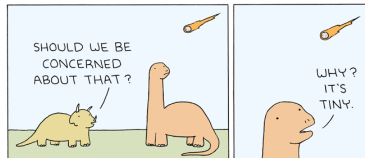




Matematica e asteroidi: come evitare di fare la fine dei dinosauri

Alessio Del Vigna¹

¹Department of Mathematics (UniPi)

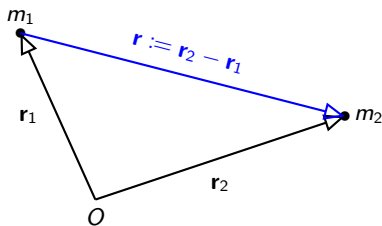


Il problema dei due corpi

Introduzione

Definizione

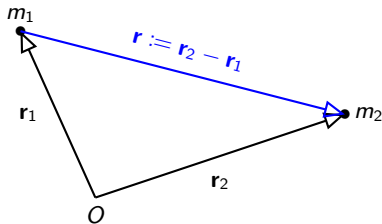
Il *problema dei due corpi* è lo studio del moto nello spazio di due masse puntiformi m_1 e m_2 , soggette soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale.



Introduzione

Definizione

Il *problema dei due corpi* è lo studio del moto nello spazio di due masse puntiformi m_1 e m_2 , soggette soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale.



- 1 La forza gravitazionale su ciascuna delle due masse ha modulo $\frac{Gm_1m_2}{r^2}$.
- 2 La forza gravitazionale è attrattiva.



Equazioni del moto
(6 equazioni differenziali)

$$\begin{cases} m_1 \ddot{\mathbf{r}}_1 = G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \\ m_2 \ddot{\mathbf{r}}_2 = -G \frac{m_1 m_2}{r^3} \mathbf{r} \end{cases}$$

Riduzione dei gradi di libertà

Il *centro di massa* del sistema è il punto

$$\mathbf{r}_{cm} := \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}.$$

Sul sistema non agiscono forze esterne, il teorema del centro di massa garantisce che il centro di massa ha accelerazione nulla



Il sistema di riferimento centrato nel centro di massa \mathbf{r}_{cm} è inerziale

Nel riferimento del centro di massa chiamiamo ancora \mathbf{r}_1 e \mathbf{r}_2 i vettori posizione dei due corpi. Poiché $m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 = \mathbf{0}$ si ha

$$\mathbf{r}_1 = -\frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} \quad \text{e} \quad \mathbf{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}.$$

Riduzione dei gradi di libertà

Sostituendo nelle equazioni del moto si ottiene l'equazione del moto relativo:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{\mu M}{r^3} \mathbf{r}$$

dove

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad \text{e} \quad M := m_1 + m_2$$

sono rispettivamente la *massa ridotta* e la *massa totale* del sistema.

Riduzione dei gradi di libertà

Sostituendo nelle equazioni del moto si ottiene l'equazione del moto relativo:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = -G \frac{\mu M}{r^3} \mathbf{r}$$

dove

$$\mu := \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \frac{1}{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}} \quad \text{e} \quad M := m_1 + m_2$$

sono rispettivamente la *massa ridotta* e la *massa totale* del sistema.

Osservazione

- 1 L'equazione del moto relativo è un sistema di 3 equazioni differenziali (prima erano 6!).
- 2 L'equazione ottenuta è l'equazione del moto di un sistema formato da un corpo di massa pari alla massa ridotta μ , soggetto soltanto all'attrazione gravitazionale di un corpo di massa M , che è fisso nell'origine.

Riduzione ad un piano

Il *momento angolare totale* del sistema è $\mathbf{J} := m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Le forze agenti sul sistema hanno momento nullo (per esempio rispetto a O)



Il momento angolare totale si conserva

Riduzione ad un piano

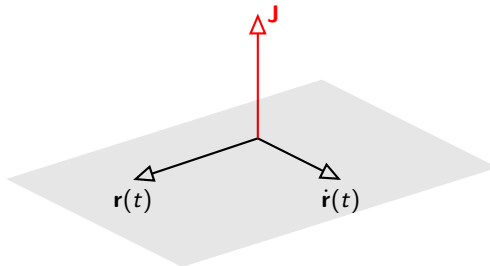
Il *momento angolare totale* del sistema è $\mathbf{J} := m_1 \mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{r}}_2 = \mu \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$.

Le forze agenti sul sistema hanno momento nullo (per esempio rispetto a O)



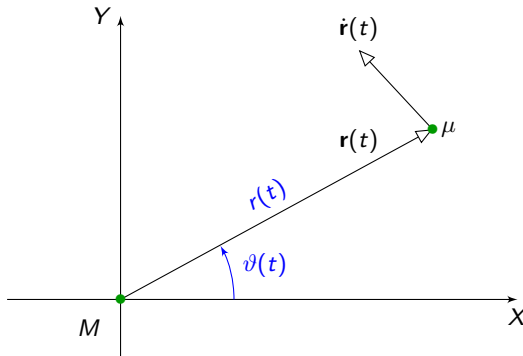
Il momento angolare totale si conserva

Il momento angolare totale è perpendicolare alla posizione e alla velocità, quindi il moto avviene su un piano, ossia $\mathbf{r}(t)$ e $\dot{\mathbf{r}}(t)$ giacciono sempre sullo stesso piano.



Riduzione ad un piano

Il moto viene quindi studiato sul piano dell'orbita in coordinate polari: distanza dall'origine $r(t)$ e angolo $\vartheta(t)$ rispetto ad un asse.



La soluzione

Teorema

Le soluzioni del problema dei due corpi ridotto sono della forma

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos \nu(t)},$$

dove $p := \frac{J^2}{GM\mu^2}$, $e := \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^2\mu^2}}$, E è l'energia totale e $\nu(t)$ è un angolo che differisce da $\vartheta(t)$ per una costante.

Capiamoci qualcosa!

- 1 Che curva si ottiene per $e = 0$?

La soluzione

Teorema

Le soluzioni del problema dei due corpi ridotto sono della forma

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos \nu(t)},$$

dove $p := \frac{J^2}{GM\mu^2}$, $e := \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^2\mu^2}}$, E è l'energia totale e $\nu(t)$ è un angolo che differisce da $\vartheta(t)$ per una costante.

Capiamoci qualcosa!

