il δ corrispondente. Trovo poi $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$d_X(x_n, x_0) \leq \delta \quad \forall n \geq n_0$



Ma allora

$d_Y(f(x_n), f(x_0)) \leq \varepsilon \quad \forall n \geq n_0$.

$\Rightarrow$ Per assurdo supponiamo f NON continua ε-δ in x_0
Neghiamo:

$\exists\, \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists\, x \in X$ con $d_X(x, x_0) \leq \delta$ e $d_Y(f(x), f(x_0)) \geq \varepsilon_0$

La uso con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo $x_n \in X$ con

$$\underbrace{d_X(x_n, x_0) \le \frac{1}{n}}_{x_n \to x_0} \quad e \quad \underbrace{d_Y(f(x_n), f(x_0)) \ge \varepsilon_0}_{\text{non può essere } f(x_n) \to f(x_0)}$$

— o — o —

Def. Due distanze d_1 e d_2 in un insieme X si dicono equivalenti se e solo se inducono la stessa nozione di convergenza, cioè per ogni successione x_n e ogni punto x_∞ vale

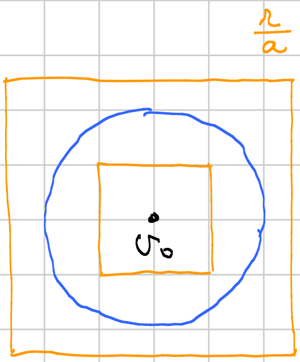
$$d_1(x_n, x_\infty) \to 0 \iff d_2(x_n, x_\infty) \to 0$$

Def. Due norme $\|v\|_1$ e $\|v\|_2$ su uno spazio vettoriale V si dicono equivalenti se esistono due costanti $A \ge a > 0$ tali che

$$\boxed{a\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le A\|x\|_1 \qquad \forall x \in V}$$

In termini di palle questo vuol dire che ogni palla di raggio r rispetto alla norma $\| \ \|_2$ è

- contenuta in una palla di raggio $\frac{r}{a}$ rispetto alla $\|\cdot\|_1$
- contiene una palla di raggio $\frac{r}{A}$ rispetto alla $\|\cdot\|_1$



Dim. $\|x\|_2 \le r$, allora $a\|x\|_1 \le r$
$\Rightarrow \|x\|_1 \le \frac{r}{a}$
e analogo dall'altra parte.

Esempio In $\mathbb{R}^n$ l'euclidea e la taxi driver sono equiv. e

$$\underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \le \|x\|_2}\le \|x\|_1$$

$$\|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$$
$$|x_1|+\ldots+|x_n| \le \sqrt{n}\sqrt{x_1^2+\ldots+x_n^2}$$

$\boxed{\text{Teorema}}$ Due qualunque norme su uno sp. vett. di dim. FINITA sono equivalenti.

La dimostrazione è un corollario di

$\boxed{\text{Teorema}}$ Una qualunque norma su $\mathbb{R}^n$ è equivalente alla Euclidea.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Sia $|||x|||$ una norma qualunque su $\mathbb{R}^n$. Voglio dimostrare che esistono a ed A tali che

$$a\underbrace{\|x\|}_{\text{Euclidea}} \le |||x||| \le A\|x\| \qquad \forall x\in\mathbb{R}^n$$

Ci basta dimostrare che esistono $a>0$ ed $A>0$ t.c.

$$a \le \frac{|||x|||}{\|x\|} \le A \qquad \forall x \text{ con } \|x\|=1$$

Questo è vero per omogeneità della funzione $f(x)=\dfrac{|||x|||}{\|x\|}$.
Ora la sfera $\|x\|=1$ è compatta, ma ci manca (per ora) la continuità di $f(x)$.

$\boxed{\text{Step 1}}$ Mostro a mano la disug. di dx. Prendo $x\in\mathbb{R}^n$ e lo scrivo nella base canonica

$$x=\sum_{k=1}^{n} c_k e_k$$

$$|||x||| = \Big|\Big|\Big|\sum_{k=1}^{n} c_k e_k\Big|\Big|\Big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangolare} \\ + \text{ i omogeneità}}}{\leq} \sum_{k=1}^{n} |||c_k e_k|||$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |c_k| \cdot |||e_k|||$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |c_k| \underbrace{\boxed{\frac{|||e_k|||}{\|e_k\|}}}_{\leq \text{ costante } C} \cdot \overset{\overset{1}{\shortparallel}}{\|e_k\|}$$

Ho usato che siamo in dim. finita

$$\leq C \sum_{k=1}^{n} |c_k|$$

$$\leq \underbrace{C\sqrt{n}}_{A} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^2\right)^{1/2}$$

$$= A\,\|x\|$$

$\boxed{\text{Step 2}}$ La funzione $x \to |||x|||$ è continua rispetto alla $\|x\|$
Dimostro pure la Lip:

$$\big|\,|||x||| - |||y|||\,\big| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{triangolare}}}{\leq} |||x-y||| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Step 1}}}{\leq} A\,\|x-y\|$$

$\boxed{\text{Step 3}}$ La funzione $f(x) = \dfrac{|||x|||}{\|x\|}$ è continua rispetto alla $\|x\|$ quindi assume max / min sulla sfera della $\|\cdot\|$.
Il min è >0 perché è il valore assunto per un certo x.

— o — o —

$\boxed{\text{COMPATTEZZA IN SPAZI METRICI}}$ 3 facce

① <u>Compattezza per successioni</u> Uno sp. metrico (X, d) è compatto per succ. se ogni succ. ammette una s.succ. convergente: per ogni $\{x_n\} \subseteq X$ esiste $n_k \to +\infty$ str. cresc. e $x_\infty \in X$ t.c. $x_{n_k} \to x_\infty$

② Compattezza per ricoprimenti (X, d) è cpt. per ric. se ogni ricoprimento aperto ammette s. ric. finito.

Def. Uno sp. metrico (X, d) si dice

- $\boxed{\text{LIMITATO}}$ se $\underbrace{\sup\{d(x,y) : (x,y) \in X^2\}}_{\text{diam}(X)} < +\infty$

  o in modo equiv.: $\exists\, M \in \mathbb{R}$ t.c. $d(x,y) \leq M$ per ogni $(x,y) \in X^2$

- $\boxed{\text{TOTALMENTE LIMITATO}}$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una ε-rete, cioè un sottoinsieme finito $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq X$ tale che

$$X \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B_\varepsilon(x_i)$$

palle con centro x_i e raggio ε

(gli x_i sono dei distributori e ognuno ha un distributore a distanza $\leq \varepsilon$ da casa)

Relazione ovvia (ma non troppo):

Totalmente limitato $\Rightarrow$ limitato

Il viceversa è falso: la distanza discreta su un insieme infinito (diam $= 1$, ma non esiste ε rete con $\varepsilon < 1$).

ANALISI 2 – LEZIONE 074

Titolo nota 26/02/2016

Notazione: $(\mathbb{X}, d)$ spazio metrico.
Dati $x_0 \in \mathbb{X}$ e $r > 0$ poniamo

$$B_r(x_0) := \{x \in \mathbb{X} : d(x, x_0) < r\}$$
$$\overline{B}_r(x_0) := \{ \quad '' \quad \leq r\}$$

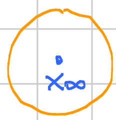
Esercizio È possibile che una palla sia contenuta strettamente in una palla di raggio inferiore?

TEOREMA (Caratterizz. della compattezza in sp. metrici)
Sia $(\mathbb{X}, d)$ metrico.
Allora i seguenti fatti sono equivalenti:
(i) $(\mathbb{X}, d)$ è compatto per ricoprimenti,
(ii) " " " " successioni,
(iii) $(\mathbb{X}, d)$ è completo + totalmente limitato.

Schema della dimostrazione:
→ (i) ⇒ (ii) M
→ (ii) ⇒ completezza] (ii) ⇒ (iii) F
→ (ii) ⇒ tot. lim. M
→ (iii) ⇒ (ii) MD
→ (iii) + (ii) ⇒ (i) D

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Hp: cpt. per ricopr. Tesi: comp. per succ.

Lemma Sia $(\mathbb{X}, d)$ cpt. per ricopr. e sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{X}$ una succ.
Allora $\exists\, x_\infty \in \mathbb{X}$ con questa proprietà

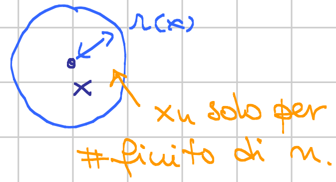


$$\forall r > 0 \quad \{n \in \mathbb{N} : x_n \in B_r(x_\infty)\} \text{ è infinito}$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo che sia falso. Allora

$$\forall x \in X \ \exists\, r(x) > 0 \ \text{ t.c. } B_{r(x)}(x) \text{ contiene termini della succ. solo per un numero finito di indici}$$

Ora $\{ B_{r(x)}(x) : x \in X \}$ sono un ricoprim. aperto di X. Quindi esiste un s.ric. finito



$$X = B_{r_1}(x_1) \cup \ldots \cup B_{r_k}(x_k)$$

In ognuna di queste cascano gli x_n solo per un numero finito di indici $n \in \mathbb{N}$. Assurdo.

__Nota__: i termini della succ. possono essere un numero finito (ad es. la succ. costante), ma gli indici sono comunque infiniti. $\square$

Dato il lemma si chiude trovando una s.succ. $x_{n_k} \to x_\infty$.
Definisco

- n_1 t.c. $x_{n_1} \in B_1(x_\infty)$

$\vdots$

- n_{k+1} t.c. $\underbrace{n_{k+1} > n_k}_{\text{indice > preced.}}$ e $\underbrace{x_{n_{k+1}} \in B_{\frac{1}{k+1}}(x_\infty)}_{\text{posso perché la B contiene } x_n \text{ per } \infty \text{ valori di } n.}$

Questo garantisce che $d(x_{n_k}, x_\infty) \leq \frac{1}{k}$, quindi $x_{n_k} \to x_\infty$.

— o — o —

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{completezza}}$ Sia $\{x_n\}$ una succ. di Cauchy. Per Hp ammette una sottosucc. conv. Ora uso

__Fatto generale__: se una succ. di Cauchy ammette una s.succ. convergente, allora TUTTA QUANTA converge (stessa dim di analisi 1: esercizio)

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{totale limitatezza}}$

Per assurdo supponiamo (X, d) NON TOT. LIM. e troviamo una succ. x_n che non ammette s. succ. convergenti.

(X, d) non tot. lim. vuol dire

$\exists r_0 > 0$ tale che comunque prendo un numero finito di palle di raggio r_0, queste non ricoprono tutto X.

Costruisco x_n per induzione così:

- scelgo x_1 a caso
- dati $x_1, \dots, x_k$ considero

$$x_{k+1} \in X \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B_{r_0}(x_i)$$

esiste per l'ipotesi di assurdo

Allora per costruzione $d(x_n, x_m) \geq r_0$ per ogni $m \neq n$.

Questo impedisce alla succ. $\{x_n\}$ di avere una s. succ. conv. (una sotto succ. conv. dovrebbe essere di Cauchy, ma non può perché la dist. fra 2 termini diversi è sempre $\geq r_0$).

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(ii)}}$

<u>Lemma</u> (Procedimento diagonale) Consideriamo

$$\mathbb{N} = N_0 \supseteq N_1 \supseteq N_2 \supseteq \dots \supseteq N_k \supseteq \dots$$

una succ. di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, tutti $\boxed{\text{INFINITI}}$ e ognuno contenuto nel precedente. Allora esiste una succ. n_k strett. cresc. tale che $n_k \in N_k$.

Dim. Costruisco n_k induttivamente:

- prendo $n_0 \in N_0$ a caso
- scelti $n_1, \dots, n_k$, voglio scegliere $n_{k+1} \in N_{k+1}$ con $n_{k+1} > n_k$ e ho infinite scelte possibili.

Oss. In realtà $n_k \in N_i$ per ogni $i \leq k$.
Volendo: fissato i, abbiamo che

$$n_k \in N_i \quad \text{definitivamente (per ogni } k \geq i)$$

Lemma Sia (X, d) totalmente limitato e sia $\{x_n\}$ una successione.
Allora $\{x_n\}$ ammette una s. succ. di Cauchy.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Voglio usare il procedimento diagonale. Definisco gli N_k induttivamente.

- $N_0 = \mathbb{N}$
- N_1 lo def. così: fisso $r = 1$, ottengo una 1-rete

$$X = B_1(y_1) \cup \dots \cup B_1(y_m)$$

Almeno una delle $B_1(y_i)$ contiene termini della succ. per ∞ indici. Questi indici sono N_1.

⋮

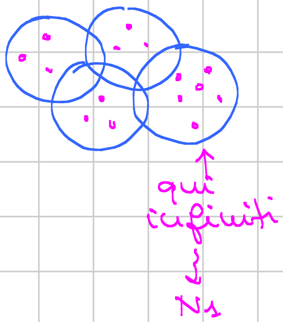
- Definiti $N_1, \dots, N_k$ definisco N_{k+1} così: fisso $r = \frac{1}{k+1}$ e prendo una $\frac{1}{k+1}$-rete

$$X = B_{\frac{1}{k+1}}(y_1) \cup \dots \cup B_{\frac{1}{k+1}}(y_m)$$

m e gli y_i sono diversi da prima

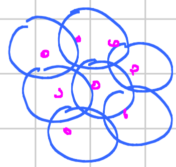
Almeno una di queste contiene termini della succ. per infiniti indici di N_k: questi sono N_{k+1}

$r = 1$



Butto quelli che non sono in N_1

$r = \frac{1}{2}$



Concludo con il procedimento diagonale: prendo n_k crescente strett. tale che $n_k \in N_k$.
Dico che $\{x_{n_k}\}$ è di Cauchy

Fisso $\varepsilon > 0$ e scelgo k_0 t.c. $\frac{2}{k_0} < \varepsilon$.
Allora definitivamente

$$n_k \in N_{k_0} \quad (\text{questo accade } \forall\, k \geq k_0),$$

Ma allora per ogni $i \geq k_0$, $j \geq k_0$ si avrà

$$d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2\,\frac{1}{k_0} < \varepsilon$$

perché x_{n_i} e x_{n_j} $\in$ in una stessa palla di raggio $\frac{1}{k_0}$.

