Università degli Studi di Pisa - Dipartimento di Matematica

Ultrafiltri e metodi non standard

Autore
Alessio Del Vigna
delvigna@mail.dm.unipi.it

Titolare del corso
Prof. Mauro Di Nasso
Università di Pisa

Note dell'omonimo corso tenuto dal Prof. Mauro Di Nasso nell'anno accademico 2010-2011.

Queste note contengono almeno un errore. Se ne trovaste qualcuno, vi pregherei di segnalarmelo all'indirizzo delvigna@mail.dm.unipi.it.

Una precisazione. La frase "Queste note contengono almeno un errore" è un primo esempio di teorema di esistenza. Come ogni teorema che si rispetti, ecco la sua dimostrazione: se ci sono errori, ce ne sono; se non ci sono errori, allora è questa stessa frase a costituire un errore. Così sappiamo che un errore c'è, ma in questo momento non sappiamo dire qual è: questo, del resto, è il prezzo dei teoremi di esistenza! Pertanto, se l'unico errore dovesse essere la frase "Queste note contengono almeno un errore", non segnalatelo: eccezion fatta per questa frase, significherebbe -felicemente- che queste note non contengono altri errori.

Indice

Capitolo 1

Filtri e ultrafiltri

1.1 Introduzione

Questo corso si concentra sull'uso di tecniche non elementari in teoria di Ramsey e in teoria combinatoria dei numeri. Precisamente, gli strumenti che useremo saranno sostanzialmente di tre tipi: ultrafiltri, numeri ipernaturali dell'analisi nonstandard, spazi topologici compatti e dinamica topologica.

Qui di seguito sono elencati alcuni enunciati di teoremi che incontreremo in questo corso.

- **Teorema di Ramsey**: per ogni colorazione (cioè partizione) finita delle coppie di numeri naturali, esiste un insieme infinito le cui coppie sono tutte monocromatiche;
- **Teorema di Schur**: in ogni colorazione finita dei numeri naturali, esistono triple a, b, $a+b$ monocromatiche (cioè appartenenti allo stesso pezzo della partizione);
- **Teorema di Hindman**: è un rafforzamento del teorema precedente, precisamente afferma che per ogni colazione finita dei naturali, esiste un insieme infinito tale che tutte le somme di suoi elementi distinti sono monocromatiche;
- **Teorema di Van der Waerden**: in ogni colorazione finita dei naturali uno dei pezzi contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe;
- **Teorema di Szemeredi**: ogni insieme di naturali con densità superiore positiva contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe (vedremo solo il caso particolare di progressioni di lunghezza 3, il teorema di Roth);

- **Teorema di Rado**: ogni equazione diofantea lineare che ha una somma di alcuni suoi coeffcienti uguale a zero, ammette soluzioni monocromatiche per ogni colorazione finita dei naturali.

Un'altra classe di risultati che vedremo riguardano invece la connessione tra densità di un insieme (che in qualche senso ne esprime la grandezza) e il fatto di possedere "buchi limitati", ossia la proprietà di sindeticità. Questa può essere espressa dicendo che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $A \cap [x+1,\, x+k] \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Uno dei teoremi più importanti a tal proposito è il seguente:

- **Teorema Jin**: se A e B hanno densità asintotica superiore positiva, allora $A+B$ è sindetico a tratti.

1.2 Definizione di filtro e ultrafiltro

Iniziamo subito dalla definizione di filtro:

Definizione 1.1. Sia I un insieme di indici.[1] Un *filtro* su I è una famiglia $\mathcal{F}$ di sottoinsiemi di I tale che:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$ e $I \in \mathcal{F}$;

(2) se $A \in \mathcal{F}$ e $B \supseteq A$ allora $B \in \mathcal{F}$;

(3) se $A, B \in \mathcal{F}$ allora $A \cap B \in \mathcal{F}$.

Esempio 1.2. Sia I un insieme di indici. Allora l'insieme

$$\mathrm{Fr}_I = \{A \subseteq I \mid A^C \text{ è finito}\},$$

ossia l'insieme dei sottoinsiemi cofiniti di I, è un filtro detto *filtro di Frechet*.

Ricordiamo che una famiglia di insiemi $\mathcal{F}$ ha la *proprietà dell'intersezione finita* (in breve FIP, ossia *finite intersection property*) se ogni intersezione finita di elementi di $\mathcal{F}$ è non vuota. Ossia se

$$\forall A_1,\, \ldots,\, A_n \in \mathcal{F}\ A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset.$$

Dunque un filtro è una famiglia non vuota di insiemi che soddisfa la FIP ed è chiusa per soprainsieme. Se $\mathcal{G}$ è una famiglia (non vuota) con la FIP, allora chiaramente la famiglia di insiemi

$$\langle \mathcal{G} \rangle = \{B \mid \exists A_1,\, \ldots,\, A_n \in \mathcal{G} \text{ t.c. } B \supseteq A_1 \cap \cdots \cap A_n\}$$

è un filtro, che si dice *filtro generato* da $\mathcal{G}$. Tale filtro è il più piccolo filtro che contiene $\mathcal{G}$ (dimostrare per esercizio).

[1]considereremo sempre I infinito per non imbatterci in casi banali.

Per passare dai filtri agli ultrafiltri ci serve la seguente:

Proposizione 1.3. *Sia $\mathcal{F}$ un filtro su I. Allora le seguenti sono equivalenti:*

(1) *se $A \notin \mathcal{F}$ allora $A^C \in \mathcal{F}$;*

(2) *se $A \cup B \in \mathcal{F}$ allora $A \in \mathcal{F}$ o $B \in \mathcal{F}$;*

(3) *$\mathcal{F}$ è un filtro massimale rispetto all'inclusione.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Supponiamo per assurdo che $A \notin \mathcal{F}$ e $B \notin \mathcal{F}$, allora per la proprietà (1) abbiamo che $A^C \in \mathcal{F}$ e $B^C \in \mathcal{F}$. Così $A^C \cap B^C = (A \cup B)^C \in \mathcal{F}$, e questo è assurdo perché anche $A \cup B \in \mathcal{F}$.
((2) $\Longrightarrow$ (3)) Supponiamo per assurdo che $\mathcal{F}$ non sia massimale rispetto all'inclusione, allora sia $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ un filtro che estende $\mathcal{F}$. Prendiamo dunque $X \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$, in particolare $X^C \notin \mathcal{F}'$ e dunque $X^C \notin \mathcal{F}$. Del resto però $I = X \cup X^C \in \mathcal{F}$, ma nessuno dei due insiemi è in $\mathcal{F}$, contro la (2).
((3) $\Longrightarrow$ (1)) Supponiamo per assurdo che esista un insieme A tale che $A \notin \mathcal{F}$ e $A^C \notin \mathcal{F}$. Consideriamo allora la famiglia

$$\mathcal{G} = \{F \cap A \mid F \in \mathcal{F}\},$$

e mostriamo che ha la proprietà dell'intersezione finita. Siano $G_1, \ldots, G_n \in \mathcal{G}$, allora esistono $F_1, \ldots, F_n \in \mathcal{F}$ tali che $G_i = F_i \cap A$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. In questo modo

$$G_1 \cap \ldots G_n = (F_1 \cap \cdots \cap F_n) \cap A = F \cap A,$$

dove $F = F_1 \cap \cdots \cap F_n \in \mathcal{F}$. Effetivamente $F \cap A \neq \emptyset$, sennò $F \subseteq A^C$ e questo implicherebbe $A^C \in \mathcal{F}$, contro le ipotesi. Così $\mathcal{G}$ ha la FIP, quindi possiamo prendere il filtro $\mathcal{F}'$ generato da $\mathcal{G}$ e affermiamo che è un filtro che estende propriamente $\mathcal{F}$. Infatti abbiamo $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}'$ in quanto $F = F \cap I \in \mathcal{F}'$ per ogni $F \in \mathcal{F}$, e inoltre l'inclusione è stretta perché $A = I \cap A \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}'$, e dunque $A \in \mathcal{F}' - \mathcal{F}$. □

Definizione 1.4. Un filtro $\mathcal{F}$ che soddisfi una (e quindi tutte) le proprietà precedenti è detto *ultrafiltro.*

Su ogni insieme infinito I, il filtro di Frechet Fr_I non è un ultrafiltro. Infatti, basta prendere un insieme infinito $A \subseteq I$ tale che anche il suo complementare A^C sia infinito, ed abbiamo che $A, A^C \notin \mathrm{Fr}_I$.

Esempio 1.5. Osserviamo che per ogni $i \in I$ abbiamo il filtro generato dal singoletto $\{i\}$ è $\mathcal{U}_i = \{A \subseteq I \mid i \in A\}$. Tale filtro è anche massimale e dunque è un ultrafiltro. Questi ultrafiltri sono detti *ultrafiltri principali*, in quanto sono generati da un elemento solo.

Proposizione 1.6. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. Allora $\mathcal{U} \supseteq \mathrm{Fr}_I$ se e solo se $\mathcal{U}$ non è principale.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Supponiamo che $\mathcal{U}$ includa il filtro di Frechet Fr_I. Per ogni $i \in I$ abbiamo $\{i\}^C \in \mathrm{Fr}_I \subseteq \mathcal{U}$, e dunque $\{i\} \notin \mathcal{U}$ per ogni $i \in I$, e dunque $\mathcal{U}$ non è principale.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo $\mathcal{U} \not\supseteq \mathrm{Fr}_I$, ossia esiste un insieme cofinito $A \notin \mathcal{U}$. Ma allora $A^C = \{a_1, \ldots, a_n\} = \{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{U}$, e dunque per il fatto che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro deve esistere $i = 1, \ldots, n$ tale che $\{a_i\} \in \mathcal{U}$. Dunque $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{a_i}$ sarebbe principale, e ciò contraddice l'ipotesi. □

L'esistenza di ultrafiltri è garantita dal lemma di Zorn, forma equivalente dell'assioma della scelta:

Teorema 1.7 (di Tarski)**.** *Dato un filtro $\mathcal{F}$ esiste un ultrafiltro $\mathcal{U} \supseteq \mathcal{F}$.*

Dimostrazione. Sia $\Gamma = \{\mathcal{G} \text{ filtro} \mid \mathcal{G} \supseteq \mathcal{F}\}$, parzialmente ordinata per inclusione. Intanto Γ è non vuoto perché vi appartiene $\mathcal{F}$; poi dobbiamo verificare che ogni catena ammette un maggiorante. Sia dunque $\langle \mathcal{G}_s \mid s \in S\rangle$ una catena in Γ, allora $\mathcal{G} = \bigcup_{s\in S} \mathcal{G}_s$ è un filtro che maggiora tutta la catena. Si conclude grazie al lemma di Zorn. □

In un senso preciso, non si possono definire ultrafiltri non principali.[2] In altre parole, nonostante si possa dimostrare che esistono (e lo abbiamo fatto!), nessuno di loro può essere "descritto esplicitamente". Per quanto possa apparire strano, un fenomeno simile si ritrova anche nella combinatoria elementare. Ad esempio, per il cosiddetto principio dei cassetti, se abbiamo $n + 1$ oggetti distribuiti in n cassetti possiamo concludere che esiste un cassetto contenente almeno due oggetti; ma "descrivere esplicitamente" quale sia un tale cassetto non è possibile.

1.3 Il prodotto tensore

Esiste un modo naturale di costruire un prodotto tra due ultrafiltri:

Definizione 1.8. Siano $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I e $\mathcal{V}$ un ultrafiltro su J. Il *prodotto tensoriale* $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è l'ultrafiltro su $I \times J$ definito ponendo

$$A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V} \Longleftrightarrow \{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U},$$

dove con $A_i = \{j \in J \mid (i, j) \in A\}$ abbiamo denotato la fibra verticale di A corrispondente all'ascissa i.

[2] più precisamente, non esistono formule $\varphi(x)$ della teoria degli insiemi tali che la teoria ZFC dimostra che esiste ed unico x tale che $\varphi(x)$, e che un tale x è un ultrafiltro non principale.

Dunque, un sottoinsieme A del prodotto cartesiano $I \times J$ è $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$–grande se e solo se per una quantità $\mathcal{U}$–grande di indici i, la corrispondente fibra verticale A_i è $\mathcal{V}$–grande. A questo punto non ci resta che dare alcune proprietà del prodotto tensoriale. La prima di esse ci garantisce che quella data è una buona definizione:

Lemma 1.9. *Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri. Allora $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Dobbiamo intanto verificare che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è un filtro. La proprietà (1) si verifica facilmente; per quanto riguarda la chiusura per soprainsieme prendiamo $A \subseteq B$ in $I \times J$ e supponiamo che $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$, ciò significa che

$$\{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Del resto $\{i \mid A_i \in \mathcal{V}\} \subseteq \{i \mid B_i \in \mathcal{V}\}$, così dal fatto che $\mathcal{U}$ è un filtro abbiamo anche che

$$\{i \mid B_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

La terza proprietà e la massimalità per inclusione si mostrano in modo analogo. □

Lemma 1.10. *Il prodotto $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale se e solo se $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ sono principali.*

Dimostrazione. Il prodotto $\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$ è principale se e solo se contiene un singoletto, diciamo $A = \{(x, y)\} \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Per definizione questo significa che l'insieme $\widehat{A} = \{i \in I \mid A_i \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Banalmente

$$A_i = \{j \in J \mid (i, j) \in A\} = \begin{cases} \{y\} & \text{se } i = x \\ \emptyset & \text{se } i \neq x \end{cases} .$$

Ricordando che $\emptyset \notin \mathcal{V}$ abbiamo che $\widehat{A} \in \mathcal{U}$ se e solo se essere $\{y\} \in \mathcal{V}$ (altrimenti $\widehat{A} = \emptyset \in \mathcal{U}$, assurdo); ma in questo caso abbiamo anche $\widehat{A} = \{x\} \in \mathcal{U}$. Queste due condizioni equivalgono a dire che $\mathcal{U}$ che $\mathcal{V}$ sono principali. □

Lemma 1.11. *Verificare che l'operazione di prodotto tensoriale tra ultrafiltri è associativa, ossia $(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W} = \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$.*

Dimostrazione. Per definizione di prodotto tensore si ha $A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W})$ se e solo se $\{i \mid A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}\} \in \mathcal{U}$; proseguendo abbiamo che $A_i \in \mathcal{V} \otimes \mathcal{W}$ se e solo se $\{j \mid A_{ij} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}$. Riassumendo

$$A \in \mathcal{U} \otimes (\mathcal{V} \otimes \mathcal{W}) \Longleftrightarrow \{i \mid \{j \mid A_{ij} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Sviluppando la definizione di $A \in (\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) \otimes \mathcal{W}$ otteniamo la stessa formulazione equivalente. □

1.4 Limite lungo un filtro

La nozione di filtro è già ricca di per sé, come testimonia il fatto che possiamo definire una nozione di limite rispetto a un filtro. Iniziamo da un esempio:

Esempio 1.12. Sia $\mathcal{F}$ un fltro su $\mathbb{N}$ e sia $\{x_n\} \subseteq \mathbb{R}$ una successione di numeri reali. Diciamo che l'$\mathcal{F}$–limite di x_n è y, e si scrive $\mathcal{F} \lim_n x_n = y$, se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\{n \mid |y - x_n| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}$. Osserviamo che se si utilizza come filtro il filtro di Frechet allora questa nozione di limite coincide con quella usuale.

Definizione 1.13. Siano X uno spazio topologico, $\mathcal{F}$ un filtro su I e $\{x_i\}_{i\in I}$ una successione in X. Diciamo che $\mathcal{F} \lim_{i\in I} x_i = y$ se per ogni U intorno di y si ha $\{i \mid x_i \in U\} \in \mathcal{F}$.

Grazie agli ultrafiltri è possibile dare delle caratterizzazioni equivalenti delle nozioni di spazio topologico di Hausdorff e di spazio compatto.

Proposizione 1.14. *Sia X uno spazio topologico a base numerabile e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. X è di Hausdorff se e solo se ogni successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in X ammette al più un $\mathcal{U}$–limite.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per assurdo siano $x \neq y$ due $\mathcal{U}$–limiti di una successione $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Dall'ipotesi che X è di Hausdorff abbiamo che esistono U_x e U_y intorni rispettivamente di x e y tali che $U_x \cap U_y = \emptyset$. Dalla definizione di limite abbiamo

$$A = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_x\} \in \mathcal{U} \quad \text{e} \quad B = \{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in U_y\} \in \mathcal{U},$$

e allora $A \cap B = \emptyset \in \mathcal{U}$, contro la definizione di filtro.
($\Longleftarrow$) Supponiamo che X sia uno spazio topologico non di Hausdorff, mostriamo allora che esiste una successione che ha due limiti distinti. Prendiamo dunque $x, y \in X$ due punti distinti: dall'ipotesi che X è primo–numerabile abbiamo l'esistenza di $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, sistemi fondamentali numerabili di intorni rispettivamente di x e y; senza perdere di generalità possiamo supporre che per ogni $n \in \mathbb{N}$ valga $U_{n+1} \subset U_n$ e $V_{n+1} \subset V_n$. Dall'ipotesi che X non è di Hausdorff per ogni $n \in \mathbb{N}$ abbiamo che $U_n \cap V_n \neq \emptyset$, e per ogni $n \in \mathbb{N}$ prendiamo $z_n \in U_n \cap V_n$. Mostriamo adesso che z_n $\mathcal{U}$–converge a x, la dimostrazione che $\mathcal{U}$–converge a y è del tutto analoga. Sia dunque U_x un intorno di x e sia $N \in \mathbb{N}$ tale che $U_x \supseteq U_N$; allora

$$\{n \mid z_n \in U_x\} \supseteq \{n \in \mathbb{N} \mid z_n \in U_N\} \supseteq \{n \mid n \geq N\}$$

e dunque $\{n \mid z_n \in U_x\} \in \mathcal{U}$ in quanto $\{n \mid n \geq N\} \in \mathcal{U}$ perché cofinito. Dunque la definizione di limite è soddisfatta e $\mathcal{U}\text{-}\lim_n z_n = x$. $\square$

Osservazione 1.15. La precedente proposizione può essere generalizzata anche per gli ultrafiltri su un generico insieme infinito I.

Al teorema precedente, in realtà, si può rimuovere l'ipotesi di avere base numerabile. Il teorema, infatti, si estende a qualsiasi insieme I e a qualsiasi spazio topologico X.

Proposizione 1.16. *Sia X uno spazio topologico e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I. X è compatto se e solo se ogni successione $\{a_i\}_{i\in I}$ in X ammette $\mathcal{U}$–limite.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per assurdo, sia $\{x_i\}_{i\in I}$ una successione che non ha $\mathcal{U}$–limite. Questo significa che per ogni $y \in X$ esiste U_y intorno aperto di y tale che $A_y = \{i \in I \mid x_i \in U_y\} \notin \mathcal{U}$. La famiglia $\{U_y \mid y \in X\}$ è un ricoprimento aperto di X, così per compattezza abbiamo l'esistenza di $y_1, \ldots, y_n$ tali che $\bigcup_{i=1}^n U_{y_i} = X$. Così

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_{y_i} = I \in \mathcal{U},$$

ma nessuno degli insiemi dell'unione finita sta in $\mathcal{U}$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo che esista un ricoprimento aperto $\{U_j\}_{j\in J}$ tale che per ogni $J' \subseteq J$ finito la famiglia $\{U_j\}_{j\in J'}$ non ricopra X. Sia dunque $I = \operatorname{Fin} J$ e definiamo

$$K_j = \{J' \in \operatorname{Fin} J \mid j \in J'\}.$$

Si vede facilmente che la famiglia $\{K_j\}_{j\in J}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque esiste l'ultrafiltro $\mathcal{U}$ generato da questa famiglia. Per ogni $J' \in \operatorname{Fin} J$ sia

$$x_{J'} \notin \bigcup_{j\in J'} U_j,$$

che esiste perché $\{U_j\}_{j\in J'}$ non è un ricoprimento di X. Vogliamo mostrare che $\{x_{J'}\}_{J'\in \operatorname{Fin} J}$ è una successione che non ha $\mathcal{U}$–limite. Sia $x \in X$, e sia j_x tale che $x \in U_{j_x}$: allora

$$\{J' \in \operatorname{Fin} J \mid x_{J'} \notin U_{j_x}\} \supseteq K_{j_x} \in \mathcal{U},$$

e dunque $\{J' \in \operatorname{Fin} J \mid x_{J'} \notin U_{j_x}\} \in \mathcal{U}$. Valendo questo per ogni $x \in X$ abbiamo che la successione costruita non ha $\mathcal{U}$–limite. □

Grazie all'idea della dimostrazione precedente possiamo dare una dimostrazione del teorema di Tychonoff basata sugli ultrafiltri:

Teorema 1.17 (di Tychonoff). *Sia $\{X_i\}_{i\in I}$ una famiglia qualsiasi di spazi topologici compatti. Allora $X = \prod_{i\in I} X_i$ è compatto rispetto alla topologia prodotto.*[3]

Dimostrazione. Sia $\{x^j\}_{j\in J}$ una successione in X e $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su J: se dimostriamo che tale successione ha $\mathcal{U}$–limite abbiamo la compattezza di X grazie alla proposizione precedente. Fissiamo $i \in I$ e consideriamo la successione $\{x_i^j\}_{j\in J} \subseteq X_i$: dal teorema precedente, essendo X_i compatto, esiste l'$\mathcal{U}$–limite di questa successione, sia esso $\overline{x}_i$. Dimostriamo ora che $\overline{x} = (\overline{x}_i \mid i \in I) \in X$ è il limite di $\{x^j\}_{j\in J}$. Consideriamo $I' = \{i_1, \ldots, i_n\} \in \operatorname{Fin} I$ e sia

$$A_{I'} = \bigcap_{h=1}^{n} \pi_{i_h}^{-1}(A_{i_h})$$

un intorno di $\overline{x}$ in X. Allora

$$\{j \in J \mid x^j \in A_{I'}\} = \{j \in J \mid \forall h\ x_{i_h}^j \in A_{i_h}\} = \bigcap_{h=1}^{n} \{j \in J \mid x_{i_h}^j \in A_{i_h}\}$$

e affermiamo che questo insieme sta in $\mathcal{U}$. Infatti $\{j \in J \mid x_{i_h}^j \in A_{i_h}\} \in \mathcal{U}$ per ogni h, visto che $(x_{i_h}^j)_{j\in J} \subseteq X_{i_h}$ ha limite $\overline{x}_{i_h}$ e A_{i_h} è un intorno di $\overline{x}_{i_h}$ (in quanto $\overline{x} \in A_{I'}$. $\square$

[3]ricordiamo che la topologia prodotto è la più piccola topologia che rende continue le proiezioni $\pi_i : X \to X_i$; in modo equivalente una base della topologia prodotto è formata dalle intersezioni finite di controimmagini di aperti.

Capitolo 2

Il teorema di Ramsey

2.1 Introduzione al teorema finito di Ramsey

Per capire di cosa si occupa la teoria combinatoria di Ramsey vogliamo subito presentare l'enunciato della forma finita di questo teorema. Per fare ciò ci serve una notazione:

Definizione 2.1. Per ogni insieme A e per ogni $k \in \mathbb{N}$, denotiamo con

$$[A]^k = \{B \subseteq A \mid |B| = k\}$$

la famiglia di tutte le k–uple di A, cioè dei sottoinsiemi di A che hanno esattamente k elementi.

Come consuetudine nella teoria di Ramsey si adotta anche una terminologia che parla di colori:

Definizione 2.2. Una partizione finita di un insieme

$$X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$$

in r pezzi si dice *r–colorazione.* Inoltre, per indicare che un certo insieme $Y \subseteq C_i$ è incluso in uno dei pezzi della partizione, si dice che Y è *monocromatico.*

Presentiamo adesso l'enunciato del teorema:

Teorema 2.3 (di Ramsey finito)**.** *Per ogni k, per ogni r, per ogni m, esiste n con la proprietà che ogni r–colorazione $[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un insieme H con m elementi che è omogeneo, cioè tale che tutte le sue k–uple $[H]^k \subseteq C_i$ sono monocromatiche.*

Il teorema ha una certa complessità, dovuta anche al grande numero di quantificatori, ma una volta appreso davvero lo potremo applicare anche a casi molto concreti. Cerchiamo di capire il teorema nel caso $k = 2$, $r = 2$ e $m = 3$: mostriamo che in questo caso il numero n minimo per il quale il teorema inizia a valere è $n = 6$.
Supponiamo di essere ad una festa, e scegliamo a caso 6 persone. Allora possiamo essere certi che tra queste ci sono 3 persone che si conoscono tra di loro, oppure ce ne sono 3 che non si conoscono. Vediamo perché. Denotiamo con

$$A, \quad B, \quad C, \quad D, \quad E, \quad F$$

le 6 persone, e concentriamoci su una di loro, diciamo A. Di sicuro capita una ed una sola delle seguente due eventualità:

(1) A conosce almeno 3 persone;

(2) A non conosce almeno 3 persone.

Supponiamo che valga la prima possibilità (nell'altro caso la dimostrazione è del tutto analoga). Ad esempio, supponiamo che A conosca B, C e D. Se quest'ultime 3 persone non si conoscono tra loro, allora abbiamo già la tesi. Altrimenti almeno 2 di queste 3 persone si conoscono, diciamo B e C. Ma allora A, B e C sono 3 persone che si conoscono tra loro, e la tesi è raggiunta.
Se invece si volessero 4 persone che formano un gruppo omogeneo, cioè tali che si conoscono tutte tra loro oppure non si conoscono tra loro, allora occorrerebbe prendere almeno 18 individui. Questo numero è il migliore possibile, perché si può dimostrare che esistono gruppi di 17 persone senza gruppi omogenei di 4 individui. Può sembrare strano, ma l'analogo problema per gruppi omogenei di 5 persone non è ancora stato risolto! E si dubita che lo sarà di qui a breve, trattandosi di una questione combinatoria estremamente complessa. Le stime più aggiornate indicano che la soluzione ottimale, cioè il minimo numero di persone da prendere per essere sicuri di trovare un gruppo omogeneo di 5 persone, è compresa tra 43 e 49 persone. Il problema sale vertiginosamente di diffcoltà, e diventa presto pressoché intrattabile. Ad esempio, già per $m = 10$, si conosce soltanto che il numero cercato è tra 798 e 23556.
Il teorema di Ramsey finito ci dice che quei numeri esistono sempre per ogni m (anche se non fornisce stime sulla loro grandezza). Lo strumento degli ultrafiltri ci permetterà di dimostrare prima la versione infinita del teorema di Ramsey, e successivamente di derivarne la versione finita. Dunque per noi, la versione infinita sarà in un certo senso più semplice di quella finita.

2.2 Il teorema di Ramsey infinito

Come già anticipato, iniziamo dalla versione infinita del teorema:

Teorema 2.4. *Sia X un insieme infinito. Per ogni k, ogni colorazione finita delle k–uple di X, ossia $[X]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un insieme infinito omogeneo, cioè un insieme infinito $H \subseteq X$ tale che tutte le sue k–uple $[H]^k \subseteq C_i$ sono monocromatiche.*

Dimostrazione. Per $k = 1$, il teorema di Ramsey infinito afferma che in ogni partizione finita di un insieme infinito, almeno uno dei pezzi è infinito.
Occupiamoci adesso del caso $k = 2$. Senza perdere di generalità, possiamo supporre $X = \mathbb{N}$: infatti la proprietà di Ramsey si estende banalmente ai soprainsiemi e – visto che X è infinito – possiamo senz'altro assumere che X includa (una copia di) $\mathbb{N}$. Consideriamo la sopradiagonale

$$\Delta^+ = \{(n, m) \mid n < m\},$$

e indentifichiamo le coppie $[\mathbb{N}]^2$ con Δ^+. Prendiamo ora un qualunque prodotto tensoriale $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ dove $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni n, la fibra

$$\Delta^+_n = \{m \mid n < m\} \in \mathcal{U}$$

perché è un insieme cofinito e $\mathcal{U}$ è non principale (dunque estende il filtro di Frechet), dunque $\Delta^+ \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ per definizione di prodotto tensoriale. Per la proprietà di ultrafiltro, da $\Delta^+ = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, si ottiene l'esistenza di un colore C_i tale che $C_i \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. La tesi discende allora dalla seguente proprietà generale:

Lemma 2.5. *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Per ogni $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ esiste un insieme infinito $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $[H]^2 = \{(h, h') \mid h < h'\} \subseteq A$.*

Dimostrazione. Per definizione $A \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$ se e solo se $\widehat{A} = \{n \mid A_n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}$. Sia $h_1 \in \widehat{A}$, allora la fibra $A_{h_1} \in \mathcal{U}$, e possiamo prendere $h_2 \in \widehat{A} \cap A_{h_1} \in \mathcal{U}$ con $h_2 > h_1$ (ricordiamo che ogni insieme di un ultrafiltro non principale è infinito). Analogamente, visto che $A_{h_2} \in \mathcal{U}$, possiamo prendere $h_3 \in \widehat{A} \cap A_{h_1} \cap A_{h_2} \in \mathcal{U}$ con $h_3 > h_2$. Notiamo che (h_1, h_2), (h_1, h_3), $(h_2, h_3) \in A$. Iterando questo procedimento, si ottiene un insieme infinito

$$H = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k < h_{k+1} < \cdots\}$$

tale che $(h_i, h_j) \in A$ per ogni $i < j$, come volevamo. $\square$

La dimostrazione del caso generale $k > 2$ si ottiene generalizzando l'argomento di sopra. Precisamente, si identificano le k–uple $[\mathbb{N}]^k$ con la sopradiagonale

$$\Delta^+_k = \{(n_1, \ldots, n_k) \in \mathbb{N}^k \mid n_1 < \cdots < n_k\}.$$

Poi si osserva che $\Delta_k^+ \in \mathcal{U}^{\otimes k}$, dove

$$\mathcal{U}^{\otimes k} = \underbrace{\mathcal{U} \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}}_{k \text{ volte}}$$

è l'ultrafiltro su $\mathbb{N}^k$ ottenuto iterando il prodotto tensoriale di $\mathcal{U}$ con se stesso k volte. Infine si raggiunge la tesi estendendo la validitá del lemma di sopra ad ogni $k > 2$. La dimostrazione di quest'ultima proprietà si ottiene con diretta modifica di quanto già visto per $k = 2$, ma occorre una certa cura per sistemare i dettagli (lasciamo questa verifica per esercizio). $\square$

Per quanto possa apparire banale, già la proprietà di Ramsey con $k = 1$ è molto usata in matematica.