- 1 Che curva si ottiene per $e = 0$? Una circonferenza.

La soluzione

Teorema

Le soluzioni del problema dei due corpi ridotto sono della forma

$$r(t) = \frac{p}{1 + e \cos \nu(t)},$$

dove $p := \frac{J^2}{GM_\mu^2}$, $e := \sqrt{1 + \frac{2EJ^2}{G^2M^2\mu^2}}$, E è l'energia totale e $\nu(t)$ è un angolo che differisce da $\vartheta(t)$ per una costante.

Capiamoci qualcosa!

- 1 Che curva si ottiene per $e = 0$? Una circonferenza.
- 2 Se $e > 0$, lungo l'orbita c'è un punto di distanza minima, detto *pericentro*. Questo si ottiene per $\nu = 0$ e si ha

$$r_{min} = \frac{p}{1 + e}.$$

La soluzione: il caso $0 < e < 1$

Supponiamo $0 < e < 1$.

- 1 Scriviamo l'espressione della soluzione in coordinate cartesiane ($x = r \cos \nu$ e $y = r \sin \nu$).
- 2 Si ottiene

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $a = \frac{p}{1-e^2}$, $b = a\sqrt{1-e^2}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

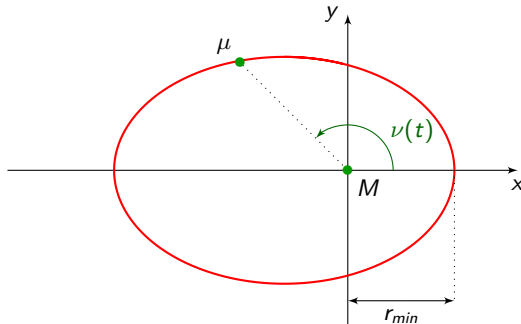
La soluzione: il caso $0 < e < 1$

Supponiamo $0 < e < 1$.

- 1 Scriviamo l'espressione della soluzione in coordinate cartesiane ($x = r \cos \nu$ e $y = r \sin \nu$).
- 2 Si ottiene

$$\frac{(x + c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

con $a = \frac{p}{1-e^2}$, $b = a\sqrt{1-e^2}$ e $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Ellisse con un fuoco nell'origine.

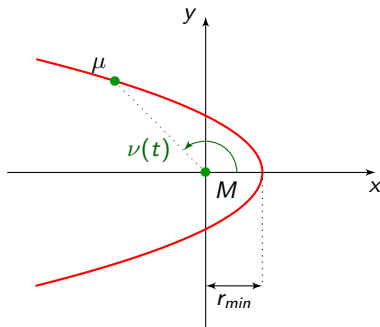


La soluzione: il caso $e \geq 1$

Supponiamo $e = 1$.

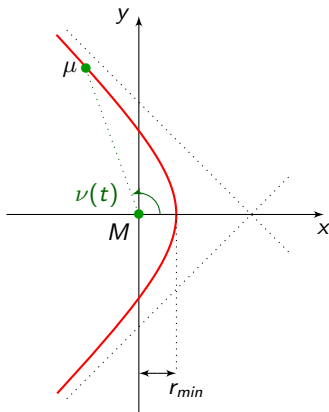
- 1 Si ottiene la parabola di equazione

$$x = \frac{p^2 - y^2}{2p}.$$



Supponiamo $e > 1$.

- 1 Si ottiene una soluzione iperbolica.



Il problema degli N corpi e il caos

Il problema degli N corpi

Definizione

Il *problema degli N corpi* è lo studio del moto nello spazio di $N \geq 2$ masse puntiformi m_1, \dots, m_N , soggette soltanto alla loro mutua interazione gravitazionale.

Equazioni del moto:

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}, \quad i = 1, \dots, N$$

dove $\mathbf{r}_{ij} := \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un problema si dice *integrabile* quando può essere risolto analiticamente in modo esplicito.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un problema si dice *integrabile* quando può essere risolto analiticamente in modo esplicito.

Definizione

Un *integrale primo* è una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un problema.

Ad esempio, l'energia totale del sistema è un integrale primo del problema degli N corpi.

Integrali primi e integrabilità

Definizione

Un problema si dice *integrabile* quando può essere risolto analiticamente in modo esplicito.

Definizione

Un *integrale primo* è una funzione che rimane costante lungo le soluzioni di un problema.

Ad esempio, l'energia totale del sistema è un integrale primo del problema degli N corpi.

Il *teorema di Liouville-Arnold-Yost* mostra che l'esistenza di un numero di integrali primi “con buone proprietà” pari al numero di gradi di libertà del problema implica l'integrabilità del problema.

Integrabilità del problema dei due corpi

Quanti integrali primi abbiamo trovato nel problema dei due corpi?

- 1 La posizione iniziale e la velocità del centro di massa del sistema: 6 integrali primi.
- 2 Il momento angolare totale del sistema: 3 integrali primi.
- 3 L'energia totale: 1 integrale primo.

Si può dimostrare che di questi 10 integrali primi, solo 6 sono “buoni”.



Il teorema di Liouville-Arnold-Yost implica che
il problema dei due corpi è integrabile

E se i corpi sono più di due?

Cosa si sa?

- 1 Nel problema dei 3 corpi i gradi di libertà del problema sono 9.
- 2 Esiste un complicato teorema di Poincaré che afferma la non esistenza di ulteriori integrali primi (esprimibili algebricamente in funzione della posizione e della velocità dei corpi).
- 3 Ci sono dimostrazioni di non integrabilità del problema in molti casi particolari.



Si è portati a pensare (non dimostrato) che il problema non sia integrabile

E se i corpi sono più di due?

Cosa si sa?

- 1 Nel problema dei 3 corpi i gradi di libertà del problema sono 9.
- 2 Esiste un complicato teorema di Poincaré che afferma la non esistenza di ulteriori integrali primi (esprimibili algebricamente in funzione della posizione e della velocità dei corpi).
- 3 Ci sono dimostrazioni di non integrabilità del problema in molti casi particolari.