— o — o —

Conclusione di (iii) $\Rightarrow$ (ii)

Grazie alla totale lim. ottengo una s. succ. di Cauchy e grazie alla completezza questa converge.

ANALISI 2 — LEZIONE 075

Titolo nota 26/02/2016

Cont. teo. caratt. compattezza : resta da fare $\boxed{(ii) + (iii) \Rightarrow (i)}$

$\boxed{\text{Lemma}}$ (Lemma del raggio magico) (Lemma del numero di Lebesgue)

Sia (X, d) uno sp. metrico compatto per successioni.
Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di X.

Allora esiste $r > 0$ con questa proprietà
numero di L. del ricopr.

$$\forall x \in X \quad \exists i \in I \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \subseteq M_i.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Supponiamo per assurdo che non sia vero, quindi

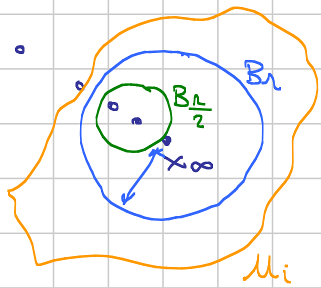
$$\forall r > 0 \quad \exists x \in X \quad \text{t.c.} \quad B_r(x) \text{ non è contenuta in nessun } M_i$$

Uso questa con $r = \frac{1}{m}$ e ottengo x_m t.c. $B_{\frac{1}{m}}(x_m)$ non è contenuta in nessun M_i.

Per ipotesi esiste $x_{m_k} \longrightarrow x_\infty$.
Sia $i \in I$ tale che

$$x_\infty \in M_i$$

Essendo M_i aperto, esiste $r > 0$ tale che



$$B_r(x_\infty) \subseteq M_i$$

Scelgo k abbastanza grande in maniera tale che

$$x_{m_k} \in B_{\frac{r}{2}}(x_\infty) \qquad \frac{1}{m_k} < \frac{r}{2}$$

(entrambe sono vere definitivamente)

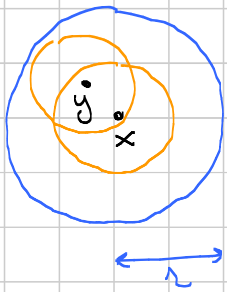
Questo garantisce che

$$B_{\frac{1}{n_k}}(x_{n_k}) \subseteq B_r(x_\infty) \subseteq M_i$$

e questo contraddice la definizione di x_{n_k} (era un pto tale che la palla con centro in lui e raggio $\frac{1}{n_k}$ non era contenuta in nessun M_i).

— o — o —

Ho usato il seguente fatto generale:
dati $x \in X$, $r > 0$, $y \in B_{\frac{r}{2}}(x)$, allora



$$B_{\frac{r}{2}}(y) \subseteq B_r(x)$$

$$z \in B_{\frac{r}{2}}(y) \Rightarrow d(z,x) \le d(z,y) + d(y,x) < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r$$

$$\Rightarrow z \in B_r(x).$$

— o — o —

Concludiamo che (ii) + (iii) $\Rightarrow$ (i)

Sia $\{M_i\}_{i \in I}$ un ricopr. qualunque. Voglio trovarne un s.ricopr. finito.
Sia $r > 0$ il raggio magico del ric. (esiste per hp (ii))
Per la totale limitatezza esiste una r-rete, cioè esistono $y_1, \dots, y_m$ t.c.

$$X = B_r(y_1) \cup \dots \cup B_r(y_m)$$

Per la magicità del raggio esistono $i_1, \dots, i_m$ in I t.c.

$$B_r(y_1) \subseteq M_{i_1}, \quad \dots, \quad B_r(y_m) \subseteq M_{i_m}$$

Ma allora

$$X = M_{i_1} \cup \dots \cup M_{i_m} \leftarrow \text{s.ric. finito.}$$

— o — o —

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Heine - Cantor)

Siano (X, d_X) e (Y, d_Y) due sp. metrici, e sia $f : X \to Y$.

Supponiamo che

(i) f è continua

(ii) (X, d_X) è compatto.

Allora f è unif. continua.

$\boxed{\text{Dim 1} \to \text{via compattezza per succ.}}$ Devo dim. che

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in X \ \forall y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Suppongo per assurdo che sia falso, quindi

$$\exists \varepsilon_0 > 0 \ \forall \delta > 0 \ \exists x \in X \ \exists y \in B_\delta(x) \quad d_Y(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0$$

Me la gioco con $\delta = \frac{1}{n}$ e ottengo x_n e y_n t.c.

$$d_X(x_n, y_n) \leq \frac{1}{n} \qquad d_Y(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0$$

Come ad analisi 1

- esiste $x_{n_k} \to x_\infty$ (perché (X, d_X) è cpt. per succ.)
- per forza $y_{n_k} \to x_\infty$

$$0 \leq d_X(y_{n_k}, x_\infty) \leq \underset{\downarrow \atop 0}{d_X(y_{n_k}, x_{n_k})} + \underset{\downarrow \atop 0}{d_X(x_{n_k}, x_\infty)}$$

- poiché f è continua per succ. avremo $f(x_{n_k}) \to f(x_\infty)$
  $f(y_{n_k}) \to f(x_\infty)$

e quindi

$$\varepsilon_0 \leq d_Y(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \to d_Y(f(x_\infty), f(x_\infty)) = 0$$

Assurdo. $\square$

$\boxed{\text{Dim 2} \to \text{via compatt. per ricopr.}}$

Fisso $\varepsilon > 0$. Per continuità $\varepsilon - \delta$ avremo che

$$\forall x \in X \quad \exists\, \delta(x) > 0 \quad \forall y \in B_{\delta(x)}(x) \qquad d_Y(f(x), f(y)) \le \varepsilon$$

Ora $\{B_{\delta(x)}(x) : x \in X\}$ è un ricoprimento di X, dal quale posso estrarre un s. ric. finito.

$$X = B_{\delta_1}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\delta_m}(x_m)$$

Non ho finito: le cose vanno bene solo se x è il centro e y sta nella stessa palla.
(x e y abbastanza vicini possono finire però in palle diverse)

Via d'uscita: parto con $\frac{\varepsilon}{2}$, ottengo un ricoprimento opportuno, il ricopr. avrà un raggio magico che chiamo δ e questo va bene per l'unif. continuità. Infatti siano x e y in X con $d_X(x,y) \le \delta$. Allora $y \in B_\delta(x)$ che è contenuta in una certa

$$B_{\delta(x_i)}(x_i)$$

Ora

$$d_Y(f(x), f(y)) \le d_Y(f(x), f(x_i)) + d_Y(f(y), f(x_i))$$
$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$
$$= \varepsilon.$$

— o — o —

Prop. (Caratterizzazione della totale limitatezza)

Sia (X, d) metrico.

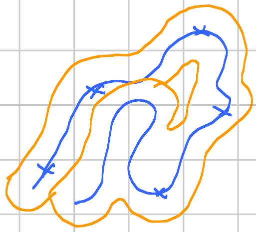
Allora sono fatti equivalenti:

(i) X è totalmente limitato

(ii) $\forall r > 0 \ \exists K_r \subseteq X$ totalmente limitato con questa propr.

$$\forall x \in X \ \exists y \in K_r \ \text{t.c.} \ d(x, y) \leq r.$$

(i K_r sono ∞ distributori, ma tot. limitati)



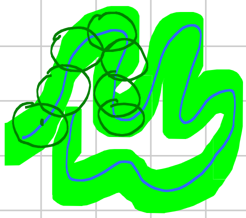
Dim. (i) $\Rightarrow$ (ii) è banale addirittura con K_r finito.

(ii) $\Rightarrow$ (i) Fisso $r > 0$ e voglio trovare # finito di distributori.

Uso la (ii) con $\frac{r}{2}$ e trovo $K_{\frac{r}{2}}$ tale che

l'intorno di $K_{\frac{r}{2}}$ e ampiezza $\frac{r}{2}$ è tutto X.

Considero $x_1, \ldots, x_m$ tale che



$$K_{\frac{r}{2}} \subseteq B_{\frac{r}{2}}(x_1) \cup \ldots \cup B_{\frac{r}{2}}(x_m)$$

Dico che $\quad X \subseteq B_r(x_1) \cup \ldots \cup B_r(x_m)$

Dato infatti un qualunque $x \in X$ esiste $y \in K_{\frac{r}{2}}$ t.c.

$d(x, y) \leq \frac{r}{2}$. Esiste poi $i \in \{1, \ldots, m\}$ t.c. $d(y, x_i) \leq \frac{r}{2}$

e concludo con la triangolare che $d(x, x_i) \leq r$.

—o—o—

Osservazione finale

- Le funzioni continue mandano compatti in compatti, anche se in arrivo è solo metrico.
  Questo si dim. bene sia per succ. sia per ricopr.

- Le funzioni continue non mandano completi in completi, né tot. lim. in tot. lim.
  Solo insieme si conservano completezza e tot. lim.

(Trovare esempi: esercizio!)

ANALISI 2 — LEZIONE 076

Titolo nota 01/03/2016

Def. Sia (X, d) uno spazio metrico.
Si dice $\boxed{\text{CONTRAZIONE}}$ una qualunque funzione $\varphi : X \to X$ che è Lip. con costante di Lip. $\boxed{<1}$, cioè tale che esiste $L<1$ t.c.

$$\boxed{d(\varphi(x), \varphi(y)) \leq L\, d(x,y) \qquad \forall (x,y) \in X^2}$$

$\boxed{\text{TEOREMA}}$ (Delle contrazioni – Teo. di p.to fisso di Banach)
Sia (X, d) metrico $\boxed{\text{COMPLETO}}$, e sia $\varphi : X \to X$ contrazione.
Allora φ ammette un unico $\boxed{\text{p.to fisso}}$, cioè esiste un unico $x \in X$ tale che

$$\varphi(x) = x.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ $\boxed{\text{Unicità}}$ Supponiamo che ci siano due p.ti fissi

$$\varphi(x) = x \qquad \varphi(y) = y$$

Allora

$$d(x,y) \underset{x,y \text{ fissi}}{=} d(\varphi(x), \varphi(y)) \underset{\text{contraz.}}{\leq} L\, d(x,y)$$

$$\underbrace{(1-L)}_{>0}\, d(x,y) \leq 0 \quad \Rightarrow \text{per forza } = 0.$$

Nota: non ho usato la completezza.

$\boxed{\text{Esistenza}}$ Idea euristica: prendo $x_0 \in X$ a caso. Poi costruisco la succ. per ricorrenza $x_{n+1} = \varphi(x_n)$. Facciamo finta che $x_n \to x_\infty$

$$\begin{array}{ccc} x_{n+1} & = & \varphi(x_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_\infty & = & \varphi(x_\infty) \end{array} \quad \leftarrow \varphi \text{ è cont. essendo Lip}$$

Quindi, $\boxed{\text{SE}}$ la succ. $\{x_n\}$ converge, allora il suo limite è il p.to fisso cercato.
Per dim. la convergenza, basta far vedere che è di Cauchy.
Stima preliminare : $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$

$$d(x_2, x_1) = d(\varphi(x_1), \varphi(x_0)) \le L\, d(x_1, x_0)$$
$$d(x_3, x_2) = d(\varphi(x_2), \varphi(x_1)) \le L^2 d(x_1, x_0)$$
$$\vdots$$

riduzione $\quad d(x_{k+1}, x_k) \le L^k d(x_1, x_0)$

Prendiamo 2 indici $m \ge n$. Allora

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\le d(x_m, x_{m-1}) + \dots + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\le L^{m-1} d(x_1, x_0) + \dots + L^n d(x_1, x_0) \\ &= (L^{m-1} + \dots + L^n)\, d(x_1, x_0) \\ &\le L^n (1 + L + L^2 + \dots) \\ &\le L^n \frac{1}{1-L}\, d(x_1, x_0) \end{aligned}$$

metto gli ∞ termini della geometrica

Questo dimostra che x_n è di Cauchy: infatti per ogni $\varepsilon > 0$ scelgo $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$$L^{n_0} \frac{1}{1-L}\, d(x_1, x_0) \le \varepsilon \qquad (\text{posso perché } L < 1)$$

e sono sicuro che $d(x_m, x_n) \le \varepsilon$ per ogni $n \ge n_0$, $m \ge n_0$.

— o — o —

Idea: quando ho una contrazione, posso partire da un p.to qualunque e iterando convergo all'unico p.to fisso.
Tra l'altro

$$d(x_{n+1}, x_\infty) \le L\, d(x_n, x_\infty)$$
$$d(x_n, x_\infty) \le L^n d(x_0, x_\infty)$$

Interpretazione geografica: se metto una mappa d'Italia sul tavolo, allora c'è un unico p.to della mappa che rappresenta se stesso.

$\boxed{\text{Controesempi}}$

① Serve la completezza: $X = (0,1)$ con la d classica
$\varphi(x) = \frac{x}{28}$ contrae con $L = \frac{1}{28}$
e non ha p.ti fissi.

② Non basta $L = 1$: $X = \mathbb{R}$ $\quad \varphi(x) = x + 28$

③ Non basta $L = 1$ nemmeno se X è compatto

$X = S^1$, φ = rotazione di $28°$

④ Non basta la "contrazione debole":
$$d(\varphi(x), \varphi(y)) < d(x,y) \qquad \forall\, x \neq y$$
(Basta per l'unicità, ma non per l'esistenza)

$X = \mathbb{R}$ $\qquad \varphi(x) = x - \arctan x + 28$

Si verifica che $0 \leq \varphi'(x) < 1$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, quindi φ è contrazione debole.
Ma φ non ha p.ti fissi.