Esempio 2.6. Ricordiamo il teorema di Bolzano–Weiestrass: ogni successione reale limitata $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ammette una sottosuccessione convergente. Per dimostrare questa proprietà si può procedere come segue. Per comodità (e senza perdita di generalità) supponiamo che l'immagine della successione sia contenuta nell'intervallo $A_0 = [0, 1]$. Come garantisce il teorema di Ramsey infinito nel caso $k = 1$ e $r = 2$, se suddividiamo $[0, 1]$ nei due pezzi $[0, 1/2]$ e $[1/2, 1]$, in almeno uno dei due la successione cadrà per un numero infinito di indici. Prendiamo un tale sottointervallo A_1, dividiamolo a sua volta in due intervalli di uguale lunghezza, e ripetendo il procedimento di sopra otteniamo così l'esistenza di un intervallo $A_2 \subseteq A_1$ di ampiezza $1/4$ dove la successione cade infinite volte. Iterando, otteniamo una successione decrescente $\{A_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ di intervalli chiusi di lunghezza $1/2^k$ e tali che $X_k = \{n \mid a_n \in A_k\}$ è infinito per ogni k. Adesso sia $n_1 \in X_1$ qualunque, e induttivamente prendiamo $n_{k+1} > n_k$ in X_k. Dalla proprietà di completezza dei reali segue che la sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ converge.

Un'importante applicazione del teorema di Ramsey in teoria combinatoria dei numeri è la seguente:

Teorema 2.7 (delle differenze)**.** *Per ogni colorazione finita dei numeri naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, esiste un insieme infinito H tale che l'insieme di differenze*

$$H \ominus H = \{h - h' \mid h, h' \in H \text{ e } h' > h\}$$

è monocromatico.

Dimostrazione. Per ogni $i = 1, \ldots, r$, poniamo $D_i = \{(n, m) \in [\mathbb{N}]^2 \mid m - n \in C_i\}$. Otteniamo così una r–colorazione finita $[\mathbb{N}]^2 = D_1 \sqcup \cdots \sqcup D_r$. Per il teorema di Ramsey, esiste un insieme infinito H con $[H]^2 \subseteq D_i$ per un opportuno i. Dalla definizione di D_i segue infine che l'insieme delle differenze $H \ominus H \subseteq C_i$ è monocromatico. $\square$

Come corollario del teorema delle differenze otteniamo:

Teorema 2.8 (Schur infinito)**.** *In ogni colorazione finita dei numeri naturali esiste una "tripla di Schur" $a < b < a + b$ monocromatica.*

Dimostrazione. Sia $H = \{h_1 < h_2 < \cdots < h_k < h_{k+1} < \cdots\}$ un insieme infinito tale che le differenze $H \ominus H$ sono monocromatiche. Poniamo $a = h_2 - h_1$ e $b = h_k - h_2$ in modo che $b > a$. Allora anche

$$a + b = (h_2 - h_1) + (h_k - h_2) = h_k - h_1 \in H \ominus H$$

e quindi a, b, $a + b$ è una tripla di Schur monocromatica. □

2.3 Il teorema di Schur finito

Adesso presentiamo una tecnica che ci consentirà di ricavare la versione finita del teorema di Schur da quella infinita. Tale tecnica è molto importante perché è la medesima in tutti i passaggi "dall'infinito al finito", e successivamente la generalizzeremo.

Teorema 2.9 (Schur finito)**.** *Per ogni r esiste n tale che in ogni r–colorazione di $\{1, \ldots, n\}$ esiste una tripla di Schur $a < b < a + b$ monocromatica.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un r tale che per ogni n esiste una r–colorazione di $\{1, \ldots, n\}$, diciamo $\{1, \ldots, n\} = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$, senza triple di Schur monocromatiche. Sia dunque $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale su $\mathbb{N}$. Fissato $k \in \mathbb{N}$ definiamo l'insieme $\Gamma_i^k = \{n \mid k \in C_i^n\}$ dei "livelli" n dove il numero k è colorato con il colore C_i. Visto che k appartiene a tutti i livelli $n \geq k$, abbiamo che l'unione finita

$$\Gamma_1^k \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r^k = \{n \mid n \geq k\} = [k, \infty) \in \mathcal{U}.$$

Dunque esiste un unico i_k tale che $\Gamma_{i_k}^k \in \mathcal{U}$. A questo punto coloriamo k con il colore C_{i_k}, e dunque otteniamo una r–colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ dove

$$k \in C_i \Longleftrightarrow \Gamma_i^k \in \mathcal{U}.$$

Per il teorema di Schur infinito esiste i ed esiste una tripla $a < b < a + b$ monocromatica, ossia tale che $a, b, a + b \in C_i$. Quindi per definizione della colorazione abbiamo Γ_i^a, Γ_i^b, $\Gamma_i^{a+b} \in \mathcal{U}$. Ma allora $\Gamma = \Gamma_i^a \cap \Gamma_i^b \cap \Gamma_i^{a+b} \in \mathcal{U}$, e prendendo un qualunque livello $n \in \Gamma$ si avrebbe che $a, b, a + b \in C_i^n$, contro l'ipotesi che la r–colorazione $\{1, \ldots, n\} = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$ sia priva di triple di Schur. □

Vediamo subito una interessante applicazione in teoria dei numeri, che mostra come la congettura di Fermat sia falsa se considerata nell'ambito dei campi finiti $\mathbb{Z}_p$. Si tratta del risultato originale di Schur per il quale egli ebbe bisogno di utilizzare la proprietà combinatoria del teorema di Schur finito come lemma.

Corollario 2.10. *Per ogni k l'equazione $x^k + y^k = z^k$ ha soluzioni non banali in ogni campo $\mathbb{Z}_p$ con p sufficientemente grande.*

Dimostrazione. Fissato k, prendiamo il gruppo $\mathbb{Z}_p^*$ e il sottogruppo moltiplicativo $M_k = \{a^k \mid a \in \mathbb{Z}_p^*\}$ delle potenze k–esime. Visto che $\mathbb{Z}_p^*$ è ciclico, l'indice $r = [\mathbb{Z}_p^* : M_k]$ sarà $(k, p-1) \leq k$. Dunque le classi laterali di M_k determinano una r–colorazione finita di $\mathbb{Z}_p^*$ dove $r \leq k$, diciamo

$$\{1, \ldots, p-1\} = \mathbb{Z}_p^* = a_1 M_k \sqcup \cdots \sqcup a_r M_k.$$

Applicando la versione finita del teorema di Schur abbiamo che per ogni primo p sufficientemente grande si trovano $t, u, t+u \in a_i M_k$. Così

$$t = a_i x^k, \quad u = a_i y^k \quad \text{e} \quad t + u = a_i z^k,$$

con $x, y, z \in \mathbb{Z}_p^*$. Così $a_i x^k + a_i y^k = a_i z^k$, e del resto si può dividere per a_i e ottenere la soluzione non banale. □

2.4 Il teorema di Ramsey finito

Ricordiamo l'enunciato del teorema di Ramsey finito e dimostriamolo utilizzando la medesima tecnica della dimostrazione del teoremd di Schur finito:

Teorema 2.11 (Ramsey finito)**.** *Per ogni k, per ogni r, per ogni m, esiste n con la proprietà che ogni r–colorazione $[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un insieme H con m elementi che è omogeneo, cioè tale che tutte le sue k–uple $[H]^k \subseteq C_i$ sono monocromatiche.*

Dimostrazione. Procediamo per assurdo, e supponiamo che esistano k, r ed m con la proprietà che per ogni n esiste una r–colorazione

$$[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$$

che non ammette alcun insieme omogeneo di cardinalità m. Fissiamo un qualunque ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$. Per ogni $\mathbf{x} \in [\mathbb{N}]^k$ e per ogni colore i, consideriamo l'insieme

$$\Gamma_i^{\mathbf{x}} = \{n \mid \mathbf{x} \in C_i^n\}$$

dei "livelli" n dove la k–upla $\mathbf{x}$ ha il colore i. Notiamo che $\mathbf{x} = \{x_1 < \cdots < x_k\} \in [\{1, \ldots, n\}]^k$ se e solo se $n \geq x_k$. Dunque l'unione finita

$$\Gamma_1^{\mathbf{x}} \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r^{\mathbf{x}} = \{n \mid n \geq x_k\} \in \mathcal{U}.$$

Per la proprietà di ultrafiltro, esiste ed unico $i_{\mathbf{x}}$ con $\Gamma_{i_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$. Colorando ogni $\mathbf{x}$ con il colore $i_{\mathbf{x}}$ otteniamo così una r–colorazione di tutte le k–uple del tipo $[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ dove

$$\mathbf{x} \in C_i \iff \Gamma_i^{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}.$$

Dalla versione infinita del teorema di Ramsey, segue l'esistenza di un insieme infinito $H = \{h_1 < \cdots < h_m < \cdots\}$ e di un colore i con $[H]^k \subseteq C_i$, cioè $\Gamma_i^{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$ per ogni k–upla $\mathbf{x} \in [H]^k$. Adesso, se $Z = \{h_1 < \cdots < h_m\}$, l'intersezione finita $U = \bigcap_{\mathbf{x} \in [Z]^k} \Gamma_i^{\mathbf{x}} \in \mathcal{U}$. In particolare questa intersezione è non vuota, e possiamo prendere $n \in \mathcal{U}$. Ma allora $\mathbf{x} \in C_i^n$ per ogni $\mathbf{x} \in [Z]^k$, cioè Z sarebbe un insieme con m elementi omogeneo rispetto alla r–colorazione $[\{1, \ldots, n\}]^k = C_1^n \sqcup \cdots \sqcup C_r^n$, contro l'ipotesi. □

Introduciamo una notazione che consente di abbreviare molti enunciati. Scriveremo

$$n \to (m)_r^k$$

per indicare che data una r–colrazione delle k–uple dell'insieme $\{1, \ldots, n\}$ esistono sempre un i e un insieme $H \subseteq \{1, \ldots, n\}$ con $|H| = m$ tale che $[H]^k \subseteq C_i$. Dunque il teorema di Ramsey finito può essere riformulato come segue:

$$\forall k \ \forall r \ \forall m \ \exists n \text{ tale che } n \to (m)_r^k.$$

Dimostriamo di seguito un principio generale che fornisce un utile strumento per passare "dall'infinito al finito". Si tratta di uno di quei risultati noti in combinatoria come principi di compattezza. Iniziamo con una definizione:

Definizione 2.12. Una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi finiti di un insieme X si dice *r–regolare* su X se per ogni r–colorazione di X esiste $A \in \mathcal{A}$ monocromatico.

Esempio 2.13. Sia $X = \mathbb{N}$ e $\mathcal{A} = \{\{a, b, a + b\} \mid a < b\}$. Allora il teorema di Schur infinito afferma che per ogni r l'insieme $\mathcal{A}$ è r–regolare su $\mathbb{N}$.

Esempio 2.14. Consideriamo $X = \mathbb{N}$ e

$$\mathcal{A}_l = \{\{a, a + d, \ldots, a + ld\} \mid d > 0\}.$$

Il teorema di van der Waerden enunciato all'inizio del capitolo precedente afferma dunque che per ogni l e per ogni l l'insieme $\mathcal{A}_l$ è r–regolare.

Teorema 2.15 (compattezza combinatoria). *Se una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi finiti è r–regolare su un insieme infinito X, allora è anche r–regolare su un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni $Y \subseteq X$ finito esista una r–colorazione $Y = C_1^Y \sqcup \cdots \sqcup C_r^Y$ per la quale non esistono elementi $A \in \mathcal{A}$ monocromatici. Prendiamo come insieme di indici $J = \operatorname{Fin} X$, l'insieme delle parti finite di X. Per ogni $x \in X$ denotiamo con $\widehat{x} = \{Y \in J \mid x \in Y\}$. Chiaramente la famiglia $\mathcal{F} = \{\widehat{x} \mid x \in X\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita perché

$$\widehat{x}_1 \cap \cdots \cap \widehat{x}_n = \{Y \in J \mid x_1, \ldots, x_n \in Y\}$$

è non vuota in quanto vi appartiene $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Possiamo prendere allora un ultrafiltro $\mathcal{U}$ su J che include la famiglia $\mathcal{F}$.
Per ogni $x \in X$, sia $\Gamma_i^x = \{Y \in J \mid x \in C_i^Y\}$. Notiamo che $\Gamma_1^x \sqcup \cdots \sqcup \Gamma_r^x = \widehat{x} \in \mathcal{U}$, dunque esiste un unico colore i_x tale che $\Gamma_{i_x}^x \in \mathcal{U}$. In questo modo determiniamo una r–colorazione $X = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$, con

$$x \in C_i \Leftrightarrow \Gamma_i^x \in \mathcal{U}.$$

Per ipotesi esiste dunque un insieme $A = \{a_1, \ldots, a_m\} \in \mathcal{A}$ ed un colore i con $A \in C_i$. Per definizione della coloriazione abbiamo che $\Gamma_i^{a_1}, \ldots, \Gamma_i^{a_m} \in \mathcal{U}$, ma allora

$$\Gamma = \Gamma_i^{a_1} \cap \cdots \cap \Gamma_i^{a_m} \in \mathcal{U}.$$

Prendendo un qualsiasi $Y \in \Gamma$, abbiamo che $a_1, \ldots, a_m \in C_i^Y$. Questo significa che A è monocromatico rispetto alla colorazione $Y = C_1^Y \sqcup \cdots \sqcup C_r^Y$, contro la nostra assunzione. □

Grazie al principio di compattezza combinatoria potremmo ridimostrare la versione finita dei teoremi visti sinora. Vediamo ad esempio il teorema di Schur:

Teorema 2.16 (di Schur finito). *Per ogni r esiste n tale che in ogni r–colorazione di $\{1, \ldots, n\}$ esiste una tripla di Schur $a < b < a + b$ monocromatica.*

Dimostrazione. Come visto nell'esempio 2.13 il teorema di Schur infinito afferma che l'insieme

$$\mathcal{A} = \{\{a, b, a + b\} \mid a < b\}$$

è r–regolare su $\mathbb{N}$ per ogni r. Per il principio di compattezza combinatoria esiste dunque $Y \subseteq \mathbb{N}$ finito sul quale $\mathcal{A}$ è r–regolare per ogni r. Ma se Y è finito esisterà n tale che $Y \subseteq \{1, \ldots, n\}$, e vale banalmente che per ogni r l'insieme $\mathcal{A}$ è r–regolare su $\{1, \ldots, n\}$. □

2.4.1 Un po' di topologia

Grazie al teorema di Tychonoff e alla nozione di compattezza topologica è possibile dimostrare il principio di compattezza combinatoria enunciato poco sopra, vediamo come.

Teorema 2.17 (compattezza combinatoria)**.** *Se una famiglia $\mathcal{A}$ di insiemi finiti è r–regolare su un insieme X, allora è anche r–regolare su un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$.*

Dimostrazione. Consideriamo lo spazio topologico $\{1, \ldots, r\}$ dotato della topologia discreta: rispetto a questa topologia tale spazio è compatto. Per il teorema di Tychonoff lo spazio

$$C = \{1, \ldots, r\}^X$$

è compatto rispetto alla topologia prodotto. Lo spazio C è lo spazio di tutte le possibili r–colorazioni di X: infatti per ogni successione $c = (c_\alpha)_{\alpha \in X} \in C$ abbiamo la colorazione $X = C_1^c \sqcup \cdots \sqcup C_r^c$ tale che

$$\alpha \in C_i^c \iff c_\alpha = i.$$

La nozione di monocromaticità di un insieme $A \in \mathcal{A}$ può essere tradotta in termini topologici come segue. Per $A \in \mathcal{A}$ e $i \in \{1, \ldots, r\}$ definiamo

$$U_i^A = \{c \in C \mid c_\alpha = i \ \forall \alpha \in A\} = \bigcap_{\alpha \in A} \pi_\alpha^{-1}(i).$$

Questo insieme è aperto per la topologia prodotto in quanto intersezione finita (per ipotesi) di aperti, e rappresenta l'insieme delle r–colorazioni di X tali che A ha il colore i. Pertanto l'aperto

$$U^A = \bigcup_{i=1}^{r} U_i^A$$

rappresenta tutte le possibili colorazioni di X tali che A è monocromatico. In questo modo possiamo riscrivere l'ipotesi: la r–regolarità di $\mathcal{A}$ su X equivale a chiedere che per ogni $c \in C$ esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $c \in U^A$, ossia

$$C \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} U^A.$$

Dal ricoprimento aperto $\{U^A \mid A \in \mathcal{A}\}$ di C, per compattezza, possiamo estrarre un sottoricoprimento finito:

$$C \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} U^{A_j}.$$

Poniamo allora $Y = \bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq X$, che è finito per ipotesi. Ogni r–colorazione di Y si può estendere banalmente a una r–colorazione di X: il fatto che gli U^{A_j} siano un ricoprimento di C implica che esiste $j \in \{1, \ldots, n\}$ tale che $A_j \subseteq Y$ è monocromatico per la colorazione di X. $\square$

Diamo adesso una seconda formulazione del principio di compattezza combinatoria che discende subito dalla dimostrazione appena fatta:

Proposizione 2.18. *Sia $\mathcal{A}$ una famglia di insiemi finiti r–regolare su un insieme X. Allora esiste $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ sottofamiglia finita r–regolare su X.*

Dimostrazione. Seguendo i soliti passi della precedente dimostrazione abbiamo che $\{A_1, \ldots, A_n\}$ è lo sottofamiglia finita $\mathcal{A}_0$ in questione. $\square$

Capitolo 3

Lo spazio $\beta\mathbb{N}$ degli ultrafiltri

Allo spazio di tutti gli ultrafiltri può essere data in modo naturale una struttura di spazio topologico compatto. In questo capitolo studieremo sia la struttura di questo spazio con le sue carateristiche generali (cardinalità, metrizzabilità eccetera), sia alcune nozioni strettamente collegate agli ultrafiltri e che si riveleranno poi essenziali per gli sviluppi ulteriori.

3.1 Gli ultrafiltri immagine

Come il nome suggerisce, adesso effettuiamo una costruzione che ci consente di creare un ultrafiltro sull'insieme di arrivo di una funzione, dato un ultrafiltro sull'insieme di partenza.

Definizione 3.1. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro su I e sia $f : I \to J$ una funzione. Definiamo l'*ultrafiltro immagine* su J come

$$f_\star(\mathcal{U}) = \{A \subseteq J \mid f^{-1}(A) \in \mathcal{U}\},$$

ossia $A \in f_\star(u)$ se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$.

Il lettore verifichi che $f_\star(\mathcal{U})$ è un ultrafiltro su J e che inoltre vale

$$f_\star(g_\star(\mathcal{U})) = (f \circ g)_\star(\mathcal{U}).$$

Siano $f, g : I \to J$ due funzioni. Vale anche la proprietà seguente: se $f \equiv_\mathcal{U} g$ allora $f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U})$.[1] La dimostrabilità in ZFC dell'esistenza di ultrafiltri $\mathcal{U}$ che soddisfino il viceversa della proprietà appena citata per ogni f e g è ancora oggi un problema aperto della teoria degli insiemi (!). Tali ultrafiltri sono detti *ultrafiltri di Hausdorff*. La proprietà $f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U}) \Rightarrow f \equiv_\mathcal{U} g$ vale intanto in un caso speciale, ma per arrivare a dimostrare questo caso ci avvarremo di un interessante risultato combinatorio:

[1]due funzioni f e g si dicono $\mathcal{U}$*–equivalenti* se $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

Teorema 3.2 (dei tre colori). *Per ogni $f : I \to I$ esiste una 3–colorazione di I tale che nessuna coppia $\{i, f(i)\}$ con $i \neq f(i)$ è monocromatica.*

Dimostrazione. Dimostriamo prima una "versione finita" di questa proprietà.

Lemma 3.3. *Ogni $A \subseteq I$ finito ammette una 3–colorazione tale che se $i, f(i) \in A$ sono diversi, allora hanno colori diversi.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su $k = |A|$. Se $k = 1$ la proprietà da dimostrare è vera a vuoto. Procediamo adesso con il passo induttivo, prendendo $A = \{n_1, \ldots, n_{k+1}\}$. Per il principio dei cassetti esiste n_s che ha al più una controimmagine in $\{n_1, \ldots, n_{k+1}\}$, cioè $|f^{-1}(n_s) \cap A| \leq 1$. Consideriamo lo stesso insieme privato di n_s, ossia $A - \{n_s\}$: questo per ipotesi induttiva è 3–colorabile. Vogliamo dare un colore a n_s: nel caso peggiore n_s ha controimmagine e immagine in A e queste sono di due colori diversi, e qui basta colorare n_s con il colore rimanente. □

Notiamo che per dare una 3–colorazione su I non possiamo direttamente rincollare le varie colorazioni che abbiamo sui sottoinsiemi finiti, perché in generale esse non saranno coerenti tra loro (cioè non saranno una estensione dell'altra). Tuttavia, usando un ultrafiltro, riusciremo a superare il problema. Di nuovo, si può procedere in modo analogo a quanto abbiamo fatto per dimostrare che il teorema di Ramsey finito seguiva dalla versione infinita. Vediamo in dettaglio solo il caso $I = \mathbb{N}$.
Per ogni n, fissiamo una 3–colorazione $\{1, \ldots, n\} = C_1^n \sqcup C_2^n \sqcup C_3^n$ con la proprietà del lemma. Fissiamo inoltre un ultrafiltro non principale $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$, e definiamo C_1, C_2 e C_3 ponendo

$$k \in C_j \Leftrightarrow \Gamma_j^k = \{n \in \mathbb{N} \mid k \in C_j^n\}.$$

Osserviamo che per ogni k,

$$\Gamma_1^k \sqcup \Gamma_2^k \sqcup \Gamma_3^k = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq k\} \in \mathcal{U},$$

dunque uno ed un solo Γ_j^k appartiene ad $\mathcal{U}$. Otteniamo così una 3–colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ con la proprietà voluta. Infatti, supponiamo per assurdo che esistano k e j con $f(k) \neq k$ e $\{k, f(k)\} \in C_j$. Prendendo $n \in \Gamma_j^k \cap \Gamma_j^{f(k)} \in \mathcal{U}$, si avrebbe allora che $\{k, f(k)\} \in C_j^n$, contro l'ipotesi. □

Osservazione 3.4. Una dimostrazione valida per ogni insieme di indici I si può ottenere usando la compattezza combinatoria in questo modo. Supponiamo per assurdo che per ogni 3–colorazione di I esista sempre una coppia $\{i, f(i)\}$ con $i \neq f(i)$ monocromatica. Questo significa che la famiglia $\mathcal{A} = \{\{i, f(i)\} \mid i \neq f(i)\}$ è 3–regolare su I. Ma allora esisterebbe un insieme finito $A \subseteq I$ con A è 3–regolare su A, contro il lemma.

Proposizione 3.5. *Se* $f_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{U}$ *allora* $f \equiv_\mathcal{U} id$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che f e la funzione identità non siano $\mathcal{U}$–equivalenti, ossia supponiamo che $\{i \mid f(i) \neq i\} \in \mathcal{U}$. Senza perdere di generalità prendiamo $g \equiv_\mathcal{U} f$ tale che $g(i) \neq i$ per ogni $i \in I$: questo passaggio è lecito in quanto $g_\star(\mathcal{U}) = f_\star(\mathcal{U})$. Per il lemma dei tre colori esiste una 3–colorazione $I = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$ tale che $g(C_i) \cap C_i = \emptyset$. Per le proprietà di ultrafiltro abbiamo che esiste un colore i tale che $C_i \in \mathcal{U}$, e quindi $g(C_i) \notin \mathcal{U}$. Del resto però $g(C_i) \in g_\star(\mathcal{U})$, e dunque si conclude che $\mathcal{U} \neq g_\star(\mathcal{U})$. $\square$

C'è una naturale nozione di isomorfismo tra ultrafiltri:

Definizione 3.6. Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri (il primo su I e il secondo su J). Diciamo che $\mathcal{U}$ è *isomorfo* a $\mathcal{V}$, e scriveremo $\mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$, se e solo se esiste $\sigma : I \to J$ biunivoca tale che $\sigma_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$.

Notiamo che dalla definizione segue immediatamente che l'isomorfismo tra ultrafiltri è una relazione simmetrica, e pertanto si tratta di una relazione di equivalenza.

Proposizione 3.7. *Sia* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro su* I *e* $f : I \to J$ *con* $|I| = |J|$. *Vale* $f_\star(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$ *se e solo se esiste* $A \in \mathcal{U}$ *tale che* $f|_A$ *è iniettiva.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Per ipotesi esiste $\sigma : J \to I$ biunivoca tale che $\sigma_\star(f_\star(\mathcal{U})) = \mathcal{U}$. Per la proposizione precedente abbiamo che $(\sigma \circ f)_\star \equiv_\mathcal{U} id$, ossia

$$A = \{i \mid \sigma(f(i)) = i\} \in \mathcal{U}.$$

Ma allora si verifica subito che $f|_A$ è iniettiva.
($\Longrightarrow$) Per ipotesi abbiamo $A \in \mathcal{U}$ tale che $f|_A$ è iniettiva. Possiamo supporre che A sia infinito, altrimenti $\mathcal{U}$ sarebbe principale. Partizioniamo $A = A_1 \sqcup A_2$ in due insiemi disgiunti che hanno la stessa cardinalità di A. Per le proprietà di ultrafiltro uno (ed uno solo) dei due pezzi sta in $\mathcal{U}$, diciamo A_1. Notiamo che $|I - A_1| = |I| = |J - f(A_1)|$, sia quando $|A| = |I|$, sia nel caso $|A| < |I|$. Così esiste $\tau : I - A_1 \to J - f(A_1)$ bigezione, e a questo punto estendiamo $f|_{A_1}$ ad una funzione $\sigma : I \to J$ biunivoca definendo

$$\sigma(i) = \begin{cases} f(i) & \text{se } i \in A_1 \\ \tau(i) & \text{se } i \notin A_1 \end{cases} .$$

Visto che σ e f coincidono sull'insieme $A_1 \in \mathcal{U}$ abbiamo $\sigma \equiv_\mathcal{U} f$. Così $f_\star(\mathcal{U}) = \sigma_\star(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$. $\square$

3.2 Il pre–ordine di Rudin–Keisler

Una relazione tra ultrafiltri molto studiata è la seguente:

Definizione 3.8. Il *pre–ordine di Rudin-Keisler* $\leq_{RK}$ tra ultrafiltri è definito ponendo $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ se e solo se esiste f tale che $f_\star(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$.

Per quanto già visto, la relazione $\leq_{RK}$ è in effetti un pre–ordine parziale, cioè soddisfa le proprietà riflessiva e transitiva. Inoltre, sulle classi di isomorfismo degli ultrafiltri su un insieme fissato, esso determina un ordine parziale:

Proposizione 3.9. *Vale* $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{V}$ *e* $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ *se e solo se* $\mathcal{U} \simeq \mathcal{V}$.

Dimostrazione. Siano f e g tali che $f_\star(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$ e $g_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Allora

$$(g \circ f)_\star(\mathcal{V}) = g_\star(f_\star(\mathcal{V})) = \mathcal{V},$$

e dunque $A = \{i \mid g(f(i)) = i\} \in \mathcal{V}$ e in particolare $f|_A$ è iniettiva. Quindi dalla proposizione 3.7 segue che $f_\star(\mathcal{V}) \simeq \mathcal{V}$ e del resto $f_\star(\mathcal{V}) = \mathcal{U}$. $\square$

È un teorema della teoria degli insiemi il fatto che il pre–ordine di Rudin–Keisler non è lineare. Infatti, per ogni insieme infinito I esistono ultrafiltri $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ su I che non sono confrontabili. Tuttavia la dimostrazione di questa proprietà è molto complicata e dunque non la presenteremo qui.