Si è portati a pensare (non dimostrato) che il problema non sia integrabile



Per trattare il problema degli N corpi con $N \geq 3$ si deve ricorrere a delle tecniche di *risoluzione numerica* (cioè al calcolatore) delle equazioni del moto

Il caos

Caos deterministico



Comportamenti complessi possono derivare da sistemi dinamici molto semplici

Un accostamento ossimorico:

- 1 i modelli di tipo *deterministico* vengono in genere associati all'idea di fenomeni regolari, prevedibili, che si ripetono nel tempo;
- 2 il termine *caotico* viene riferito a situazioni caratterizzate da assenza di regole e da imprevedibilità.

Il caos

Caos deterministico



Comportamenti complessi possono derivare da sistemi dinamici molto semplici

Un accostamento ossimorico:

- 1 i modelli di tipo *deterministico* vengono in genere associati all'idea di fenomeni regolari, prevedibili, che si ripetono nel tempo;
- 2 il termine *caotico* viene riferito a situazioni caratterizzate da assenza di regole e da imprevedibilità.

Ci sono sistemi deterministici, cioè privi di aleatorietà nelle equazioni che li definiscono, che sono in grado di generare andamenti estremamente complessi, imprevedibili, tanto da risultare quasi indistinguibili da sequenze di eventi generati attraverso processi aleatori.

Esempi di sistemi caotici: i biliardi

Biliardo stadio. Si tratta di un biliardo ottenuto da due parti semicircolari attaccate sul lato corto di un tavolo rettangolare.



Due tavoli rettangolari. Vediamo cosa accade con due biliardi rettangolari, molte palle da biliardo, e quasi identiche condizioni iniziali.

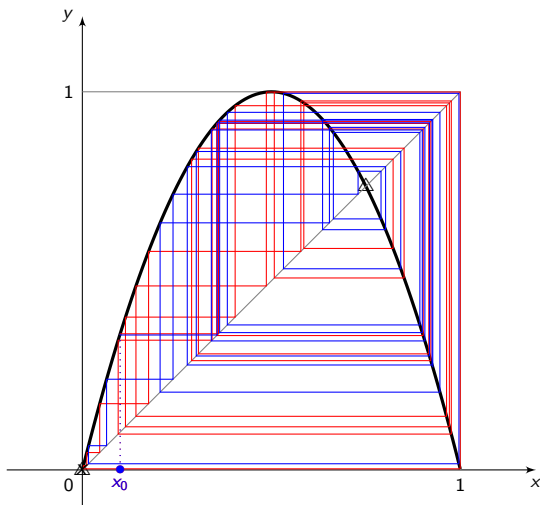


Esempi di sistemi caotici: una funzione quadratica

Iterazione della funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 4x(1 - x)$.

Esempi di sistemi caotici: una funzione quadratica

Iterazione della funzione $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $f(x) = 4x(1 - x)$.



Il tratto distintivo del caos

Definizione

Si dice che un sistema ha *dipendenza sensibile alle condizioni iniziali* se arbitrariamente vicino ad ogni punto se ne trova un altro la cui evoluzione diverge da quella del primo.

La dipendenza sensibile alle condizioni iniziali amplifica (esponenzialmente) l'errore introdotto dalle approssimazioni iniziali.

Come giustificiamo l'utilizzo di sistemi caotici per fare previsioni?



Il tratto distintivo del caos

Definizione

Si dice che un sistema ha *dipendenza sensibile alle condizioni iniziali* se arbitrariamente vicino ad ogni punto se ne trova un altro la cui evoluzione diverge da quella del primo.

La dipendenza sensibile alle condizioni iniziali amplifica (esponenzialmente) l'errore introdotto dalle approssimazioni iniziali.

Come giustificiamo l'utilizzo di sistemi caotici per fare previsioni?



Usare tecniche di tipo probabilistico per lo studio di dei sistemi caotici rende di nuovo possibile fare delle previsioni.

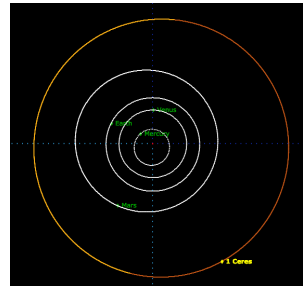
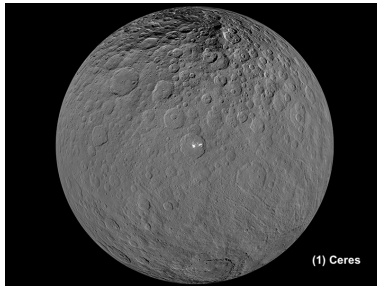
Asteroidi

Asteroidi

Un *asteroide* è un corpo minore del Sistema Solare (in orbita attorno al Sole).

Il primo esempio: (1) Cerere

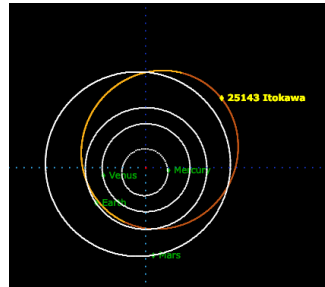
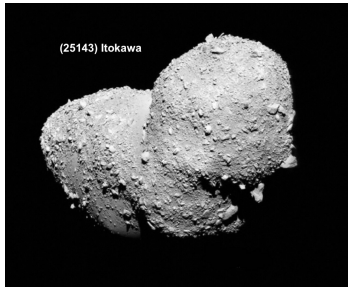
- L'asteroide **(1) Cerere** è stato scoperto nel 1801 da Giuseppe Piazzi, ed è stato il primo asteroide ad essere stato osservato.
- È l'oggetto più grande della fascia principale degli asteroidi, con un diametro di circa 940 km.



Asteroidi

Due asteroidi da missione spaziale

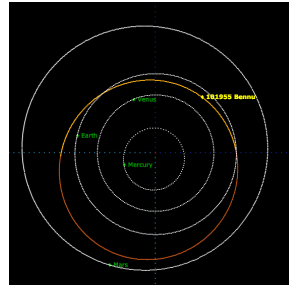
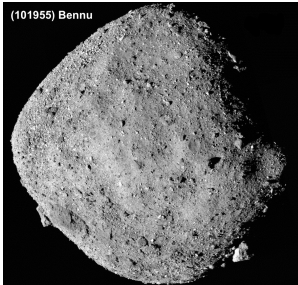
- L'asteroide **(25143) Itokawa** è stato raggiunto dalla missione spaziale giapponese Hayabusa nel 2005.
- Ha un diametro medio di 330 m.