⑤ (Hard, ma non troppo) X compatto
φ contrazione debole
$\overset{?}{\Longrightarrow}$ esiste p.to fisso

Oss. Cpt. + contraz. debole $\not\Longrightarrow$ contrazione vera

— o — o —

COMPLETAMENTO DI UNO SPAZIO METRICO

__Def.__ Sia (X, d) uno spazio metrico.
Si dice COMPLETAMENTO di (X, d) una terna $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ dove

(i) $(\hat{X}, \hat{d})$ è uno spazio metrico completo

(ii) $i : X \to \hat{X}$ è una isometria, cioè

$$\hat{d}(i(x), i(y)) = d(x, y) \qquad \forall (x, y) \in X$$

(iii) $i(X)$ è denso in $\hat{X}$.

__Esempio__ $X = (0,1)$ $\quad \hat{X} = [0,1]$ (se non ci fosse la (iii) andrebbe bene $\hat{X} = \mathbb{R}$)

$\boxed{\text{Teorema 1}}$ Ogni sp. metrico (X, d) ammette un completamento.

$\boxed{\text{Teorema 2}}$ (Teorema di estensione)
Sia (X, d) un metrico, e sia $(\hat{X}, \hat{d}, i)$ un suo completamento. Sia (Y, d_Y) uno spazio metrico COMPLETO, e sia

$$f : X \to Y$$

una funzione unif. continua.
Allora esiste un' unica estensione $\hat{f} : \hat{X} \to Y$ unif. cont. tale che

$$\hat{f}(i(x)) = f(x) \qquad \forall x \in X$$

e cioè che chiude il diagramma

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[dr, "\hat{f}"] & \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"] & & Y \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{Teorema 3}}$ (Unicità del completamento)

Sia (X, d) un metrico, e siano $(\hat{X}_1, \hat{d}_1, i_1)$ e $(\hat{X}_2, \hat{d}_2, i_2)$ due completamenti.

Allora esiste

$$\varphi : \hat{X}_1 \longrightarrow \hat{X}_2$$

tale che

(i) φ è bigettiva

(ii) φ è isometria, cioè $d_2(\varphi(x), \varphi(y)) = d_1(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \hat{X}_1^2$

(iii) φ commuta con le immersioni, cioè

$$i_2(x) = \varphi(i_1(x)) \qquad \forall x \in X,$$

cioè chiude i diagrammi

$$\begin{tikzcd} & \hat{X}_2 \\ X \arrow[ur, "i_2"] \arrow[r, "i_1"'] & \hat{X}_1 \arrow[u, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

.

ANALISI 2 – LEZIONE 077

Titolo nota 01/03/2016

Teorema di estensione

$$\begin{tikzcd} & \hat{X} \arrow[dr, "\hat{f}"] & \\ X \arrow[ur, "i"] \arrow[rr, "f"'] & & Y \end{tikzcd}$$

Y completo

f unif. continua

"Stessa dimostrazione di analisi 1" (dato $A \subseteq \mathbb{R}$ il suo completamento è $\mathrm{Clos}(A)$)

Lemma Sia $f : X \to Y$ unif. cont.
Allora f manda succ. di Cauchy in X in succ. di Cauchy in Y

Dim. Sia $\{x_n\} \subseteq X$ di Cauchy rispetto a d_X
Dico che $\{f(x_n)\} \subseteq Y$ è di Cauchy rispetto a d_Y.

Dato $\varepsilon > 0$, prendo $\delta > 0$ come nella unif. cont.
Prendo $n_0 \in \mathbb{N}$ in modo tale che $d_X(x_n, x_m) \leq \delta$ per ogni $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ e ottengo che

$$d_Y(f(x_n), f(x_m)) \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_0 \quad \forall m \geq n_0$$

Dim. estensione Devo definire $\hat{f}(\hat{x})$ per ogni $\hat{x} \in \hat{X}$.
So che $i(X)$ è densa in $\hat{X}$, quindi esiste

$$i(X) \ni \hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}$$

In particolare $\hat{x}_n = i(x_n)$ con $x_n \in X$.
La succ. $\hat{x}_n$ è di Cauchy in $\hat{X}$ (converge), quindi x_n è di Cauchy in X (i è isometria), quindi $f(x_n)$ è di Cauchy in Y (f è unif. cont.), quindi $f(x_n) \to y \in Y$

(perché Y è completo). Pongo allora $\hat{f}(\hat{x}) = y$.

Resta solo da verificare che la definizione è ben posta, cioè se prendo un' altra succ.

$$i(\hat{X}) \ni \underset{\overset{\parallel}{i(z_n)}}{\hat{z}_n} \longrightarrow \hat{x}$$

allora $f(z_n) \to y$ (stesso di prima). Infatti supponiamo

$$f(z_n) \longrightarrow y_1$$

Allora

$$d_Y(y, y_1) = \lim_{n \to +\infty} d_Y(f(z_n), f(x_n)) \underset{\text{devo dim.}}{=} 0$$

Basta verificare che $d_Y(f(z_n), f(x_n)) \leq \varepsilon$ per n grande.
Ma questo vale quando

$d_X(z_n, x_n) \leq \delta$ per unif. cont., e questo vale quando
$d_{\hat{X}}(\hat{z}_n, \hat{x}_n) \leq \delta$ per isometria
e questo per n grande è vero perché $\hat{x}_n \to \hat{x}$
$\hat{z}_n \to \hat{x}$

La dimostrazione che $\hat{f}$ è unif. cont. è la stessa di analisi 1.

— o — o —

<u>Teorema di esistenza del completamento</u> Dato (X, d)

Devo costruire $\hat{X}, \hat{d}, i : X \to \hat{X}$ isometria con immagine densa

$\boxed{\text{Step 1}}$ Costruisco $\hat{\hat{X}}$, $\hat{\hat{d}}$.

$\hat{\hat{X}} = \{$successioni di Cauchy in $X\}$

Date due succ. di Cauchy $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$, definisco

$$\hat{\hat{d}}(\{x_n\},\{y_n\}) = \lim_{n\to+\infty} d(x_n, y_n)$$

Cosa dovrei verificare

① $\hat{\hat{X}} \neq \emptyset$ se $X \neq \emptyset$ (le succ. costanti vanno bene)

② $\hat{\hat{d}}$ è ben definita (mi serve che la succ. $d(x_n, y_n)$ sia di Cauchy come succ. di reali

$$|d(x_n,y_n) - d(x_m,y_m)| \leq |d(x_n,y_n) - d(x_n,x_m)| + |d(x_n,x_m) - d(y_m,x_m)|$$

... non mi viene ...)

$$\leq \underbrace{|d(x_m,y_n) - d(x_n,y_m)|}_{\leq d(y_n,y_m) \leq \varepsilon} + \underbrace{|d(x_n,y_m) - d(x_m,y_m)|}_{\leq d(x_n,x_m) \leq \varepsilon}$$

Aggiunto dopo video

③ $\hat{\hat{d}}$ è quasi una distanza, cioè verifica tutte le proprietà tranne la (d2), cioè può essere 0 anche se le succ. sono diverse.

$\boxed{\text{Step 2}}$ Definizione di $\hat{X}$, $\hat{d}$, i

Introduco una relazione di equiv. in $\hat{\hat{X}}$

$$\{x_n\} \sim \{y_n\} \quad \text{se} \quad d(x_n, y_n) \to 0$$

Ci sarebbero un po' di cose da verificare

① $\sim$ è una relaz. di equiv. (semplice)
Posso definire

$$\hat{\mathbb{X}} := \hat{\hat{\mathbb{X}}}/_\sim \qquad \text{(spazio quoziente)}$$

② $\hat{\hat{d}}$ passa al quoziente, cioè

$$\left.\begin{array}{l} \{x_n\} \sim \{x_n'\} \\ \{y_n\} \sim \{y_n'\} \end{array}\right] \Rightarrow \hat{\hat{d}}(\{x_n\},\{y_n\}) = \hat{\hat{d}}(\{x_n'\},\{y_n'\})$$

Fatto questo, abbiamo definito $\hat{d} : \hat{\mathbb{X}} \times \hat{\mathbb{X}} \to \mathbb{R}$

③ $\hat{d}$ è una distanza vera in $\hat{\mathbb{X}}$ (il quoziente mi regala la (d2))

④ Definisco $i : \mathbb{X} \to \hat{\mathbb{X}}$ identificando ogni $x \in \mathbb{X}$ con la classe di equivalenza della succ. $x_n \equiv x$

⑤ i è una isometria (ora è banale)

⑥ $i(\mathbb{X})$ è denso in $\hat{\mathbb{X}}$, rispetto alla distanza $\hat{d}$.

(Si tratta solo di capire cosa fare e trovare una notazione per farlo...)
Dato $\hat{x} \in \hat{\mathbb{X}}$, dato $\varepsilon > 0$, voglio $y \in \mathbb{X}$ tale che

$$\hat{d}(\hat{x}, i(y)) \leq \varepsilon$$

Ora $\hat{x} = [\{x_n\}]_\sim$ e l'y che cerco sarà x_n con n abbastanza grande.

$\boxed{\text{Step 3}}$ Resta da far vedere che $(\hat{X}, \hat{d})$ è completo.

Sia $\{\hat{x}_n\}$ una succ. di Cauchy in $\hat{X}$ rispetto a $\hat{d}$.
Voglio individuare $\hat{x}_\infty \in \hat{X}$ tale che

$$\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}_\infty \quad \text{in } \hat{X}.$$

Come definisco $\hat{x}_\infty$? Uso la densità verificata prima.
Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $y_n \in X$ tale che

$$\hat{d}\,(i(y_n), \hat{x}_n) \le \frac{1}{n}$$

posso mettere un qualunque $\varepsilon > 0$

Si tratta ora di verificare che

(1) $\{y_n\}$ è succ. di Cauchy in X

$$d(y_n, y_m) = \hat{d}\,(i(y_n), i(y_m))$$

$$= \underbrace{\hat{d}\,(i(y_n), \hat{x}_n)}_{\le \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}\,(\hat{x}_n, \hat{x}_m)}_{\le \varepsilon} + \underbrace{\hat{d}\,(\hat{x}_m, i(y_m))}_{\le \frac{1}{m}}$$

Posso definire $\hat{x}_\infty = [\{y_n\}]_\sim$

(2) $\hat{x}_n \longrightarrow \hat{x}_\infty$ in $\hat{X}$. Questo segue dal fatto che

$$i(y_n) \longrightarrow \hat{x}_\infty \quad \text{(questa andrebbe verificata)}$$

$$\hat{d}\,(\hat{x}_n, \hat{x}_\infty) \le \underbrace{\hat{d}\,(\hat{x}_n, i(y_n))}_{\le \frac{1}{n}} + \underbrace{\hat{d}\,(i(y_n), \hat{x}_\infty)}_{\text{piccolo per } n \text{ grande}}$$

$\boxed{\text{Unicità}}$

$$\begin{tikzcd}
 & \hat{X}_1 \arrow[d, "\varphi"] \\
X \arrow[ur, "i_1"] \arrow[r, "i_2"'] \arrow[dr, "i_1"'] & \hat{X}_2 \arrow[d, "\psi"] \\
 & \hat{X}_1
\end{tikzcd}$$

φ si costruisce con il teorema di estensione

ψ si costruisce con il teorema di estensione

Dovrei verificare:
1. $\psi \circ \varphi$ è l'identità (lo è su un denso)
2. il diagramma si chiude per costruzione
3. φ è isometria (lo è su un denso).

— o — o —

ANALISI 2 – LEZIONE 078

Titolo nota 02/03/2016

$\boxed{\text{VARIETÀ}}$ → Teo. funzioni implicite
→ Teo. funzioni inverse
→ Moltiplicatori di Lagrange

TEOREMA DELLE FUNZIONI IMPLICITE

Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ descritti come luogo di zeri di funzioni o sistemi. Caso generale: date k funzioni $f_1, \dots, f_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ cerco di studiare l'insieme

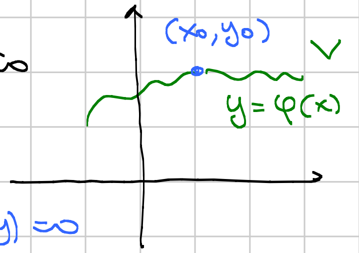
o sottoinsieme

$$V = \{ x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \dots = f_k(x) = 0 \} \qquad (k \leq n)$$

k = codimensione = numero di equazioni

Tre casi: ① $n = 2$, $k = 1$
② n generico, $k = 1$
③ $k < n$ generico

Idea: nel caso ① abbiamo un'equazione $f(x,y) = 0$, abbiamo un p.to (x_0, y_0) t.c. $f(x_0, y_0) = 0$
Mi piacerebbe che vicino a (x_0, y_0) il luogo V fosse descritto da un grafico
$$y = \varphi(x)$$
funzione definita implicitamente dall'eq. $f(x,y) = 0$ vicino a (x_0, y_0)

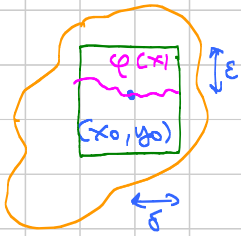


Brutalmente: ho ricavato y dall'equazione $f(x,y) = 0$
Ovviamente deve valere
$$f(x, \varphi(x)) = 0.$$
(ci accontentiamo anche se $x = \varphi(y)$)

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Imp. F.T. $n=2$, $k=1$) (A Pisa teorema del DINI)

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ e sia $f: \Omega \to \mathbb{R}$. Sia $(x_0, y_0) \in \Omega$ t.c. $f(x_0,y_0)=0$.
Supponiamo che f sia continua in Ω ← dopo video

$\boxed{f_y(x,y) \text{ esiste in } \Omega \text{ ed è sempre } \neq 0}$



Allora esiste $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ ed esiste

$$\varphi: [x_0-\delta, x_0+\delta] \to [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon]$$

tale che

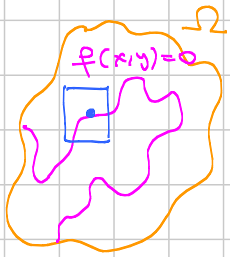
$$\{(x,y) \in [x_0-\delta, x_0+\delta] \times [y_0-\varepsilon, y_0+\varepsilon] : f(x,y) = 0\} =$$

$$= \{(x, \varphi(x)) : x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\}$$

Inoltre φ è continua in $[x_0-\delta, x_0+\delta]$.