Il pre–ordine di Rudin–Keisler non ha elementi massimali, come mostra la seguente semplice proprietà:

Lemma 3.10. *Sia* $\mathcal{U}$ *un ultrafiltro non principale su* I. *Allora* $\mathcal{U} <_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, *ossia*

$$\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \quad \text{e} \quad \mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq_{RK} \mathcal{U}.$$

In particolare $\mathcal{U} \not\simeq \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$.

Dimostrazione. (1) Mostriamo che $\mathcal{U} \leq_{RK} \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Consideriamo la proiezione $\pi_1 : I \times I \to I$ e osserviamo che $(\pi_1)_\star(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U}$.
(2) Vediamo adesso che $\mathcal{U} \otimes \mathcal{U} \not\leq_{RK} \mathcal{U}$. Se per assurdo valesse la disuguaglianza avremmo l'esistenza di $f : I \to I \times I$ tale che $f_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$. Detta $\pi_1 : I \times I \to I$ la proiezione sulla prima componente abbiamo

$$(\pi_1 \circ f)_\star(\mathcal{U}) = (\pi_1)_\star(f_\star(\mathcal{U})) = (\pi_1)_\star(\mathcal{U} \otimes \mathcal{U}) = \mathcal{U},$$

e dunque $\pi_1 \circ f \equiv_{\mathcal{U}} id$. Così esiste $A \in \mathcal{U}$ tale che su A abbiamo $\pi_1 \circ f = id$, ossia per ogni $n \in A$ si ha $f(n) \in \pi_1^{-1}(n)$. Allora $f(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, ma tutte le sezioni di $f(A)$ hanno al più un elemento: infatti se $n \in A$ allora $\pi_1^{-1}(n) \cap A = \{f(n)\}$ per costruzione, altrimenti $\pi^{-1}(n) \cap A = \emptyset$. Quindi se $\mathcal{U}$ non è principale $f(A) \notin \mathcal{U} \otimes \mathcal{U}$, assurdo. $\square$

Gli elementi minimali nel pre-ordine di Rudin-Keisler rivestono particolare importanza nella teoria degli ultrafiltri, ed esiste un'estesa letteratura dedicata al loro studio. Qui ci limitiamo a considerarne alcune definizioni equivalenti.

Teorema 3.11. *Dimostrare che le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *per ogni partizione* $\mathbb{N} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ *in infiniti pezzi non vuoti* $A_k \notin \mathcal{U}$ *per ogni* k*, esiste un elemento* $X \in \mathcal{U}$*, detto selettore, con la proprietà che* $|X \cap A_k| = 1$*;*

(2) *se* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *non è* $\mathcal{U}$*–equivalente ad una funzione costante, allora* f *è* $\mathcal{U}$*–equivalente ad una funzione iniettiva;*

(3) *ogni funzione* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *è* $\mathcal{U}$*–equivalente ad una funzione debolmente crescente;*

(4) $\mathcal{U}$ *è minimale nell'ordinamento di Rudin–Keisler, ossia* $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$ *implica* $\mathcal{V} \simeq \mathcal{U}$*.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione che non è $\mathcal{U}$–equivalente a una costante. Per definizione ciò significa che per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $f^{-1}(k) \notin \mathcal{U}$. Definiamo la partizione

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \quad \text{con} \quad A_k = f^{-1}(k).^2$$

Per ipotesi esiste $X \in \mathcal{U}$ tale che $|X \cap A_k| = 1$ per ogni k; prendiamo l'unico elemento $x_k \in X \cap A_k$, così che

$$X = \{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}.$$

Per le proprietà di ultrafiltro abbiamo che $\mathcal{U}$ deve contenere o l'insieme dei numeri pari o quello dei numeri dispari: senza ledere la generalità del problema supponiamo che i pari $\mathbb{P} \in \mathcal{U}$ e definiamo $X_1 = X \cap \mathbb{P}$. In questo modo ci siamo garantiti che X_1 non è cofinito: se infatti lo fosse avremmo che $X_1 \in \mathrm{Fr}_{\mathbb{N}}$, e dunque anche $\mathbb{P} \in \mathrm{Fr}_{\mathbb{N}}$ essendo un soprainsieme, e questo è assurdo. Definiamo:

$$\mathbb{N} - X_1 = \{y_k \mid k \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad \{k \mid x_k \notin X_1\} = \{z_k \mid k \in \mathbb{N}\}.$$

[2] alcuni insiemi A_k potrebbero essere vuoti perché f non è suriettiva; in ogni caso sono sempre numerabili gli A_k non vuoti, in quanto se solamente un numero finito fossero non vuoti allora per le proprietà di ultrafiltro avremmo che uno degli A_k starebbe in $\mathcal{U}$, e questo è assurdo.

A questo punto possiamo definire la funzione g che sarà la candidata iniettiva ad essere $\mathcal{U}$–equivalente ad f: poniamo

$$g(x) = \begin{cases} k & \text{se } x = x_k \in X_1 \\ z_k & \text{se } x = y_k \notin X_1 \end{cases}.$$

Effettivamente g è la funzione richiesta:

- g è iniettiva. Se $g(a) = g(b)$ allora o $a, b \in X_1$ o $a, b \notin X_1$: infatti se $a \in X_1$ e $b \notin X_1$ allora $g(a) \in \{k \mid x_k \in X_1\}$ ma $g(b) \in \{k \mid x_k \notin X_1\}$. Ma g per costruzione è iniettiva sia su X_1 che su $\mathbb{N} - X_1$ e dunque è globalmente iniettiva.

- $g \equiv_{\mathcal{U}} f$. Se per assurdo $I = \{n \mid f(n) \neq g(n)\} \in \mathcal{U}$ allora possiamo prendere un $x_k \in I \cap X_1$. Ma per tale elemento $f(x_k) = k$ per definizione e $g(x_k) = k$ per costruzione.

((2) $\Longrightarrow$ (1)) Supponiamo di avere una partizione

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

con $A_k \notin \mathcal{U}$ non vuoti. Definiamo la funzione $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f(A_k) = k$. Così per ogni k vale $f^{-1}(k) = A_k \notin \mathcal{U}$, e dunque f non è $\mathcal{U}$–equivalente a una costante; per ipotesi $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ con g iniettiva e definiamo

$$X = \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Tale insieme soddisfa facilmente la proprietà $|X \cap A_k| \leq 1$ per ogni k e si può facilmente ampliare ad un insieme X' tale che $|X' \cap A_k| = 1$ per ogni k.
((3) $\Longrightarrow$ (4)) Supponiamo $\mathcal{V} \leq_{RK} \mathcal{U}$, allora esiste $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_\star(\mathcal{U}) = \mathcal{V}$. Per ipotesi abbiamo l'esistenza di g debolmente crescente tale che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$. Quindi abbiamo

$$\mathcal{V} = f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U}).$$

Se dimostriamo che $g_\star(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$ abbiamo finito; una condizione sufficiente per $g_\star(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$ è dimostrare che g è iniettiva su un elemento A dell'ultrafiltro $\mathcal{U}$. Il punto è che g è costante a tratti, ossia esistono (al più) infiniti interi $n_0 < n'_0 < n_1 < n'_1 < n_2 < n'_2 < \cdots$ tali che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$g\big|_{[n_k, n'_k] \cap \mathbb{N}}$$

è costante. Dobbiamo scegliere adesso un elemento da ogni blocco $[n_k, n'_k]$ in modo che l'insieme formato con questi elementi sia un elemento dell'ultrafiltro. Consideriamo una funzione h definita in modo strettamente decrescente sui blocchi:

$$h(n_k + x) = n'_k - x \quad \forall k \in \mathbb{N}\ \forall x = 0, \ldots, n'_k - n_k.$$

Tale funzione h è $\mathcal{U}$–equivalente a una funzione h' debolmente crescente, pertanto poniamo

$$A = \{n \mid h(n) = h'(n)\} \in \mathcal{U}.$$

La verifica che A è l'insieme crecato è immediata: basta far vedere – per assurdo – che A interseca ciascun blocco in un solo punto.
$((4) \Longrightarrow (2))$ Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro minimale per il pre–ordine di Rudin–Keisler e sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ non $\mathcal{U}$–equivalente a una costante. Allora per definizione del pre–ordine abbiamo

$$f_\star(\mathcal{U}) \leq_{RK} \mathcal{U},$$

e per minimalità segue dunque $f_\star(\mathcal{U}) \simeq \mathcal{U}$. Da questo segue facilmente che $f \equiv_\mathcal{U} \sigma$ con $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bigettiva.
$((1),(2) \Longrightarrow (3))$ Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione qualunque. Se f è $\mathcal{U}$–equivalente a una costante allora abbiamo finito, dunque possiamo supporre da subito f iniettiva. Consideriamo $f(0)$: per iniettività (dato che i valori sotto $f(0)$ sono finiti) esiste a_0 tale che $f(n) > f(0)$ per ogni $n > a_0$. Dato che $A_0 = [0, a_0] \cap \mathbb{N}$ è finito abbiamo che esiste $M_0 = \max_{A_0} f$ e per iniettività esiste $a_1 > a_0$ tale che per ogni $n > a_1$ si ha $f(n) > M_0$. Posto $A_1 = (a_0, a_1] \cap \mathbb{N}$ abbiamo l'esistenza di $M_1 = \max_{A_0 \cup A_1} f$ ed esiste $a_2 > a_1$ tale che per ogni $n > a_2$ si ha $f(n) > M_1$. Procedendo così abbiamo una partizione

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

tale che per ogni $k \in \mathbb{N}$ vale $f(A_{k+2}) > M_k$, dove $M_k = \max_{A_0 \cup \cdots \cup A_k} f$. Intanto $A_k \notin \mathcal{U}$ per ogni k in quanto sono insiemi finiti e $\mathcal{U}$ non è principale, e inoltre $A_k \neq \emptyset$ per ogni k in quanto ciascun A_k contiene almeno un punto per costruzione. Per l'ipotesi (1) abbiamo dunque l'esistenza di un $X \in \mathcal{U}$ tale che $|X \cap A_k| = 1$, e sia $X \cap A_k = \{x_k\}$. Inoltre osserviamo che

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k \in \mathbb{P}} A_k \sqcup \bigcup_{k \in \mathbb{D}} A_k = A \sqcup B,$$

dunque per le proprietà degli ultrafiltri o $A \in \mathcal{U}$ o $B \in \mathcal{U}$. Senza perdere di generalità possiamo assumere $A \in \mathcal{U}$. Dal fatto che X è selettore abbiamo $\{x_{2h}\}_{h \in \mathbb{N}} = X \cap A \in \mathcal{U}$, dato che $X \in \mathcal{U}$ e $A \in \mathcal{U}$. A questo punto $f|_{X \cap A}$ è strettamente crescente, e può essere estesa in modo banale a una funzione $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ a scalini (e quindi debolmente crescente). Infine per costruzione

$$X \cap A \subseteq \{n \mid f(n) = g(n)\} \in \mathcal{U},$$

ossia $f \equiv_\mathcal{U} g$. $\square$

Esiste anche un'altra proprietà equivalente alle precedenti quattro che si esprime come segue: per ogni partizione $[\mathbb{N}]^k = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste $H \in \mathcal{U}$ omogeneo.

Definizione 3.12. Gli ultrafiltri $\mathcal{U}$ che godono delle proprietà elencate sopra si dicono *ultrafiltri selettivi* in virtù della proprietà (1), o anche *ultrafiltri di Ramsey*, in virtù della proprietà appena espressa.

L'esistenza degli ultrafiltri selettivi non è dimostrabile in ZFC, ma è consistente (ad esempio, segue dall'ipotesi del continuo). Gli ultrafiltri selettivi sono molto importanti perché la proprietà di Hausdorff vale sempre quando l'ultrafiltro considerato è selettivo: nella parte degli esercizi svolgeremo la dimostrazione di questo fatto (esercizio A.11). Attenzione però: ricordiamo infatti che la dimostrabilità in ZFC dell'esistenza di ultrafiltri di Hausdorff è un problema aperto della teoria degli insiemi.

3.3 Una topologia su $\beta\mathbb{N}$

Come aniticipato all'inizio del capitolo, si può dare una struttura di spazio topologico allo spazio degli ultrafiltri. Vediamo adesso come:

Definizione 3.13. Lo spazio topologico $\beta\mathbb{N}$ è l'insieme di tutti gli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ con la topologia generata dalla base di aperti $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_A \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$, dove

$$\mathcal{O}_A = \{\mathcal{U} \text{ ultrafiltro su } \mathbb{N} \mid A \in \mathcal{U}\}.$$

Identificando ogni numero naturale n con il corrispondente ultrafiltro principale $\mathfrak{U}_n = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid n \in A\}$, assumeremo direttamente $\mathbb{N} \subset \beta\mathbb{N}$.

Dalle proprietà di ultrafiltro, seguono subito le proprietà seguenti per gli aperti della base (il lettore le verifichi):

- $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A\cap B}$;
- $\mathcal{O}_A \cup \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_{A\cup B}$;
- $\beta\mathbb{N} - \mathcal{O}_A = \mathcal{O}_{A^C}$.

Così $\beta\mathbb{N}$ è dunque uno spazio topologico zero–dimensionale, cioè ha una base formata da insiemi "clopen" (aperti e chiusi contemporaneamente). Notiamo infatti che ogni $\mathcal{O}_A$ è sia aperto che chiuso, in quanto è il complementare di $\mathcal{O}_{A^C}$.[3] Di conseguenza, essendo uno spazio di Hausdorff (vedi sotto), $\beta\mathbb{N}$ è *totalmente sconnesso*, cioè tutte le sue componenti connesse consistono di un solo punto.

[3]nella parte degli esercizi mostreremo che effettivamente tali aperti e chiusi sono tutti e soli clopen di $\beta\mathbb{N}$.

Proposizione 3.14. *Lo spazio $\beta\mathbb{N}$ è uno spazio di Hausdorff compatto.*

Dimostrazione. (1) Siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ due ultrafiltri diversi: allora esiste $A \in \mathcal{U}$ e $A \notin \mathcal{V}$. Ma da questa seconda ipotesi segue $A^C \in \mathcal{V}$, e quindi abbiamo $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A^C}$, e del resto $\mathcal{O}_A$ e $\mathcal{O}_{A^C}$ sono due aperti disgiunti.
(2) Dimostriamo adesso che $\beta\mathbb{N}$ è uno spazio compatto. Una delle formulazioni equivalenti della proprietà di compattezza è la seguente: ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita (FIP) ha intersezione non vuota.
Fissiamo dunque una famiglia $\mathcal{C} = \{C_i\}_{i\in I}$ di chiusi con la FIP. Visto che $\mathcal{B} = \{\mathcal{O}_A | A \subseteq \mathbb{N}\}$ è anche una base di chiusi, per ogni $i \in I$ esisterà una famiglia J_i di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ tale che

$$C_i = \bigcap_{A\in J_i} \mathcal{O}_A.$$

Se prendiamo $J = \bigcup_{i\in I} J_i$, anche la famiglia $\mathcal{C}' = \{\mathcal{O}_A \mid A \in J\}$ ha la FIP (verificare!). Ma $\mathcal{O}_{A_1} \cap \cdots \cap \mathcal{O}_{A_n} \neq \emptyset \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \neq \emptyset$, e quindi anche la famiglia J ha la FIP. Se ne può prendere allora il filtro generato da J ed estenderlo ad un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Da $J \subseteq \mathcal{U}$ segue subito

$$\mathcal{U} \in \bigcap_{A\in J} \mathcal{O}_A = \bigcap_{i\in I} C_i,$$

e dunque l'ultima intersezione scritta è on vuota. □

Proposizione 3.15. *Per ogni $A \subseteq \mathbb{N}$ la chiusura topologica $\overline{A} = \mathcal{O}_A$.*

Dimostrazione. Per definizione di chiusura topologica abbiamo

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{C\supseteq A \\ C \text{ chiuso}}} C = \bigcap_{\mathcal{O}_B\subseteq A} \mathcal{O}_B.$$

Adesso, $A \subseteq \mathcal{O}_B$ se e solo se $B \in \mathfrak{U}_a$ per ogni $a \in A$, se e solo se $a \in B$ per ogni $a \in A$, ossia $A \subseteq B$. Concludiamo così che $\overline{A} = \bigcap_{B\supseteq A} \mathcal{O}_B = \mathcal{O}_A$. □

Proposizione 3.16. *Lo spazio $\beta\mathbb{N}$ è una compattificazione di $\mathbb{N}$, ossia $\mathbb{N}$ è un sottospazio discreto e denso di $\beta\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. (1) Dimostriamo intanto che $\mathbb{N}$ è un sottospazio discreto di $\beta\mathbb{N}$: basta notare che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha $\mathcal{O}_{\{n\}} = \{\mathfrak{U}_n\}$ per dire che tutti i punti di $\mathbb{N}$ sono isolati in $\beta\mathbb{N}$.
(2) Il fatto che $\mathbb{N}$ sia denso si ottiene subito da $\overline{\mathbb{N}} = \mathcal{O}_\mathbb{N} = \beta\mathbb{N}$. □

Vediamo finalmente una proprietà fondamentale dello spazio $\beta\mathbb{N}$, che ci permetterà di darne una caratterizzazione topologica.

Teorema 3.17 (proprietà universale)**.** *Sia K uno spazio compatto di Hausdorff. Allora ogni funzione $f : \mathbb{N} \to K$ si estende in modo unico ad una funzione continua $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to K$.*

Dimostrazione. Definiamo

$$\overline{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n f(n),$$

che è un elemento di K perché K è compatto, e sappiamo che nei compatti esiste sempre l'$\mathcal{U}$–limite di qualsiasi successione. Vediamo prima che $\overline{f}$ è un'estensione della funzione f. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $\overline{f}(k) = \mathfrak{U}_k\text{-}\lim_n f(n)$ e affermiamo che questo limite è $f(k)$: questo vuol dire che per ogni intorno U di $\overline{f}(k)$ si ha $\{n \mid f(n) \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{U}_k$, cioè $f(k) \in \mathcal{U}$; visto che K è uno spazio di Hausdorff e che $f(k)$ appartiene ad ogni intorno di $\overline{f}(k)$, necessariamente deve essere $f(k) = \overline{f}(k)$.
Per dimostrare la continuità di $\overline{f}$ notiamo intanto che vale la seguente proprietà:

Lemma 3.18. *Se $C \subseteq K$ è chiuso allora $\mathcal{O}_{f^{-1}(C)} \subseteq \overline{f}^{-1}(C)$.*

Dimostrazione. Se $\mathcal{V} \notin \overline{f}^{-1}(C)$, cioè se $\overline{f}(\mathcal{V}) = \mathcal{V}\text{-}\lim_n f(n) \in C^C$ che è aperto, allora per definizione di $\mathcal{V}$–limite si avrebbe $\{n \mid f(n) \in C^C\} \in \mathcal{V}$, dunque $f^{-1}(C) \notin \mathcal{V}$, cioè $\mathcal{V} \notin \mathcal{O}_{f^{-1}(C)}$. □

Preso un generico aperto U di K, vogliamo mostrare che se $\overline{f}(\mathcal{U}) \in U$ allora tutto un intorno di $\mathcal{U}$ è incluso in $\overline{f}^{-1}(U)$. Lo spazio K è compatto di Hausdorff e quindi in particolare è regolare.[4] Allora possiamo prendere un intorno chiuso C di $\overline{f}(\mathcal{U})$ con $C \subseteq U$. Dalla definizione di $\overline{f}(\mathcal{U}) = \mathcal{U}\text{-}\lim_n f(n)$ segue che

$$f^{-1}(C) = \{n \mid f(n) \in C\} \in \mathcal{U},$$

e dunque

$$\mathcal{U} \in \mathcal{O}_{f^{-1}(C)} \overset{\text{lemma}}{\subseteq} \overline{f}^{-1}(C) \subseteq \overline{f}^{-1}(U).$$

Infine, l'unicità dell'estensione segue dal fatto che $\mathbb{N}$ è denso in $\beta\mathbb{N}$, e dalla nota proprietà che due funzioni continue che coincidono su un sottospazio denso di uno spazio di Hausdorff sono necessariamente uguali. □

[4] uno spazio topologico X si dice regolare se ogni punto ha una base di intorni che sono chiusi. Equivalentemente, X è regolare se chiusi $C \neq \emptyset$ e punti $x \notin C$ possono essere separati da intorni disgiunti.

Corollario 3.19 (caratterizzazione topologica). *Sia X uno spazio topologico compatto di Hausdorff avente $N \subseteq X$ come sottospazio. Supponiamo che ogni funzione $f : \mathbb{N} \to K$ dove K è compatto di Hausdorff ammetta un'unica estensione continua $\overline{f} : X \to K$. Allora X è omeomorfo a $\beta\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Consideriamo le inclusioni $\iota_1 : \mathbb{N} \to X$ e $\iota_2 : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ ed estendendiamole alle funzioni continue $\overline{\iota_1} : \beta\mathbb{N} \to X$ e $\overline{\iota_2} : X \to \beta\mathbb{N}$. La composizione $\overline{\iota_2} \circ \overline{\iota_1} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ è continua, ed inoltre $\overline{\iota_2}(\overline{\iota}_1(n)) = n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Visto che anche l'identità su $\beta\mathbb{N}$ è banalmente continua, $\overline{\iota_2} \circ \overline{\iota_1} = id_{\beta\mathbb{N}}$ per unicità dell'estensione. Analogamente $\overline{\iota_1} \circ \overline{\iota_2} = id_X$. Concludiamo che $\overline{\iota_1}$ e $\overline{\iota_2}$ sono omeomorfismi, uno l'inverso dell'altro. □

Lo spazio $\beta\mathbb{N}$ è la compattificazione di Stone–Čech dello spazio discreto $\mathbb{N}$. Ricordiamo che uno spazio compatto di Hausdorff βX si dice *compattificazione di Stone–Čech* di X se:

(1) contiene X come sottospazio denso;

(2) vale la seguente proprietà universale: ogni funzione continua $f : X \to K$ a valori in uno spazio K compatto di Hausdorff, si estende in modo unico ad una funzione continua $\overline{f} : \beta X \to K$.[5]

3.4 La cardinalità di $\beta\mathbb{N}$

La famiglia degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathbb{N}))$, pertanto

$$|\beta\mathbb{N}| \leq 2^{\mathfrak{c}}.$$

Vogliamo vedere qui che in realtà vale l'uguaglianza.

Teorema 3.20. *Si ha $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.*

Dimostrazione. Lavoriamo sull'insieme numerabile $\mathrm{Fin}\,\mathbb{Q}$, che è equivalente a lavorare su $\mathbb{N}$. Di tale insieme esibiremo un insieme di $2^{\mathfrak{c}}$ famiglie di parti, indicizzate su $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ tali che ciascuna di esse abbia la proprietà dell'intersezione finita e possa quindi essere estesa ad un ultrafiltro. Faremo poi vedere che, date due famiglie distinte, esiste un sottoinsieme A di $\mathrm{Fin}\,\mathbb{Q}$ tale che A appartiene ad una famiglia e il suo complementare all'altra: questo ci garantisce che non sia possibile estenderle ad uno stesso ultrafiltro. In questo modo si ottiene una funzione iniettiva

$$\{0,1\}^{\mathbb{R}} \to \beta\mathbb{N},$$

il che concluderà la dimostrazione in quanto $\{0,1\}^{\mathbb{R}}$ ha cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$.

[5] osserviamo che la densità di X in βX segue dalla proprietà universale.

Per $t \in \mathbb{R}$ e $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ definiamo l'insieme

$$A_f^t = \{Y \in \operatorname{Fin}\mathbb{Q} \mid |Y \cap (-\infty, t)| \equiv f(t) \pmod 2\},$$

e per ogni $f \in \{0,1\}^{\mathbb{R}}$ consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F}_f = \{A_f^t \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Vediamo adesso che due funzioni diverse definiscono due famiglie non estendibili ad uno stesso ultrafiltro. Siano infatti $f \neq g$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tale che $f(t_0) \neq g(t_0)$, allora le famiglie $A_{t_0}^f$ e $A_{t_0}^g$ sono una il complementare dell'altra in $\operatorname{Fin}\mathbb{Q}$ in quanto per un qualunque sottoinsieme finito di $\mathbb{Q}$ la parità della cardinalità della sua intersezione con $(-\infty, t_0)$ è una e una sola tra $f(t_0)$ e $g(t_0)$. Rimane da mostrare che, fissata f, la famiglia $\mathcal{F}_f$ ha la proprietà dell'intersezione finita. Prendiamo allora $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ reali e costruiamo per ricorsione un sottoinsieme finito dei razionali che stia in

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_f^{t_i}.$$

Partiamo dall'insieme vuoto. Se $f(t_1) = 1$ mettiamo nell'insieme un razionale minore di t_1, altrimenti non facciamo niente. Per $i = 2, \ldots, n$ se $f(t_{i-1}) \neq f(t_i)$, aggiungiamo all'insieme costruito un razionale strettamente compreso tra t_{i-1} e t_i, altrimenti non facciamo niente. In questo modo, per ogni $i = 1, \ldots, n$, la parità del numero dei razionali nell'insieme costruito strettamente minori di t_i è esattamente $f(t_i)$ come richiesto. $\square$

Osservazione 3.21. Come conseguenza abbiamo che esistono $2^{\mathfrak{c}}$ distinte classi di isomorfismo in $\beta\mathbb{N}$. Infatti il numero di ultrafiltri isomorfi a un dato $\mathcal{U}$ è $\mathfrak{c}$, pertanto le classi di isomorfismo son $2^{\mathfrak{c}}$.

Il difetto che presenta la dimostrazione precedente è che non può essere estesa al caso generale dello spazio βX di tutti gli ultrafiltri su un insieme X qualunque. Così adesso presentiamo una dimostrazione dello stesso teorema che però ha la caratteristica di essere immediatamente estendibile anche al caso generale.

Teorema 3.22. *Si ha* $|\beta\mathbb{N}| = 2^{\mathfrak{c}}$.

Dimostrazione. Come abbiamo già osservato è sufficiente dimostrare che $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{\mathfrak{c}}$. Per fare questo ci avvaliamo di un semplice lemma che segue dalla proprietà universale di $\beta\mathbb{N}$:

Lemma 3.23. *Sia K uno spazio topologico compatto e di Hausdorff, e sia $f : \mathbb{N} \to K$ una funzione con immagine densa. Allora l'estensione (che esiste) $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to K$ è suriettiva.*

Dimostrazione. Intanto osserviamo che l'estensione $\overline{f}$ esiste in quanto K è compatto e di Hausdorff. Ora, abbiamo che $\overline{f}(\beta\mathbb{N})$ è compatto, dunque è chiuso perché è contenuto in K che è di Hausdorff. Inoltre $\overline{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq f(\mathbb{N})$, ed essendo chiusa si ha $\overline{f}(\beta\mathbb{N}) \supseteq \overline{f(\mathbb{N})} = K$. □

Il lemma appena mostrato ci garantisce che se troviamo uno spazio K compatto, di Hausdorff e separabile allora $|\beta\mathbb{N}| \geq |K|$. Ovviamente dobbiamo prendere uno spazio K con cardinalità $2^{\mathfrak{c}}$: tale spazio sarà

$$K = \{0,1\}^{\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}\right)}.$$

Ora, K è compatto per il teorema di Tychonoff, ed è di Hausdorff perché prodotto di spazi di Hausdorff (che sono $\{0,1\}$ con la topologia discreta). Ciò che rimane da dimostrare è che K è separabile, ossia ha un sottoinsieme numerabile denso. Consideriamo il sottoinsieme di K

$$\Lambda = \left\{ f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\} \mid \exists J \in \operatorname{Fin}\mathbb{N} \text{ t.c. } x|_J = y|_J \Rightarrow f(x) = f(y) \right\}.$$

Informalmente queste sono le funzioni che "guardano solo un numero finito di valori puntuali di x per decidere cosa fa $f(x)$"; con questa caratterizzazione informale si ricava facilmente che Λ è in bigezione naturale con l'insieme $\bigcup_{J \in \operatorname{Fin}\mathbb{N}} \{0,1\}^{\mathbb{N}}$: tale insieme è unione numerabile di insiemi finiti, e pertanto è numerabile. Se dimostriamo che Λ è denso abbiamo finito: per far ciò dimostriamo che Λ interseca ogni aperto della base canonica di K. Per $I \in \operatorname{Fin}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e $g : I \to \{0,1\}$ definiamo

$$U_{I,g} = \left\{ f : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\} \mid f|_I = g \right\} = \bigcap_{x \in I} \pi_x^{-1}(g(x)).^6$$

Informalmente $U_{I,g}$ sono tutte le funzioni che si comportanto come g su un insieme finito I di $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Mostriamo adesso che $\Lambda \cap U_{I,g} \neq \emptyset$ per ogni $I \in \operatorname{Fin}\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ e per ogni $g : I \to \{0,1\}$. Poniamo $I = \{a_1, \ldots, a_n\}$ con $a_i \neq a_j$ per ogni $i \neq j$: chiamiamo allora $n_{ij} \in \mathbb{N}$ quel numero tale che

$$a_i(n_{ij}) \neq a_j(n_{ij}),$$

[6] abbiamo indicato con $\pi_x : K \to \{0,1\}$ la proiezione $\pi_x(f) = f(x)$. La condizione che definisce $U_{I,g}$, ossia $f|_I = g$ può essere scritta come $\pi_x(f) = f(x) = g(x)$ per ogni $x \in I$, da cui segue l'espressione di $U_{I,g}$ come intersezione finita.

ossia quel numero che testimonia che a_i e a_j sono diverse. Posto $J = \{n_{ij}\}_{i \neq j}$ abbiamo per costruzione che $a_i|_J \neq a_j|_J$ per ogni $i \neq j$. Così possiamo costruire la funzione $h : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \{0,1\}$ definendo

$$h(a) = \begin{cases} g(a_i) & \text{se esiste } i \text{ tale che } a|_J = a_i|_J \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} .$$

Segue direttamente dalle definizioni che $h \in \Lambda \cap U_{I,g}$. $\square$

La precedente dimostrazione si adatta facilmente al caso generale dello spazio βX e permette di concludere che

$$|\beta X| = 2^{2^{|X|}}.$$

Capitolo 4

Il teorema di Hindman

Nel precedente capitolo abbiamo studiato in generale la struttura dello spazio topologico $\beta\mathbb{N}$ degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Qui invece doteremo $\beta\mathbb{N}$ anche di una struttura di semigruppo (topologico) introducendo una nuova operazione tra ulrafiltri. Saranno proprio argomenti di carattere algebrico e topologico a garantire l'esistenza di speciali ultrafiltri (gli ultrafiltri idempotenti) che useremo per dimostrare il teorema di Hindman e alcuni suoi rafforzamenti.