Asteroidi

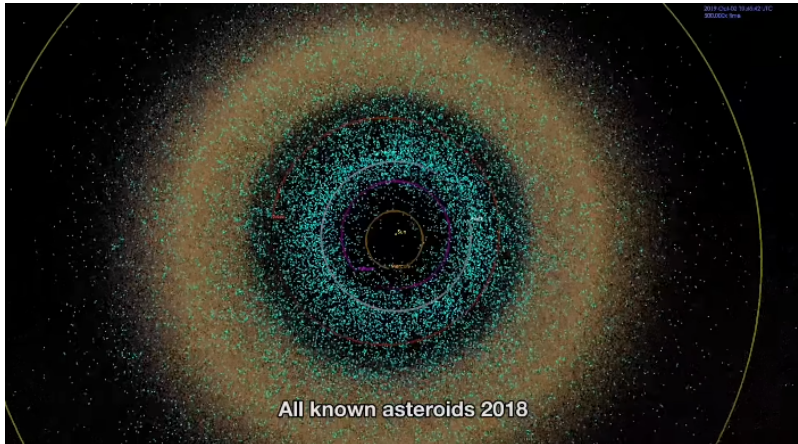
Due asteroidi da missione spaziale

- L'asteroide **(101955) Benu** è oggetto della missione spaziale OSIRIS-REx (NASA). La sonda è arrivata alla superficie dell'asteroide il 3 dicembre 2018.
- Ha un diametro medio di 492 m.



Asteroidi: quanti sono e dove trovarli

Ad oggi (febbraio 2019) si conoscono **752705** asteroidi

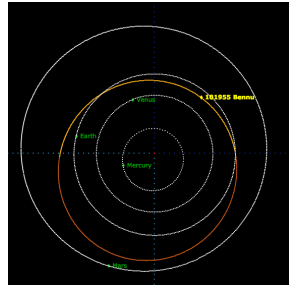
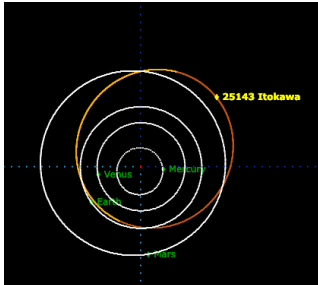


Asteroidi vicini alla Terra

Un *Near-Earth Asteroid* (NEA) è un asteroide la cui orbita passa vicino o incrocia l'orbita della Terra. Più precisamente, i NEA sono caratterizzati da un perielio $q \leq 1.3$ au.

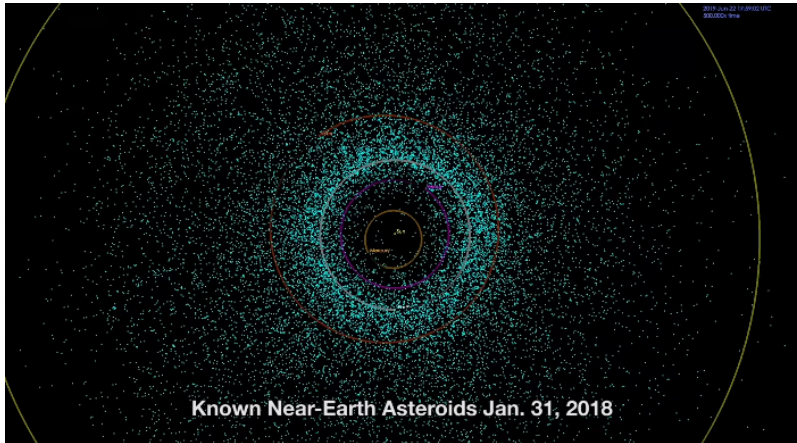
Esempio

Gli asteroidi (25143) Itokawa e (101955) Bennu sono NEA, mentre (1) Cerere è un asteroide della fascia principale.



Asteroidi vicini alla Terra

Ad oggi (febbraio 2019) si conoscono **22206** NEA



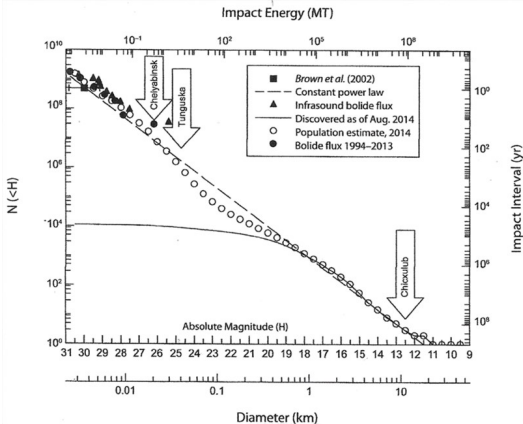
Quanto spesso gli asteroidi impattano con la Terra?

La frequenza degli impatti di asteroidi è legata alla loro dimensione: gli oggetti più piccoli colpiscono la Terra più frequentemente di quelli più grandi



Quanto spesso gli asteroidi impattano con la Terra?

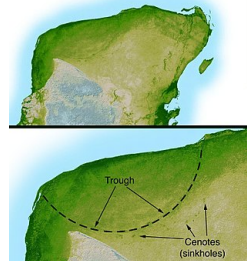
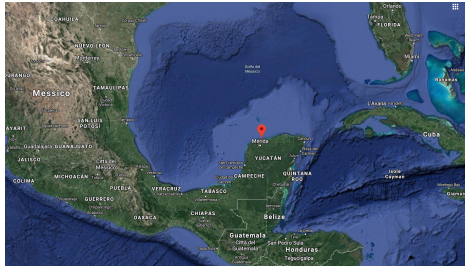
La frequenza degli impatti di asteroidi è legata alla loro dimensione: gli oggetti più piccoli colpiscono la Terra più frequentemente di quelli più grandi



Un po' di cronistoria: Chicxulub (\simeq 65 milioni di anni fa)

Chicxulub e l'estinzione dei dinosauri

- Il cratere di Chicxulub è un antico cratere da impatto sepolto sotto la penisola dello Yucatán.
- La data della struttura d'impatto è compatibile con l'epoca dell'estinzione dei dinosauri 65 milioni di anni fa, tra il Cretaceo e il Paleogene, e con un diametro dell'asteroide pari a 12 km.
- Frequenza: 100 milioni di anni.