<u>Corollario</u> Supponiamo che f sia di classe C^1 in Ω e $\nabla f \neq 0$ ovunque.
Allora per ogni punto $(x_0, y_0) \in V$ esiste un rettangolo in cui V è del tipo

$$y = \varphi(x) \quad \text{oppure} \quad x = \varphi(y)$$



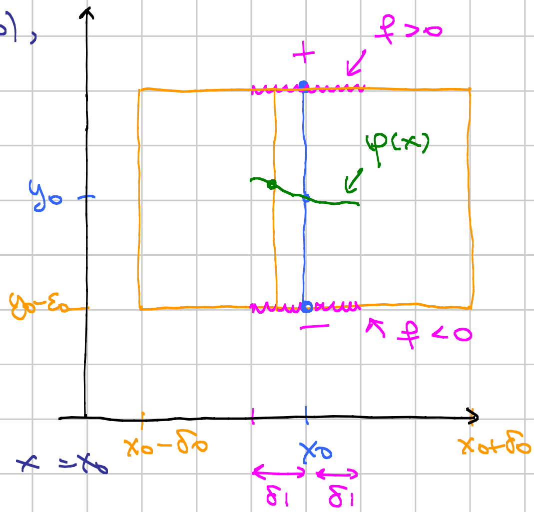
$\boxed{\text{Dim.}}$ In ogni punto di V avremo $f_y(x,y) \neq 0$ (e allora applico il teorema) oppure $f_x(x,y) \neq 0$ (e allora applico il teo. a variabili invertite).

<u>Teorema</u> Nelle ipotesi del teorema principale, se f è di classe C^k, allora anche φ è di classe C^k.

$\boxed{\text{Dim. Impl. F.T.}}$ Ipotesi $f(x_0,y_0)=0$

$f_y(x,y) \neq 0$ in un intorno di (x_0,y_0), diciamo della forma

$$[x_0-\delta_0, x_0+\delta_0] \times [y_0-\varepsilon_0, y_0+\varepsilon_0]$$



Supponiamo che $f_y(x,y)>0$ nell'intorno (se è <0 la dim. è analoga)

Considerando la restrizione alla retta $x=x_0$ otteniamo che

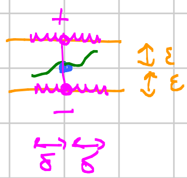
$$f(x_0, y_0-\varepsilon_0) < 0 \qquad\qquad f(x_0, y_0+\varepsilon) > 0$$

Considero le restrizioni alla retta $y=y_0-\varepsilon_0$ e $y=y_0+\varepsilon_0$.
Per continuità

$$\exists\, \delta_1>0 \quad \text{t.c.} \quad \begin{array}{l} f(x,y_0-\varepsilon_0)<0 \\ f(x,y_0+\varepsilon_0)>0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \forall x \in [x_0-\delta_1, x_0+\delta_1] \\ '' \end{array}$$

Ora considero tutte le rette verticali $x=\text{cost} \in [x_0-\delta_1, x_0+\delta_1]$.
Su queste rette f passa da $-$ a $+$ ed è monotona strett. perché $f_y>0 \Rightarrow f$ si annulla un'unica volta in ogni segmento verticale.
Questo dimostra che il luogo V, ristretto al rettangolo $[x_0-\delta_1, x_0+\delta_1] \times [y_0-\varepsilon_0, y_0+\varepsilon_0]$ è il grafico di φ.

$\boxed{\text{Mi serve la continuità}}$ Intanto basta dim la continuità di φ in x_0.



$\boxed{1^\circ \text{ modo}}$ $(\varepsilon-\delta)$ Fisso ε in verticale e ripeto la dim. nel rettangolino più basso

$\boxed{2^\circ \text{ modo}}$ Per successioni con lemma della sotto-sotto.
Sia $x_n \to x_0$. Voglio dim. che $\varphi(x_n) \to \varphi(x_0) = y_0$

A meno di sotto succ. $\varphi(x_n) \to y_\infty$ (non rinomino).
Se dimostro che $y_\infty = y_0$ per forza, allora ho finito.
D'altra parte

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{def.}}}{0 =} f(x_n, \varphi(x_n)) \xrightarrow[\substack{\uparrow \\ \text{cont. di } f}]{} f(x_0, y_\infty)$$

l'unico p.to sopra x_0 che annulla f è y_0.

Oss. Nel primo modo usiamo solo la continuità di $f(x,y)$ sulle rette // agli assi.

$\boxed{\text{Regolarità}}$ Supponiamo che $f(x,y)$ sia C^1 in Ω. Voglio dim. che φ è C^1 e vale la formula

$$\boxed{\varphi'(x) = -\frac{f_x(x, \varphi(x))}{f_y(x, \varphi(x))}}$$

Non dimostrazione: $0 = f(x, \varphi(x))$ e derivo

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain rule}}}{0 =} f_x(x, \varphi(x)) + f_y(x, \varphi(x))\, \varphi'(x) \quad \rightsquigarrow \text{ ricavo } \varphi'(x)$$

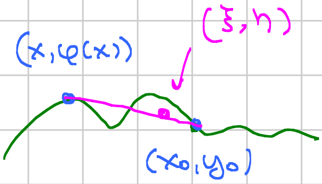
Dim

$$0 = f(x, \varphi(x)) = \overset{\substack{0 \\ \shortparallel}}{f(x_0, y_0)} + (x - x_0) f_x(\xi, \eta) + (\varphi(x) - y_0) f_y(\xi, \eta)$$

Ricavo:

$$\frac{\varphi(x) - y_0}{x - x_0} = -\frac{f_x(\xi, \eta)}{f_y(\xi, \eta)}$$

$$\varphi'(x_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)}$$

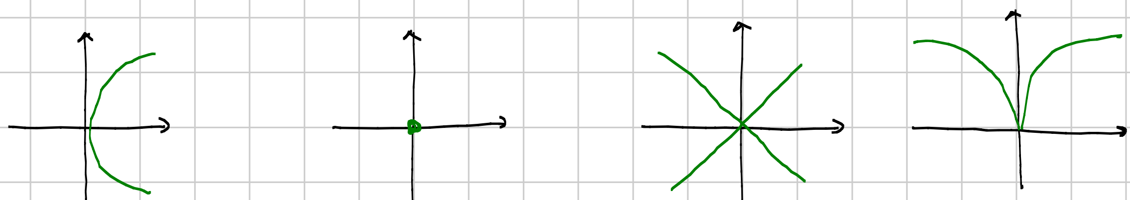


Si arriva a C^k per BOOTSTRAP

ANALISI 2 — LEZIONE 079

Titolo nota 02/03/2016

Oss. Cosa succede nel Dini $n=2$ e $k=1$ se non sono soddisfatte le ipotesi, in particolare se $f_y(x_0,y_0)=0$.
Tante possibilità



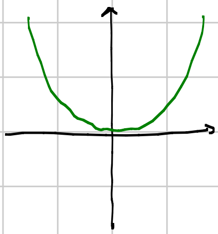
$x-y^2=0$ — grafico dell'altra parte

$x^2+y^2=0$ — p.to solo ☹

$x^2-y^2=0$

$x^2-y^3=0$

Può anche non succedere nulla



$(y-x^2)^2=0$

$\boxed{\text{Caso } n \text{ generico}, k=1}$ Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $f:\Omega\to\mathbb{R}$ continua in Ω

$f_{x_n}(x,y)\neq 0$ in un intorno di (x_0,y_0) dove $f(x_0,y_0)=0$

$$(\underbrace{x_1,\dots,x_{n-1}}_{x},\underbrace{x_n}_{y}) = (x,y)$$

Allora esistono $\delta>0$, $\varepsilon>0$, $\varphi:\overline{B}(x_0,\delta)\to[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]$ continua tale che

$$V\cap[\overline{B}(x_0,\delta)\times[y_0-\varepsilon,y_0+\varepsilon]] = \text{grafico di } \varphi$$

prime $n-1$ variabili

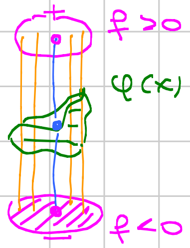
Se f è C^k, allora φ è C^k e $\displaystyle\frac{\partial\varphi}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,\varphi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x,\varphi(x))}$

$i=1,\dots,n-1$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Stessa del caso precedente

Continuità e regolarità come prima.

f passa da <0 a >0 $\longrightarrow$
ed è monotona
$\Rightarrow$ si annulla almeno una volta, anzi una sola
quello è $\varphi(x)$



—o —o —

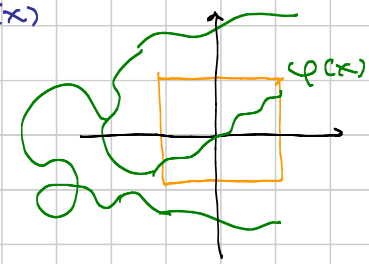
Esempio 1 $\quad f(x,y) = \arctan y + xy^3 + \sin x \qquad (x_0,y_0)=(0,0)$

Dimostrare che definisce una funzione

$$y = \varphi(x)$$

vicino all'origine, e calcolarne lo sviluppo di Taylor di ordine 4

$\boxed{\text{Step 1}}$ $f(0,0)=0$ e $f_y(0,0)=1$ e $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$.
Quindi localmente V è il grafico di $\varphi(x)$



$\boxed{\text{Step 2}}$ $\quad \varphi'(x) = -\dfrac{f_x(x,\varphi(x))}{f_y(x,\varphi(x))}$

$$\varphi'(0) = -\frac{f_x(0,0)}{f_y(0,0)} = -\frac{1}{1} = -1$$

Calcoliamo $\varphi''(0)$

$$\varphi''(x) = -\frac{[f_{xx}(\,)+f_{xy}(\,)\varphi']\,f_y(\,) - f_x(\,)[f_{yx}(\,)+f_{yy}\overset{-1}{\varphi'}]}{[f_y(x,\varphi(x))]^2}$$

$= 0$
sono 0 le deriv. seconde di f

Tutte le derivate si calcolano e facilmente.

$\boxed{\text{Step 3}}$ φ è C^4, quindi il Taylor di ordine 4 esiste

$$\varphi(x) = -x + \underset{0}{a}x^2 + bx^3 + cx^4 + o(x^4)$$

So che deve essere $f(x,\varphi(x)) \equiv 0$, quindi

$$\arctan \varphi(x) + x\,\varphi^3(x) + \sin x = 0$$

$$\arctan\left(-x+ax^2+bx^3+cx^4\right)+x\left(\quad\right)^3+x-\frac{1}{6}x^3=o(x^4)$$

$$-\cancel{x}+\underset{=0}{a}x^2+bx^3+cx^4-\frac{1}{3}\left(-x^3+3ax^4\right)-x^4+\cancel{x}-\frac{1}{6}x^3=o(x^4)$$

$\rightsquigarrow$ trovo c e d

Domanda globale: è vero che per ogni $x\in\mathbb{R}$ $\exists\, y\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x,y)=0$.

Domanda più semplice: V è limitato?

$\boxed{\text{NO}}$ Per ogni $x>0$ sappiamo che $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} f(x,y)=+\infty$

$$\lim_{y\to-\infty} f(x,y)=-\infty$$

Si dimostra che $\forall\, x>0\ \exists!\, y\in\mathbb{R}$ t.c. $f(x,y)=0$

—o—o—

Meta-strategie.

① Come dimostro che V è regolare ovunque?

Spero che il sistema

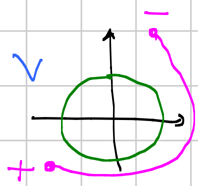
$$\begin{cases} f(x,y)=0\\ f_x(x,y)=0\\ f_y(x,y)=0\end{cases}$$

non abbia soluzioni.

② Come decido se V è limitato oppure no?

→ se so che $\displaystyle\liminf_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y)>0$, allora V è limitato (o $\limsup<+\infty$)

→ se so che $\liminf f<0$ e $\limsup>0$, allora V NON è limitato



③ Come decido se V è connesso?

→ Difficile !!

È più facile vedere se non è connesso

Esempio 2 $\quad \arctan(xz) + \sin z + \cos(yz) - 1 = 0$

Definisce una sup. vicino all'origine $z = \varphi(x,y)$ $\quad (f_z(0,0,0)=1)$

→ V è limitato? No $\quad (x=y=0 \rightsquigarrow$ liminf e limsup sono $\pm 1)$

φ è convessa / concava? Basta calcolare $H\varphi(0,0)$.

Impongo $\quad \varphi(x,y) = ax+by+cx^2+2dxy+ey^2$

e sostituisco di ordine 2

$$\cancel{\arctan}(x(\cancel{a}x+\cancel{b}y)) + \cancel{\sin}(\cancel{ax}+\cancel{by}+cx^2+2dxy+ey^2) + \cancel{1}-\cancel{1} = 0$$

parliamone

→ $a=b=0$

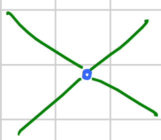
→ $c=d=e=0$ → $H\varphi(0,0)$ è nullo, quindi non possiamo dire nulla.

È chiaro che non è limitato, ma non sappiamo se è connesso o se $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \exists z \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x,y,z)=0$.

— o — o —

Esercizio $\quad f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0$

$Hf(x_0,y_0)$ ha Det < 0 $\Rightarrow$ localmente è così



ANALISI 2 — LEZIONE 080

Titolo nota 04/03/2016

Nuova dimostrazione del teo. funzioni implicite con $n=2$ e $k=1$.