4.1 L'operazione di pseudosomma

Su $\beta\mathbb{N}$ è possibile definire un'operazione che estende in modo naturale la somma tra numeri naturali.

Definizione 4.1. L'ultrafiltro *pseudosomma* $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è definito ponendo

$$A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{se e solo se} \quad \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U},$$

dove abbiamo denotato $A - n = \{m \mid m + n \in A\}$.

Al solito seguono alcune verifiche di routine e alcune proprietà di base.

Lemma 4.2. *L'insieme $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è un ultrafiltro.*

Dimostrazione. Lasciamo verificare al lettore che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ è un filtro. Per quanto riguarda la proprietà di ultrafiltro, mostriamo che

$$A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}.$$

Per ipotesi $\{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$, dal fatto che $\mathcal{U}$ è un ultrafiltro $\{n \mid A - n \notin \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ e dal fatto che $\mathcal{V}$ è un ultrafiltro $\{n \mid (A - n)^C \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Il lemma è concluso osservando che $(A - n)^C = A^C - n$. $\square$

Lemma 4.3. *Se $A \in \mathcal{U}$ e $B \in \mathcal{V}$ allora l'insieme delle somme $A+B \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.*

Dimostrazione. È sufficiente dimostrare che $\{a \in A \mid A + B - a \in \mathcal{V}\} \supseteq A$. Preso un $a \in A$ abbiamo

$$A + B - a = \{a' + b' - a \mid a' \in A \text{ e } b' \in B\} \supseteq B,$$

ma $B \in \mathcal{V}$. Abbiamo mostrato che $A + B - a \in \mathcal{V}$ per ogni $a \in A$. □

Lemma 4.4. *Se $\mathfrak{U}_n$ e $\mathfrak{U}_m$ sono gli ultrafiltri principali generati dai numeri naturali n ed m rispettivamente, allora*

$$\mathfrak{U}_n \oplus \mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}_{n+m}.$$

Dunque $\oplus$ generalizza l'usuale operazione di somma tra naturali.

Dimostrazione. Per definizione di ultrafiltro principale $\{n\} \in \mathfrak{U}_n$ e $\{m\} \in \mathfrak{U}_m$, dunque per il lemma 4.3

$$\{n\} + \{m\} = \{n + m\} \in \mathfrak{U}_n \oplus \mathfrak{U}_m,$$

pertanto $\mathfrak{U}_n \oplus \mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}_{n+m}$. □

Osservazione 4.5. La dimostrazione poteva anche essere data direttamente scrivendo le definizioni. Bastava considerare la catena di implicazioni

$$\begin{aligned} A \in \mathfrak{U}_n \oplus \mathfrak{U}_m \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid A - k \in \mathfrak{U}_m\} \in \mathfrak{U}_n \Leftrightarrow n \in \{k \in \mathbb{N} \mid m \in A - k\} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow m \in A - n \Leftrightarrow m + n \in A \Leftrightarrow A \in \mathfrak{U}_{m+n}, \end{aligned}$$

e abbiamo finito.

Adesso potremmo chiederci se l'operazione di pseudosomma appena introdotta dota $\beta\mathbb{N}$ di una struttura algebrica notevole. Ricordiamo una definizione generale:

Definizione 4.6. Un *semigruppo topologico destro* è una coppia $(X, \star)$ dove

(1) X è uno spazio topologico;

(2) l'operazione $\star$ è un'operazione binaria associativa su X;

(3) per ogni $y \in X$, la funzione $\psi_y : X \to X$ dove $x \mapsto x \star y$ è continua.

Diversamente dai gruppi topologici (caso particolare dei semigruppi topologici), non si richiede qui che l'operazione $\star$ sia continua "globalmente", cioè come funzione in due variabili; quello che si richiede è che tutte le funzioni ψ_y (che moltiplicano a destra per y) siano continue.[1]

Proposizione 4.7. *Lo spazio* $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ *è un semigruppo topologico destro.*

Dimostrazione. L'associatività di $\oplus$ segue applicando le definizioni:

$$\begin{aligned} A \in (\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{W} \Leftrightarrow & \{s \mid \{k \mid k+s \in A\} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \{n \mid \{m \mid m+n \in \{s \mid \{k \mid k+s \in A\} \in \mathcal{W}\}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow & \{n \mid \{m \mid \{k \mid k+m+n \in A\} \in \mathcal{W}\} \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U} \end{aligned}$$

e analogamente possiamo sviluppare $A \in \mathcal{U} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{W})$ e ottenere la stessa formula. Per la continuità delle funzioni $\psi_{\mathcal{V}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ tali che $\psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ basta considerare le uguaglianze

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{V}}^{-1}(\mathcal{O}_A) = \{\mathcal{U} \mid \psi_{\mathcal{V}}(\mathcal{U}) \in \mathcal{O}_A\} = \{\mathcal{U} \mid \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in \mathcal{O}_A\} = \\ = \{\mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}\} = \{\mathcal{U} \mid \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}\} = \mathcal{O}_B, \end{aligned}$$

dove $B = \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\}$. $\square$

Concludiamo questo paragrafo occupandoci della questione della commutatività dell'operazione di pseudosomma.

Teorema 4.8. *Se* $\mathcal{U}$ *è un ultrafiltro non principale, allora esiste* $\mathcal{V}$ *ultrafiltro (non principale) tale che* $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \neq \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.

Dimostrazione. Siano

$$X = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k} < n \leq 2^{2k+1} \text{ per qualche } k \in \mathbb{N}\} \quad \text{e} \quad Y = X^C.$$

Uno dei due insiemi è in $\mathcal{U}$, supponiamo che sia X (il caso in cui tale insieme è Y è analogo). Sia poi $Z = \{2^{2k} - k \mid k \in \mathbb{N}\}$, sia $\mathcal{V}$ un ultrafiltro che contiene Z e sia infine $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{2k} < n \leq 2^{2k+1} + k\}$. Dimostreremo

$$A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \quad \text{e} \quad A \in \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}.$$

- Per dimostrare il primo fatto, mostriamo che $\{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \notin \mathcal{U}$. Fissato n, l'insieme $(A-n) \cap Z$ è finito: infatti $|(A-n) \cap Z| = |A \cap (Z+n)|$ e per k sufficientemente grande vale $2^{2k} - k + n \in (2^{2k-1} + k, 2^{2k}]$, ma questo insieme è disgiunto da A. Pertanto $\{n \mid (A - n) \in \mathcal{V}\}$ è vuoto, da cui $A \notin \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

[1] vedremo nella parte degli esercizi che per lo spazio degli ultrafiltri $\beta\mathbb{N}$, la funzione $\vartheta_{\mathcal{U}}$ tale che $\vartheta_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è continua per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$ non principale.

- Per il secondo fatto mostriamo che $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{V}$ facendo vedere che l'insieme $\{n \mid A-n \in \mathcal{U}\}$ è in realtà tutto $\mathbb{N}$. Infatti l'insieme $A-n$ contiene $Z \cap [2^{2n+2}, \infty)$ e dato che questi due insiemi sono in $\mathcal{U}$ anche la loro intersezione lo è.

Questo prova che gli ultrafiltri $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ sono distinti. □

Lemma 4.9. *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$, si ha $\mathfrak{U}_n \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathfrak{U}_n$.*

Dimostrazione. Mostriamo che l'appartenenza di un certo insieme A alla somma $\mathfrak{U}_n \oplus \mathcal{U}$ si traduce come l'appartenenzna di A alla somma $\mathcal{U} \oplus \mathfrak{U}_n$. Notiamo che $A \in \mathfrak{U}_n \oplus \mathcal{U}$ se e solo se

$$\{k \in \mathbb{N} \mid A-k \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{U}_n,$$

e questo se e solo se $A-n \in \mathcal{U}$. In modo del tutto analogo

$$\begin{aligned} A \in \mathcal{U} \oplus \mathfrak{U}_n \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid A-k \in \mathfrak{U}_n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid n \in A-k\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{k \in \mathbb{N} \mid k \in A-n\} \in \mathcal{U} \Leftrightarrow A-n \in \mathcal{U}, \end{aligned}$$

e questo conclude. □

Corollario 4.10. *Il centro di $\beta\mathbb{N}$ (come semigruppo con l'operazione di pseudosomma) è $\mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Gli ultrafiltri in $\mathbb{N}$ (ossia quelli principali) commutano con tutti gli ultrafiltri di $\beta\mathbb{N}$ per il lemma; del resto per il teorema precedente gli ultrafiltri principali non possono appartenere al centro di $\beta\mathbb{N}$ in quanto per ciascuno di essi c'è un ultrafiltro con il quale il primo non commuta. □

4.2 Il teorema di Hindman

Vediamo ora un rilevante esempio di applicazione di ultrafiltri alla teoria combinatoria dei numeri. Mostreremo infatti che l'esistenza di un ultrafiltro "quasi invariante per traslazione" implica la validità del teorema di Hindman.

Definizione 4.11. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ si dice *idempotente* se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Prima di occuparci della questione dell'esistenza degli ultrafiltri idempotenti, vediamone subito una fondamentale proprietà. Intanto, dato un sottoinsieme non vuoto $X \subseteq \mathbb{N}$, denotiamo con $\mathrm{FS}(X)$ l'insieme delle somme finite tra elementi *distinti* di X; ossia

$$\mathrm{FS}(X) = \left\{ \sum_{x \in F} x \mid \emptyset \neq F \subseteq X \text{ finito} \right\}.$$

Definizione 4.12. Un insieme della forma $\mathrm{FS}(X)$ con X infinito si dice *IP–set*. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice *additivamente grande* se contiene un IP–set.

Teorema 4.13 (di Glazer)**.** *Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente. Allora ogni $A \in \mathcal{U}$ è additivamente grande.*

Dimostrazione. Per definizione di ultrafiltro idempotente abbiamo $A \in \mathcal{U}$ se e solo se

$$\widehat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{U}.$$

Fissato $A \in \mathcal{U}$ sia $B = A \cap \widehat{A} \in \mathcal{U}$. Affermiamo che per ogni $b \in B$ il corrispondente traslato $B - b \in \mathcal{U}$. Infatti se $b \in B$ allora $b \in \widehat{A}$ e questo significa che $A - b \in \mathcal{U}$. Inoltre da questo fatto si ha

$$\widehat{A - b} = \widehat{A} - b \in \mathcal{U}.$$

Ma allora anche l'intersezione $(A-b) \cap (\widehat{A}-b) = B - b \in \mathcal{U}$, come volevamo. Siamo adesso pronti a definire induttivamente un insieme infinito X tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq B \subseteq A$. Sia $b_1 \in B$ qualunque. Allora $B - b_1 \in \mathcal{U}$ e possiamo prendere $b_2 \in (B - b_1) \cap B \in \mathcal{U}$ con $b_2 > b_1$. Dunque $b_1, b_2, b_1 + b_2 \in B$. Preseguiamo in questo modo, e assumiamo induttivamente di aver definito $\{b_1 < \cdots < b_n\} \subseteq B$ in modo che l'insieme di tutte le somme di elementi distinti $\mathrm{FS}(\{b_1 < \cdots < b_n\}) \subseteq B$. Allora possiamo prendere $b_{n+1} > b_n$ con

$$b_{n+1} \in \bigcap_{x \in \mathrm{FS}(\{b_1 < \cdots < b_n\})} (B - x) \in \mathcal{U}.$$

È immediato verificare che $\mathrm{FS}(\{b_1 < \cdots < b_{n+1}\}) \subseteq B$. L'insieme infinito $X = \{b_1 < \cdots < b_n < \cdots\}$ soddisfa la proprietà voluta. $\square$

La proprietà individuata da Glazer è quanto basta per poter dimostrare il teorema di Hindman:

Corollario 4.14. *Se esiste un ultrafiltro idempotente allora vale il teorema di Hindman. Ossia ogni colorazione finita $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ ammette un IP–set monocromatico, cioè esiste i ed esiste X infinito con* $\mathrm{FS}(X) \subseteq C_i$.

Dimostrazione. Prendiamo un ultrafiltro idempotente $\mathcal{U}$. Per le proprietà di ultrafiltro esiste un colore i tale che $C_i \in \mathcal{U}$. Per il teorema di Glazer l'insieme C_i contiene un IP–set monocromatico. $\square$

Per concludere la dimostrazione del teorema di Hindman, resta da mostrare l'esistenza di ultrafiltri idempotenti. La proprietà di esistenza di elementi idempotenti rispetto ad una operazione è vera per ogni semigruppo topologico compatto e di Hausdorff:

Teorema 4.15 (di Ellis)**.** *Sia $(X, \star)$ un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff. Allora X possiede elementi idempotenti.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{C}$ la famiglia di tutti i chiusi non vuoti $C \subseteq X$ tali che $C \star C \subseteq C$:

$$\mathcal{C} = \{C \mid C \neq \emptyset \text{ chiuso t.c. } C \star C \subseteq C\}.$$

Affermiamo che ogni catena discendente $\langle C_i \mid i \in I \rangle$ in $(\mathcal{C}, \subseteq)$ ammette minoranti. Per ipotesi la famiglia $\{C_i\}_{i \in I}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, dunque per compattezza vale che

$$C' = \bigcap_{i \in I} C_i \neq \emptyset.$$

Banalmente C' è chiuso, e si vede per verifica diretta che $C' \star C' \subseteq C'$: così C' è l'elemento minimale cercato per la catena discendente. Applicando il lemma di Zorn abbiamo l'esistenza di $C \in \mathcal{C}$ elemento minimale rispetto all'inclusione. Mostriamo adesso che $C = \{x\}$ consiste di un solo punto, che quindi deve essere idempotente.
Prendiamo $x \in C$, e consideriamo $C \star x = \{y \star x \mid y \in C\}$. Affermiamo che $C \star x$ è chiuso: infatti C è compatto perché chiuso in uno spazio compatto di Hausdorff, e così $C \star x = \psi_x(C)$ è compatto perché immagine continua di un compatto, e dunque chiuso perché X è di Hausdorff. Inoltre

$$\begin{aligned}\psi_x(C) \star \psi_x(C) &= (C \star \{x\}) \star (C \star \{x\}) \subseteq C \star (C \star \{x\}) = \\ &= (C \star C) \star \{x\} \subseteq C \star \{x\} = \psi_x(C) \subseteq C.\end{aligned}$$

Per la minimalità di C deve essere $\psi_x(C) = C$. In particolare, dall'inclusione $\supseteq$ e dal fatto che $x \in C$ otteniamo che $\Lambda = \{y \in C \mid y \star x = x\} \neq \emptyset$: infatti, dato $x \in C = \psi_x(C)$ abbiamo l'esistenza di un $y \in C$ tale che $x = y \star x$. Del resto però $\Lambda = \psi_x^{-1}(\{x\}) \cap C$: essendo C chiuso per ipotesi ed essendo $\{x\}$ chiuso perché è un singoletto in uno spazio di Hausdorff, abbiamo anche che Λ è chiuso. Inoltre affermiamo che $\Lambda \star \Lambda \subseteq \Lambda$: presi $y, y' \in \Lambda$ si ha

$$(y \star y') \star x = y \star (y' \star x) = y \star x = x,$$

ossia $y \star y' \in \Lambda$. Sempre per minimalità si ha $\Lambda = C$. In partcolare $x \in \Lambda$, e dunque x è idempotente. Infine non può che essere $C = \{x\}$ per minimalità di C, visto che $\{x\} \in \mathcal{C}$. □

Teorema 4.16 (Galvin)**.** *Esistono ultrafiltri idempotenti.*

Dimostrazione. L'insieme degli ultrafiltri $\beta\mathbb{N}$ è un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff. □

Finalmente, mettendo insieme i teoremi di Glazer e di Galvin, otteniamo una dimostrazione del teorema di Hindman. Come notazione storica, ricordiamo che il teorema di Hindman è stato inizialmente dimostrato con metodi di combinatoria elementare. La dimostrazione originale era molto più complicata di quella vista qui basata sugli ultrafiltri.[2]

Di nuovo usando gli ultrafiltri idempotenti, riusciremo a rafforzare il teorema di Hindman estendendolo a colorazioni finite di arbitrari insiemi additivamente grandi.

Proposizione 4.17. *Sia A un insieme additivamente grande. Allora esiste un ultrafiltro idempotente $\mathcal{U}$ con $A \in \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Fissiamo un insieme infinito $X = \{x_1 < \cdots < x_n < \cdots\}$ con $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$. Per semplicità denotiamo con

$$Y_k = \mathrm{FS}(\{x_i\}_{i \geq k}).$$

Consideriamo il seguente sottospazio di $\beta\mathbb{N}$:

$$K = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{Y_k}.$$

Notiamo che K consiste di tutti gli ultrafiltri $\mathcal{W}$ tali che $Y_k \in \mathcal{W}$ per ogni k. Visto che la famiglia $\{Y_k\}$ ha banalmente la proprietà dell'intersezione finita, $K \neq \emptyset$.[3] Notiamo inoltre che K è compatto, in quanto intersezione di chiusi in un compatto. Utilizziamo adesso un lemma:

Lemma 4.18. *Sia $X = \{x_1 < \cdots < x_n < \cdots\}$ un insieme infinito, e siano $\mathcal{U}$ e $\mathcal{V}$ ultrafiltri su $\mathbb{N}$. Se $\mathrm{FS}(\{x_i\}_{i \geq k}) \in \mathcal{U}, \mathcal{V}$ per ogni k, allora $\mathrm{FS}(\{x_i\}_{i \geq k}) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ per ogni k.*

Dimostrazione. Per definizione di pseudosomma, $\mathrm{FS}(X) \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ se e solo se $\{n \mid \mathrm{FS}(X) - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$. Essendo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro, abbiamo concluso se mostriamo che

$$\mathrm{FS}(X) \subseteq \{n \mid \mathrm{FS}(X) - n \in \mathcal{V}\}.$$

Infatti, se $n = x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} \in \mathrm{FS}(X)$ con $i_1 < \cdots < i_k$, allora $\mathrm{FS}(\{x_j\}_{j > i_k}) \subseteq \mathrm{FS}(X) - n$, e dunque $\mathrm{FS}(X) - n \in \mathcal{V}$ per l'ipotesi $\mathrm{FS}(\{x_j\}_{j > i_k}) \in \mathcal{V}$. $\square$

[2] a questo proposito, lo stesso Hindman ha scritto: "chiunque abbia una forte inclinazione masochista è invitato ad affrontare in dettaglio la dimostrazione combinatoria originale" ("Anyone with a very masochistic bent is invited to wade through the original combinatorial proof").

[3] infatti K è intersezione numerabile di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita.

Dal lemma segue quindi che K è algebricamente chiuso rispetto all'operazione di pseudosomma, ossia $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in K$ implica $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V} \in K$. Possiamo allora applicare il teorema di Ellis al semigruppo topologico destro compatto $(K, \oplus)$ ed ottenere l'esistenza di un idempotente $\mathcal{U} \in K$. Dalla definizione di K segue che $A \in \mathcal{U}$, come voluto. □

Come corollario otteniamo:

Teorema 4.19 (di Hindman generalizzato)**.** *Sia A un insieme additivamente grande. Allora in ogni sua colorazione finita $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ uno dei colori C_i è additivamente grande.*

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente con $A \in \mathcal{U}$ (che esiste grazie al teorema precedente). Per la proprietà di ultrafiltro, uno dei $C_i \in \mathcal{U}$. Visto che $\mathcal{U}$ è idempotente C_i è additivamente grande per il teorema di Glazer. □

Concludiamo il paragrafo con la nozione di ultrafiltro di Hindman e alcune loro proprietà:

Definizione 4.20. Un ultrafiltro $\mathcal{U}$ si dice *di Hindman* se ogni $A \in \mathcal{U}$ è additivamente grande. Denotiamo con $\mathcal{H}$ l'insieme degli ultrafiltri di Hindman.

Il teorema di Glazer ci dice che gli ultrafiltri idempotenti sono contenuti in $\mathcal{H}$. Vale il seguente risultato più generale:

Proposizione 4.21. *Vale che* $\overline{\mathrm{Idem}} = \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Dimostriamo che $\mathcal{H}$ è chiuso in $\beta\mathbb{N}$. Consideriamo un ultrafiltro $\mathcal{V} \notin \mathcal{H}$: così esiste un elemento $A \in \mathcal{V}$ che non è additivamente grande, ma allora $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{H} = \emptyset$. Abbiamo dimostrato così che il complementare di $\mathcal{H}$ è aperto.
Non ci resta che mostrare che $\mathcal{H} \subseteq \overline{\mathrm{Idem}}$. Prendiamo $\mathcal{U}$ ultrafiltro di Hindman, e prendiamo $\mathcal{O}_A$ intorno di $\mathcal{U}$. L'insieme A è additivamente grande perché $A \in \mathcal{U}$ e dunque, per la proposizione 4.17, esiste un idempotente $\mathcal{V}$ con $A \in \mathcal{V}$. Concludiamo che $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_A \cap \mathrm{Idem} \neq \emptyset$, come voluto. □

4.3 Il teorema di Hindman moltiplicativo

In modo del tutto analogo alla pseudosomma, si definisce anche una operazione di *pseudoprodotto* tra ultrafiltri su $\mathbb{N}$.

Definizione 4.22. L'ultrafiltro pseudoprodotto $U \odot V$ è definito ponendo:

$$A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V} \Leftrightarrow \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U},$$

dove abbiamo denotato $A/n = \{m \mid mn \in A\}$.

In modo analogo a quanto mostrato per l'operazione di pseudosomma invitiamo il lettore a mostrare le seguenti proprietà:

(1) l'insieme $\mathcal{U} \odot \mathcal{V}$ è un ultrafiltro;

(2) per ogni $n, m \in \mathbb{N}$ vale $\mathfrak{U}_n \oplus \mathfrak{U}_m = \mathfrak{U}_{n+m}$, ossia $\odot$ generalizza l'usuale operazione di prodotto tra naturali;

(3) l'insieme $\beta\mathbb{N}$ con l'operazione $\odot$ è un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff;

(4) il centro di $\beta\mathbb{N}$ con l'operazione di pseudoprodotto è $\mathbb{N}$.

Data la proprietà (3) possiamo applicare il teorema di Ellis ed ottenere l'esistenza di ultrafiltri idempotenti $\mathcal{V} = \mathcal{V} \odot \mathcal{V}$ rispetto all'operazione di pseudoprodotto. Analogamente a quanto fatto per l'operazione di pseudosomma, dato un X non vuoto denotiamo con $\mathrm{FP}(X)$ l'insieme dei prodotti finiti tra elementi *distinti* di X; ossia

$$\mathrm{FP}(X) = \left\{ \prod_{x \in F} x \mid \emptyset \neq F \subseteq X \text{ finito} \right\}.$$

Definizione 4.23. Un insieme della forma $\mathrm{FP}(X)$ con X infinito si dice *IP–set moltiplicativo.* Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice *moltiplicativamente grande* se contiene un IP–set moltiplicativo.

Teorema 4.24 (di Hindman moltiplpicativo)**.** *Ogni colorazione finita* $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ *ammette un IP–set moltiplicativo monocromatico, cioè esiste i ed esiste* Y *infinito con* $\mathrm{FP}(Y) \subseteq C_i$.

Dimostrazione. Prendiamo $\mathcal{V} = \mathcal{V} \odot \mathcal{V}$ ultrafiltro idempotente rispetto allo pseudoprodotto, e prendiamo il colore $C_i \in \mathcal{V}$. Ripetendo gli stessi argomenti usati nella dimostrazione del teorema di Glazer, si mostra che C_i (così come ogni altro $B \in \mathcal{V}$) è moltiplicativamente grande. □

Le due versioni additiva e moltiplicativa del teorema di Hindman si possono rafforzare mostrando che in ogni colorazione finita di $\mathbb{N}$ c'è sempre un colore che è allo stesso tempo additivamente e moltiplicativamente grande. A questo scopo vediamo prima la seguente proprietà:

Proposizione 4.25. *L'insieme $\mathcal{H}$ degli ultrafiltri di Hindman è un ideale sinistro in $\beta\mathbb{N}$, ossia se $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ allora $\mathcal{U} \odot \mathcal{V} \in \mathcal{H}$ per ogni $\mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$ allora $\Lambda = \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ e possiamo prendere $k \in \Lambda$. L'insieme A/k è additivamente grande perché appartiene a $\mathcal{V}$. Se X è un insieme infinito con $\mathrm{FS}(X) \subseteq A/k$ allora $F(Y) \subseteq A$, dove $Y = kX$. Concludiamo che A è additivamente grande, come voluto. □

Teorema 4.26 (di Hindman additivo/moltiplicativo)**.** *In ogni colorazione finita $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste un colore C_i che è sia additivamente grande che moltiplicativamente grande.*

Dimostrazione. Lo spazio $(\mathcal{H}, \odot)$ è un sottosemigruppo di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ per la proposizione precente. Inoltre è compatto perché chiuso nel compatto di Hausdorff $\beta\mathbb{N}$. Possiamo allora applicare il teorema di Ellis ed ottenere l'esistenza di un ultrafiltro $\mathcal{V} \in \mathcal{H}$ con $\mathcal{V} = \mathcal{V} \odot \mathcal{V}$. Sia i tale che $C_i \in \mathcal{V}$. Allora C_i è moltiplicativamente grande perché membro di un idempotente rispetto allo pseudoprodotto; ed è anche additivamente grande perché $\mathcal{V}$ è di Hindman. □

Capitolo 5

Il teorema di van der Waerden

In questo capitolo ci occuperemo esclusivamente del teorema di van der Waerden, dando una dimostrazione che utilizza gli ultrafiltri. Richiamiamo l'enunciato del teorema: per ogni r–colorazione $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste un C_i che contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. In analogia a quanto fatto per il teorema di Hindman, quello che faremo qui sarà cercare ultrafiltri tali che ogni loro elemento possieda la proprietà di contenere progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.
Può sembrare inizialmente scorrelato, ma per ottenere questi ultrafiltri dovremo passare da nozioni generali per semigruppi topologici (compatti e di Hausdorff) quali la nozione di ideale sinistro e di minimalità per inclusione di questi ideali. Iniziamo quindi da una trattazione astratta degli ideali sinistri.

5.1 Ideali in un semigruppo topologico

In questo paragrafo X, dotato dell'operazione binaria $\star$, sarà sempre un semigruppo topologico compatto e di Hausdorff; in particolare, $\beta\mathbb{N}$ soddisfa queste proprietà sia con l'operazione di pseudosomma $\oplus$ che con quella di pseudoprodotto $\odot$. Iniziamo dalla definizione di ideale:

Definizione 5.1. Sia $I \subseteq X$ non vuoto. Diremo che I è un *ideale sinistro* di X se $X \star I \subseteq I$, ossia se per ogni $x \in X$ e per ogni $y \in I$ si ha $x \star y \in I$.

Esempio 5.2. Preso un $y \in X$, allora l'insieme $X \star y = \{x \star y \mid x \in X\}$ è un ideale sinistro di X. Ma attenzione: non è detto che y stia in $X \star y$! Più in generale, se I è un ideale sinistro di X allora per ogni $y \in X$ l'insieme $I \star y$ è ancora un ideale sinistro di X.

Esempio 5.3. Come abbiamo mostrato nel capitolo precedente, l'insieme $\mathcal{H}$ degli ultrafiltri di Hindman è un ideale sinistro di $\beta\mathbb{N}$ con l'operazione $\odot$.