Un po' di cronistoria: Tunguska (1908)

L'evento di Tunguska

- La mattina del 30 giugno 1908 un'esplosione squarciò il cielo di Tunguska (Siberia), abbattendo milioni di alberi della foresta circostante.
- Si stima che l'esplosione sia avvenuta a 5-10 km di altezza e che sia stata visibile fino a 700 km di distanza.
- Ad esplodere è stato un asteroide o una cometa di diametro di circa 50 m.
- Frequenza: 200-300 anni.



Un po' di cronistoria: 2008 TC3 (2008)

2008TC3: il primo impatto predetto

- Asteroide di circa 4 metri di diametro, esploso a 37 km di altezza sopra il deserto del Sudan, il 7 ottobre 2008.
- È stata la prima volta in cui è stato identificato un asteroide prima che impattasse la Terra.
- Frequenza: 3-4 anni.



Un po' di cronistoria: 2008 TC3 (2008)



Un po' di cronistoria: Chelyabinsk (2013)

Chelyabinsk: un impatto non predetto

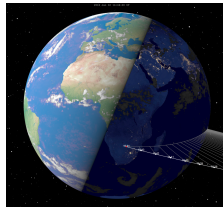
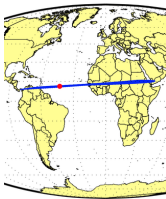
- La mattina del 15 febbraio 2013 un asteroide di circa 15 metri di diametro è entrato nell'atmosfera terrestre ed è esploso alcune decine di chilometri di altezza.
- L'esplosione è stata di 500 chiloton (la bomba atomica di Nagasaki liberò un'energia di 10-30 chiloton).
- Frequenza: 50 anni.



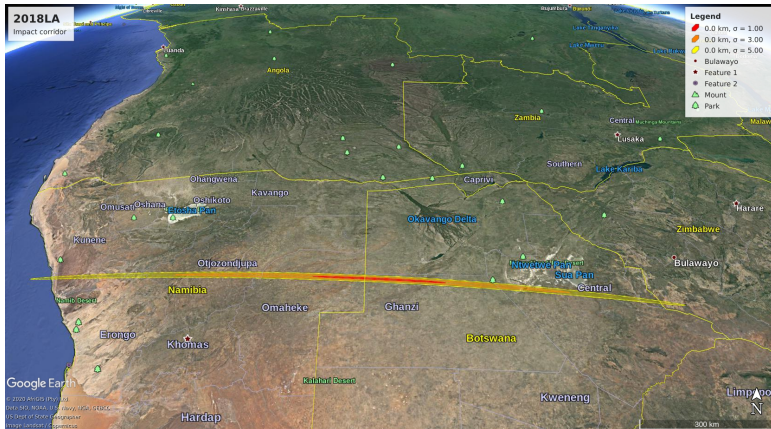
Un po' di cronistoria: 2014 AA, 2018 LA e 2019 MO

Gli ultimi tre asteroidi impattati

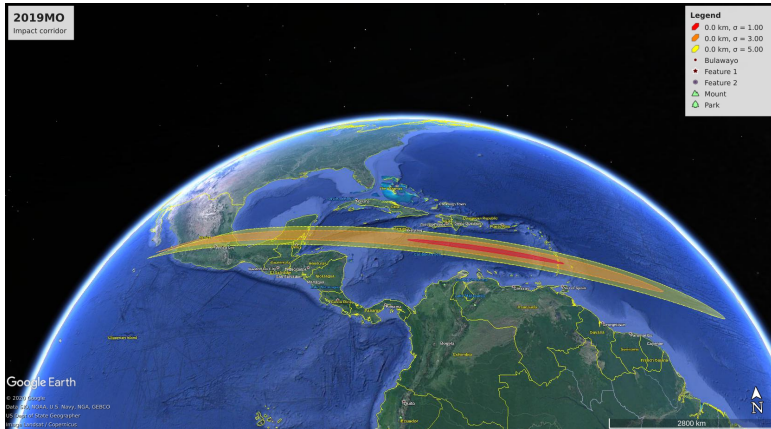
- 2014 AA è un piccolo asteroide (circa 3 metri di diametro) che ha impattato l'atmosfera terrestre il 2 gennaio 2014 sopra l'Oceano Atlantico.
- 2018 LA è un asteroide scoperto 8 ore prima dell'impatto, avvenuto al confine tra Botswana e Sud Africa il 2 giugno 2018.
- 2019 MO è stato scoperto 14 ore prima dell'impatto, avvenuto il 22 giugno 2019 tra la Jamaica e la costa del Sud America.



Un po' di cronistoria: 2018 LA



Un po' di cronistoria: 2019 MO



I NEA sono per definizione potenzialmente pericolosi

Per la mitigazione del rischio da impatto si possono prendere varie misure:

- 1 *Catalogazione.* Avere un catalogo dell'intera popolazione dei NEA è una misura preventiva, che ci permette di conoscere quali asteroidi hanno una probabilità non nulla di impattare la Terra nel futuro.

I NEA sono per definizione potenzialmente pericolosi

Per la mitigazione del rischio da impatto si possono prendere varie misure:

- 1 *Catalogazione.* Avere un catalogo dell'intera popolazione dei NEA è una misura preventiva, che ci permette di conoscere quali asteroidi hanno una probabilità non nulla di impattare la Terra nel futuro.
- 2 *Deflessione.* Una misura che si può adottare per qualche specifico asteroide, anche perché molto difficile da implementare.

I NEA sono per definizione potenzialmente pericolosi

Per la mitigazione del rischio da impatto si possono prendere varie misure:

- 1 *Catalogazione.* Avere un catalogo dell'intera popolazione dei NEA è una misura preventiva, che ci permette di conoscere quali asteroidi hanno una probabilità non nulla di impattare la Terra nel futuro.
- 2 *Deflessione.* Una misura che si può adottare per qualche specifico asteroide, anche perché molto difficile da implementare.
- 3 *Misure drastiche.* Evacuare intere aree del pianeta, costruzione di rifugi adeguati sono azioni possibili nel caso in cui le misure precedenti falliscano.