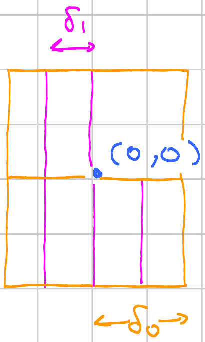
Notazioni e ipotesi $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ aperto $f: \Omega \to \mathbb{R}$ $(x_0, y_0) \in \Omega$

Supponiamo

- $f(x_0, y_0) = 0$
- $f_y(x,y)$ esiste ed è continua in Ω
- $f(x,y)$ continua in Ω
- $f_y(x_0, y_0) > 0$

Allora esistono $\delta > 0$ ed $\varepsilon > 0$ e $\varphi : \ldots$ tali che $f(x, \varphi(x)) = 0$.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Faccio 3 scelte



- Scelgo $m_0 > 0$ tale che

$$f_y(0,0) \geq m_0 > 0$$

- Scelgo $\delta_0 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tale che

$$|f_y(x,y) - f_y(0,0)| \leq \frac{m_0}{2} \qquad \forall (x,y) \in [-\delta_0, +\delta_0] \times [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$$

Questo è possibile per l'(unif) cont. di f_y

- Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x,0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \qquad \forall x \in [-\delta_1, +\delta_1]$$

Per ogni $x \in [-\delta_1, +\delta_1]$ voglio trovare $y \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$ t.c.

$$f(x,y) = 0.$$

Idea è di considerare la funzione

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{parametro}}}{\Phi_{(x)}}(y) := y - \frac{f(x,y)}{f_y(0,0)}$$

Supponiamo che $\Phi_{(x)}(y)$ abbia un p.to fisso $\bar{y}$. Allora $f(x,\bar{y}) = 0$ e quindi $\bar{y}$ è quello che volevo.
Per dimostrare che ha un p.to fisso (unico) uso il teorema delle contrazioni nello spazio metrico $[-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$.
Devo fare 2 verifiche

($\Phi 1$) $\Phi_{(x)} : [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0] \to [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, quindi manda lo spazio in sé.

($\Phi 2$) $\Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$-Lipschitz, dunque è una contrazione.

Per fare le verifiche riscrivo

$$\Phi_{(x)}(y) = \frac{\boxed{f_y(0,0)\,y - f(x,y)}}{f_y(0,0)} \qquad \boxed{\ } = g(x,y)$$

Proprietà di $g(x,y)$. È derivabile parzialmente rispetto ad y e

$$|g_y(x,y)| = |f_y(0,0) - f_y(x,y)| \rightsquigarrow \text{piccolo se } (x,y) \text{ è vicino a } (0,0)$$

Inoltre

$$|g(x,y)| \le |g(x,0)| + |g(x,y) - g(x,0)|$$

$$= \underbrace{|f(x,0)|}_{\substack{\text{piccolo se}\\ x \sim 0}} + \underbrace{|y|}_{\substack{\text{piccolo}\\ \text{se } |y| \text{ piccolo}}} \cdot \underbrace{|g_y(x,\eta)|}_{\substack{\text{piccolo se}\\ g_y \text{ è piccolo.}}}$$

Scriviamo per bene le piccolezze:

$$|g_y(x,y)| = |f_y(0,0) - f_y(x,y)| \leq \frac{m_0}{2} \quad \text{nel rettangolo}$$

$$|g(x,y)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} + \varepsilon_0 \frac{m_0}{2} = m_0 \varepsilon_0$$

Verifica di $(\Phi 1)$. Mi serve che $\Phi_{(x)} \in [-\varepsilon_0, +\varepsilon_0]$, cioè

$|\Phi_{(x)}(y)| \leq \varepsilon_0$. Ma

$$|\Phi_{(x)}(y)| = \frac{|g(x,y)|}{|f_y(x_0,y_0)|} \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{m_0} = \varepsilon_0$$

Verifica di (Φ_2):

$$|\Phi_{(x)}(y_2) - \Phi_{(x)}(y_1)| = \frac{|g(x,y_2) - g(x,y_1)|}{|f_y(0,0)|}$$

$$= \frac{|y_2 - y_1| \cdot \overbrace{|g_y(x,\eta)|}^{\leq \frac{m_0}{2}}}{\underbrace{|f_y(0,0)|}_{\geq m_0}}$$

$$\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1|$$

— o — o —

<u>Esempio 1</u> Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo il problema

$$n^2 \sin x + e^x - \arctan x + n x^2 = 1$$

Dimostrare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ il problema ammette una soluzione x_n e vedere il limite di x_n.

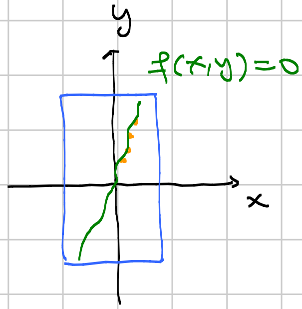
Divido per n^2: $\quad \sin x + \frac{1}{n^2} e^x - \frac{1}{n^2} \arctan x + \frac{1}{n} x^2 - \frac{1}{n^2} = 0$

Pongo $y = \frac{1}{n}$: $\underbrace{\sin x + y^2 e^x - y^2 \arctan x + y\, x^2 - y^2}_{f(x,y)} = 0$

Così diventa un problema di funzioni implicite vicino a $(0,0)$

Voglio ricavare x in funzione di y. Basta verificare che

$f_x(0,0) \neq 0$ Ok perché $f_x(0,0) = 1$



$x = \varphi(y)$ $\varphi'(y) = -\dfrac{f_y(\varphi(y),y)}{f_x(\varphi(y),y)}$

$\varphi'(0) = -\dfrac{0}{1} = 0$

Quindi $\varphi(y) = o(y)$ $\rightsquigarrow$ $x_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$

Se volessi ordine di infinitesimo e parte principale dovrei sviluppare $\varphi(y)$ e trovare il 1° termine non nullo.

— o — o —

Idea euristica della dimostrazione con pto fisso.

Voglio che

$$f(x,\varphi(x)) = 0$$

o detto meglio $f(x,y) = 0$. Sviluppo:

$$f(x,y) = f(0,0) + y\, f_y(x,0) + r(x,y) \quad (=0)$$

Se fosse così $y = -\dfrac{r(x,y)}{f_y(x,0)}$

Ignorando che $f(x,y)$ posso sempre avere

$$r(x,y) = f(x,y) - y\, f_y(x,0)$$

e quindi $y = + \dfrac{y\, f_y(x,0) - f(x,y)}{f_y(x,0)} = \underbrace{y - \dfrac{f(x,y)}{f_y(x,0)}}_{\Phi(y)}$

ANALISI 2 — LEZIONE 081

Titolo nota 04/03/2016

$\boxed{\text{Funzioni implicite in CODIMENSIONE } k}$

$1 \leq k < n \qquad m := n-k$

Prendiamo $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia data $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$. In componenti

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) = 0 \\ f_2(\quad \dots \quad) = 0 \\ \vdots \\ f_k(\quad \dots \quad) = 0 \end{array}\right] \quad k \text{ equazioni in } n \text{ incognite } (\underbrace{x}_{m \text{ variabili}}, \underbrace{y}_{k \text{ variabili}})$$

Supponiamo che

- $f(0,0) = 0$
- $f(x,y)$ continua in Ω
- $J_y f(0,0)$ è invertibile (rango k)
- $J_y f(x,y)$ continua in $(0,0)$

$$J_f = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \quad m \quad & \quad k \quad \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} J_x f & J_y f \end{array}\right] \end{array} \; k$$

Allora esistono $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\varphi : B_\delta(0, \mathbb{R}^m) \longrightarrow B_\varepsilon(0, \mathbb{R}^k)$ tale che

$$f(x, \varphi(x)) = 0 \qquad \forall x \in B_\delta(0, \mathbb{R}^m).$$

Inoltre

① φ è continua

② Se f è di classe C^1, allora φ è di classe C^1 e

$$J\varphi(x) = -\left[J_y f(x, \varphi(x))\right]^{-1} \left[J_x f(x, \varphi(x))\right]$$

③ Se f è di classe C^k, allora φ è di classe C^k (bootstrap).

<u>Euristica per</u> ② $\quad f(x, \varphi(x)) = 0 \quad$ Calcolo le derivate

$$J_x f(x, \varphi(x)) + J_y f(x, \varphi(x)) \, J\varphi(x) = 0 \rightsquigarrow \text{ricavo } J\varphi(x)$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Faccio 3 scelte

- Scelgo $m_0 > 0$ tale che $\|[J_y f(0,0)]^{-1}\| \leq \frac{1}{m_0}$

norma di matrice

- Scelgo $\varepsilon_0 > 0$ e $\delta_0 > 0$ tali che

$$\| J_y f(x,y) - J_y f(0,0) \| \leq \frac{m_0}{2} \qquad \forall (x,y) \in B_{\delta_0}(0, \mathbb{R}^m) \times B_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k)$$

matrice

- Scelgo $\delta_1 > 0$ tale che

$$|f(x,0)| \leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2} \qquad \forall x \in B_{\delta_1}(0, \mathbb{R}^m)$$

norma di vettore in $\mathbb{R}^k$

(Parentesi: la norma di una matrice $M = \{M_{ij}\}$ è $\left(\sum_{i,j} M_{ij}^2\right)^{1/2}$
e ha la proprietà che
$|Mx| \leq \|M\| \cdot |x|$)

Poniamo $\quad \Phi_{(x)}(y) = y - [J_y f(0,0)]^{-1} f(x,y)$

e spero che, quando $x \in \overline{B}_{\delta_1}(0, \mathbb{R}^m)$, la funzione $\Phi_{(x)}(y)$ abbia un p.to fisso unico.
Devo dimostrare

chiusura importante

$(\Phi 1) \quad \Phi_{(x)} : \overline{B}_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k) \to \overline{B}_{\varepsilon_0}(0, \mathbb{R}^k)$ (metrico completo)

$(\Phi 2) \quad \Phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$ - lip.

Come prima pongo $\quad \Phi_{(x)}(y) = [J_y f(0,0)]^{-1} \underbrace{\{ J_y f(0,0)\, y - f(x,y) \}}_{g(x,y)}$

Calcolo $J_y g(x,y) = J_y f(0,0) - J_y f(x,y)$
da cui

$$\| J_y g(x,y) \| = \| \quad \dots \quad \| \underset{\substack{\uparrow \\ \text{per ipotesi}}}{\leq} \frac{m_0}{2}$$

$\boxed{\text{Verifica di } (\phi 2)}$

$$|\phi_{(x)}(y_2) - \phi_{(x)}(y_1)| = |[J_y f(0,0)]^{-1} (g(x,y_2) - g(x,y_1))|$$

$$\leq \underbrace{\| [J_y f(0,0)]^{-1} \|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|g(x,y_2) - g(x,y_1)|}_{\leq |y_2 - y_1| \cdot \| J_y g(\dots,\dots) \| \atop \leq \frac{m_0}{2}}$$

$$\leq \frac{1}{2} |y_2 - y_1|$$

$\boxed{\text{Verifica di } (\phi 1)}$ Devo dimostrare che $|\phi_{(x)}(y)| \leq \varepsilon_0$ se $|y| \leq \varepsilon_0$.

Come prima $|\phi_{(x)}(y)| \leq |\phi_{(x)}(0)| + \underbrace{|\phi_{(x)}(y) - \phi_{(x)}(0)|}_{\leq \frac{1}{2}|y| \leq \frac{1}{2}\varepsilon_0}$

perché $\phi_{(x)}$ è $\frac{1}{2}$-lip

Resta da stimare

$$|\phi_{(x)}(0)| = |[J_y f(0,0)]^{-1} f(x,0)|$$

$$\leq \underbrace{\| [J_y f(0,0)]^{-1} \|}_{\leq \frac{1}{m_0}} \cdot \underbrace{|f(x,0)|}_{\leq \frac{m_0 \varepsilon_0}{2}}$$

$$\leq \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Questo completa la dimostrazione.

Osservazione Il passaggio con Lagrange sulle matrice richiede qualche cautela in più perché vale solo componente per componente (i punti (ξ, η) dipendono dalla componente): si tratta di tenerne conto nella seconda scelta.

Abbiamo dimostrato esistenza e unicità di $\varphi(x)$ nell'intorno di ampiezze δ_1 su x ed ε_0 su y.

Come dimostro la continuità? Si riciclano le 2 dim. classiche
→ prendo nella seconda scelta ε piccolo quanto voglio e mi ritrovo un corr. δ nella terza scelta
→ uso il lemma della sotto-sotto

Come dimostro la diff. in $(0,0)$?
Con lo sviluppo con Taylor Lagrange

$$0 = f(x, \varphi(x)) = J_x f(\xi, \eta) + J_y f(\xi, \eta)\, \varphi(x)$$

ricavo $\varphi(x)$ e passo al limite per $x \to 0$

Come sopra: (ξ, η) dipendono dalla componente, ma non importa!!!

Esercizio
$$\begin{cases} n^2 \arctan x + n \sin y + x = n \\ x^2 + nx + n^2 y + \cos(xy) = n + 5 \end{cases}$$

Per n abbastanza grande c'è soluzione (unica?) (x_n, y_n)

$$\begin{matrix} f \\ g \end{matrix} \begin{cases} \arctan x + z \sin y + z^2 x - z = 0 \\ z^2 x^2 + zx + y + z^2 \cos(x,y) - z - 5z^2 = 0 \end{cases}$$

Devo verificare che
$$\begin{pmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Det} \neq 0 \text{ in } (0,0,0)$$

ANALISI 2 – LEZIONE 082

Titolo nota 08/03/2016

TEOREMA DELLA FUNZIONE INVERSA (Teo. invertibilità locale)

Teorema Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, e sia $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$.
Supponiamo che
(i) f è di classe C^1 in Ω
(ii) $Jf(x_0)$ è invertibile in un certo p.to $x_0 \in \Omega$.
Sia $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}^n$.
Allora esistono un intorno $\mathcal{U}$ di x_0 e un intorno $\mathcal{V}$ di y_0,
ed esiste

$$g : \mathcal{V} \to \mathcal{U}$$

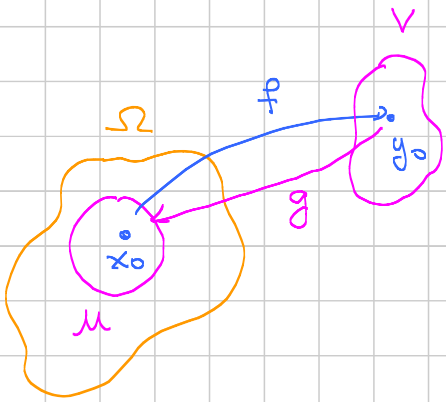
Li posso assumere aperti

tale che

$$g(f(x)) = x \qquad \forall x \in \mathcal{U}$$
$$f(g(y)) = y \qquad \forall y \in \mathcal{V}.$$

Inoltre g è di classe C^1 in $\mathcal{V}$ e

$$Jg(y) = [Jf(g(y))]^{-1}$$



Dim. Immediata dato il teo. della funzione implicita.
Considero la funzione di $(2n)$-variabili

$$\Phi(x,y) = y - f(x)$$

$$\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

Considero $\Phi(x,y) = 0$ (sistema di n equazioni in $2n$ variabili)
e voglio esplicitare x in funzione di y.
Per questo serve la continuità di $\Phi(x,y)$ e l'invertibilità di

$J_x \Phi(x,y)$, cioè lo jacobiano risp. alla variabile x.
Ma

$$J\Phi(x,y) = \begin{array}{cc} m & n \\ \left[\begin{array}{c|c} -Jf & Id \end{array}\right] & \end{array} \; n$$

per hp è invertibile in x_0 e per continuità in un intorno

Teo funz. implicite $\Rightarrow$ esistono $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ ed esiste

$$g : B_\varepsilon(y_0) \longrightarrow B_\delta(x_0)$$

tale che $\quad \Phi(g(y), y) = 0$, cioè $\quad y - f(g(y)) = 0$, cioè

$$f(g(y)) = y \qquad \text{per ogni } y \in \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_{\shortparallel \atop V}$$

Occhio: l'intorno $\mathcal{U}$ di x_0 cercato è $g(V)$, che potrebbe essere strettamente contenuto in $B_\delta(x_0)$.