La nostra ricerca tra ideali sinistri notevoli di un semigruppo inizia dalle proprietà degli ideali minimali rispetto all'inclusione. Vediamone intanto una caratterizzazione:

Proposizione 5.4. *Sia I un ideale sinistro di X. Allora sono equivalenti le seguenti proprietà:*

(1) *I è minimale (rispetto all'inclusione);*

(2) *per ogni $x \in I$ si ha $X \star x = I$.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Per ogni $x \in I$ sappiamo che $X \star x$ è un ideale sinistro di X e che $X \star x \subseteq I$. Per minimalità di I deve valere l'uguaglianza. ((2) $\Longrightarrow$ (1)) Sia $J \subseteq I$ un ideale sinistro. Prendiamo $x \in J$ e consideriamo l'ideale sinistro $X \star x$: essendo $x \in I$ si ha $X \star x = I$ per ipotesi; del resto, stando $x \in J$ abbiamo anche $I = X \star x \subseteq J$. □

Corollario 5.5. *Se I è un ideale sinistro minimale allora I è compatto.*

Dimostrazione. Preso un qualunque $x \in I$, per la proposizione precedente possiamo scrivere $I = X \star x = \psi_x(X)$.[1] Essendo ψ_x continua e X compatto abbiamo che I è compatto perché immagine continua di un compatto. □

Proposizione 5.6. *Per ogni $J \subseteq X$ ideale sinistro esiste un $I \subseteq J$ ideale sinistro minimale.*

Dimostrazione. Consideriamo la famiglia

$$\mathcal{F} = \{I \subseteq J \mid I \neq \emptyset \text{ è ideale sinistro chiuso}\}.$$

Per concludere è sufficiente applicare il lemma di Zorn alla famiglia $\mathcal{F}$ parzialmente ordinata per inclusione. Osserviamo che la famiglia definita è non vuota. Infatti, preso un qualunque $x \in J$ consideriamo $I = X \star x$: chiaramente I è un ideale sinistro e $I \subseteq J$ in quanto $x \in J$, e inoltre è chiuso perché compatto (immagine continua di un compatto).
Sia $\langle I_s \mid s \in S\rangle$ una catena in $\mathcal{F}$, e prendiamo come elemento minorante della catena

$$I = \bigcap_{s \in S} I_s.$$

Questo elemento è non vuoto per compattezza di X e perché la famiglia $\{I_s \mid s \in S\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita. □

[1] ricordiamo che $\psi_x : X \to X$ è definita ponendo $\psi_x(y) = y \star x$, e che questa funzione è continua perché X è un semigruppo topologico destro.

Quello che sorprende è che gli ideali minimali sono tutti collegati tra loro; o meglio, da un certo ideale minimale si possono ottenere tutti gli altri ideali minimali del semigruppo:

Proposizione 5.7. *Sia I un ideale sinistro minimale. Allora J è un ideale sinistro minimale se e solo se esiste $x \in X$ tale che $J = I \star x$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $x \in J$, allora $I \star x$ è un ideale sinistro e $I \star x \subseteq J$. Per minimaltà di J si ha $I \star x = J$.
($\Longleftarrow$) Se I è minimale dobbiamo far vedere che $I \star x$ sia minimale. Supponiamo che un certo ideale sinistro $L \subseteq I \star x$. Prendiamo

$$\Gamma = \{y \in I \mid y \star x \in L\} \neq \emptyset,$$

e affermiamo che Γ è un ideale sinistro. Infatti se $y \in \Gamma$ e $z \in X$ allora $z \star y \in \Gamma$: per vedere questo intanto osserviamo che $z \star y \in I$ perché $y \in I$ e I è un ideale sinistro; poi $(z \star y) \star x = z \star (y \star x) \in L$ perché $y \star x \in L$ e L è un ideale sinistro. Adesso $\Gamma \subseteq I$ e dunque $\Gamma = I$ per minimalità di I. In particolare $I \star x \subseteq L$. $\square$

Per concludere vogliamo arrivare a dimostrare che esiste il più piccolo ideale bilatero dentro il semigruppo X; anzi, mostreremo che tale ideale altro non è che l'unione di tutti gli ideali sinistri minimali. Per iniziare mostriamo che ogni ideale sinistro minimale è contenuto in ogni ideale bilatero:

Proposizione 5.8. *Sia I un ideale sinistro minimale e sia J un ideale bilatero. Allora $I \subseteq J$.*

Dimostrazione. Ovviamente vale $I \cap J \subseteq I$. Se dimostriamo che $I \cap J \neq \emptyset$ allora $I \cap J$ è un ideale sinistro (perché J è anche ideale sinistro), dunque per minimalità $I \cap J = I$ e così abbiamo concluso.
Dimostriamo allora che $J \star I \subseteq I \cap J$. Prendiamo $y \in J$ e $x \in I$, allora $y \star x \in I$ perché I è ideale sinistro; inoltre $y \star x \in J$ perché J è anche ideale destro. $\square$

Proposizione 5.9. *Esiste il più piccolo ideale bilatero in X, che denoteremo con $K(X)$. In particolare tale ideale è l'unione di tutti gli ideali sinistri minimali.*

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$K(X) = \bigcup_{I \text{ minimale}} I.$$

Per avere la tesi è sufficiente provare che $K(X)$ è un ideale bilatero: infatti per la proposizione precedente abbiamo che $K(X)$ deve includere ogni ideale sinistro minimale, e per come è definito deve essere necessariamente il più piccolo.

L'insieme $K(X)$ è un ideale sinistro perché unione di ideali sinistri. Dimostriamo adesso che $K(X)$ è un ideale destro. Sia $x \in K(X)$ e $y \in X$: allora $x \in I$ per un qualche ideale sinistro minimale I. Ora, $x \star y \in I \star y$ e per la proposizione 5.7 abbiamo che $I \star y$ è un ideale sinistro minimale. Dunque $x \star y \in K(X)$. $\square$

Definizione 5.10. Un elemento $x \in X$ si dice *minimale* se $x \in K(X)$, ossia se apprtiene ad un qualche ideale sinistro minimale di X.

Lemma 5.11. *Esistono elementi idempotenti minimali.*

Dimostrazione. Consideriamo un ideale sinistro minimale $I \subseteq X$. Tale insieme è chiuso rispetto all'operazione $\star$ in quanto è un ideale, dunque è esso stesso un semigruppo topologico destro con l'operazione $\star$. Abbiamo già mostrato che è compatto, ed è di Hausdorff perché sottospazio di uno spazio di Hausdorff. Dunque possiamo applicare il teorema di Ellis a $(I, \star)$ e avere la tesi. $\square$

Lemma 5.12. *Sia $x \in X$ un elemento minimale. Allora $K(X) = X \star x \star X$.*

Dimostrazione. ($\supseteq$) Siano $y, y' \in X$, allora

$$y \star x \star y' = (y \star x) \star y'.$$

Dato che x è minimale avremo $x \in K(X)$: dato che $K(X)$ è un ideale sinistro abbiamo che $y \star x \in K(X)$, e dato che è un ideale destro abbiamo $(y \star x) \star y' \in K(X)$.
($\subseteq$) Dato che x è minimale avremo che $x \in I$ per un certo I ideale sinistro minimale. Prendiamo adesso $y \in K(X)$, allora $y \in J$ per un certo J ideale sinistro minimale. Dalla proposizione 5.7 abbiamo che

$$J = I \star z \quad \text{e} \quad I = J \star x.$$

per qualche $z \in X$.[2] Da quanto scritto segue $J = I \star z = J \star x \star z$, e dal fatto che $y \in J$ segue che $y = z' \star x \star z$ per qualche z'. $\square$

Concludiamo adesso ribadendo che tutti i risultati conseguiti sin qui valgono per lo spazio $(\beta\mathbb{N}, \oplus)$ e per lo spazio $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.

[2] per esprimere I come moltiplicazione di J per un elemento possiamo scegliere come elemento proprio $x \in I$: ripercorrendo la dimostrazione della proposizione 5.7 abbiamo la tesi scegliendo qualsiasi elemento di I.

5.2 Il teorema di van der Waerden

Per abbreviare gli enunciati utilizzeremo la seguente terminologia:

Definizione 5.13. Un insieme è *AP–rich* se contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

Come avevamo preannunciato, cerchiamo ultrafiltri con la proprietà che ogni loro elemento sia AP–rich: ebbene gli ultrafiltri minimali sono proprio quelli che fanno al caso nostro. Prima di vedere nel dettaglio questo fatto è opportuno fare un'osservazione:

Osservazione 5.14. Sia $k \in \mathbb{N}$ e consideriamo il prodotto topologico

$$(\beta\mathbb{N})^k = \underbrace{\beta\mathbb{N} \times \cdots \times \beta\mathbb{N}}_{k \text{ volte}}.$$

Denoteremo gli elementi di questo spazio con simboli come $\vec{\mathcal{U}}$; dato un ultrafiltro $\mathcal{V}$ denoteremo con $\mathcal{V}^{(k)}$ la k–upla $(\mathcal{V}, \ldots, \mathcal{V})$. Possiamo definire un'operazione $\oplus_k$ componente per componente, ossia

$$\vec{\mathcal{U}} \oplus_k \vec{\mathcal{V}} = (\mathcal{U}_1 \oplus \mathcal{V}_1, \ldots, \mathcal{U}_k \oplus \mathcal{V}_k).$$

Con questa operazione $(\beta\mathbb{N})^k$ è un semigruppo topologico destro compatto e di Hausdorff.

Prima di entrare nel vivo del teorema diamo una semplice proprietà:

Lemma 5.15. *Per ogni $\mathcal{U}$ si ha $\mathcal{U}^{(k)} \in \overline{\Delta}$, dove Δ è la diagonale di $\mathbb{N}^k$.*

Dimostrazione. Abbiamo $\mathcal{U}^{(k)} \in \overline{\Delta}$ se e solo se per ogni intorno di $\mathcal{U}^{(k)}$ tale intorno interseca Δ. Per mostrare questo fatto basta prendere un intorno di $\mathcal{U}^{(k)}$ della forma $\mathcal{O}_A \times \cdots \times \mathcal{O}_A$ per un certo $A \in \mathcal{U}$. Si ha

$$(\mathcal{O}_A \times \cdots \times \mathcal{O}_A) \cap \Delta = (\mathcal{O}_A \cap \mathbb{N}) \times \cdots \times (\mathcal{O}_A \cap \mathbb{N}),$$

e questo è non vuoto perché $\mathcal{O}_A \cap \mathbb{N}$ è non vuoto dato che $\mathbb{N}$ è denso. □

Nel teorema che segue denotiamo con $AP_k \subseteq (\beta\mathbb{N})^k$ l'insieme delle progressioni aritmetiche lunghe k, vale a dire l'insieme

$$\begin{aligned} AP_k &= \{(\mathfrak{U}_a, \mathfrak{U}_{a+d}, \ldots, \mathfrak{U}_{a+(k-1)d}) \mid a \in \mathbb{N}_0 \text{ e } d \geq 1\} = \\ &= \{(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d) \mid a \in \mathbb{N}_0 \text{ e } d \geq 1\}, \end{aligned}$$

con la solita identificazione tra naturali e ultrafiltri principali.

Teorema 5.16. *Sia $\mathcal{V} \in K(\beta\mathbb{N})$. Ogni $A \in \mathcal{V}$ è AP–rich.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{V}$ e $k \in \mathbb{N}$: cerchiamo dunque una progressione aritmetica lunga k in A. Affermiamo che abbiamo concluso se dimostriamo che

$$\mathcal{V} \in K(\beta\mathbb{N}) \Rightarrow \mathcal{V}^{(k)} = (\mathcal{V}, \ldots, \mathcal{V}) \in \overline{AP_k},$$

Infatti se $A \in \mathcal{V}$ allora $\mathcal{V}^{(k)} \in \mathcal{O}_A \times \cdots \times \mathcal{O}_A$, e allora $(\mathcal{O}_A \times \cdots \times \mathcal{O}_A) \cap AP_k \neq \emptyset$. Quindi esistono $a, d \geq 1$ tali che $(\mathfrak{U}_a, \mathfrak{U}_{a+d}, \ldots, \mathfrak{U}_{a+(k-1)d}) \in \mathcal{O}_A \times \cdots \times \mathcal{O}_A$, ossia $a, a+d, \ldots, a+(k-1)d \in A$.
Sia $E = \{(a, a+d, \ldots, a+(k-1)d) \mid a, d \in \mathbb{N}_0\} \supseteq \Delta$ e consideriamo lo spazio $\overline{E}$ e il suo sottospazio $\overline{AP_k}$. Notiamo che E è un sottosemigruppo di $(\beta\mathbb{N}_0)^k$ e che AP_k è un ideale bilatero di E: ricordando che $\beta\mathbb{N}_0$ è una compattificazione dello spazio $\mathbb{N}_0$, da questa osservazione segue che $\overline{E}$ è un sottosemigruppo di $(\beta\mathbb{N}_0)^k$, e che $\overline{AP_k}$ è un ideale bilatero di $\overline{E}$.[3]
Per come abbiamo effettuato la nostra costruzione notiamo che $\mathcal{V}^{(k)} \in \overline{\Delta} \subseteq \overline{E}$. L'ultima proprietà che ci serve per concludere la dimostrazione è la seguente:

Proposizione 5.17. *$\mathcal{V}^{(k)}$ è minimale in $\overline{E}$.*

Dimostrazione. Sappiamo che $\mathcal{V}$ è minimale, ossia $\mathcal{V} \in I$ per qualche ideale sinistro minimale I di $\beta\mathbb{N}$. Visto che $\mathcal{V}^{(k)} \in \overline{E}$ abbiamo che $\overline{E} \oplus_k \mathcal{V}^{(k)}$ è un ideale di $\overline{E}$: per la proposizione 5.6 esiste così $\widetilde{I} \subseteq \overline{E} \oplus_k \mathcal{V}^{(k)}$ ideale sinistro minimale. Prendiamo $\vec{\mathcal{U}} = (\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_k) \in \widetilde{I}$ idempotente, che esiste grazie al lemma 5.11. Così $\vec{\mathcal{U}} = \vec{\mathcal{W}} \oplus_k \mathcal{V}^{(k)}$ per qualche $\vec{\mathcal{W}} \in \overline{E}$, ossia per ogni $i = 1, \ldots, k$ si ha

$$\mathcal{U}_i = \mathcal{W}_i \oplus \mathcal{V}.$$

Per minimalità di I (proposizione 5.4) abbiamo $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V} = I$, così $\mathcal{U}_i \in I$ per ogni i. Ma da ciò segue che ogni $\mathcal{U}_i$ è minimale in $\beta\mathbb{N}$, ossia che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{U}_i = I$ per ogni i, dunque $\mathcal{V} = \mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i$ per un opportuno $\mathcal{Z}_i \in \beta\mathbb{N}$. Dunque per ogni i possiamo scrivere

$$\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}_i = (\mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i) \oplus \mathcal{U}_i = \mathcal{Z}_i \oplus (\mathcal{U}_i \oplus \mathcal{U}_i) = \mathcal{Z}_i \oplus \mathcal{U}_i = \mathcal{V}.$$[4]

Riassumedo le relazioni precedente in un'unica relazione possiamo scrivere $\mathcal{V}^{(k)} \oplus_k \vec{\mathcal{U}} = \mathcal{V}^{(k)}$. Ma $\vec{\mathcal{U}} \in \widetilde{I}$ e $\widetilde{I}$ è un ideale sinistro minimale: dunque $\mathcal{V}^{(k)} \in \widetilde{I}$, ossia è minimale in $(\beta\mathbb{N})^k$. $\square$

[3]i dettagli sono lasciati per esercizio. Si può vedere il teorema 4.17 di *Algebra in the Stone–Čech compactification* di Hindman e Strauss.

[4]dato che $\vec{\mathcal{U}}$ è idempotente allora banalmente ogni sua componente $\mathcal{U}_i$ è idempotente.

A questo punto possiamo concludere la dimostrazione del teorema di van der Waerden. Se $\mathcal{V}^{(k)}$ è minimale sappiamo (proposizione 5.8) che $\mathcal{V}^{(k)}$ appartiene ad ogni ideale bilatero, e dunque $\mathcal{V}^{(k)} \in \overline{AP_k}$. $\square$

Il teorema di van der Waerden afferma che per ogni r–colorazione dei numeri naturali esiste un colore che è AP–rich, ossia che contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe. Lavorando con lo pseudoprodotto anziché con la pseudosomma otteniamo facilmente la versione moltiplicativa: per ogni r–colorazione dei numeri naturali esiste un colore che è GP–rich, ossia che contiene progressioni geometriche arbitrariamente lunghe. Questi due enunciati non sono sufficienti per stabilire se si può trovare un solo colore che è sia AP–rich che GP–rich. Qui faremo vedere che la questione ha risposta affermativa:

Teorema 5.18 (di Bergelson–Hindman)**.** *Per ogni r–colorazione dei naturali $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste un colore i tale che C_i contiene sia progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe che progressioni geometriche arbitrariamente lunghe.*

Dimostrazione. Definiamo l'insieme

$$\mathcal{A} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U} \;\; A \text{ è AP–rich}\}.$$

La proprietà seguente è quella essenziale per la conclusione del teorema:

Lemma 5.19. *L'insieme $\mathcal{A}$ è un ideale sinistro di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$.*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathcal{U} \in \beta\mathbb{N}$ e $\mathcal{V} \in \mathcal{A}$ e prendiamo $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$: dobbiamo mostrare che A è AP–rich. Dire che $A \in \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$ significa che

$$\widehat{A} = \{n \mid A/n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}.$$

Preso un $k \in A$ abbiamo che $A/k \in \mathcal{V}$, e dunque A/k è AP–rich: questo significa che per ogni $l \geq 3$ esistono a e $d \geq 1$ tali che

$$P_{a,d} = \{a,\, a+d,\, \ldots,\, a+(l-1)d\} \subseteq A/k.$$

Ma allora per ogni $l \geq 3$ esistono a e $d \geq 1$ tali che $P_{ka,kd} \subseteq A$, ossia A è AP–rich. $\square$

Per le proprietà sugli ideali sappiamo che esiste un ideale minimale I di $(\beta\mathbb{N}, \odot)$ con $I \subseteq \mathcal{A}$; prendiamo dunque un ultrafiltro $\mathcal{U} \in I$. Per le proprietà di ultrafiltro uno dei colori $C_i \in \mathcal{U}$ e dunque C_i è AP–rich perché $\mathcal{U} \in \mathcal{A}$ ed è anche GP–rich perché I (e dunque $\mathcal{U}$) è minimale in $(\beta\mathbb{N}, \odot)$. $\square$

Capitolo 6

L'analisi non standard

Nell'analisi infinitesimale contemporanea, i numeri infinitesimi non esistono. Storicamente non sempre è stato così. Prima della ricerca fondazionale che portò alla attuale formalizzazione del concetto di numero reale alla fine del XIX secolo, l'uso diretto di quantità infinitesime è stato pratica comune per secoli. Anzi, fu proprio grazie alla manipolazione di quelle "quantità evanescenti" che vennero scoperti molti teoremi fondamentali dell'analisi.
Recentemente, all'inizio degli anni Sessanta, il logico matematico Abraham Robinson ha introdotto l'analisi nonstandard. Facendo uso della teoria dei modelli, Robinson è riuscito a porre su basi rigorose l'uso dei numeri infinitesimi, dando così una possibile soluzione ad un problema storico. L'analisi nonstandard ha interessanti conseguenze in diversi ambiti. Essa consente di rileggere sotto una nuova prospettiva alcuni aspetti della storia del calcolo, spesso presentati assumendo come necessariamente contraddittorio l'uso delle quantità infinitesime. Nella ricerca, i metodi nonstandard sono stati usati in diverse aree della matematica pura e applicata, portando ad interessanti risultati.

6.1 Costruzione delle ultrapotenze

La costruzione dei numeri iperreali che daremo qui è fatta grazie agli ultrafiltri e mediante una costruzione fondamentale in quest'ambito: l'ultrapotenza.

Consideriamo $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$, ossia l'insieme delle successioni reali e costruiamo il quoziente

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathrm{Fr},$$

dove Fr è il filtro di Frechet su $\mathbb{N}$. Per definizione di equivalenza secondo un filtro si ha $\sigma \equiv_{\mathrm{Fr}} \tau$ se e solo se $\{n \mid \sigma(n) = \tau(n)\} \in \mathrm{Fr}$, ossia se e solo se

$$\exists k \text{ t.c. } \forall n \geq k \;\; \sigma(n) = \tau(n).$$

Si può dimostrare che tale insieme, con le operazioni di somma e prodotto definiti in modo naturale, è un anello commutativo parzialmente ordinato dalla relazione

$$[\sigma] \leq [\tau] \Leftrightarrow \{n \mid \sigma(n) \leq \tau(n)\} \in \mathrm{Fr}.$$

Putroppo questo anello non ha delle "buone proprietà", ad esempio vale il seguente:

Lemma 6.1. *L'anello* $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathrm{Fr}$ *non è un dominio di integrità.*

Dimostrazione. Supponiamo che $[\sigma][\tau] = 0$, allora dobbiamo far vedere che in generale questo non implica che $[\sigma] = 0$ o $[\tau] = 0$. Prendiamo come σ e τ le funzioni caratteristiche dei pari e dei dispari rispettivamente. Allora per queste successioni $\{n \mid \sigma(n)\tau(n) = 0\} = \mathbb{N} \in \mathrm{Fr}$, ossia $[\sigma][\tau] = 0$; però

$$\{n \mid \sigma(n) = 0\} \notin \mathrm{Fr} \quad \text{e} \quad \{n \mid \tau(n) = 0\} \notin \mathrm{Fr}.$$

Questo vuol dire che né $[\sigma] = 0$ né $[\tau] = 0$. □

La costruzione appena effettuata non è quella che effettivamente vogliamo; in effetti ciò dipende dall'aver effettuato il quoziente per un filtro. Se al posto di un filtro si utilizza un ultrafiltro la costruzione invece si arricchisce:

Definizione 6.2. Chiamiamo *ultrapotenza* di $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ il quoziente $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ per un certo ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Teorema 6.3. *L'ultrapotenza* ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ *è un campo ordinato.*

Dimostrazione. Il fatto che ogni elemento non nullo possegga un inverso rispetto alla moltiplicazione è molto semplice da vedere ed è lasciato per esercizio. Occupiamoci invece dell'ordine sul campo: ricordiamo che un campo $\mathbb{F}$ è ordinato se e solo se esiste $\mathbb{F}^+ \subseteq \mathbb{F}$ tale che è chiuso per somma e per prodotto e tale che $\mathbb{F} = \mathbb{F}^+ \sqcup \{0\} \sqcup \mathbb{F}^-$, dove $\mathbb{F}^- = \{-x \mid x \in \mathbb{F}^+\}$. Nel nostro caso definiamo ${}^*\mathbb{R}^+ = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+\}$. Il fatto che tale insieme è chiuso per somma e per prodotto è immediato, come è immediato vedere che gli insiemi ${}^*\mathbb{R}^+$, $\{[0]\}$ e ${}^*\mathbb{R}^-$ sono a due a due disgiunti. L'ultima cosa che resta da vedere è che ogni $[\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$ sta in uno dei tre sottoinsiemi definiti. Data $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ consideriamo la partizione $\mathbb{N} = A_\sigma \sqcup B_\sigma \sqcup C_\sigma$, dove

$$A_\sigma = \{n \mid \sigma(n) > 0\},\ B_\sigma = \{n \mid \sigma(n) = 0\},\ C_\sigma = \{n \mid \sigma(n) < 0\}.$$

Per le proprietà di ultrafiltro uno (e uno solo) dei tre insiemi sta in $\mathcal{U}$, e a seconda di quale esso sia avremo rispettivamente che $[\sigma]$ sta in ${}^*\mathbb{R}^+$, $\{[0]\}$ o in ${}^*\mathbb{R}^-$. □

Per ogni numero reale $r \in \mathbb{R}$ idetifichiamo r con $[c_r]$, dove c_r è la successione costante ad r. Dunque possiamo immergere $\mathbb{R}$ in modo canonico in $^*\mathbb{R}$ con la mappa

$$r \mapsto [c_r].$$

Dunque $^*\mathbb{R}$ può essere considerato un sovracampo ordinato di $\mathbb{R}$.

Lemma 6.4. *L'ultrafiltro $\mathcal{U}$ è principale se e solo se $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Per ipotesi abbiamo che $\mathcal{U} = \mathfrak{U}_a$, e allora $\sigma \equiv_{\mathfrak{U}_a} c_{\sigma(a)}$ in quanto l'insieme $\{n \mid \sigma(n) = c_{\sigma(a)}\} \supseteq \{a\} \in \mathcal{U}$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo $\mathcal{U}$ non principale e consideriamo un elemento $A \in \mathcal{U}$. Definiamo la successione $\sigma \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ come

$$\sigma(n) = \begin{cases} n+1 & \text{se } n \in A \\ 0 & \text{se } n \notin A \end{cases}.$$

Ovviamente $\sigma \not\equiv_{\mathcal{U}} c_0$ in quanto $\{n \mid \sigma(n) = 0\} = A^C \notin \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è un filtro e $A \in \mathcal{U}$. Del resto per ogni $k \neq 0$ si ha anche $\sigma \not\equiv_{\mathcal{U}} c_k$, in quanto se $k-1 \in A$ allora $\{n \mid \sigma(n) = k\} = \{k-1\} \notin \mathcal{U}$ in quanto $\mathcal{U}$ non è principale, mentre se $k-1 \notin A$ allora $\{n \mid \sigma(n) = k\} = \emptyset \notin \mathcal{U}$ perché $\mathcal{U}$ è un filtro. $\square$

Il lemma precedente, dunque, ci dice che quando costruiamo l'ultrapotenza $^*\mathbb{R}$ con un ultrafiltro non principale otteniamo un sovracampo ordinato di $\mathbb{R}$ che è proprio. Queste costruzioni sono molto importanti e meritano una definizione:

Definizione 6.5. Chiamiamo *campo superreale* un qualsiasi sovracampo ordinato proprio di $\mathbb{R}$.

Così ogni ultrapotenza $^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ non principale risulta essere un campo superreale, che chiameremo campo dei *numeri iperreali*.

6.2 Campi superreali, archimedeità e completezza

In questo paragrafo lavoreremo genericamente con un campo ordinato $\mathbb{F}$ qualsiasi. Diamo alcune definizioni importanti:

Definizione 6.6. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice *archimedeo* se per ogni $x, y \in \mathbb{F}$ con $0 < x < y$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x \cdot n > y$.[1]

Definizione 6.7. Un campo ordinato $\mathbb{F}$ si dice *completo* se ogni suo sottoinsieme non vuoto e limitato superiormente ammette un estremo superiore.

[1]osserviamo da un punto di vista logico che la formula scritta non è una formula del linguaggio dei campi, perché in tale linguaggio il simbolo "$\mathbb{N}$" non c'è.

Definizione 6.8. Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Un elemento $a \in \mathbb{F}$ è detto

(1) *infinitesimo* se $|a| < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;

(2) *infinito* se il suo inverso è infinitesimo;

(3) *finito* se non è infinito.[2]

Osservazione 6.9. Vale banalmente che 0 è un numero infinitesimo in ogni campo ordinato $\mathbb{F}$.

Innanzitutto non è detto che elementi con le proprietà (1) (apparte lo 0) o (2) della precedente definizione esistano. Anzi, vediamo subito che se un campo ordinato possiede la proprietà di Archimede allora non ci sono altri infinitesimi oltre allo 0 (e dunque non ci sono neanche infiniti):

Proposizione 6.10. *Sia* $\mathbb{F}$ *un campo ordinato. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) $\mathbb{F}$ *è archimedeo;*

(2) *l'unico numero infinitesimo di* $\mathbb{F}$ *è 0;*

(3) $\mathbb{N}$ *è illimitato in* $\mathbb{F}$*;*

(4) $\mathbb{Q}$ *è denso in* $\mathbb{F}$*.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Supponiamo per assurdo che esista un elemento $\varepsilon \neq 0$ infinitesimo. Senza perdere di generalità possiamo supporre $\varepsilon > 0$ e infinitesimo. Ciò significa che $\varepsilon < \frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Fissiamo un certo $n \in \mathbb{N}$: per l'ipotesi (1) esiste un m tale che

$$m\varepsilon > \frac{1}{n},$$

e allora $\varepsilon > \frac{1}{mn}$, assurdo perché ε è infinitesimo.
((2) $\Longrightarrow$ (3)) Dobbiamo mostrare che per ogni $x \in \mathbb{F}$ esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > x$. Se $x \leq 0$ allora abbiamo concluso in quanto $n = 1$ dà la tesi. Se invece $x > 0$ allora $x^{-1} \in \mathbb{F}$ e dunque per la proprietà (2) non può essere infinitesemo: esiste così un n tale che $x^{-1} > 1/n$, ovvero tale che $n > x$.
((3) $\Longrightarrow$ (1)) Prendiamo $x > y > 0$ in $\mathbb{F}$ e prendiamo n tale che $n > \frac{x}{y}$ dato dalla (3). Allora

$$ny > \frac{x}{y} \cdot y = x.$$

[2]non abbiamo definito una funzione valore assoluto su $\mathbb{F}$, ma con la scrittura $|a| < \frac{1}{n}$ stiamo abbreviando la scrittura $-\frac{1}{n} < a < \frac{1}{n}$, che invece ha perfettamente senso.