I NEA sono per definizione potenzialmente pericolosi

Per la mitigazione del rischio da impatto si possono prendere varie misure:

- 1 *Catalogazione.* Avere un catalogo dell'intera popolazione dei NEA è una misura preventiva, che ci permette di conoscere quali asteroidi hanno una probabilità non nulla di impattare la Terra nel futuro.
- 2 *Deflessione.* Una misura che si può adottare per qualche specifico asteroide, anche perché molto difficile da implementare.
- 3 *Misure drastiche.* Evacuare intere aree del pianeta, costruzione di rifugi adeguati sono azioni possibili nel caso in cui le misure precedenti falliscano.

Catalogare gli asteroidi è l'azione più importante:

osservazione \Rightarrow determinazione orbitale \Rightarrow impact monitoring \Rightarrow follow-up

Il monitoraggio degli impatti serve a prioritizzare l'attività di follow-up

Rilevamento di un asteroide

Come viene osservato un asteroide?

- Gli asteroidi vengono osservati per mezzo di telescopi sufficientemente grandi, perché possono apparire come puntini debolmente luminosi in cielo.
- Differenza rispetto a stelle fisse, galassie, nebulose: sono corpi in movimento.

Due regole per l'individuazione di un asteroide nelle sequenze di immagini dei telescopi:

- il puntino in movimento deve apparire in ogni immagine della sequenza;
- il puntino in movimento deve muoversi in linea retta.

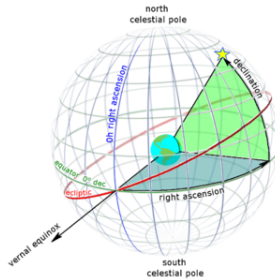
Individuate gli asteroidi (sono quattro)!

Individuate gli asteroidi (sono quattro)!

Cosa si misura?

Quando si osserva un asteroide con un telescopio, che cosa si misura?

- Con le osservazioni ottiche si misurano l'*ascensione retta* e la *declinazione*, due angoli sulla sfera celeste.



- Con le osservazioni radar (più difficili), la *distanza radiale* e la velocità radiale.

Il problema della determinazione orbitale

Problema di *determinazione orbitale*: date $m \geq 3$ osservazioni di un corpo in movimento, determinare l'orbita dell'oggetto che “meglio si adatta” ad esse.

Problemi

- 1 Cosa bisogna determinare per poter dire di aver determinato un'orbita?
- 2 Cosa significa “meglio si adatta”?

Soluzione

- 1 Per determinare un'orbita basta determinare le *condizioni iniziali*, ossia posizione e velocità ad un certo istante di tempo.
Osservazione. Questo basta perché date le condizioni iniziali, le equazioni del moto hanno un'unica soluzione
- 2 Richiediamo che sia minima una certa funzione che quantifica quanto si discosta l'orbita da determinare rispetto alle osservazioni.

Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta che “meglio” li approssima

Cosa vuol dire “meglio”?

Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta che “meglio” li approssima

Cosa vuol dire “meglio”? Richiediamo che la somma dei quadrati delle distanze dei punti da un modello lineare sia minima.

- *Osservazioni.* Sono i tre punti (t_1, r_1) , (t_2, r_2) e (t_3, r_3) .
- *Modello.* Il modello è lineare $r = mt + q$, con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ parametri da determinare.

Riscaldamento: la regressione lineare

Dati $m \geq 3$ punti del piano, determinare la retta che “meglio” li approssima

Cosa vuol dire “meglio”? Richiediamo che la somma dei quadrati delle distanze dei punti da un modello lineare sia minima.

- *Osservazioni.* Sono i tre punti (t_1, r_1) , (t_2, r_2) e (t_3, r_3) .
- *Modello.* Il modello è lineare $r = mt + q$, con $m \in \mathbb{R}$ e $q \in \mathbb{R}$ parametri da determinare.



- *Residui.* Le distanze dei punti dal modello sono $\xi_i = r_i - (mt_i + q)$, con $i = 1, 2, 3$.
- *Funzione obiettivo.* La funzione di cui cerchiamo il minimo è

$$Q(m, q) = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \xi_i^2 = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (r_i - mt_i - q)^2.$$

Riscaldamento: la regressione lineare

Si deve determinare (m^*, q^*) tale che $Q(m^*, q^*)$ è minimo (almeno locale)

Riscaldamento: la regressione lineare

Si deve determinare (m^*, q^*) tale che $Q(m^*, q^*)$ è minimo (almeno locale)

Funziona come in una variabile (più o meno): i candidati sono i punti dove si annullano le derivate di Q rispetto alle sue variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial m}(m, q) = \frac{2}{3} \left(q \sum_{i=1}^3 t_i + m \sum_{i=1}^3 t_i^2 - \sum_{i=1}^3 r_i t_i \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial q}(m, q) = \frac{2}{3} \left(3q + m \sum_{i=1}^3 t_i - \sum_{i=1}^3 r_i \right) = 0 \end{cases}$$

Riscaldamento: la regressione lineare

Si deve determinare (m^*, q^*) tale che $Q(m^*, q^*)$ è minimo (almeno locale)

Funziona come in una variabile (più o meno): i candidati sono i punti dove si annullano le derivate di Q rispetto alle sue variabili.

$$\begin{cases} \frac{\partial Q}{\partial m}(m, q) = \frac{2}{3} \left(q \sum_{i=1}^3 t_i + m \sum_{i=1}^3 t_i^2 - \sum_{i=1}^3 r_i t_i \right) = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial q}(m, q) = \frac{2}{3} \left(3q + m \sum_{i=1}^3 t_i - \sum_{i=1}^3 r_i \right) = 0 \end{cases}$$



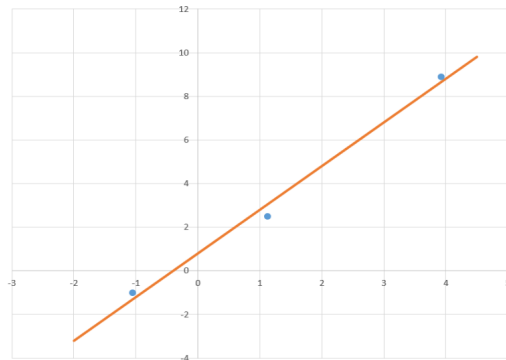
$$m^* = \frac{3 \sum_{i=1}^3 r_i t_i - \sum_{i=1}^3 r_i \sum_{i=1}^3 t_i}{3 \sum_{i=1}^3 t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^3 t_i \right)^2} \quad \text{e} \quad q^* = \frac{\sum_{i=1}^3 r_i}{3} - m^* \frac{\sum_{i=1}^3 t_i}{3}$$

Riscaldamento: la regressione lineare

t	r
1.12	2.50
-1.05	-1.00
3.92	8.90



$$\begin{cases} m^* = 2.006 \\ q^* = 0.799 \end{cases}$$



La determinazione orbitale

Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento:

$$\{(t_i, r_i) : i = 1, \dots, m\},$$

dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile* (tipicamente ascensione retta o declinazione).