La regolarità di g segue dal teo. delle funzioni implicite, così come la formula per lo jacobiano di g

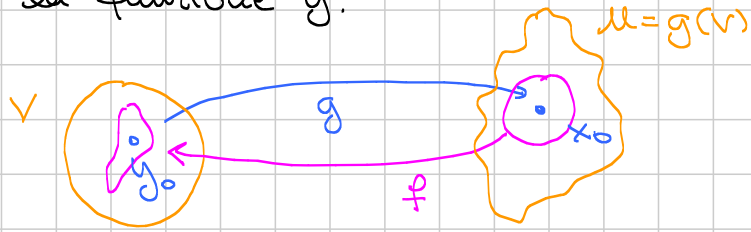
$$Jg(y) = + \underbrace{[J_x \Phi(x,y)]^{-1}}_{\downarrow \atop +Jf(g(y))} \underbrace{[J_y \Phi(x,y)]}_{\shortparallel \atop Id}$$

— o — o —

Oss. $g : \underbrace{B_\varepsilon(y_0)}_{\shortparallel \atop V} \longrightarrow B_\delta(x_0)$ è iniettiva. Posto $\mathcal{U} = g(V)$ è automatico che $g : V \to \mathcal{U}$ è invertibile.

$\boxed{\text{Punto importante}}$ Bisogna dimostrare che $\mathcal{U}$ e V sono aperti, o per lo meno che $x_0 \in \mathrm{Int}(\mathcal{U})$ e $\underbrace{y_0 \in \mathrm{Int}(V)}_{\text{ovvio per costruzione}}$

Per dimostrare che $\mathcal{U}$ è aperto devo ripetere il ragionamento con la funzione g.



$Jg(y_0)$ è invertibile

$\boxed{\text{COROLLARIO}}$ (Teorema della mappa aperta)

Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ e $f : \underset{\text{aperto}}{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ e $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$

Supponiamo che

(i) f è C^1 in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ è invertibile

Allora $y_0 \in \mathrm{Int}(f(\Omega))$

Achtung! • Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è C^1 e $f'(x) \geq 8$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è invertibile globalmente

• Se f è come sopra e $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, allora $f(\mathbb{R}) = V \subseteq \mathbb{R}$ aperto e

$$f : \mathbb{R} \to V$$

è invertibile

$\boxed{\text{In più variabili tutto questo non vale}}$ può succedere che

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ di classe C^1 con $Jf(x)$ invertibile per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, ma f non è iniettiva.

Esempio $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)$

banalmente non iniettiva

$f(x, y+2\pi) = f(x,y)$

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} e^x \cos y & -e^x \sin y \\ e^x \sin y & e^x \cos y \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Det}\, Jf(x,y) = e^x \neq 0$$

L' esempio può essere pensato su $\mathbb{C}$ invece che $\mathbb{R}^2$: $z \to e^z$

$$z = x + iy \qquad e^z = e^{x+iy} = e^x \cos y + i\, e^x \sin y.$$

—o—o—

<u>Generalizzazione teo. mappa aperta</u>

Siano $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, $f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ con $k \leq n$, $x_0 \in \Omega$ e $y_0 = f(x_0)$.
Supponiamo che
(i) f è C^1 in Ω
(ii) $Jf(x_0)$ ha rango k (FULL RANK).
Allora

$$y_0 \in \operatorname{Int}(f(\Omega))$$

(l' immagine contiene tutto un intorno di y_0)

$\boxed{\text{Dim.}}$ Se $k = n$ è il teo. precedente.
Supponiamo $k < n$ e poniamo $m = n - k$.
Indichiamo $x = (z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$
Supponiamo wlog. che

$$Jf(x_0) = \begin{array}{c} \left[\begin{array}{c|c} \quad\quad & \quad\quad\quad \end{array}\right] k \\ \;\; m \qquad k \end{array}$$

invertibile

Considero

$$\Phi(x, y) = y - f(z_1, \dots, z_m, x_1, \dots, x_k)$$

$$\Phi : \Omega \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$$

e $J_{x_1, \dots, x_k}$ è invertibile in (x_0, y_0). Allora per il teorema della funzione inversa posso ricavare

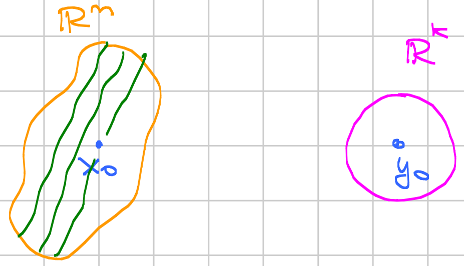
$$x_1, \dots, x_k$$

in funzione di

$$y_1, \dots, y_k, z_1, \dots, z_m$$

Ora posso addirittura fissare $z_1 = \dots = z_m = 0$ e avere che ogni $(y_1, \dots, y_k)$ vicino a y_0 è immagine di un qualche x vicino ad x_0 con le prime m componenti nulle.

Ogni p.to in arrivo vicino a y_0 ha come controimmagine un sottoinsieme di Ω di dimensione m.



— o — o —

<u>Ulteriore generalizzazione</u>

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^n \quad f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ (k qualunque)

$x_0 \in \Omega$, $y_0 = f(x_0)$

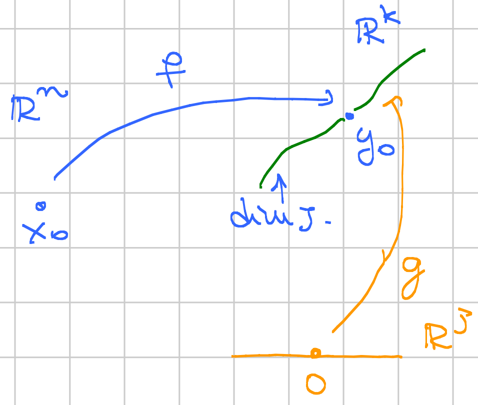
(i) f C^1 in Ω

(ii) $Jf(x_0)$ ha rango J.

Allora moralmente l'immagine contiene una varietà di dimensione J passante per y_0

Detto meglio: esiste una funzione $g : B_\delta(0, \mathbb{R}^J) \to \mathbb{R}^k$ con $Jg(0)$ di rango J tale che

$$\operatorname{Im} g \subseteq \operatorname{Im} f$$



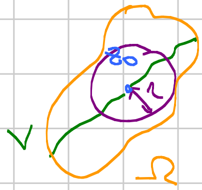
ANALISI 2 — LEZIONE 083

Titolo nota 08/03/2016

MOLTIPLICATORI DI LAGRANGE

Def. Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto, sia $f : \Omega \to \mathbb{R}$ una funzione, sia $V \subseteq \Omega$ un sottoinsieme, sia $z_0 \in V$.
Si dice che z_0 è p.to di min. locale per f ristretta V se esiste $r > 0$ tale che

$$B_r(z_0) \subseteq \Omega$$



e

$$f(z) \geq f(z_0) \qquad \forall z \in V \cap B_r(z_0)$$

Analogamente si definiscono i p.to di max locale.

$\boxed{\text{Teorema}}$ (Moltiplicatori di Lagrange)
Siano Ω, f, V, z_0 come sopra.
Supponiamo che z_0 sia p.to di max/min locale per f in V.
Supponiamo che

(i) f sia C^1 in Ω

(ii) esisto k funzioni $\overbrace{g_1, \dots, g_k}^{g : \Omega \to \mathbb{R}^k} : \Omega \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tali che

$$V = \{z \in \Omega : g_1(z) = \dots = g_k(z) = 0\}$$

Allora vale almeno una delle seguenti due opzioni

(1) $\operatorname{rank}(Jg(z_0)) < k$ (g non è FULL RANK)

(2) esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tali che

$$\nabla f(z_0) = \lambda_1 \nabla g_1(z_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(z_0)$$

(cioè $\nabla f(z_0) \in \operatorname{Im}(Jg(z_0))$ pensato come appl. lin.)

Casi : $n=2,\ k=1$

$n=$ qualunque, $k=1$

$n=$ qualunque, $k=$ qualunque.

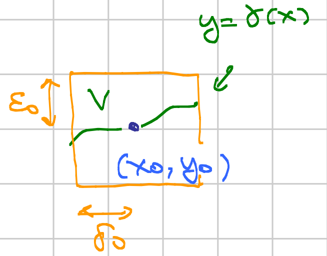
$\boxed{\text{Dim } n=2,\ k=1}$ $f(x,y)$ funzione da minimizzare

$g(x,y)=0$ eq. di V

$z_0=(x_0,y_0)$

Se siamo in (1), allora $\nabla g(x_0,y_0)=(0,0)$ e non c'è nulla da dire.

Altrimenti $\nabla g(x_0,y_0)\neq(0,0)$ e supponiamo wlog che $g_y(x_0,y_0)\neq 0$.



Teo. funz. implicite $\Rightarrow$ vicino a (x_0,y_0) posso scrivere

$$V=\{(x,\gamma(x)) : x\in[x_0-\delta_0,\ x_0+\delta_0]\}$$

Considero la funzione $F(x):=f(x,\gamma(x))$

$F:[x_0-\delta_0,\ x_0+\delta_0]\to\mathbb{R}$

Per ipotesi F ha pto di max / min in x_0, quindi

$$0=F'(x_0)\underset{\substack{\uparrow\\ \text{chain rule}}}{=}f_x(x_0,y_0)+f_y(x_0,y_0)\,\gamma'(x_0)$$

So che (teo. funz. impl.) $\gamma'(x_0)=-\dfrac{g_x(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}$

Sostituendo trovo

$$\boxed{f_x(x_0,y_0)=\boxed{\frac{f_y(x_0,y_0)}{g_y(x_0,y_0)}}\,g_x(x_0,y_0)}$$

$$f_y(x_0,y_0)=\lambda\ g_y(x_0,y_0)$$

λ

$\nabla f(x_0,y_0)=\lambda\nabla g(x_0,y_0)$
Quindi siamo nel caso (2).

— o — o —

$\boxed{\text{Dim 2 del caso } n=2,\ k=1}$

Considero la funzione $\phi(x,y) := (\underbrace{f(x,y) - f(x_0,y_0)}_{u}, \underbrace{g(x,y)}_{v})$

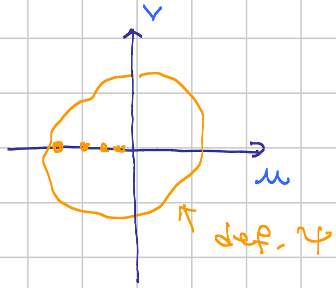
$$\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^2$$

$$J\phi(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0,y_0) \\ \nabla g(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Se siamo nei casi (1) e (2), allora rank $J\phi(x_0,y_0) \le 1$.
Se per assurdo non siamo in quei casi, allora

$$J\phi(x_0,y_0) \text{ è invertibile}$$

Ma allora l'immagine di ϕ contiene un intorno dell'immagine di (x_0,y_0), cioè un intorno di $(0,0)$



Supponiamo che (x_0,y_0) sia p.to di min. loc.
Allora i p.ti del tipo $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ non possono stare nell'immagine!
Prendiamo l'inversa ψ di ϕ e poniamo

$$(x_n, y_n) := \psi\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$$

Sono ben definiti per n grande perché cascano in un intorno di $(0,0)$.
Ora $(x_n,y_n) \in V$ perché $g(x_n,y_n) = 0$
$(x_n,y_n) \to (x_0,y_0)$ per continuità dell'inversa
$f(x_n,y_n) - f(x_0,y_0) = -\frac{1}{n}$

$$\leadsto f(x_n,y_n) = f(x_0,y_0) - \frac{1}{n}$$

quindi (x_0,y_0) non è p.to di min. locale.

$\boxed{\text{Dim. con } n \text{ generico e } k=1}$

$f(x_1, \dots, x_{n-1}, y)$ $\qquad z_0 = (x_0, y_0)$

$g(\underbrace{x_1, \dots, x_{n-1}}_{x}, y) = 0$ $\qquad$ $n-1$ variabili

Se non siamo nel caso (1), allora $\nabla g(x_0, y_0) \neq 0$, quindi wlog $g_y(x_0, y_0) \neq 0$.
Ma allora per il teo. funz. implicite posso ricavare

$$y = \gamma(x_1, \dots, x_{n-1})$$

$$F(x_1, \dots, x_{n-1}) := f(x_1, \dots, x_{n-1}, \gamma(x_1, \dots, x_{n-1}))$$

e impongo che ∇F si annulli in x_0

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \underbrace{\frac{\partial \gamma}{\partial x_i}(x_0, y_0)}_{\text{segue dal teo. funz. impl.}}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) - \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0)$$

Quindi

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) = \underbrace{\boxed{\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)}{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)}}}_{\lambda \text{ indipendente da } i} \frac{\partial g}{\partial x_i}(x_0, y_0) \qquad i = 1, \dots, n-1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lambda \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Questo mostra come prima che $\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$

— o — o —

Dim 2 dello stesso caso Considero

$$\Phi(x_1, \dots, x_{n-1}, y) := \big(f(x,y) - f(x_0, y_0),\ g(x,y)\big)$$

Se non siamo in (1) o (2), allora $J\Phi(x_0, y_0)$ ha rango 2, quindi l'immagine di ogni intorno di (x_0, y_0) contiene un intorno dell'origine, il che non è buono.