((3) $\implies$ (4)) Dobbiamo mostrare che per ogni $x > y$ in $\mathcal{F}$ esiste un razionale q tale che $y < q < x$. Se $x - y \geq 1$ allora la tesi si ha facilmente.[3] Supponiamo dunque $x - y < 1$, allora per la proprietà di Archimede (che tanto è equivalente alla (3)) esiste n tale che

$$n(x-y) > 1. \tag{6.1}$$

Consideriamo ora l'insieme $\{k \in \mathbb{N} \mid k > ny\} \subseteq \mathbb{N}$: questo insieme è non vuoto per la proprietà (3) e dunque ammette un minimo m. Tale minimo soddisfa dunque

$$m - 1 \leq ny < m. \tag{6.2}$$

Combinando le due equazioni si ha

$$y \overset{(2)}{<} \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} \overset{(2)}{\leq} y + \frac{1}{n} \overset{(1)}{<} y + (x - y) = x.$$

((4) $\implies$ (3)) Sia $x \in \mathbb{F}$, allora per la densità di $\mathbb{Q}$ esiste un razionale $\frac{m}{n}$ tale che $x < \frac{m}{n}$. Allora $m > nx \geq x$. □

Osservazione 6.11. La proposizione precedente, essendo $\mathbb{Q}$ denso in $\mathbb{R}$, si può applicare anche al campo ordinato $\mathbb{F} = \mathbb{R}$: pertanto esso risulta archimedeo. Ovviamente lo stesso si può dire per $\mathbb{F} = \mathbb{Q}$.

Il seguente lemma, invece, mostra il legame che c'è tra archimedeità e completezza di un campo ordinato:

Lemma 6.12. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Se $\mathbb{F}$ non è archimedeo allora $\mathbb{F}$ non è completo.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{F}$ non è archimedeo allora esistono degli infinitesimi non nulli. Sia $I = \{\varepsilon > 0 \mid \varepsilon \text{ è infinitesimo}\}$: per concludere è sufficiente dimostrare che non esiste l'estremo superiore di I. Supponiamo per assurdo che esista $\sup I$. Per definizione di infinitesimo abbiamo che l'insieme M_I dei maggioranti di I

$$M_I \supseteq A = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Per definizione $\sup I = \min M_I$ e certamente il minimo di M_I non può essere un elemento di A (in quanto A non ha minimo). Pertanto $\sup I$ è esso stesso un infinitesimo $\varepsilon > 0$ e dunque $\varepsilon = \max I$. Del resto ciò è assurdo in quanto $\varepsilon + \varepsilon > \varepsilon$ ed è ancora un infinitesimo. □

[3] per esempio possiamo predere $N = \max\{n \mid n < y\}$ e si ha che $y \leq N+1 \leq N+x-y < y + x - y = x$. Se $y < N + 1 < x$ abbiamo finito; altrimenti se $y = N + 1$ sicuramente $y < N + \frac{3}{2} < x$.

Proposizione 6.13. *Sia $\mathbb{F}$ un campo ordinato. Allora $\mathbb{F}$ è archimedeo se e solo se è isomorfo ad un sottocampo di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. ($\Longleftarrow$) Supponiamo che $\mathbb{F}$ sia isomorfo ad un sottocampo di $\mathbb{R}$, diciamo $\mathbb{F} \simeq \mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$. Ovviamente $\mathbb{K}$ è archimedeo in quanto lo è $\mathbb{R}$ e dunque $\mathbb{F}$ è esso stesso archimedeo.
($\Longrightarrow$) Se $\mathbb{F}$ è archimedeo allora ha come sottoinsieme denso $\mathbb{Q}$. Per ogni $x \in \mathbb{F}$ sia $(q_n^x)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di razionali tale che $q_n^x - x < \frac{1}{2^n}$ per ogni n. Allora si considera l'applicazione $x \mapsto \lim_{n\to\infty} q_n^x$, e questa risulta avere le proprietà richieste. $\square$

6.3 Qualche proprietà ulteriore delle ultrapotenze

In questo paragrafo $\mathbb{F}$ sarà sempre un campo superreale, salvo dove diversamente specificato. Dunque per la proposizione 6.13 tale campo non sarà archimedeo: così da un lato $\mathbb{F}$ non è neanche completo (lemma 6.12) e dall'altro in $\mathbb{F}$ troviamo infinitesimi non nulli e dunque anche numeri infiniti (i loro inversi in $\mathbb{F}$). Le ultrapotenze $^*\mathbb{R}$ fatte con ultrafiltri non principali, essendo campi superreali, verificano le proprietà appena scritte.

Definizione 6.14. Due elementi ξ e η si dicono *infinitamente vicini* se e solo se $\eta - \xi$ è infinitesimo. In tal caso scriveremo $\xi \approx \eta$.

Proposizione 6.15. *Per ogni $\xi \in \mathbb{F}$ finito esiste un unico numero reale r tale che $r \approx \xi$.*

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme di numeri reali $\{s \in \mathbb{R} \mid s > \xi\}$, che è non vuoto in quanto ξ è finito. Tale insieme è inferiormente limitato in $\mathbb{R}$ e dunque ha senso definire

$$A = \{s \in \mathbb{R} \mid s > \xi\} \quad \text{e} \quad r = \inf A.$$

Prendiamo un numero reale $\varepsilon > 0$. Allora dato che r è un minorante di A non possiamo avere $r - \varepsilon \in A$, dunque $r - \varepsilon \leq \xi$. Inoltre, se valesse $\xi \geq r + \varepsilon$ allora $r + \varepsilon$ sarebbe un minorante di A, contro il fatto che r sia il massimo di essi. Dunque $r + \varepsilon > \xi$. Tutto insieme possimo scrivere $r - \varepsilon \leq \xi < r + \varepsilon$ ovvero $|r - \xi| \leq \varepsilon$. Dato che la precedente relazione vale per ogni $\varepsilon > 0$, si ha $r \approx \xi$. $\square$

Definizione 6.16. Sia $\xi \in \mathbb{F}$ finito. L'unico numero reale infinitamente vicino a ξ si dice *parte standard* di ξ, e lo si denota con $\mathrm{st}(\xi)$.

Se ξ è infinito positivo, si pone per convenzione $\mathrm{st}(\xi) = +\infty$; analogamente, si pone $\mathrm{st}(\xi) = -\infty$ quando ξ è infinito negativo. Nell'analisi nonstandard l'uso delle parti standard rimpiazza completamente l'uso dei limiti. Ad esempio, se ξ e η sono numeri limitati allora

$$\mathrm{st}(\xi + \eta) = \mathrm{st}(\xi) + \mathrm{st}(\eta), \quad \mathrm{st}(\xi\eta) = \mathrm{st}(\xi)\,\mathrm{st}(\eta),$$

e $\mathrm{st}(\xi/\eta) = \mathrm{st}(\xi)/\,\mathrm{st}(\eta)$ (purché $\mathrm{st}(\eta) \neq 0$).

Proposizione 6.17. *Consideriamo l'ultrapotenza* ${}^*\mathbb{R} = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}/\mathcal{U}$ *per un certo* $\mathcal{U}$ *ultrafiltro non principale, e sia* $\xi = [\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$. *Allora:*

(1) $\mathrm{st}(\xi) = \mathcal{U}\text{-}\lim \sigma(n)$*;*

(2) *se* $\lim \sigma(n) = r$ *allora* $\mathrm{st}([\sigma]) = r$.

Dimostrazione. (1) Innanzitutto se ξ è finito esistono $a, b \in \mathbb{R}$ entrambi positivi o entrambi negativi tali che $a \leq \xi \leq b$. Quindi la successione di reali σ appartiene a un compatto per un insieme di indici in $\mathcal{U}$: dunque esiste ed è unico $y = \mathcal{U}\text{-}\lim \sigma(n)$. Per definizione di $\mathcal{U}$–limite abbiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $\{n \mid |\sigma(n) - y| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$; quindi per ogni $\varepsilon > 0$ si ha $|\xi - y| < \varepsilon$. Ovvero $\xi \approx y$, che è la tesi.
(2) Sia $\xi = [\sigma]$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ abbiamo che $|\sigma(n) - r| < \varepsilon$ definitivamente, e dunque ciò avviene per un insieme di indici che sta in $\mathcal{U}$. Così per ogni $\varepsilon > 0$ vale $|\xi - r| < \varepsilon$, ovvero $\xi \approx y$. $\square$

6.4 Estensione di entità reali

Lo strumento cui arriveremo nel prossimo paragrafo è molto generale e permette di semplificare notevolmente la dimostrazione di alcune proprieta di ${}^*\mathbb{R}$, in particolare di alcune di quelle che già possiede $\mathbb{R}$. Tale strumento è noto come principio di transfer (o *transfer principle*) e si può riassumere come segue:

> **Principio di transfer.** Ogni sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ ed ogni funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si estendono in modo canonico ad un sottoineme ${}^*A \subseteq {}^*\mathbb{R}$ e ad una funzione ${}^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ rispettivamente, in modo che le estensioni soddisfino le stesse "proprietà elementari".

Così come lo abbiamo enunciato il principio di transfer non è preciso, in quanto non abbiamo formalizzato cosa si intende per "proprietà elementari". Iniziamo dal definire intanto le estensioni di insiemi e di funzioni da $\mathbb{R}$ a ${}^*\mathbb{R}$, per poi alla fine formalizzare il concetto di "soddisfare le stesse proprietà elementari".

Definizione 6.18. Dato un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}$ definiamo

$$^*A = A^{\mathbb{N}}/\mathcal{U} = \{[\sigma] \mid \sigma : \mathbb{N} \to A\}.$$

Potendo fare l'ultrapotenza di qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si parla di numeri ipernaturali, iperinteri e iperazionali per indicare le ultrapotenze $^*\mathbb{N}$, $^*\mathbb{Z}$ e $^*\mathbb{Q}$ rispettivamente.

Si vede immediatamente che $A \subseteq {}^*A$, una volta effettuata la solita identificazione tra numeri reali e classi di successioni costanti. Caratterizziamo i casi in cui si ha l'uguaglianza:

Lemma 6.19. *Un insieme A è finito se e solo se $^*A = A$.*

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $A = \{a_1, \ldots, a_r\}$ finito. Presa $[\sigma] \in {}^*A$ definiamo $C_k = \{n \mid \sigma(n) = a_k\}$. Essendo $\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ abbiamo che esiste i tale che $C_i \in \mathcal{U}$. Allora $[\sigma] = [c_{a_i}] \in A$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo che A sia infinito; dunque A contiene un insieme numerabile $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n, \ldots\}$. Allora $[\sigma] \in A^*$, ma σ non può essere $\mathcal{U}$–equivalente ad una costante in A, perché per ogni $a \in A$ si ha $|\{n \mid \sigma_n = a\}| \leq 1$. Quindi $[\sigma] \notin A$. □

Corollario 6.20. *Se un insieme A è infinito allora $^*A$ contiene elementi non standard.*

Dimostrazione. È quanto dimostra la seconda parte della precedente dimostrazione. □

Osservazione 6.21. Dalla proprietà precedente segue un'osservazione. Affermiamo che $\mathbb{N}$ non è della forma $^*A$ per nessun $A \subseteq \mathbb{R}$. Infatti se A è finito allora $^*A = A$ e dunque non può essere $\mathbb{N}$, mentre se A è infinito allora $^*A$ contiene elementi non standard, quindi anche in questo caso non può essere l'insieme $\mathbb{N}$.

Dal lemma precedente, i numeri ipernaturali $^*\mathbb{N}$ estendono propriamente i numeri naturali $\mathbb{N}$ inquanto $\mathbb{N}$ è un insieme infinito. Vale però che tutti i numeri ipernaturali che non sono naturali sono infiniti:

Lemma 6.22. *Ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ è infinito, ossia $\nu > n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Se $\nu = [\sigma] \in {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ non fosse infinito allora esisterebbe $N \in \mathbb{N}$ tale che $\nu \leq N$. Detto $A = \{1, \ldots, N\}$, ciò significa che

$$\{n \mid \sigma(n) \in A\} \in \mathcal{U}.$$

Dunque $[\sigma] \in {}^*A$. Tuttavia A è finito, quindi per il lemma 6.19 abbiamo $\nu = [\sigma] \in A \subseteq \mathbb{N}$, contro la scelta di ν. □

Lemma 6.23. *Valgono le seguenti proprietà:*

(1) $^*(A \cap B) = {}^*A \cap {}^*B$;

(2) $^*(A \cup B) = {}^*A \cup {}^*B$;

(3) $^*(A - B) = {}^*A - {}^*B$.

Dimostrazione. Dimostriamo a titolo di esempio la (1), tanto le altre proprietà hanno analoga dimostrazione. Siano $[\sigma] \in {}^*\mathbb{R}$ e, per $C \subseteq \mathbb{R}$, sia $I_C = \{n \mid \sigma(n) \in C\}$. Abbiamo che $I_{A\cap B} = I_A \cap I_B$ e inoltre affermiamo

$$I_{A\cap B} \in \mathcal{U} \iff I_A \in \mathcal{U} \text{ e } I_B \in \mathcal{U}.$$

L'implicazione verso destra si ha perché $\mathcal{U}$ è stabile per sovrainsieme, mentre quella verso sinistra si ha perché $\mathcal{U}$ è stabile per intersezione. In questo modo

$$[\sigma] \in {}^*(A \cap B) \iff I_{A\cap B} \in \mathcal{U} \iff I_A \in \mathcal{U} \text{ e } I_B \in \mathcal{U} \iff [\sigma] \in {}^*A \cap {}^*B,$$

e abbiamo concluso. □

Adesso vediamo come estendere le funzioni:

Definizione 6.24. Data una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiamo la funzione $^*f : {}^*\mathbb{R} \to {}^*\mathbb{R}$ come

$$^*f([\sigma]) = [f \circ \sigma].$$

L'unica verifica da fare è quella della buona definizione di $^*f$, che lasciamo come esercizio.

6.5 Il principio di transfer

In questo paragrafo riusciremo a formalizzare il principio di transfer già enunciato. Definiamo *modello standard* il modello

$$\mathfrak{R} = \langle \mathbb{R}, \mathrm{Rel}_{\mathbb{R}}, \mathrm{Fun}_{\mathbb{R}} \rangle .$$

dove $\mathbb{R}$ è l'insieme dei numeri reali, $\mathrm{Rel}_{\mathbb{R}}$ è l'insieme di tutte le relazioni su $\mathbb{R}$ e $\mathrm{Fun}_{\mathbb{R}}$ è l'insieme di tutte le funzioni, eventualmente parziali, da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$. Definiamo *modello non standard* il modello

$$^*\mathfrak{R} = \langle {}^*\mathbb{R}, \{{}^*R \mid R \in \mathrm{Rel}_{\mathbb{R}}\}, \{{}^*f \mid f \in \mathrm{Fun}_{\mathbb{R}}\} \rangle .$$

In $^*\mathfrak{R}$ quindi abbiamo le estensioni delle funzioni e delle relazioni di $\mathfrak{R}$.

Osservazione 6.25. Il modello non standard non è completo (full–structure) poichè esistono delle funzioni e delle relazioni in $^*\mathfrak{R}$ che non sono l'estensione di alcuna funzione o relazione in $\mathfrak{R}$. Ad esempio $\mathbb{N}$ è un insieme che appartiene a $\mathrm{Rel}_{\mathbb{R}}$ ma non è della forma $^*A$ per nessun $A \subseteq \mathbb{R}$.

Data una struttura $\mathcal{S}$ con dominio S abbiamo un linguaggio associato, che indicheremo con $L_{\mathcal{S}}$, basato sul seguente alfabeto:

- connettivi logici $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\neg$ e quantificatori $\forall$ e $\exists$;
- parentesi (,), [,], {, };
- simboli di variabile.

Definizione 6.26. Definiamo induttivamente l'insieme $Ter(L_{\mathcal{S}})$ degli $L_{\mathcal{S}}$–*termini* come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

(1) ogni variabile è un termine;

(2) ogni elemento dell'insieme dominio della struttura $\mathcal{S}$ è un termine;

(3) se $t_1, \ldots, t_n$ sono termini e f è un simbolo di funzione di arietà n allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ è un termine.

Un termine in cui non occorrono variabili è detto *termine chiuso*.

Definizione 6.27. Un $L_{\mathcal{S}}$–termine chiuso t *definisce* qualcosa se siamo in uno dei seguenti due casi:

(1) $t = s \in S$, ed in tal caso t definisce s;

(2) se $t_1, \ldots, t_n$ definiscono $s_1, \ldots, s_n \in S$ e f è una funzione di arietà n con $(s_1, \ldots, s_n)$ nel dominio di f allora $f(t_1, \ldots, t_n)$ definisce $f(s_1, \ldots, s_n)$.

Un termine che non definisce nulla si dice *indefinito*.

Definizione 6.28. Una $L_{\mathcal{S}}$*–formula atomica* è un'espressione della forma $R(t_1, \ldots, t_n)$, dove R è un simbolo di relazione n–aria e i t_i sono termini.

Definizione 6.29. L'insieme delle $L_{\mathcal{S}}$*–formule* è definito induttivamente come il più piccolo insieme di espressioni tale che:

(1) ogni $L_{\mathcal{S}}$–formula atomica è una formula;

(2) se φ e ψ sono formule allora $(\neg\varphi)$, $(\varphi \wedge \psi)$, $(\varphi \vee \psi)$ e $(\varphi \rightarrow \psi)$ sono formule;

(3) se φ è una formula e x una variabile allora $(\forall x\varphi)$ e $(\exists x\varphi)$ sono formule.

Definizione 6.30. Una variabile x in una formula φ è detta *legata* se è contenuta in una sottoformula di φ della forma $(\exists x \in R)$ oppure $(\forall x \in R)$. Una variabile si dice *libera* se non è legata.

Definizione 6.31. Una *proposizione* è una formula le cui variabili sono tutte legate. Una proposizione è *definita* se non contiene variabili libere ed i suoi termini chiusi sono tutti definiti.

Adesso riprendiamo il modello standard $\mathfrak{R}$ e quello non standard ${}^*\mathfrak{R}$: vediamo adesso come traformare le $L_{\mathfrak{R}}$–formule in $L_{{}^*\mathfrak{R}}$–formule. Procedendo in modo induttivo sulla complessità della formula iniziamo al solito dai termini per poi passare alle formule:

(1) se t è un termine allora:

- se t è una variabile allora ${}^*t = t$;
- se $t = f(t_1, \ldots, t_k)$ allora ${}^*t = {}^*f({}^*t_1, \ldots, {}^*t_n)$;

(2) se φ è una formula in $L_{\mathfrak{R}}$ allora:

- se $\varphi = R(t_1, \ldots, t_n)$ è atomica allora ${}^*\varphi = {}^*R({}^*t_1, \ldots, {}^*t_n)$;
- se $\varphi = \neg\psi$ allora ${}^*\varphi = \neg{}^*\psi$;
- se $\varphi = \psi \wedge \zeta$ allora ${}^*\varphi = {}^*\psi \wedge {}^*\zeta$;
- se $\varphi = \psi \vee \zeta$ allora ${}^*\varphi = {}^*\psi \vee {}^*\zeta$;
- se $\varphi = \psi \rightarrow \zeta$ allora ${}^*\varphi = {}^*\psi \rightarrow {}^*\zeta$;
- se $\varphi = (\exists x \in R)\psi$ allora ${}^*\varphi = (\exists x \in {}^*R){}^*\psi$;
- se $\varphi = (\forall x \in R)\psi$ allora ${}^*\varphi = (\forall x \in {}^*R){}^*\psi$.

A questo punto possiamo finalmente enunciare il principio di transfer in modo formale:

> **Principio di transfer.** Una $L_{\mathfrak{R}}$–proposizione definita φ è vera se e solo se è vera ${}^*\varphi$.

Usando questo principio possiamo quindi dimostrare alcune proprietà di ${}^*\mathbb{R}$ senza dover far riferimento alla sua costruzione tramite ultrafiltri; basterà infatti aver dimostrato la corrispondente proposizione in $\mathbb{R}$.
Il prossimo esempio dà alcune proprietà di ${}^*\mathbb{R}$ che non sono altro che l'interpretazione in ${}^*\mathbb{R}$ di formule vere in $\mathbb{R}$. Nella parte degli esercizi daremo la dimostrazione di queste proprietà in modo diretto, dato che in ogni caso non abbiamo dimostrato formalmente il princpio di transfer.

Esempio 6.32. (1) Ogni numero iperreale ha una parte iperintera.

(2) Ogni $\nu \in {}^*\mathbb{Z}$ ha un successore, cioè esiste $\eta > \nu$ tale che per ogni $\zeta \in {}^*\mathbb{Z}$ si ha
$$\zeta > \nu \Rightarrow \zeta \geq \eta.$$

(3) Gli insiemi ${}^*\mathbb{Q}$ e ${}^*\mathbb{R} - {}^*\mathbb{Q}$ sono densi in ${}^*\mathbb{R}$.

(4) Si ha ${}^*(a, b) = (a, b)_{{}^*\mathbb{R}}$ e analogamente per gli altri tipi di intervallo.

Come ulteriore applicazione del principio di transfer vediamo che esso si può rivelare utile in molti ragionamenti, per esempio nel calcolo dei limiti. Prima un lemma:

Lemma 6.33. *Sia* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *una successione reale. Vale che* $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ *se e solo se per ogni* ν *infinito vale* ${}^*a_\nu \approx l$.

Dimostrazione. ($\Longrightarrow$) Sia $\varepsilon > 0$, allora esiste n_ε tale che per ogni $n \geq n_\varepsilon$ si ha $|a_n - l| < \varepsilon$. Sia $\nu = [\sigma] \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, quindi $\nu \geq n_\varepsilon$, ossia
$$\{n \mid \sigma(n) \geq n_\varepsilon\} \in \mathcal{U}.$$
Così $\{n \mid |a_{\sigma(n)} - l| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$. Essendo $a_\nu = [a_{\sigma(n)}] \in {}^*\mathbb{R}$ ricaviamo $|a_\nu - l| < \varepsilon$. Per l'arbitrarietà di $\varepsilon > 0$ abbiamo dunque $a_\nu \approx l$.
($\Longleftarrow$) Supponiamo per assurdo di avere una sottosuccessione $\{a_{n_k}\}$ con $n_k \to \infty$ e di avere $\varepsilon > 0$ tale che $\{k \mid |a_{n_k} - l| < \varepsilon\} = \emptyset$. Prendiamo $\nu = [n_k] \in {}^*\mathbb{N}$. Dato che $n_k \to \infty$ abbiamo ν infinito, quindi $\nu \approx l$, e dunque l'insieme $\{k \mid |a_{n_k} - l| < \varepsilon\} \in \mathcal{U}$, assurdo. $\square$

Esempio 6.34. Vediamo adesso un'applicazione del lemma precedente: dimostriamo che
$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$
Prendiamo ν infinito. Per il principio di transfer abbiamo $\sqrt[\nu]{\nu} \geq 1$, dato che questa proprietà vale per $\mathbb{N}$. Così possiamo scrivere $\sqrt[\nu]{\nu} = 1 + \delta$ con $\delta > 0$: per concludere è sufficiente mostrare che δ è infinitesimo. Si ha
$$\nu = (1+\delta)^\nu = \sum_{i=0}^{\nu} \binom{\nu}{i} \delta^i \geq \frac{\nu(\nu-1)}{2}\delta^2,$$
ossia
$$0 < \delta \leq \sqrt{\frac{2}{\nu - 1}}.$$
Ora $\nu - 1$ è infinito, il suo reciproco è infinitesimo e dunque δ è esso stesso infinitesimo.

6.6 Analisi non standard

Dopo aver acquisito familiarità con l'algebra dei numeri infinitesimi ed infiniti, si può passare subito a trattare la nozione di continuità (in analisi nonstandard non c'è bisogno di premettere lo studio delle successioni e la teoria dei limiti).

Definizione 6.35. Sia f una funzione reale. Diciamo che f è *continua in* x_0 se per ogni $\varepsilon \approx 0$ si ha ${}^*f(x_0 + \varepsilon) \approx {}^*f(x_0)$.

Il contenuto intuitivo di questa definizione è evidente. Una funzione f è continua nel punto x_0 se i punti "vicini" a x_0 hanno una immagine "vicina" a $f(x_0)$. Analogamente si può dare la definizione di uniforme continuità, concetto centrale in analisi:

Definizione 6.36. Sia $f : A \to \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che f è *uniformemente continua* se per ogni $\xi \approx \eta$ si ha ${}^*f(\xi) \approx {}^*f(\eta)$.

Mentre nella definizione di continuità la coppia di punti considerati contiene un numero reale x_0, e poi si testa il valore della funzione in x_0 e in un punto infinitamente vicino $x_0 + \varepsilon$, per l'uniforme continuità occorre considerare tutte le coppie di numeri iperreali infinitamente vicini (quindi anche le coppie di punti entrambi infinitesimi o entrambi infiniti).
Ovviamente ogni funzione uniformemente continua su I è necessariamente continua in ogni punto di I, ma il viceversa non vale, come mostra il seguente esempio.

Esempio 6.37. Consideriamo $f(x) = x^2$. La funzione è ovviamente continua in ogni punto $x_0 \in \mathbb{R}$: infatti per ogni $\varepsilon \approx 0$ si ha

$$\begin{aligned} {}^*f(x_0 + \varepsilon) &= (x_0 + \varepsilon)^2 = x_0^2 + 2\varepsilon x_0 + \varepsilon^2 = \\ &= x_0^2 + \varepsilon(2x_0 + \varepsilon) \approx x_0^2 = {}^*f(x_0), \end{aligned}$$

dove nel penultimo passaggio abbiamo usato che $\varepsilon(2x_0 + \varepsilon)$ è infinitesimo in quanto prodotto di un infinitesimo per un numero finito. La funzione f, però, non è uniformemente continua. Infatti se prendiamo $\xi = \Omega$ infinito e $\eta = \Omega + \frac{1}{\Omega}$ abbiamo chiaramente che $\xi \approx \eta$, ma

$${}^*f(\xi) = \Omega^2 \quad \text{e} \quad {}^*f(\eta) = \Omega^2 + \frac{1}{\Omega^2} + 2,$$

e dunque ${}^*f(\eta) - {}^*f(\xi) = \frac{1}{\Omega^2} + 2$, che non è infinitesimo.

Dimostriamo adesso con metodi non standard un risultato classico dell'analisi:

Teorema 6.38 (di Heine–Cantor)**.** *Se f è continua su $[a,b]$ allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Siano $\xi \approx \eta$ in ${}^*[a,b]$. Sia $x = \mathrm{st}(\xi) = \mathrm{st}(\eta)$, che esistono in quanto ξ ed η sono finiti (l'intervallo è limitato). Inoltre, dato che l'intervallo in questione $[a,b]$ è chiuso, abbiamo che $x \in [a,b]$. Per continuità si ha

$$ {}^*f(\xi) \approx f(x), $$

e simmetricamente abbiamo anche ${}^*f(\eta) \approx f(x)$. $\square$

I prossimi due risultati di analisi che mostreremo saranno il teorema di Weierstrass e il teorema del valore intermedio. Prima però ci serve un lemma che riguarda l'estremo superiore di insiemi di numeri reali:

Lemma 6.39. *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$. Se $l = \sup A$ allora esiste $\alpha \in {}^*A$ tale che $\mathrm{st}(\alpha) = l$.*

Dimostrazione. Dalla definizione di estremo superiore si ha che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un $a_n \in A$ tale che $a_n > l - \frac{1}{n}$. Dato che l è un maggiorante di A si ha anche

$$ \forall n \in \mathbb{N}\; l - \frac{1}{n} < a_n < l. $$

Definiamo $\sigma : \mathbb{N} \to A$ tale che $\sigma(n) = a_n$ e $\alpha = [\sigma] \in {}^*A$. Dato che la successione σ ha limite in senso classico e tale limite è l (per il teorema di confronto), segue che $\mathrm{st}(\alpha) = l$. $\square$

Teorema 6.40 (Weierstrass)**.** *Ogni funzione continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ su un intervallo chiuso e limitato ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. È sufficiente provare che la funzione f ha un massimo: infatti per dimostrare che f ha minimo è sufficiente applicare il ragionamento alla funzione $-f$.
Sia $l = \sup\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$. Posto $A = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ abbiamo

$$ {}^*A = \{f(x) \mid x \in [a,b]_{{}^*\mathbb{R}}\}, $$

così per il lemma precedente esiste $\xi \in [a,b]_{{}^*\mathbb{R}}$ tale che $l = \mathrm{st}(f(\xi_0))$. Detta $x_0 = \mathrm{st}(\xi_0)$ abbiamo che $x_0 \in [a,b]$ perché l'intervallo è chiuso. Sfruttando la continuità si ha

$$ f(x_0) \approx f(\xi_0) \approx l. $$

Ma due numeri reali sono infinitamente vicini solo se coincidono, quindi $f(x_0) = l$ è il punto di massimo cercato. $\square$

Teorema 6.41 (del valore intermedio)**.** *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Allora esiste $c \in (a, b)$ tale che $f(c) = 0$.*

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ consideriamo $x_n, y_n \in [a, b]$ tali che

$$f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad \text{e} \quad 0 < y_n - x_n \leq \frac{1}{n}.$$

Un modo per costruire questi punti è il seguente: dato n, si suddivide l'intervallo $[a, b]$ in n parti uguali e si prende come x_n il massimo elemento della partizione finita effettuata sul quale f è negativa. Essendo più formali prendiamo la partizione $\mathscr{P}_n = \{a + i(b - a)/n \mid i = 0, \dots, n\}$ e definiamo

$$x_n = \max\{r \in \mathscr{P}_n \mid f(r) < 0\} \quad \text{e} \quad y_n = x_n + \frac{b - a}{n}.$$

Consideriamo $(x_\nu)_{\nu \in {}^*\mathbb{N}}$ e $(y_\nu)_{\nu \in {}^*\mathbb{N}}$, le estensioni non standard delle due successioni $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ appena costruite. Fissiamo inoltre un N ipernaturale infinito. Per il principio di transfer abbiamo che $x_N, y_N \in [a, b]_{^*\mathbb{R}}$ e

$$f(x_N) < 0, \quad f(y_N) > 0 \quad \text{e} \quad 0 < y_N - x_N \leq \frac{1}{N}.$$

L'ultima condizione ci dice che $y_N - x_N \approx 0$, e quindi $\mathrm{st}(x_N) = \mathrm{st}(y_N) = c \in [a, b]$ in quanto l'intervallo è chiuso. Ma allora $f(c) \approx f(x_N)$ e $f(c) \approx f(y_N)$. Dato che $f(c)$ è reale ed è infinitamente vicino sia ad un numero negativo che ad un numero positivo, si ha necessariamente che $f(c) = 0$ e dunque che in realtà $c \in (a, b)$. □

Andiamo adesso alla nozione di derivabilità in un punto:

Definizione 6.42. Sia f una funzione reale. Diciamo che f è *derivabile in* x_0 se per ogni $\varepsilon \approx 0$ non nullo esiste un numero reale $f'(x_0) \in \mathbb{R}$ tale che

$$\frac{{}^*f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx f'(x_0).$$

A titolo di esempio, per mostrare le potenzialità dell'analisi non standard, diamo una dimostrazione della regola della catena:

Proposizione 6.43 (regola della catena)**.** *Sia f una funzione derivabile in x_0 e sia g derivabile in $f(x_0)$. Allora $g \circ f$ è derivabile in x_0 e si ha*

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0).$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon \approx$ con $\varepsilon \neq 0$. Allora

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{\varepsilon} = \frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$

Per continuità della funzione f in x_0 si ha $f(x_0+\varepsilon) = f(x_0) + \eta$, con η infinitesimo. Allora si ha

$$\frac{g(f(x_0+\varepsilon)) - g(f(x_0))}{\varepsilon} = \frac{g(f(x_0)+\eta) - g(f(x_0))}{\eta} \frac{f(x_0+\varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon} \approx$$
$$\approx g'(f(x_0))f'(x_0),$$

che è la tesi. $\square$

6.7 Insiemi interni

Adesso individuiamo alcuni speciali sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{R}$, e vedremo che essi godono di proprietà molto importanti. Iniziamo dalla defizione:

Definizione 6.44. Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{R}$. Diciamo che A è *interno* se esiste una successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ tali che

$$[\varphi] \in A \Longleftrightarrow \{n \mid \varphi(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}.$$

In tal caso diremo che A *proviene* dalla successione $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Non è difficile verificare che se A e B sono interni, allora sono interni anche $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$ e $A \times B$.