La determinazione orbitale

Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento:

$$\{(t_i, r_i) : i = 1, \dots, m\},$$

dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile* (tipicamente ascensione retta o declinazione).

Indichiamo con $\mathbf{y}(t)$ la soluzione dell'equazione del moto con condizioni iniziali \mathbf{y}_0 , da determinare.

La determinazione orbitale

Si hanno $m \geq 3$ osservazioni di un corpo celeste in movimento:

$$\{(t_i, r_i) : i = 1, \dots, m\},$$

dove r è la grandezza osservata, detta anche *osservabile* (tipicamente ascensione retta o declinazione).

Indichiamo con $\mathbf{y}(t)$ la soluzione dell'equazione del moto con condizioni iniziali \mathbf{y}_0 , da determinare.

Definizione

La *funzione di predizione* è la funzione $r(t)$ che, dato un tempo $t \in \mathbb{R}$, restituisce il valore dell'osservabile a quel tempo rispetto all'orbita $\mathbf{y}(t)$ con condizione iniziale \mathbf{y}_0 .

La determinazione orbitale

Definizione

Il *residuo* rispetto alla i -esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

La determinazione orbitale

Definizione

Il *residuo* rispetto alla i -esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

I residui sono funzione dei parametri che si vogliono determinare, tipicamente le 6 componenti delle condizioni iniziali.

La determinazione orbitale

Definizione

Il *residuo* rispetto alla i -esima osservazione è la differenza tra l'osservabile osservata e l'osservabile calcolata, ossia

$$\xi_i := r_i - r(t_i).$$

I residui sono funzione dei parametri che si vogliono determinare, tipicamente le 6 componenti delle condizioni iniziali.

Definizione

Indichiamo con \mathbf{x} i parametri da determinare. La *funzione obiettivo* è

$$Q(\mathbf{x}) := \xi_1(\mathbf{x})^2 + \cdots + \xi_m(\mathbf{x})^2.$$

Si cercano i parametri \mathbf{x}^* , detti *soluzione nominale*, tali che $Q(\mathbf{x}^*)$ assume il suo valore minimo.

La determinazione orbitale

Determinazione orbitale \Rightarrow Orbita nominale \mathbf{x}^* e sua incertezza

Da cosa deriva l'incertezza dell'orbita?

La determinazione orbitale

Determinazione orbitale \Rightarrow Orbita nominale \mathbf{x}^* e sua incertezza

Da cosa deriva l'incertezza dell'orbita?

Risposta analitica

- Oltre all'orbita nominale si accettano anche orbite con valori di Q “prossimi” al minimo.
- Si definisce la *regione di confidenza* $\{\mathbf{x} : Q(\mathbf{x}) \leq Q(\mathbf{x}^*) + 1\}$
- Approssimando Q si può ottenere una approssimazione della regione di confidenza come *ellissoide di confidenza*.

La determinazione orbitale

Determinazione orbitale \Rightarrow Orbita nominale \mathbf{x}^* e sua incertezza

Da cosa deriva l'incertezza dell'orbita?

Risposta analitica

- Oltre all'orbita nominale si accettano anche orbite con valori di Q “prossimi” al minimo.
- Si definisce la *regione di confidenza* $\{\mathbf{x} : Q(\mathbf{x}) \leq Q(\mathbf{x}^*) + 1\}$
- Approssimando Q si può ottenere una approssimazione della regione di confidenza come *ellissoide di confidenza*.

Risposta probabilistica

- Le osservazioni hanno degli errori di misura, che si suppongono di tipo gaussiano.
- Questi errori di osservazione si propagano ai parametri da determinare in modo non lineare. Se la propagazione si suppone di tipo lineare, si ottiene una distribuzione di probabilità di tipo gaussiano, che individuano una regione di incertezza ellissoidale.

Questa regione di incertezza coincide con l'ellissoide di confidenza (teorema dimostrato da Gauss, 1809).

Impact monitoring

Nonostante le osservazioni, l'orbita reale di un asteroide non è nota: una sola delle orbite della regione di confidenza è quella reale, ma non si sa quale.

Il sistema è caotico a causa degli incontri ravvicinati con altri corpi.



Bisogna tenere conto dell'intera regione di confidenza

Scopo dell'impact monitoring

Determinare se la regione di confidenza contiene sottoinsiemi di orbite che avranno un impatto con la Terra. Questi raggruppamenti di orbite di impatto sono detti *impattori virtuali*.

Impact monitoring

Nonostante le osservazioni, l'orbita reale di un asteroide non è nota: una sola delle orbite della regione di confidenza è quella reale, ma non si sa quale.

Il sistema è caotico a causa degli incontri ravvicinati con altri corpi.



Bisogna tenere conto dell'intera regione di confidenza

Scopo dell'impact monitoring

Determinare se la regione di confidenza contiene sottoinsiemi di orbite che avranno un impatto con la Terra. Questi raggruppamenti di orbite di impatto sono detti *impattori virtuali*.

- 1 *Metodi Monte Carlo*. La regione di confidenza viene campionata seguendo una densità di probabilità.
- 2 *Metodi geometrici*. La regione di confidenza viene campionata lungo strutture geometriche di vario tipo (curve, superfici, ...).

Impact monitoring: la LOV

Per la stragrande maggioranza degli asteroidi si può campionare la regione di confidenza in modo rappresentativo utilizzando una curva, detta *Line Of Variations (LOV)*.

¹Detto bene: la LOV è l'unica curva che passa dall'orbita nominale e che in ogni suo punto è tangente alla direzione locale di massima incertezza.

Impact monitoring: la LOV

Per la stragrande maggioranza degli asteroidi si può campionare la regione di confidenza in modo rappresentativo utilizzando una curva, detta *Line Of Variations (LOV)*.