— o — o —

Dim 1 del caso generale $m := n-k$

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \qquad z_0 = (\overset{m \text{ var.}}{x_0}, \overset{k \text{ variabili}}{y_0})$$

$$\left.\begin{aligned} g_1(\ \dots\ ) &= 0 \\ &\vdots \\ g_k(\ \dots\ ) &= 0 \end{aligned}\right] \text{ k equazioni del vincolo}$$

Considero $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^{k+1}$

$$\Phi(x,y) = \big(f(x,y) - f(x_0, y_0), \underbrace{g(x,y)}_{k \text{ componenti}}\big)$$

$$J\Phi(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \nabla f(x_0,y_0) \\ \nabla g_1(x_0,y_0) \\ \vdots \\ \nabla g_k(x_0,y_0) \end{pmatrix}$$

Sia nel caso (1), sia nel caso (2) il rank è $\leq k$.
Se per assurdo non fossimo in questi casi, avremmo rank $= k+1$, cioè FULL RANK, ma allora $\mathrm{Im}\,\Phi$ contiene un intorno di $(0,0)$. Questo vale per l'immagine di Φ ristretta ad ogni intorno di (x_0, y_0), in particolare l'intorno in cui $(x_0, y_0) = z_0$ risulta p.to di min / max ristretto a V.
L'assurdo segue come prima considerando i p.ti $(-\frac{1}{m}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\text{provenire da}})$

$f(x,y) < f(x_0,y_0)$ provenire da

ANALISI 2 – LEZIONE 084

Titolo nota 09/03/2016

Dim. Molt. Lagrange
1. Esplicitare il vincolo
2. Usare mappa aperta con ϕ ausiliaria
3. Metodo di penalizzazione

Dim. con strategia 1 nel caso generico $k < n$

$f : \Omega \to \mathbb{R}$ funzione da minimizzare
$g : \Omega \to \mathbb{R}^k$ sono le equazioni del vincolo V
$z_0 \in V$ è un pto di min / max locale per f su V
f e g sono di classe C^1 e $Jg(z_0)$ ha rango k
Voglio dim che ∇f è comb. lin. di $\nabla g_1, \dots, \nabla g_k$.
Separo le variabili in 2 gruppi

$$f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k) \qquad z_0 = (x_0, y_0)$$

e analogamente

$$g_i(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_k)$$

Suppongo wlog che

$$J_y g(x_0, y_0) \text{ sia invertibile}$$

Per il teorema della funzione implicita posso ricavare y in funzione di x, cioè trovare γ tale che

$$\underbrace{\boxed{g(x, \gamma(x)) = 0}}_{k\text{-equazioni}} \qquad \forall x \text{ vicino ad } x_0$$

Inoltre $$J\gamma(x_0) = -\underbrace{[J_y g(x_0, y_0)]^{-1} J_x g(x_0, y_0)}_{\text{dimensioni compatibili}}$$

Come nel caso $k=1$, poniamo

$$F(x) := f(x, \gamma(x)) \qquad \text{definita vicino ad } x_0$$

La funzione F ha max/min in x_0 per hp, quindi le sue derivate parziali si annullano. Quindi per ogni $i = 1, \dots, m$

$$0 = \frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain} \\ \text{rule}}}{=} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial y_j}(x_0, y_0) \frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}(x_0)$$

$$= \langle \nabla f(x_0, y_0), w_i \rangle$$

dove $\quad w_i = (\overbrace{0 \dots 0 \underset{\substack{\uparrow \\ i}}{1} 0 \dots 0}^{m} \; \frac{\partial \gamma_1}{\partial x_i}(x_0) \dots \frac{\partial \gamma_k}{\partial x_i}(x_0))$

Poniamo $W := \operatorname{Span}(w_1, \dots, w_m)$ $\to$ ha $\dim(W) = m$ perché messi uno sull'altro vie$\underline{\text{ne}}$ Id_m a sx

Abbiamo appena dim. che

$$\nabla f(x_0, y_0) \in W^\perp \leftarrow \text{ha dimensione } n - m = k$$

Se per caso $W^\perp$ fosse generato da $\nabla g_1(x_0, y_0), \dots, \nabla g_k(x_0, y_0)$ avremmo finito.

Ora

- sono esattamente k vettori
- sono lin. indip. per l'ipotesi di rango k
- resta da dimostrare che stanno in $W^\perp$, cioè che

$$\langle \nabla g_\ell(x_0, y_0), w_i \rangle = 0 \qquad \forall \ell = 1, \dots, k \quad \forall i = 1, \dots, m$$

Uso che $\quad g_\ell(x, \gamma(x)) = 0$, quindi pongo $G_\ell(x) = g_\ell(x, \gamma(x))$

e impongo $\quad \frac{\partial G_\ell}{\partial x_i}(x_0) = 0$

$$0 = \frac{\partial G_\ell}{\partial x_i}(x_0) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chain} \\ \text{rule}}}{=} \frac{\partial g_\ell}{\partial x_i}(x_0, y_0) + \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial g_\ell}{\partial y_j}(x_0,y_0)\,\frac{\partial \gamma_j}{\partial x_i}(x_0)$$

$$= \langle \nabla g_\ell(x_0,y_0), w_i \rangle .$$

Riscrivo le stesse cose più brevemente. Come sopra considero

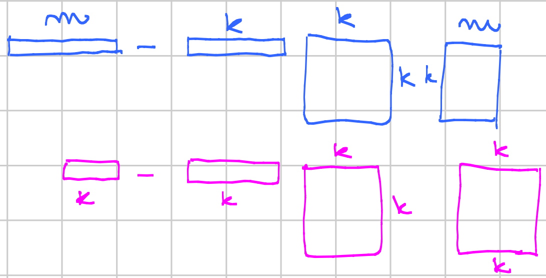
$$F(x) := f(x, \gamma(x))$$

$$0 = \nabla F(x_0) = J_x f(x_0,y_0) + J_y f(x_0,y_0)\, J\gamma(x_0)$$

$$= \nabla_x f(x_0,y_0) + \nabla_y f(x_0,y_0)\, J\gamma(x_0)$$

$$\boxed{0 = \nabla_x f(x_0,y_0) - \nabla_y f(x_0,y_0)\,[J_y g(x_0,y_0)]^{-1}\,[J_x g(x_0,y_0)]}$$

$$\boxed{0 = \nabla_y f(x_0,y_0) - \nabla_y f(x_0,y_0)\,[J_y g(x_0,y_0)]^{-1}\,[J_y g(x_0,y_0)]}$$



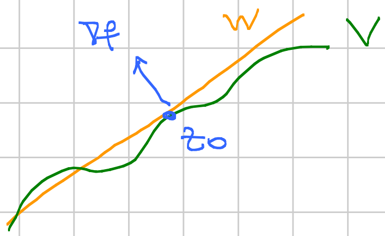
Unendo vettori e matrici ottengo

$$0 = \nabla f(x_0,y_0) - \underbrace{\underbrace{\nabla_y f(x_0,y_0)\,[J_y g(x_0,y_0)]^{-1}}_{\substack{\text{vettore riga lungo } k \\ (\lambda_1, \dots, \lambda_k)}}\; Jg(x_0,y_0)}_{\lambda_1 \cdot 1^a \text{ riga} + \dots + \lambda_k \cdot k\text{-esima riga}}$$

$$= \lambda_1 \nabla g_1(x_0,y_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0,y_0)$$

<u>Osservazione</u> Chi è il W introdotto nella dim.?

È lo Span di $w_1, \dots, w_m$, cioè l'immagine del differenziale, cioè la giacitura dello spazio tangente al vincolo V in z_0.
Intuitivamente già sapevamo che ∇f nei p.ti di max/min è ortogonale al vincolo.



— o — o —

Dim. con il metodo ③

<u>Lemma</u> Sia $\{A_k\}$ una successione di matrici $m \times n$
Supponiamo che
(i) per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha che $\operatorname{rank}(A_k) \leq J$ ← fisso, indip. da k
(ii) $A_k \to A_\infty$ (convergenza el. per elemento)
Allora

$$\operatorname{rank}(A_\infty) \leq J.$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ipotesi sappiamo che tutti i minori $(J+1)\times(J+1)$ di A_k hanno determinante uguale a 0.
Il Det è una funzione continua degli elementi.
Quindi gli stessi det. di A_∞ si annullano, quindi il rango di A_∞ è $\leq J$.

<u>Corollario</u> (stessa cosa detta diversamente) Il rango è SCI (semicont. inf.), cioè

$$\liminf_{k \to +\infty} \operatorname{rank}(A_k) \geq \operatorname{rank}(A_\infty)$$

Oss. Il rango può crollare al limite $\begin{pmatrix} \frac{1}{n} & 0 \\ 0 & \frac{1}{n} \end{pmatrix}$

Corollario Siano $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ due succ. di vettori in $\mathbb{R}^{27}$.
Supponiamo che
(i) $\{v_n\}$ e $\{w_n\}$ sono lin. dip. per ogni $n \in \mathbb{N}$
(ii) $v_n \to v_\infty$ e $w_n \to w_\infty$
Allora

v_∞ e w_∞ sono lin. dip.

Tentazione: $a_n v_n + b_n w_n = 0$

$a_\infty \; v_\infty \quad b_\infty \; w_\infty$

non le so

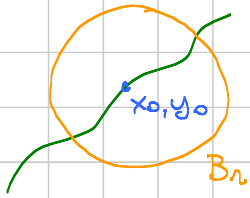
$\boxed{\text{Dim.}}$ Applico il lemma con $A_n = (v_n | w_n)$. Rango $A_n \leq 1$
$\Rightarrow$ Rango $A_\infty \leq 1$. $\square$

—o—o—

ANALISI 2 — LEZIONE 085

Titolo nota 09/03/2016

$\boxed{\text{Dim per penalizzazione}}$ $n = 2$ e $k = 1$



$f(x,y)$ da fare max / min

$g(x,y) = 0$ vincolo V

(x_0, y_0) p.to di max / min locale su V

Wlog supponiamo che (x_0, y_0) sia p.to di min e sia $r > 0$ t.c. il minimo è in

$$\overline{B}_r((x_0, y_0))$$

$\boxed{\text{Step 1}}$ Possiamo supporre che (x_0, y_0) sia p.to di min. STRETTO, cioè

$$f(x,y) > f(x_0, y_0)$$

per ogni $(x,y) \in V \cap B_r$ con $(x,y) \neq (x_0, y_0)$

Se non lo è, basta considerare

$$\hat{f}(x,y) = f(x,y) + (x - x_0)^{22} + (y - y_0)^{22}$$

Questa ha min. stretto in (x_0, y_0) e $\nabla \hat{f}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)$

$\boxed{\text{Step 2}}$ Considero $f_n(x,y) := f(x,y) + n\, g^2(x,y)$

$\uparrow$ penalizzazione

Ora f_n è continua, $\overline{B}_r$ è compatto, quindi per ogni $n \in \mathbb{N}$ avremo che f_n ammette minimo in qualche punto

$$(x_n, y_n) \in \overline{B}_r$$

Idea: $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$. D'altra parte

$$0 = \nabla f_n(x_n, y_n) = \nabla f(x_n, y_n) + 2n\, g(x_n, y_n) \nabla g(x_n, y_n)$$

Quindi $\nabla f(x_n, y_n)$ e $\nabla g(x_n, y_n)$ sono lin. dip.
Passando al limite ed usando il lemma otteniamo che

$$\nabla f(x_0, y_0) \text{ e } \nabla g(x_0, y_0)$$

sono lin. dip. $\nearrow \nabla g(x_0, y_0) = 0$
$\searrow \exists \lambda$ t.c. $\nabla f = \lambda \nabla g$

$\boxed{\text{Step 3}}$ Mostriamo che $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$.
Intanto osserviamo che

$$f_n(x_n, y_n) \underset{\text{è min.}}{\leq} f_n(x_0, y_0) \underset{\text{def.}}{=} f(x_0, y_0) \qquad (*)$$

A meno di s.succ., che non riscrivo, $(x_n, y_n) \to (x_\infty, y_\infty)$ per compattezza.

$\to$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) \in V$. Se così non fosse $g(x_\infty, y_\infty) \neq 0$, ma allora

$$f_n(x_n, y_n) = \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\downarrow\, f(x_\infty, y_\infty)} + \underbrace{n}_{\downarrow\, +\infty} \underbrace{g^2(x_n, y_n)}_{\downarrow\, >0} \to \underset{\text{impossibile per } (*)}{+\infty}$$

$\to$ Dico che $(x_\infty, y_\infty) = (x_0, y_0)$. Se così non fosse

$$f_n(x_n, y_n) \geq \underbrace{f(x_n, y_n)}_{\downarrow\, f(x_\infty, y_\infty)}$$

Quindi

$$\liminf f_n(x_n, y_n) \geq f(x_\infty, y_\infty) \underset{\text{perché il minimo è stretto}}{>} f(x_0, y_0)$$

il che contraddice $(*)$

$\boxed{\text{Step 4}}$ Poiché $(x_n, y_n) \to (x_0, y_0)$, definitivamente

$$(x_n, y_n) \in B_r((x_0, y_0)) \text{ aperta}$$

cioè (x_n, y_n) è p.to di min. interno, quindi $\nabla f_n(x_n, y_n) = 0$ e si conclude come nell'idea iniziale.