Esempio 6.45. Se $X \subseteq \mathbb{R}$ allora ${}^*X$ è interno. Infatti per definizione di ${}^*X$ abbiamo

$$[\varphi] \in {}^*X \Longleftrightarrow \{n \mid \varphi(n) \in X\} \in \mathcal{U},$$

e quindi la successione di insiemi da cui provieme ${}^*X$ altro non è la successione costantemente uguale a X.

Proposizione 6.46. *Ogni $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ non vuoto e interno ammette minimo.*

Dimostrazione. Sia $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la successione di sottoinsiemi di $\mathbb{N}$ da cui proviene A. Definiamo

$$\nu = [\varphi],$$

dove $\varphi(n) = \min A_n$; allora affermiamo che ν è il minimo di A cercato. Infatti $\nu \in A$ poiché $\{n \mid \varphi(n) \in A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$; verifichiamo adesso che se $\nu' \leq \nu$ e $\nu' \in A$ allora $\nu' = \nu$. Sia $\nu' = [\varphi']$, allora per ipotesi

$$X = \{n \mid \varphi'(n) \leq \varphi(n)\} \in \mathcal{U}.$$

L'insieme $Y = \{n \mid \varphi'(n) \in A_n\} \in \mathcal{U}$ poiché $\nu' = [\varphi'] \in A$ e A è interno. Consideriamo allora l'insieme

$$X \cap Y = \{n \mid \varphi'(n) \in A_n \text{ e } \varphi'(n) \leq \min A_n\} = \{n \mid \varphi'(n) = \varphi(n)\} \in \mathcal{U}.$$

Questo ci dice che φ e φ' coincidono $\mathcal{U}$–quasi ovunque, ossia $\nu' = \nu$. □

Corollario 6.47. *L'insieme degli ipernaturali infiniti* ${}^*\mathbb{N}_\infty = {}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ *non è interno.*

Dimostrazione. L'insieme non vuoto ${}^*\mathbb{N}_\infty$ non ha minimo. □

Corollario 6.48. *L'insieme dei naturali* $\mathbb{N}$ *non è interno.*

Dimostrazione. Se $\mathbb{N}$ fosse interno allora ${}^*\mathbb{N} - \mathbb{N}$ sarebbe interno, contro il precedente corollario. □

Per capire a prima vista se un certo insieme è interno si può ricorrere ad un principio informale, che spesso instrada sulla via giusta. Questo principio dice che gli insiemi interni sono quelli "definibili" a partire da certi parametri anch'essi interni. Vediamo un esempio:

Esempio 6.49. Siano $\xi, \eta \in {}^*\mathbb{R}$ con $\xi < \eta$ e consideriamo $A = (\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}}$. Ci chiediamo se A è interno o no: secondo il principio informale appena enunciato la risposta è sì in quanto

$$(\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}} = \{\zeta \in {}^*\mathbb{R} \mid \xi < \zeta < \eta\}.$$

Verifichiamo adesso formalmente che A è interno. Siano $\xi = [\varphi]$ e $\eta = [\psi]$ e definiamo gli intervalli

$$A_n = (\varphi(n), \psi(n)).^4$$

Allora vale che $(\xi, \eta)_{{}^*\mathbb{R}} = \{[\tau] \mid \tau(n) \in A_n\}$. Ovviamente lo stesso si può dire per gli intervalli chiusi o per quelli semiaperti; inoltre gli intervalli di ${}^*\mathbb{N}$ (di tutti i tipi) sono interni anche come sottoinsiemi di ${}^*\mathbb{N}$.

Esempio 6.50. Gli insiemi degli infinitesimi degli iperreali finiti ${}^*\mathbb{R}_{fin}$ non sono insiemi interni in ${}^*\mathbb{R}$.

Proposizione 6.51 (principio di overspill)**.** *Sia* $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ *un insieme interno. Se* A *contiene numeri finiti arbitrariamente grandi allora esiste* ν *infinito tale che* $\nu \in A$.

[4] non è detto che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $\varphi(n) < \psi(n)$; ciò che è vero è che tale condizione avviene per un insieme di indici n che appartiene a $\mathcal{U}$.

Dimostrazione. Per assurdo, sia A un insieme interno tale che $A \cap \mathbb{N}$ è infinito ma A non contiene numeri infiniti. Consideriamo

$$B = \{\xi \in {}^*\mathbb{N} \mid \exists a \in A\ \xi \leq a\} = \bigcup_{a \in A} [0, a]_{{}^*\mathbb{N}}.$$

Applicando la definizione si può vedere che B è interno: infatti se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è la successione da cui proviene A, allora B proviene dalla successione $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ definita da $B_n = \bigcup_{a \in A_n} [0, a]$. Ma per ipotesi $B = \mathbb{N}$ ed $\mathbb{N}$ non è interno, assurdo. □

Proposizione 6.52 (principio di underspill)**.** *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno. Se A contiene numeri infiniti arbitrariamente piccoli allora A contiene anche numeri finiti.*

Dimostrazione. Analoga. □

Lemma 6.53. *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno e $\mathbb{N} \subseteq A$. Allora esiste ν infinito tale che $[0, \nu] \subseteq A$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni ν infinito si abbia $[0, \nu] \not\subseteq A$. Allora definiamo l'insieme

$$B = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} \mid [0, \nu] \subseteq A\}.$$

Tale insieme B è interno in quanto definito da una formula con parametri interni.[5] Ma $B = \mathbb{N}$ e $\mathbb{N}$ non è interno, assurdo. □

Lemma 6.54. *Sia $A \subseteq {}^*\mathbb{N}$ un insieme interno. Se $[\nu, \infty)_{{}^*\mathbb{N}} \subseteq A$ per ogni ν infinito allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $[n, \infty) \subseteq A$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si abbia $[n, \infty) \not\subseteq A$. Allora definiamo l'insieme

$$B = \{\nu \in {}^*\mathbb{N} \mid [\nu, \infty) \subseteq A\}.$$

Tale insieme B è interno in quanto definito da una formula con parametri interni. Ma $B = {}^*\mathbb{N}_\infty$ e ${}^*\mathbb{N}_\infty$ non è interno, assurdo. □

Definizione 6.55. Un insieme interno si dice *iperfinito* se proviene da una successione $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tale che gli A_n sono tutti finiti.

Definizione 6.56. Sia A un insieme iperfinito. La *cardinalità interna* di A è l'ipernaturale associato alla successione $(|A_n|)_{n \in \mathbb{N}}$.

[5] l'intervallo $[0, \nu]$ in ${}^*\mathbb{N}$ è interno, e l'insieme A è interno per ipotesi.

Capitolo 7

Densità e sottoinsiemi di naturali

In questo capitolo introdurremo il concetto di densità asintotica di un insieme di numeri naturali e ne studieremo le prime proprietà generali. Dopodiché introdurremo alcuni tipi di sottoinsiemi di naturali: gli insiemi spessi, i sindetici e i sindetici a tratti, che si riveleranno poi essere quelli più importanti. Infine studieremo le proprietà che legano diversi tipi di insiemi e cercheremo di capire qualcosa in generale sulla loro densità.

7.1 La densità asintotica

Iniziamo subito dalla definizione:

Definizione 7.1. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Se esiste il limite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n}$$

tale limite è detto *densità asintotica* di A. Se il limite non esiste si definisce *densità asintotica superiore* la quantità

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|A \cap [1,n]|}{n},$$

e analoga definizione per la *densità asintotica inferiore* $\underline{d}(A)$.

Lemma 7.2. *La densità asintotica superiore* $\overline{d}$ *è invariante per traslazione.*

Dimostrazione. La dimostrazione è un semplice esercizio. $\square$

Un altro tipo di proprietà su cui ci potremmo soffermare è l'additività. Ovviamente se A o B hanno densità asintotica allora se $A \cap B = \emptyset$ allora $d(A \cup B) = d(A) + d(B)$. In generale questo non è vero e ciò che vale è il seguente risultato (che invitiamo a dimostrare per esercizio):

Lemma 7.3. *Se $A \cap B = \emptyset$ allora vale la seguente catena:*

$$\underline{d}(A) + \underline{d}(B) \leq \underline{d}(A \cup B) \leq \underline{d}(A) + \overline{d}(B) \leq \overline{d}(A \cup B) \leq \overline{d}(A) + \overline{d}(B).$$

In particolare se esistono le densità $d(A)$ e $d(B)$ allora $d(A \cup B)$ esiste e vale $d(A) + d(B)$.

Vediamo un esempio per familiarizzare con le varie densità:

Esempio 7.4. Vediamo che esiste un insieme A con $\underline{d}(A) = 0$ e $\overline{d}(A) = 1$. Definiamo

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [(2n)!, \, (2n+1)!) \, .$$

Per $n \to \infty$ abbiamo

$$\frac{|A \cap [1, \, (2n+1)!]|}{(2n+1)!} \geq \frac{(2n+1)! - (2n)!}{(2n+1)!} = 1 - \frac{1}{2n+1} \to 1,$$

e questo mostra che $\overline{d}(A) = 1$. Per contro abbiamo che

$$\frac{|A \cap [1, \, (2n)!]|}{(2n)!} \leq \frac{(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{1}{2n} \to 0,$$

che mostra $\underline{d}(A) = 0$.

7.2 Insiemi sindetici, spessi e sindetici a tratti

Definizione 7.5. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Diciamo che A è *sindetico* se esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $a \in \mathbb{N}$ si ha $[a, a+k) \cap A \neq \emptyset$.

La definizione precedente ci dice in sostanza che esiste un certo k in modo che ogni intervallo lungo k interseca l'insieme. Si dice in modo informale che A ha "buchi limitati".[1]

Definizione 7.6. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$. Diciamo che A è *spesso* se include intervalli arbitrariamente lunghi.

[1] o anche *bounded gaps*, all'inglese.

Osservazione 7.7. Un insieme A è spesso se e solo se la famiglia dei traslati

$$\{A - m \mid m \in \mathbb{N}\}$$

ha la proprietà dell'intersezione finita. Per mostrare che intersezioni finite di traslati hanno intersezione non vuota è sufficiente farlo per intersezioni finite del tipo $A \cap (A+1) \cap \cdots \cap (A+k)$; che queste intersezioni siano non vuote segue allora immediatamente dalla definizione di insieme spesso.

Quella di insieme spesso è la nozione duale della nozione di insieme sindetico. In modo più preciso, dalle definizioni segue che

$$A \text{ sindetico} \Longleftrightarrow A^C \text{ non spesso.}$$

Infine diamo l'ultima nozione introduttiva:

Definizione 7.8. Un insieme A si dice *sindetico a tratti* se è l'intersezione tra un insieme sindetico e un insieme spesso.

7.2.1 Formulazioni equivalenti delle definizioni

Prima di studiare le proprietà di queste tre classi di insiemi vediamo alcune formulazioni equivalenti delle loro definizioni.

Proposizione 7.9. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *A è sindetico;*

(2) *esiste k tale che $[k-1, \infty) \subseteq A + [0, k)$;*

(3) *per ogni intervallo infinito I si ha che $I \cap {}^*A \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Prendiamo k dato dalla definizione di insieme sindetico. Preso un $n \geq k-1$ vogliamo trovare un elemento $a \in A$ tale che $n - a \in [0, k)$; ossia vogliamo un $a \in A$ tale che $n - k + 1 \leq a < n + 1$. Ma l'intervallo $[n-k+1, n+1)$ è lungo k, pertanto la definizione di sindetico ci assicura l'esistenza di un tale a.
((2) $\Longrightarrow$ (1)) Prendiamo k dato dalla (2) e sia $a \in \mathbb{N}$ qualsiasi: dobbiamo trovare un elemento $a' \in A$ tale che $a \leq a' < a + k$. Posto

$$b = a + k - 1 \geq k - 1$$

la (2) ci dice che $b = a' + i$ con $a' \in A$ e $0 \leq i < k$ intero; ma allora $a' = b - i = a + k - 1 - i$ soddisfa le richieste iniziali.

((1) $\Longrightarrow$ (3)) Sia k dato dalla definizione di sindetico, e supponiamo per assurdo che $I = [\mu, \nu]$ un intervallo infinito tale che $I \cap {}^*A = \emptyset$. Dato che $\nu - \mu \in {}^*\mathbb{N}_\infty$ (ossia I è infinito), osserviamo che

$$X = \{n \mid \nu_n - \mu_n > k\} \in \mathcal{U}.$$

Inoltre

$$Y = \{n \mid [\mu_n, \nu_n] \cap A = \emptyset\} \in \mathcal{U}$$

in quanto I è un insieme interno che deriva dalla successione $([\mu_n, \nu_n])_{n \in \mathbb{N}}$ e non interseca ${}^*A$. Pertanto anche l'intersezione $X \cap Y \in \mathcal{U}$, dunque è non vuota, e dunque esiste un n tale che l'intervallo $[\mu_n, \nu_n]$ è lungo più di k e non interseca A, contro la (1).
((3) $\Longrightarrow$ (1)) Supponiamo per assurdo che per ogni k esista un elemento a_k tale che l'intervallo $I_k = [a_k, a_k + k)$ non interseca A. Sia I l'insieme interno che proviene dalla successione $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$. Allora I è un intervallo infinito che non interseca ${}^*A$. $\square$

Osservazione 7.10. Una formulazione equivalente della proprietà (2) è la seguente: esiste $F = \{n_1, \ldots, n_k\}$ finito tale che

$$A - F = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k) = \mathbb{N}.$$

Diremo che un insieme è *k–sindetico* se k è la più piccola cardinalità di un insieme finito F che soddisfa la proprietà appena enunciata.

Proposizione 7.11. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *A è spesso;*

(2) *esiste un intervallo infinito $I \subseteq {}^*A$.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Dato che A è spesso, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un intervallo $I_n = [a_n, a_n + n] \subseteq A$. Consideriamo l'insieme interno I che proviene dalla successione $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Tale insieme è un intervallo, ed è infinito in quanto $(a_n + n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione illimitata. Inoltre preso $\xi \in I$ abbiamo

$$\{n \mid \xi_n \in A\} \supseteq \{n \mid \xi_n \in I_n\} \in \mathcal{U},$$

ossia $\xi \in {}^*A$.
((2) $\Longrightarrow$ (1)) Supponiamo per assurdo che A non sia spesso, ossia che A^C sia sindetico. Per la proposizione precedente abbiamo quindi che ogni intervallo infinito interseca ${}^*(A^C)$; quindi

$$I \cap ({}^*A)^C = I \cap {}^*(A^C) \neq \emptyset,$$

in contraddizione con il fatto che $I \subseteq {}^*A$. $\square$

Proposizione 7.12. *Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ un insieme. Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *A è sindetico a tratti;*

(2) *esiste k tale che per ogni n esiste b tale che per ogni $c \in [b, b+n)$ si ha $[c, c+k) \cap A \neq \emptyset$;*

(3) *esiste k tale che $A + [0, k)$ è spesso.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Sia $A = B \cap C$ con B spesso e C sindetico, e sia k dato dalla sindeticità di C. Sia $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi, allora dato che B è spesso esiste b tale che $[b, b+n+k) \subseteq B$. Preso $c \in [b, b+n)$ si ha

$$[c, c+k) \subseteq [b, b+n+k) \subseteq B.$$

Così $[c, c+k) \cap A = [c, c+k) \cap C \neq \emptyset$ per la sindeticità di C.
((2) $\Longrightarrow$ (1)) Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia b_n dato dalla (1) e si ponga

$$B = A \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [b_n, b_n + n),$$

che è chiaramente spesso in quanto include intervalli arbitrariamente lunghi. Poi definiamo

$$C = A \cup B^C = A \cup \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [b_n, b_n + n)^C,$$

e affermiamo che è sindetico. Infatti dato c possiamo avere due casi: se $c \in [b_n, b_n + n)$ per qualche n allora per ipotesi $[c, c+k) \cap A \neq \emptyset$, e quindi anche l'intersezione con C è non vuota; invece se $c \notin [b_n, b_n + n)$ per ogni n allora $c \in C$ e dunque $[c, c+k) \cap C \neq \emptyset$. In questo modo $A = B \cap C$, con B spesso e C sindetico.
((2) $\Longrightarrow$ (3)) Sia $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi, e sia b dato dalla (2). Mostreremo che l'intervallo

$$[b + k - 1, b + k - 1 + n) \subseteq A + [0, k).$$

Sia dunque $m \in [b + k - 1, b + k - 1 + n)$, e poniamo $c = m - k + 1$ così $c \in [b, b+n)$. Dall'ipotesi (2) segue allora che esiste $d \in [c, c+k) \cap A$, ossia $d \in A$ e $m - k + 1 \leq d < m + 1$. Quest'ultima catena può essere riscritta come $d \leq m < d + k$, ossia $m \in A + [0, k)$.
((3) $\Longrightarrow$ (2)) Prendiamo k dato dalla (3) e sia $n \in \mathbb{N}$ qualsiasi. Dato che $A + [0, k)$ è spesso esiste un $m \geq k - 1$ tale che $[m, m+n) \subseteq A + [0, k)$. Scegliamo $b = m - k + 1$ e affermiamo che ha la proprietà voluta. Infatti dato $c \in [b, b+n)$ abbiamo che $c + k - 1 \in [m, m+n)$, e dunque per ipotesi abbiamo $c + k - 1 = a + i$ con $a \in A$ e $0 \leq i < k$ intero. Così $a = c + k - 1 - i \in [c, c+k)$, e dunque $[c, c+k) \cap A \neq \emptyset$. $\square$

Osservazione 7.13. Una formulazione equivalente della proprietà (3) è la seguente: esiste $F = \{n_1, \ldots, n_k\}$ finito tale che

$$A - F = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k)$$

è spesso. Come prima diremo che un insieme è *k–sindetico a tratti* se k è la più piccola cardinalità di un insieme finito F che soddisfa la proprietà appena enunciata.

7.2.2 Proprietà additive e di densità

Andiamo adesso ad analizzare le caratteristiche dei tre tipi di insieme introdotti da vari punti di vista: vedremo quali di essi sono additivamente grandi, quali sono AP–rich, quali hanno densità superiore positiva ed altre proprietà analoghe.

Proposizione 7.14. *Se A è un insieme sindetico allora $\overline{d}(A) > 0$.*

Dimostrazione. Dato che A è sindetico esiste un k tale che non esistono k interi consecutivi non appartenenti ad A. Consideriamo dunque gli intervalli $I_n = [nk, nk+k)$. Per sindeticità $I_n \cap A \neq \emptyset$ per ogni n; sia dunque $b_n \in I_n \cap A$ e sia $B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Per tale insieme si ha $\overline{d}(B) = \frac{1}{k}$, il lettore lo verifichi. Pertanto $\overline{d}(A) \geq \overline{d}(B) = \frac{1}{k} > 0$. □

Osservazione 7.15. Il viceversa della precedente implicazione non vale. L'insieme A construito nell'esempio 7.4 ha densità superiore 1, ma non è sindetico in quanto possiede dei buchi arbitrariamente grandi (ovvero il complementare è spesso).

Vediamo adesso qualche proprietà riguardante la struttura additiva degli insiemi considerati.

Proposizione 7.16. *Sia A un insieme spesso. Allora A è additivamente grande ed è anche AP–rich.*[2]

Dimostrazione. Che A sia AP–rich è ovvio perché troviamo progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe di ragione 1. Allora mostriamo ora che A è additivamente grande, ossia che contiene $\mathrm{FS}(X)$ per un certo X infinito. Prendiamo $x_1 \in A$. Dopodiché per ogni $n \geq 2$ scegliamo x_n in modo che

$$\left[x_n,\, x_n + \sum_{i=1}^{n-1} x_i\right] \subseteq A.$$

[2] questa proprietà non è banale, dato che avevamo visto che le due nozioni sono scollegate: infatti esistono insiemi additivamente grandi che non contengono neanche 3–progressioni aritmetiche (esercizio A.17).

Questa scelta è possibile in quanto A è spesso e quindi per ogni $n \geq 2$ esiste un intervallo lungo $\sum_{i=1}^{n-1} x_i$. L'insieme X è tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$: infatti se $i_1 < \cdots < i_k$ allora

$$x_{i_1} + \cdots + x_{i_k} = \sum_{j=1}^{k} x_{i_j} \in \left[x_{i_k},\, x_{i_k} + \sum_{i=1}^{i_k - 1} x_i \right] \subseteq A,$$

e abbiamo concluso. □

In generale gli insiemi sindetici a tratti non sono additivamente grandi; quello che però vale è che essi contengono un traslato di un insieme del tipo $\mathrm{FS}(X)$ per qualche X infinito:

Proposizione 7.17. *Se A è sindetico a tratti allora esiste y ed esiste X infinito tale che $y + \mathrm{FS}(X) \subseteq A$.*

Dimostrazione. Dato che A è sindetico a tratti abbiamo che l'insieme $B = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k)$ è spesso, e quindi additivamente grande. Possiamo fare in modo che le precedenti unioni siano disgiunte a meno di ridurre i k insiemi che stiamo unendo: cioè $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_k$ con $B_i \subseteq A - n_i$. Tanto se dimostriamo che uno di questi B_i è additivamente grande, allora lo sarà anche il corrispondente insieme $A - n_i$. Da $B = B_1 \sqcup \cdots \sqcup B_k$, per una versione forte del teorema di Hindman, esiste un i tale che B_i, e dunque anche $A - n_i$, è additivamente grande. □

Per quanto riguarda la ricchezza di progressioni aritmetiche, abbiamo già mostrato che uno spesso è AP–rich; adesso mostriamolo per i sindetici a tratti:

Proposizione 7.18. *Se A è sindetico a tratti allora è AP–rich. In particolare anche un insieme sindetico è AP–rich.*

Dimostrazione. Dato che A è sindetico a tratti abbiamo che l'insieme $B = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k)$ è spesso, dunque AP–rich. Come prima, rendendo le unioni disgiunte, per un rafforzamento del teorema di van der Waerden abbiamo che esiste un i tale che $A - n_i$ è AP–rich. □

Per concludere occupiamoci adesso della regolarità per partizioni.

Proposizione 7.19. *Gli insiami spessi e gli insiemi sindetici non sono regolari per partizioni.*

Dimostrazione. (1) Sia $\mathbb{P}$ l'insieme dei pari e sia A un insieme spesso. Allora $A = (A \cap \mathbb{P}) \sqcup (A \cap \mathbb{P}^C)$ e nessuno dei due insiemi è spesso.

(2) Siano

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(2n)!,\, (2n+1)!) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(2n-1)!,\, (2n)!)\,.$$

Questi due insiemi sono disgiunti, la loro unione è $\mathbb{N}$ e non sono sindetici. Se S è un insieme sindetico allora abbiamo che $S = (S \cap A) \sqcup (S \cap B)$, e questa è una 2–colorazione di S con due insiemi nessuno dei quali è sindetico. $\square$

Gli insiemi sindetici a tratti, invece, hanno la proprietà di essere regolari per partizioni. Questo è un fatto che può anche essere mostrato in modo diretto, ma noi vedremo una dimostrazione di ciò utilizzando gli ultrafiltri minimali. La dimostrazione si trova qualche paragrafo più avanti.

7.2.3 Verso il teorema di Jin

La informazioni riguardo alla densità (e bastano quelle sulla densità superiore) ci dicono qualcosa sulla struttura degli insiemi di somme o di differenza. Il teorema di Jin, che mostreremo nel prossimo capitolo, afferma che se $\overline{d}(A), \overline{d}(B) > 0$ allora $A + B$ e $A \ominus B$ sono insiemi sindetici a tratti.
In questo paragrafo vedremo il caso particolare in cui prendiamo lo stesso insieme e mostreremo che se $\overline{d}(A) > 0$ allora $A \ominus A$ è sindetico.

Definizione 7.20. Un insieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice insieme Δ^* se interseca ogni Δ–set. Ossia se per ogni X infinito si ha $A \cap (X \ominus X) \neq \emptyset$.