Questa curva “segue” la direzione di massima incertezza, e rappresenta quindi una sorta di “asse maggiore” della regione di confidenza¹.

¹Detto bene: la LOV è l'unica curva che passa dall'orbita nominale e che in ogni suo punto è tangente alla direzione locale di massima incertezza.

Impact monitoring: la LOV

Per la stragrande maggioranza degli asteroidi si può campionare la regione di confidenza in modo rappresentativo utilizzando una curva, detta *Line Of Variations (LOV)*.

Questa curva “segue” la direzione di massima incertezza, e rappresenta quindi una sorta di “asse maggiore” della regione di confidenza¹.

Qual è il vantaggio di utilizzare una curva?

- 1 Le curve sono oggetti unidimensionali, quindi “semplici” da trattare.
- 2 Dati due punti distinti della curva, è possibile in modo “semplice” trovarne altri che sono compresi tra i due punti iniziali.

¹Detto bene: la LOV è l'unica curva che passa dall'orbita nominale e che in ogni suo punto è tangente alla direzione locale di massima incertezza.

Impact monitoring: la LOV

L'utilizzo della LOV per l'impact monitoring si articola nelle seguenti tre fasi.

- ④ *Campionamento.* La LOV viene campionata seguendo certi criteri di risoluzione del campionamento, volti a ottenere accuratezza nelle previsioni e non un costo di calcolo eccessivo.

²Ci sono dei casi in cui il monitoraggio degli impatti si può estendere. Quello più lontano a cui si arriva è per l'asteroide (29075) 1950 DA, per cui è previsto un possibile impatto nel 2880.

Impact monitoring: la LOV

L'utilizzo della LOV per l'impact monitoring si articola nelle seguenti tre fasi.

- ① *Campionamento.* La LOV viene campionata seguendo certi criteri di risoluzione del campionamento, volti a ottenere accuratezza nelle previsioni e non un costo di calcolo eccessivo.
- ② *Propagazione.* Le orbite del campionamento vengono poi propagate nel futuro, ciascuna usualmente per 100 anni².

²Ci sono dei casi in cui il monitoraggio degli impatti si può estendere. Quello più lontano a cui si arriva è per l'asteroide (29075) 1950 DA, per cui è previsto un possibile impatto nel 2880.

Impact monitoring: la LOV

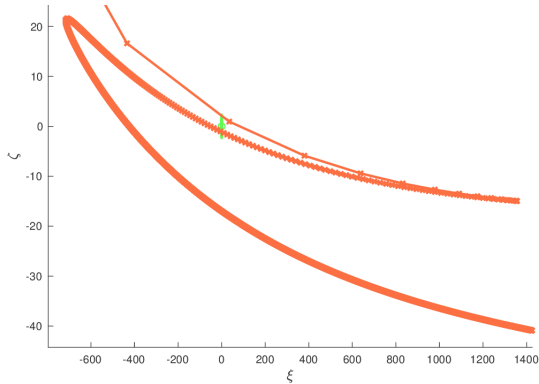
L'utilizzo della LOV per l'impact monitoring si articola nelle seguenti tre fasi.

- ① *Campionamento.* La LOV viene campionata seguendo certi criteri di risoluzione del campionamento, volti a ottenere accuratezza nelle previsioni e non un costo di calcolo eccessivo.
- ② *Propagazione.* Le orbite del campionamento vengono poi propagate nel futuro, ciascuna usualmente per 100 anni².
- ③ *Analisi degli impatti.* Viene analizzata la possibilità che ci siano porzioni della LOV che impattano con la Terra studiando la traccia che la LOV lascia su alcuni piani, detti *piani bersaglio*.

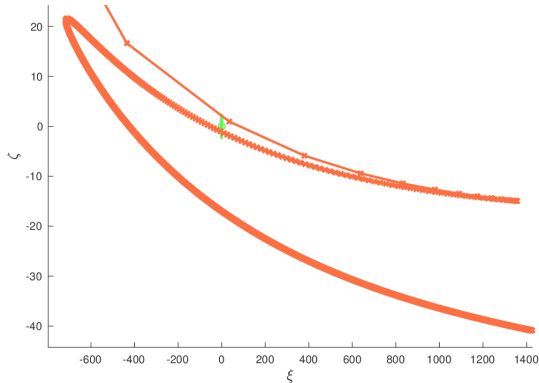
Idea di base: dato che la curva è continua, se tra due orbite che non impattano con la Terra c'è possibilità che ce ne sia una che invece impatta, allora si va a cercare tra le due orbite in questione.

²Ci sono dei casi in cui il monitoraggio degli impatti si può estendere. Quello più lontano a cui si arriva è per l'asteroide (29075) 1950 DA, per cui è previsto un possibile impatto nel 2880.

Un assaggio: piano bersaglio del 2055 per l'asteroide 2019 GC6



Un assaggio: piano bersaglio del 2055 per l'asteroide 2019 GC6



Object: 2019GC6

<u>date</u> YYYY/MM	MJD	sigma	sigimp	dist ± (RE)	width (RE)	stretch RE/sig	<u>p_RE</u>	exp. en. MT	PS
2055/04/18.587	71740.587	-2.057	0.000	1.91 ±	0.008	7.15E+04	1.94E-06	1.93E-07	-6.55
2055/04/18.972	71740.972	-1.748	0.000	1.12 ±	0.004	4.91E+03	7.23E-05	7.22E-06	-4.98
[...]									

Based on 23 optical observations (of which 0 are rejected as outliers)
from 2019/04/03.434 to 2019/04/11.241.

Impact monitoring: CLOMON e Sentry

Nel mondo ci sono due sistemi che si occupano di impact monitoring.

CLOMON

- ① Codice inizialmente sviluppato dal gruppo di ricerca in Meccanica Celeste del dipartimento di matematica (UniPi), diretto dal Prof. Andrea Milani.
- ② Operativo dal 1999.
- ③ Attualmente sviluppato e mantenuto da parte della società SpaceDyS.
- ④ Risultati su <https://newton.spacedys.com/neodys/index.php?pc=4.1>

Sentry

- ① Codice sviluppato dal JPL (NASA) indipendentemente, ma basato su analoghi algoritmi, con alcune eccezioni.
- ② Operativo dal 2002.
- ③ Risultati su <https://cneos.jpl.nasa.gov/sentry/>