— o — o —

Cosa cambia nel caso generale? Poco o nulla.
Si pone

$$f_n(x) := f(x) + n g_1^2(x) + \ldots + n g_k^2(x)$$

$$f(x) + n g_1^2(x) + n^2 g_2^4(x) + \ldots$$

A n fisso c'è un p.to di minimo x_n, che definitivamente è interno e

$$0 = \nabla f_n(x_n) = \nabla f(x_n) + 2n g_1(x_n) \nabla g_1(x_n) + \ldots + \ldots \nabla g_k(x_n)$$

Ad n fisso $\{\nabla f(x_n), \nabla g_1(x_n), \ldots, \nabla g_k(x_n)\}$ sono lin. dip.

quindi per il lemma al limite la matrice

$$\nabla f(x_0), \nabla g_1(x_0), \ldots, \nabla g_k(x_0)$$

ha rango $\leq k$. Da qui solita conclusione

→ o gli ultimi k hanno rango $\leq k-1$ ⇝ caso (1)
→ " " " " " " k, quindi il primo è loro comb. lin. ⇝ caso (2).

— o — o —

Esercizio $f(x,y) = (x+y, x^2+y^2)$ $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

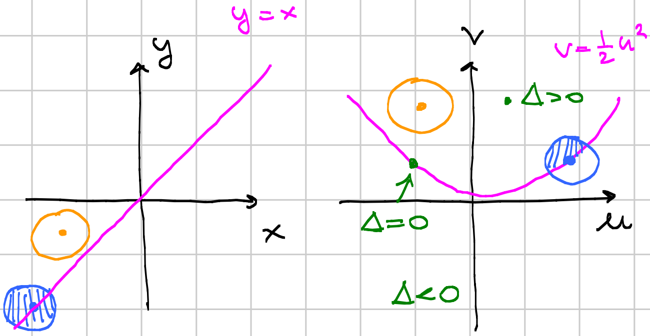
Domande: → dove è loc. invertibile?
→ iniettiva?
→ surgettiva? Immagine?

Locale invertibilità

$$Jf(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2x & 2y \end{pmatrix} \qquad \text{Det}: 2(y-x)$$

Invertibile nei p.ti con $x \neq y$.

Per pensarla scrivo $u = x+y$
$v = x^2+y^2$



L'immagine di $y=x$ è $(t,t) \to (2t, 2t^2)$
$v = \frac{1}{2}u^2$

Surgettività. Certamente i p.ti con $v<0$ non stanno nell'imm.

$$x+y \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \rightsquigarrow (x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2) \rightsquigarrow v \geq \frac{1}{2}u^2$$
$$u^2 \leq 2v$$

quindi i p.ti sotto la parabola $\notin$ Imm.

Idea. Tutti i p.ti sopra la parabola $\in$ Imm. ⇝ risolvo il sist

$$\begin{cases} x+y = u \\ x^2+y^2 = v \end{cases} \qquad y = u-x \rightsquigarrow 2x^2+u^2-2ux = v$$
$$\rightsquigarrow 2x^2 - 2ux + (u^2-v)$$

$$x_{1,2} = \frac{u \pm \sqrt{u^2-2u^2+2v}}{2} = \frac{u \pm \sqrt{2v-u^2}}{2}$$

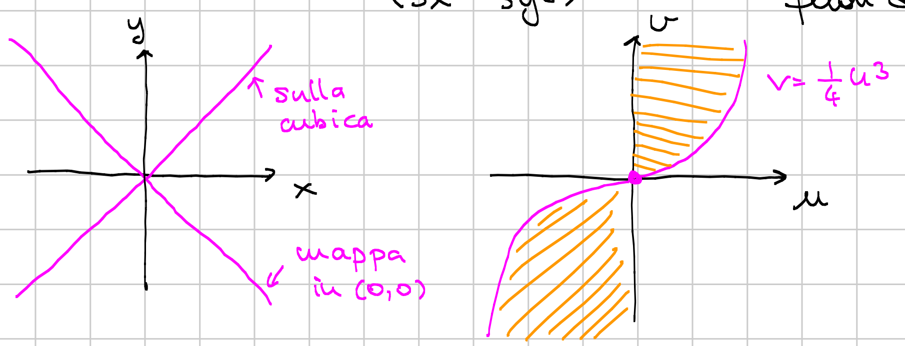
$y := u-x$

Si vede abbastanza facilmente che per ogni (u,v) sopra esistono 2 soluzioni, una con $y > x$, una con $y < x$

Inoltre f ristretta a ciascuno dei 2 semipiani a valori sopra la parabola è glob. invertibile.

Esempio 2 $\quad f(x,y) = (x+y,\, x^3+y^3)$

Locale invertibilità: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3x^2 & 3y^2 \end{pmatrix} = Jf \qquad \text{Det} = 3(y^2-x^2) \neq 0$ fuori dalle bisettrici



$y = x \rightsquigarrow (2t, 2t^3) \rightsquigarrow v = \frac{1}{4}u^3$

$y = -x \rightsquigarrow (0,0) \rightsquigarrow$ ADDIO INIETTIVITÀ

$\begin{cases} x+y = u \\ x^3+y^3 = v \end{cases} \rightsquigarrow y = u-x \rightsquigarrow \cancel{x^3} + u^3 - 3u^2x + 3ux^2 - \cancel{x^3} = v$

$\rightsquigarrow 3ux^2 - 3u^2x + (u^3-v) = 0$

$$x_{1,2} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{9u^4 - 12u^4 + 12uv}}{6u} = \frac{3u^2 \pm \sqrt{12uv - 3u^4}}{6u}$$

I p.ti (u,v) nell'immagine devono avere $4uv - u^4 \geq 0$

$u\left(v - \frac{1}{4}u^3\right) \geq 0$

I p.ti con $u=0$ e $v \neq 0$ non stanno nell'immagine.
L'idea è che ciascuno dei 4 "triangoli" mappi $1-1$ con una delle 2 componenti arancioni (segue dalle formule)

—o—o—

Esempio 3 $u = x^2 + \sin(xy) - y$
$v = y^4 - \arctan(xy^2) + x$

→ Localmente invertibile in un intorno dell'origine $Jf = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

→ surgettiva? Sommo:

$$u+v = \underbrace{x^2+y^4 + \text{robucola}}_{g(x,y)}$$

$\lim\limits_{x^2+y^2 \to +\infty} g(x,y) = +\infty$, quindi per W. gen g ha minimo

⇝ $u+v$ non può assumere valori sotto il minimo.

ANALISI 2 — LEZIONE 086

Titolo nota 11/03/2016

Postilla sui molt. di Lagrange

$f(x)$ ⇝ funzione da fare max/min su V

$g_1(x) = \dots = g_k(x)$ ⇝ vincoli che def. V

Le condizioni in un p.to x_0 di max/min locale si possono riscrivere come

(1) $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. x_0 è p.to stazionario per

$$\lambda_1 g_1(x) + \dots + \lambda_k g_k(x)$$

(2) $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. x_0 è p.to stazionario per

$$f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

Volendo (2) si può anche riscrivere dicendo

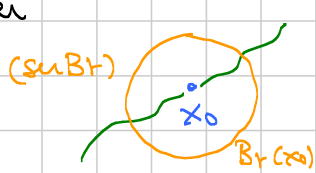
(2') $\exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_k$ t.c. $(x_0, \lambda_1, \dots, \lambda_k)$ è p.to stazionario per

$$\Phi\underbrace{(x, \lambda_1, \dots, \lambda_k)}_{n+k \text{ variabili}} := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$

(L'annullarsi delle $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i}$ sono le eq. del vincolo)

$\boxed{\text{Lemma}}$ (Cond. suff. affinché x_0 sia p.to di min. loc. su V)
Supponiamo che x_0 verifichi la cond. nec. (2). Supponiamo in aggiunta che x_0 sia p.to di min. locale per

$$F(x) := f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x)$$



Allora x_0 è p.to di min. per $f(x)$ su V.

$\boxed{\text{Dim.}}$ Per ogni $x \in B_r(x_0) \cap V$ vale la relazione $F(x) \geq F(x_0)$ dunque

$$f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \dots - \lambda_k g_k(x) \geq f(x_0) - \lambda_1 g(x_0) - \dots - \lambda_k g(x_0)$$

Essendo su V tutti i termini con le g se ne vanno, quindi $f(x) \geq f(x_0)$.

— o — o —

Esempio 1 Consideriamo l'insieme V di eq.

$$\begin{matrix} g_1 \\ g_2 \end{matrix} \begin{cases} x + y + z x^2 + \arctan z = 0 \\ \sin x - y^2 = 0 \end{cases} \qquad (0,0,0) \in V$$

$\exists\, r > 0$ t.c. $V \cap B_r((0,0,0))$ è una curva

Trovare il vettore tangente alla curva.

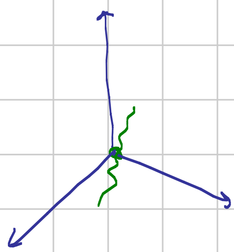
$$Jg(0,0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Non posso (almeno immediatamente) ricavare y e z in funzione di x

Posso ricavare x e y in funzione di z : $x(z)$, $y(z)$.

Teo. funz. implicita $\Rightarrow$ in un intorno di $(0,0,0)$ l'insieme V si scrive come

$$V = \{ (x(z), y(z), z) : z \in (-\delta, \delta) \}$$
$$(x(t), y(t), t) : t \in (-\delta, \delta)$$



"Il" vettore tangente sarà $(x'(0), y'(0), 1)$

Le derivate le posso calcolare con la formula generale

$$\begin{pmatrix} x'(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = -\left[J_{x,y}\, g(0,0,0)\right]^{-1}\left[J_z\, g(0,0,0)\right]$$

$$= -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e si fa il conto.}$$

In alternativa posso calcolare i polinomi di Taylor di $x(z)$ e $y(z)$ fino all'ordine che voglio.
Ad esempio all'ordine 1:

$$x(z) = az + o(z) \qquad\qquad y(z) = bz + o(z)$$

Sostituisco nelle eq.:

$$\begin{aligned} az + bz + \arctan z + o(z) &= 0 \\ \sin(az) + o(z) &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{cases} (a+b+1)z + o(z) = 0 \\ az + o(z) = 0 \end{cases}$$

$\rightsquigarrow a = 0,\ b = -1$

La retta tangente a V nell'origine è

$$\boxed{(0,0,0) + t(0,-1,1)}$$

Calcoliamo $\nabla g_1(0,0,0) = (1,1,1)$
$\nabla g_2(0,0,0) = (1,0,0)$

$g_1(x,y,z) = 0$ è una sup. vicino a $(0,0,0)$ che ha come piano tangente quello $\perp$ a $\nabla g_1(0,0,0)$ cioè
$x+y+z = 0$

$g_2(x,y,z) = 0$ è una sup. pure con piano tangente $x = 0$

La retta tangente a V è l'intersezione dei 2 piani tang.

Oss. Volendo rappresentare la sup. $g_2(x,y,z)=0$ come grafico possiamo solo farlo nella forma

$$x = \varphi(y,z)$$

(l'unica deriv. parz. di $g_2 \neq 0$ in $(0,0,0)$ è ∂_x)

— o — o —

Esempio 2 $\quad f(x,y,z) = (x^2-y^2,\ y^2+z^3,\ z^3+x^4)$

$f(1,1,1) = (0,2,2)$. Vediamo se $(0,2,2) \in \text{Int}\,(\text{Im}\, f)$

Strategia: calcolo $Jf(1,1,1)$. Se ha rank $= 3$, allora $f(1,1,1)$ è interno all'immagine

uguale a dim. spazio di arrivo

Se fosse $f(x,y,z) := (x^2-y^2,\ y^2+z^3)$ basterebbe rango 2.

Esempio 3 $\quad \underbrace{y^2+y^4+x\arctan x+x^6}_{f(x,y)} = 1+\frac{\pi}{4}$

Definisce un sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$. Come è fatto?

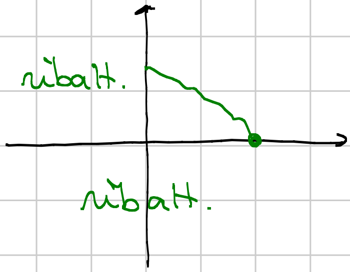
- Non vuoto e limitato: $f(1,0) = 1+\frac{\pi}{4}$ e $\displaystyle\lim_{x^2+y^2\to+\infty} f(x,y) = +\infty$

  $\Rightarrow$ compatto

- Simmetrico rispetto asse x e asse y: se faccio
  $(x,y) \rightsquigarrow (x,-y)$ non cambia nulla
  $(x,y) \rightsquigarrow (-x,y)$ " " "
  Quindi basta capire come è fatto nel 1° quadrante

- Per ogni $x \in [0,1]$ esiste unico y t.c. $(x,y) \in$ insieme
  " " $x > 1$ non esiste nessun y t.c. $(x,y) \in$ insieme

Basta osservare che, fissato x, la funzione



$$y \to y^2 + y^4 + \dots$$

è strett. monotona per $y \geq 0$ e $\to +\infty$ per $y \to +\infty$, quindi basta vedere quando

$$f(x,0) \leq 0$$

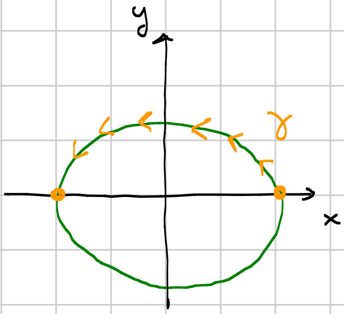
il che accade $\iff x \in [0,1]$

- È regolare? Sì è C^∞

Basta dimostrare che $\nabla f(x,y) \neq (0,0)$ in tutti i p.ti dell'insieme. Qui

$$\nabla f(x,y) = (0,0) \iff (x,y) = (0,0)$$

- Sia γ la parte alta e sia



$$\omega = y e^{xy} dx + x e^{xy} dy$$

$$\int_\gamma \omega = ?$$

La forma è esatta, quindi basta fare una primitiva e fare la diff. tra i valori agli estremi (che conosco).

- ruotare γ intorno all'asse y, ottenere una sup. S, e calcolare il flusso attraverso S (orientata in qualche modo) di un campo $\vec{E}$ a div nulla

Essendo a div. nulla è un rotore, quindi posso cambiare la sup. a parità di bordo, quindi posso fare il flusso su un cerchio