Proposizione 7.21. *Se $\overline{d}(A) > 0$ allora $A \ominus A$ è un insieme Δ^*.*

Dimostrazione. Prendiamo un insieme infinito $X = \{x_1 < x_2 < \cdots\}$ e facciamo vedere che $(A \ominus A) \cap (X \ominus X)$ è non vuoto. Se $\overline{d}(A) = \alpha > 0$ allora esiste N infinito con

$$\frac{|{}^*A \cap [1, N]|}{N} \approx \alpha;$$

ma notiamo anche che per ogni i si ha

$$\frac{|({}^*A + x_i) \cap [1, N]|}{N} \approx \alpha.$$

Così $\sum_{i=1}^{k} \frac{|{}^*A + x_i|}{N} \approx k\alpha$ e scegliano k in modo che $k\alpha > 1$. Questo ci dice che gli $A + x_i$ non sono tutti disgiunti, ossia esiste $\xi \in (A + x_i) \cap (A + x_j)$, ossia

$$a_i + x_i = \xi = a_j + x_j,$$

e dunque $a_i - a_j = x_j - x_i \in (A \ominus A) \cap (X \ominus X)$. $\square$

Quello che ci resta da fare è mostrare che ogni insieme Δ^* è sindetico. Prima mostriamo che un insieme spesso è un Δ–set:

Proposizione 7.22. *Se A è un insieme additivamente grande, allora A è un Δ–set. In particolare se A è spesso allora è un Δ–set.*

Dimostrazione. Sia X un insieme infinito tale che $\mathrm{FS}(X) \subseteq A$. Scegliamo dunque

$$Y = \left\{ \sum_{i=1}^{k} x_i \mid k \in \mathbb{N} \right\},$$

e affermiamo che $Y \ominus Y \subseteq A$. Infatti dati $k_1 < k_2$ si ha $\sum_{i=1}^{k_2} x_i - \sum_{i=1}^{k_1} x_i = \sum_{i=k_1+1}^{k_2} x_i \in FS(X) \subseteq A$. $\square$

Proposizione 7.23. *Se A è un insieme Δ^* allora A è sindetico.*

Dimostrazione. Per ipotesi A interseca ogni Δ–set; dato che tutti gli spessi sono Δ–set abbiamo che A interseca tutti gli spessi. Ma allora A è sindetico sennò il suo complementare sarebbe spesso. $\square$

Corollario 7.24. *Se $\overline{d}(A) > 0$ allora $A \ominus A$ è sindetico.*

Dimostrazione. Dalla proposizione 7.21 abbiamo che $A \ominus A$ è un insieme Δ^*. Ma dalla precedente proposizione abbiamo $A \ominus A$ sindetico. $\square$

7.3 Sindetici a tratti e ultrafiltri minimali

C'è una stretta corrispondenza

Teorema 7.25. *Le seguenti proprietà sono equivalenti:*

(1) *$\mathcal{U}$ è minimale;*

(2) *per ogni $A \in \mathcal{U}$ l'insieme $\widehat{A} = \{n \mid A - n \in \mathcal{U}\}$ è sindetico;*

(3) *per ogni $\mathcal{V}$ esiste un $\mathcal{W}$ tali che $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. ((1) $\Longrightarrow$ (2)) Sia L un ideale sinistro minimale con $\mathcal{U} \in L$. Per ogni $\mathcal{V} \in L$ abbiamo $\mathcal{U} \in L = \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$, e dunque $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$ per un opportuno ultrafiltro $\mathcal{W}$. Ma $A \in \mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V}$ e dunque esiste $\overline{n}$ tale che $A - \overline{n} \in \mathcal{V}$, cioè $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_{A-\overline{n}}$. Così

$$L \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{O}_{A-n}.$$

Dato che L è un ideale sinistro minimale allora è compatto, e dunque esiste un sottoricoprimento finito di L, ossia

$$L \subseteq \bigcup_{i=1}^{k} \mathcal{O}_{A-n_i}.$$

Se mostriamo che $(\widehat{A} - n_1) \cup \cdots \cup (\widehat{A} - n_k) = \mathbb{N}$ abbiamo finito in quanto questo ci dice che $\widehat{A}$ è sindetico. Sia $m \in \mathbb{N}$, allora $\mathfrak{U}_m \oplus \mathcal{U} \in L$, e allora esiste i tale che $A - n_i \in \mathfrak{U}_m \oplus \mathcal{U}$. Ciò avviene se e solo se $A - n_i - m \in \mathcal{U}$, se e solo se $n_i + m \in \widehat{A}$, ossia se $m \in \widehat{A} - n_i$.
((2) $\implies$ (3)) Supponiamo per assurdo che esista $\mathcal{V}$ tale che per ogni $\mathcal{W}$ si ha $\mathcal{U} \neq \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, cioè $\mathcal{U} \notin \beta\mathbb{N} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$: tale insieme è chiuso perché immagine dell'applicazione che somma $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$ a destra, che è continua. Allora esiste A tale che $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$ e $\mathcal{O}_A \cap (\beta\mathbb{N} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})) = \emptyset$, ossia $A \in \mathcal{U}$ e per ogni $\mathcal{W}$ si ha $A \notin \mathcal{W} \oplus (\mathcal{V} \oplus \mathcal{U})$. Dato che $A \in \mathcal{U}$ abbiamo per ipotesi che $\widehat{A}$ è sindetico, ossia

$$(\widehat{A} - n_1) \cup \cdots \cup (\widehat{A} - n_k) = \mathbb{N}.$$

Così per le proprietà di ultrafiltro esiste i tale che $\widehat{A} - n_i \in \mathcal{V}$: ciò avviene se e solo se $\widehat{A} = \{m \mid A - m \in \mathcal{U}\} \in \mathfrak{U}_{n_i} \oplus \mathcal{V}$, se e solo se $A \in \mathfrak{U}_{n_i} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$, assurdo.
((3) $\implies$ (1)) Prendiamo $\mathcal{V}$ un ultrafiltro minimale qualunque e L ideale minimale sinistro con $\mathcal{V} \in L$. Per ipotesi esiste $\mathcal{W}$ tale che $\mathcal{U} = \mathcal{W} \oplus \mathcal{V} \oplus \mathcal{U} \in (\beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}) \oplus \mathcal{U} = L \oplus \mathcal{U}$. Ma sappiamo che se L è minimale allora $L \oplus \mathcal{U}$ è minimale, dunque $\mathcal{U}$ è minimale. □

Corollario 7.26. *Se $A \in \mathcal{U}$ con $\mathcal{U}$ minimale. Allora A è sindetico a tratti.*

Dimostrazione. Per ipotesi $(\widehat{A} - n_1) \cup \cdots \cup (\widehat{A} - n_k) = \mathbb{N}$. La tesi consiste nel dimostrare che $C = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k)$ è spesso. Che C sia spesso è vero perché la famiglia $\{C - m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, e ciò segue dal fatto che ogni $C - m \in \mathcal{U}$: infatti per ogni m si ha $m \in \widehat{A} - n_i$, ossia $A - m - n_i \in \mathcal{U}$ e $C - m \supseteq (A - n_i) - m$. □

Teorema 7.27. *Sa A è sindetico a tratti allora esiste un ultrafiltro $\mathcal{U}$ minimale con $A \in \mathcal{U}$.*

Dimostrazione. Per ipotesi $C = (A - n_1) \cup \cdots \cup (A - n_k)$ è un insieme spesso. Allora $\{C - m \mid m \in \mathbb{N}\}$ ha la proprietà dell'intersezione finita, e dunque esiste $\mathcal{V}$ ultrafiltro che li contiene tutti. Dunque $\{m \mid C - m \in \mathcal{V}\} = \mathbb{N} \in \mathcal{Z}$ e $C \in \mathcal{Z} \oplus \mathcal{V}$ per ogni $\mathcal{Z}$. Sia $\mathcal{W} \in \beta\mathbb{N} \oplus \mathcal{V}$ minimale. Dato che $C \in \mathcal{W}$ esiste i tale che $A - n_i \in \mathcal{W}$, ossia $A \in \mathfrak{U}_{n_i} \oplus \mathcal{W}$. Ma $\mathcal{W}$ è minimale, pertanto $\mathcal{U} = \mathfrak{U}_{n_i} \oplus \mathcal{W}$ è minimale. □

Corollario 7.28. *Vale che* $\overline{K(\beta\mathbb{N})} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ A$ *è sindetico a tratti*$\}$.

Dimostrazione. Chiamiamo $\mathcal{S} = \{\mathcal{U} \mid \forall A \in \mathcal{U}\ A$ è sindetico a tratti$\}$. Intanto $\mathcal{S}$ è chiuso in quanto insieme di ultrafiltri i cui elementi verificano tutti la medesima proprietà.[3] Ci resta da mostrare che $\mathcal{S} \subseteq \overline{K(\beta\mathbb{N})}$. Sia $\mathcal{U} \in \mathcal{S}$ e sia $\mathcal{O}_A$ un suo intorno. Dato che $A \in \mathcal{U}$ abbiamo che A è sindetico a tratti; ma allora per il teorema precedente abbiamo che esiste $\mathcal{V}$ minimale con $A \in \mathcal{V}$. Pertanto $\mathcal{V} \in \mathcal{O}_A \cap K(\beta\mathbb{N})$. □

Osservazione 7.29. Il più piccolo ideale bilatero $K(\beta\mathbb{N})$ non è un insieme chiuso. La dimostrazione di questa proprietà non è semplice, e la si può trovare in [1].

Corollario 7.30. *Gli insiemi sindetici a tratti sono regolari per partizioni.*

Dimostrazione. Sia A un insieme sindetico a tratti e sia $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ una sua r–colorazione. Dato che A è sindetico a tratti esiste un ultrafiltro minimale $\mathcal{U}$ con $A \in \mathcal{U}$. Ma allora esiste i tale che $C_i \in \mathcal{U}$, e dunque tale C_i è sindetico a tratti perché elemento di un ultrafiltro minimale. □

[3] il procedimento è a analogo a quello utilizzato per mostrare che l'insieme $\mathcal{H}$ degli ultrafiltri di Hindman è chiuso.

Capitolo 8

Il teorema di Jin

L'obiettivo del capitolo è dimostrare il teorema di Jin. Come già annunciato questo afferma che se $\overline{d}(A), \overline{d}(B) > 0$ allora $A + B$ e $A \ominus B$ sono sindetici a tratti. La prova originaria di Renling Jin è molto più complicata di quella che vedremo noi, in quanto dalla sua formulazione (2000) ad oggi è stata semplificata.[1]

8.1 La densità di Banach

Diamo la definizione di questa nuova densità:

Definizione 8.1. Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$. Allora la *densità di Banach* di A è

$$BD(A) = \lim_{n\to\infty}\left(\max_{k\in\mathbb{Z}} \frac{|A \cap [k, k+n)|}{n}\right).$$

Per mostrare che il limite scritto esiste ci serve il seguente:

Lemma 8.2 (di Fekete). *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione non negativa e subadditiva allora esiste*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{n} = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}.$$

Dimostrazione. Sia $l = \inf_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$: per concludere è allora sufficiente dimostrare che per ogni ν infinito si ha

$$\frac{a_\nu}{\nu} \approx l.$$

[1] Jin introdusse la $\mathbb{N}$–topologia su ${}^*\mathbb{N}$: un certo X è aperto se e solo se per ogni $\xi \in X$ la galassia di ξ è inclusa in X (la galassia di ξ è l'insieme degli ipernaturali a distanza finita da ξ). Jin mostra allora che A è sindetico a tratti se e solo se ${}^*A$ è somewhere dense, ossia è denso se ristretto ad un opportuno aperto, e utilizza questa come caratterizzazione di sindetico a tratti.

Fissato $k \in \mathbb{N}$ abbiamo $\nu = \mu k + i$ dove $0 \leq i < k$ e μ è ancora infinito. Allora sfruttando la subadditività della successione si ha

$$\frac{a_\nu}{\nu} = \frac{a_{\mu k+i}}{\mu k + i} \leq \frac{a_{\mu k} + a_i}{\mu k + i} \leq \frac{\mu a_k}{\mu k + i} + \frac{a_i}{\mu k + i} \leq \frac{a_k}{k} + \frac{1}{\mu} \approx \frac{a_k}{k}.$$

Così per ogni k si ha $\mathrm{st}\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \leq \frac{a_k}{k}$, e dunque è $\leq l$, essendo l un estremo inferiore. Viceversa si ha $\mathrm{st}\left(\frac{a_\nu}{\nu}\right) \geq l$, sempre per le proprietà dell'estremo inferiore. □

Nella definizione della densità di Banach utilizziamo la successione $a_n = \max_k |A \cap [k, k+n)|$, che è non negativa e subadditiva, ossia soddisfa le ipotesi del lemma di Fekete. Pertanto abbiamo dimostrato che la densità di Banach esiste sempre e si ha

$$BD(A) = \inf_n \left(\max_{k \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [k, k+n)|}{n} \right).$$

La densità di Banach è invariante per traslazione, e in più gode della proprietà di subadditività:

Lemma 8.3. *Siano $A, B \subseteq \mathbb{Z}$. Allora $BD(A \cup B) \leq BD(A) + BD(B)$.*

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned} |(A \cup B) \cap [k, k+n)| &= |(A \cap [k, k+n)) \cup (B \cap [k, k+n))| \leq \\ &\leq |A \cap [k, k+n)| + |B \cap [k, k+n)|, \end{aligned}$$

e quindi

$$\begin{aligned} \max_{k \in \mathbb{Z}} |(A \cup B) \cap [k, k+n)| &\leq \max_{k \in \mathbb{Z}} \{|A \cap [k, k+n)| + |B \cap [k, k+n)|\} = \\ &= \max_{k \in \mathbb{Z}} |A \cap [k, k+n)| + \max_{k \in \mathbb{Z}} |B \cap [k, k+n)|, \end{aligned}$$

dove vale l'uguaglianza in quanto è il massimo della somma di due quantità positive. A questo punto si ha facilmente la tesi. □

Esiste infine una caratterizzazione non standard della densità di Banach:

Proposizione 8.4. *Le seguenti sono equivalenti:*

(1) *$BD(A) = \alpha$;*

(2) *per ogni ν infinito esiste un intervallo I con $|I| = \nu$ e $\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \approx \alpha$;*

(3) *esiste I infinito con $\frac{|{}^*A \cap I|}{|I|} \approx \alpha$.*

Dimostrazione. Esercizio. □

8.2 Il teorema di Jin

Per dimostrare il teorema di Jin, visto che con l'analisi non standard la fatica è la stessa, dimostreremo un risultato più forte: se $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ hanno $BD(A) = \alpha > 0$ e $BD(B) = \beta > 0$, allora esiste F con $|F| \leq \frac{1}{\alpha\beta}$ tale che $(A \ominus B) + F$ è spesso.

Ci serviranno alcuni risultati preliminari: l'idea principale è ridursi al caso $E \ominus E$ (che è Δ^* e quindi addirittura sindetico).

Lemma 8.5. *Sia $N \in {}^*\mathbb{N}$ infinito, e sia $E \subseteq [1, N]$ un sottoinsieme interno con*

$$\frac{|E \cap [1, N]|}{N} \approx \delta > 0.$$

Allora esiste un insieme finito $F \subseteq \mathbb{Z}$ con $|F| \leq \frac{1}{\delta}$ tale che $\mathbb{Z} \subseteq (E \ominus E) + F$.

Dimostrazione. Defniamo induttivamente gli elementi di F. Scegliamo un elemento x_1: se $\mathbb{Z} \subseteq (E \ominus E) + x_1$, allora poniamo $F = \{x_1\}$ e abbiamo finito; altrimenti esiste $x_2 \in \mathbb{Z} - ((E \ominus E) + x_1)$. Questo succede se e solo se per ogni $e, e' \in E$ si ha $x_2 \neq e - e' + x_1$, se e solo se per ogni $e, e' \in E$ si ha $e' + x_2 \neq e + x_1$, se e solo se $(E + x_2) \cap (E + x_1) = \emptyset$. Ora, se $\mathbb{Z} \subseteq ((E \ominus E) + x_1) \cup ((E \ominus E) + x_2)$ prendiamo $F = \{x_1, x_2\}$ e abbiamo finito. Altrimenti prendiamo $x_3 \notin ((E \ominus E) + x_1) \cup ((E \ominus E) + x_2)$: come prima, questo succede se e solo se $(E+x_3) \cap (E+x_1) = \emptyset = (E+x_3) \cap (E+x_2)$ eccetera. Il procedimento appena descritto effettivamente termina con un numero finito di passi $\leq \frac{1}{\delta}$. Se così non fosse avremmo una famiglia disgiunta $\{E + x_i \mid i = 1, \ldots, m\}$ con $m > \frac{1}{\delta}$, e allora

$$1 \geq \frac{|\bigcup_{i=1}^m (E + x_i) \cap [1, N]|}{N} = \frac{\sum_{i=1}^m |(E + x_i) \cap [1, N]|}{N} \geq$$
$$\geq \sum_{i=1}^m \frac{|E \cap [1, N]| - x_i}{N} = \sum_{i=1}^m \frac{|E \cap [1, N]|}{N} - \sum_{i=1}^m \frac{x_i}{N} \approx m\delta.$$

Così $1 \geq m\delta$, cioè $m \leq \frac{1}{\delta}$, e questo è assurdo. □

Corollario 8.6. *Sia $A \subseteq \mathbb{Z}$ con $BD(A) = \delta > 0$. Allora esiste $|F| \leq \frac{1}{\delta}$ tale che $\mathbb{Z} = (A \ominus A) + F$.*

Dimostrazione. Per la caratterizzazione non standard della densità di Banach abbiamo che esiste N infinito tale che

$$\frac{|{}^*A \cap [\Omega + 1, \Omega + N]|}{N} \approx \delta.$$

Sia poi $E = ({}^*A - \Omega) \cap [1, N]$ e utilizziamo il lemma 8.5: questo ci dice $\mathbb{Z} \subseteq (E \ominus E) + F$. Quest'ultimo insieme è incluso in

$$[({}^*A - \Omega) \ominus ({}^*A - \Omega)] + F = ({}^*A \ominus {}^*A) + F,$$

e siccome $F \subseteq \mathbb{Z}$ questo è uguale a ${}^*((A \ominus A) + F)$. Così $\mathbb{Z} \subseteq {}^*((A \ominus A) + F)$, ma $\mathbb{Z} \subseteq {}^*B$ se e solo se $\mathbb{Z} = B$. $\square$

Lemma 8.7. *Siano $n, m \in \mathbb{N}$, $C \subseteq [1, n]$ e $D \subseteq [1, m]$. Allora esiste $\overline{x}$ tale che*

$$\frac{|(C - \overline{x}) \cap D|}{m} \geq \frac{|C|}{n}\frac{|D|}{m} - \frac{|D|}{n}.$$

Dimostrazione. Sia χ_C la funzione caratteristica di C. Per ogni $d \in D$ vale

$$\sum_{x=1}^{n} \chi_C(d + x) = |C \cap [d + 1, d + n]| = |(C - d) \cap [1, n]| = |C| + e(d),$$

con $|e(d)| \leq d$ l'errore che si è commesso. Prendiamo

$$\frac{1}{n}\sum_{x=1}^{n}\frac{1}{m}\sum_{d\in D}\chi_C(x + d) = \frac{1}{nm}\sum_{d\in D}\sum_{x=1}^{n}\chi_C(x + d) \geq \frac{1}{nm}\sum_{d\in D}(|C| + e(d)) =$$

$$= \frac{1}{m}\sum_{d\in D}\frac{|C|}{n} + E = \frac{|D|}{m}\frac{|C|}{n} + E,$$

dove per l'errore E abbiamo

$$|E| = \frac{1}{nm}\sum_{d\in D} e(d) \leq \frac{1}{nm}\sum_{d\in D} d \leq \frac{1}{nm}\sum_{d\in D} m = \frac{|D|}{N}.$$

Ma allora essendo la media più grande di $\frac{|C|}{n}\frac{|D|}{m} - \frac{|D|}{n}$, almeno uno dei termini deve eccederla. $\square$

Possiamo finalmente dimostrare il seguente:

Teorema 8.8 (di Jin)**.** *Se $A, B \subseteq \mathbb{Z}$ hanno $BD(A) = \alpha > 0$ e $BD(B) = \beta > 0$, allora esiste F con $|F| \leq \frac{1}{\alpha\beta}$ tale che $(A \ominus B) + F$ è spesso, ossia $A \ominus B$ è sindetico a tratti.*

Dimostrazione. Prendiamo N e ν infiniti tali che $\frac{\nu}{N} \approx 0$. Per la caratterizzazione non standard della densità di Banach, dire che $BD(A) = \alpha$ significa che per ogni M infinito esiste un intervallo I con $|I| = M$ tale che

$$\frac{|{}^*A \cap I|}{M} \approx \alpha.$$

Dunque, ripetendo anche il solito ragionamento per B, esistono Ω e Ξ tali che

$$\frac{|{}^*A\cap[\Omega+1,\,\Omega+N]|}{N}\approx\alpha \quad \text{e} \quad \frac{|{}^*B\cap[\Xi+1,\,\Xi+\nu]|}{\nu}\approx\beta.$$

Gli insiemi $C=({}^*A-\Omega)\cap[1,N]\subseteq[1,N]$ e $D=({}^*B-\Xi)\cap[1,\nu]\subseteq[1,\nu]$ sono interni banalmente. Pertanto possiamo applicare la "versione transfer" del lemma 8.7: abbiamo così che esiste ζ tale che

$$\begin{aligned}\frac{|(C-\zeta)\cap D|}{\nu} &\geq \frac{|C|}{N}\frac{|D|}{\nu}-\frac{|D|}{N}=\\ &=\frac{|{}^*A\cap[\Omega+1,\,\Omega+N]|}{N}\frac{|{}^*B\cap[\Xi+1,\,\Xi+\nu]|}{\nu}-\frac{|D|}{N}\approx\alpha\beta,\end{aligned}$$

in quanto $\frac{|D|}{N}$ è infinitesimo (dato che $|D|\leq\nu$). Preso $W=(C-\zeta)\cap D$ abbiamo st $\frac{|W|}{\nu}\geq\alpha\beta$: così per il lemma 8.5 esiste $F\subseteq\mathbb{Z}$ con $|F|\leq\frac{1}{\alpha\beta}$ con $\mathbb{Z}\subseteq(W\ominus W)+F$. Ma

$$W\ominus W\subseteq(C-\zeta)\ominus D\subseteq({}^*A-\Omega-\zeta)\ominus({}^*B-\Xi)={}^*A\ominus{}^*B-\mu,$$

con $\mu=\Omega+\zeta-\Xi$; così

$$\mathbb{Z}\subseteq(W\ominus W)+F\subseteq({}^*A\ominus{}^*B+F)-\mu,$$

quindi $\mu+\mathbb{Z}\subseteq{}^*(A\ominus B+F)$. Ora, per overspill, abbiamo che ${}^*(A\ominus B+F)$ include un intervallo infinito, dunque $(A\ominus B)+F$ è spesso. $\square$

Appendice A

Esercizi risolti

A.1 Ultrafiltri e teorema di Ramsey

Esercizio A.1. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro. $\mathcal{U}$ è principale se e solo se contiene un insieme finito.

Soluzione. Se $A \in \mathcal{U}$ con $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ allora

$$\{a_1\} \cup \cdots \cup \{a_n\} \in \mathcal{U}$$

e dunque per le proprietà di ultrafiltro esiste i con $\{a_i\} \in \mathcal{U}$, ovvero $\mathcal{U} = \mathcal{U}_{a_i}$ è principale. Viceversa se $\mathcal{U}$ è principale, diciamo $\mathcal{U} = \mathcal{U}_i$ allora $A = \{i\} \in \mathcal{U}$.

Esercizio A.2. Ogni insieme parzialmente ordinato infinito ha una catena infinita o un'anticatena infinita.

Soluzione. Sia X un insieme infinito parzialmente ordinato da una relazione $<$. Consideriamo la 2–colorazione $[X]^2 = C_1 \sqcup C_2$ tale che

$$\{x, y\} \in C_1 \Leftrightarrow x < y \vee y < x.$$

Per il teorema di Ramsey infinito con $k = r = 2$, esiste i ed esiste un insieme infinito $H \subseteq X$ tale che $[H]^2 \subseteq C_i$. I casi a questo punto sono due:

- se $i = 1$ allora $[H]^2 \subseteq C_1$, e questo significa che le coppie di $[H]^2$ sono formate da elementi a due a due confrontabili, e allora H è una catena infinita di X;
- se $i = 2$ allora $[H]^2 \subseteq C_2$, e questo significa che le coppie di $[H]^2$ sono formate da elementi a due a due non confrontabili, i quali costituiscono un'anticatena infinita di X.

Esercizio A.3. Sia X un insieme infinito totalmente ordinato da una relazione $\prec$. Allora esiste $A \subseteq X$ tale che $(A, \prec)$ è isomorfo a $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$ o a $(\mathbb{N}, >_{\mathbb{N}})$.

Soluzione. Grazie all'assioma di scelta sia $<$ un buon ordine su X. Definiamo una 2–colorazione $[X]^2 = C_1 \sqcup C_2$ in modo che

$$\{x, y\} \in C_1 \Leftrightarrow (x < y \Leftrightarrow x \prec y).$$

Per il teorema di Ramsey infinito esiste i ed esiste un insieme infinito H tale che $[H]^2 \subseteq C_i$. Un tale H con l'ordine $<$ risulta un buon ordine e quindi esiste un segmento iniziale $A \subseteq H$ tale che $(A, <)$ è isomorfo a $(\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$. Adesso vediamo i due casi:

- se $i = 1$ allora $[A]^2 \subseteq C_1$ e quindi $(A, \prec) = (A, <) \simeq (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$;
- se $i = 2$ allora $[A]^2 \subseteq C_2$ e quindi $(A, \succ) = (A, <) \simeq (\mathbb{N}, <_{\mathbb{N}})$, e rovesciando le relazioni abbiamo la tesi.

Definizione A.4. Un insieme di naturali A si dice *insieme di differenze* o Δ–set se esiste X infinito con $X \ominus X \subseteq A$.

Esercizio A.5. Sia A un Δ–set. Se $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ allora esiste un i tale che C_i è un Δ–set.

Soluzione. Per ipotesi esiste X infinito tale che $X \ominus X \subseteq A$. Consideriamo la r–colorazione di $[X]^2$ definita da

$$\{x_1, x_2\} \in D_i \Leftrightarrow |x_1 - x_2| \in C_i.$$

Per il teorema di Ramsey esiste $Y \subseteq X$ infinito omogeneo per un certo colore i. Questo vuol dire (per definizione) che $[Y]^2 \subseteq D_i$, e cioè che comunque presi due elementi $y_1, y_2 \in Y$ si ha $|y_1 - y_2| \in C_i$. Questa, ricordando la definizione di Δ–set, è la tesi.

A.2 Lo spazio $\beta\mathbb{N}$ degli ultrafiltri

Abbiamo denottato con $\beta\mathbb{N}$ lo spazio degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$ e abbiamo introdotto una topologia su $\beta\mathbb{N}$ definendo come aperti gli insiemi

$$\mathcal{O}_A = \{\mathcal{U} \mid A \in \mathcal{U}\}.$$

Esercizio A.6. Dimostrare che gli insiemi del tipo $\mathcal{O}_A$ sono tutti e soli i clopen in $\beta\mathbb{N}$.

Soluzione. Che gli $\mathcal{O}_A$ sono clopen è ovvio (e lo abbiamo visto nella parte di teoria). Sia adesso C un aperto e chiuso di $\beta\mathbb{N}$, allora

$$C = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i} \quad \text{e} \quad C = \bigcap_{j \in J} \mathcal{O}_{B_j}.$$

Osserviamo che se I è finito o J è finito allora abbiamo concluso in quanto in tali casi si ha

$$C = \mathcal{O}_{\bigcup_{i \in I} A_i} \quad \text{o rispettivamente} \quad C = \mathcal{O}_{\bigcap_{j \in J} B_j}.$$

Del resto ci possiamo sempre ricondurre al primo di questi due casi. Infatti C, essendo chiuso in $\beta\mathbb{N}$ che è compatto, è anch'esso compatto; dunque da $C = \bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_{A_i}$ segue che $C = \bigcup_{i \in I'} \mathcal{O}_{A_i}$ per un certo $I' \subseteq I$ finito.

Esercizio A.7. Sia U un aperto di $\beta\mathbb{N}$. Allora $\overline{U} = \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}}$.

Soluzione. Ovviamente $\mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}}$ è chiuso. Adesso mostriamo che $\mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}} \supseteq U$: basterà mostrare che per ogni $\mathcal{U} \in U$ si ha $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Poiché U è aperto deve esistere $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che $U \supseteq \mathcal{O}_A$. Ora se $\mathcal{U} \in U$ allora $\mathcal{U} \in \mathcal{O}_A$, ovvero $A \in \mathcal{U}$; se dimostriamo che $A \subseteq U \cap \mathbb{N}$, dalla chiusura di $\mathcal{U}$ per soprainsieme segue che $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Ora $A \subseteq \mathbb{N}$ e vale anche $A \subseteq \mathcal{O}_A \subseteq U$: quindi $A \subseteq U \cap \mathbb{N}$.
Infine ci resta da provare che se C è un chiuso con $C \supseteq U$ allora $C \supseteq \mathcal{O}_{U \cap \mathbb{N}}$. Al solito scriviamo $C = \bigcap_{j \in J} \mathcal{O}_{B_j}$, e ci basta dimostrare che per ogni $j \in J$ si ha $U \cap \mathbb{N} \subseteq B_j$. Se per assurdo esistessero $j \in J$ ed $n \in \mathbb{N}$ tali che $n \in (U \cap \mathbb{N}) - B_j$, allora l'ultrafiltro principale $\mathfrak{U}_n$ non starebbe in C, ma questo è assurdo perché $\mathfrak{U}_n \in U \subseteq C$ per ipotesi.

Esercizio A.8. Se U un intorno di un ultrafiltro $\mathcal{U}$ allora $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Mostrare con un controesempio che il viceversa è falso

Soluzione. Sfruttando l'esercizio precedente possiamo scrivere

$$\mathcal{U} \in \mathring{U} \subseteq \overline{\mathring{U}} = \mathcal{O}_{\mathring{U} \cap \mathbb{N}},$$

da cui $\mathring{U} \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. A maggior ragione si ottiene $U \cap \mathbb{N} \in \mathcal{U}$. Per un controesempio è sufficiente prendere $U = \mathbb{N}$: a questo punto ogni ultrafiltro non principale soddisfa la proprietà che $U \cap \mathbb{N} = \mathbb{N} \in \mathcal{U}$, ma ovviemente $U = \mathbb{N}$ non può essere un suo intorno.

Ricordiamo adesso la relazione di equivalenza tra due funzioni modulo un ultrafiltro $\mathcal{U}$. Diciamo che $f \equiv_{\mathcal{U}} g$ se $\{i \mid f(i) = g(i)\} \in \mathcal{U}$.

Esercizio A.9. Se f è una funzione iniettiva allora $f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U})$ implica $f \equiv_{\mathcal{U}} g$.

SOLUZIONE. Dato che f è iniettiva esiste h tale che $h \circ f = id$. Allora

$$\mathcal{U} = h_\star(f_\star(\mathcal{U})) = h_\star(g_\star(\mathcal{U})).$$

Per un risultato visto nel corso abbiamo $A = \{i \mid h(g(i)) = i\} \in \mathcal{U}$. Prendiamo l'insieme $f^{-1}(g(A)) \cap A$ e affermiamo che sta in $\mathcal{U}$: infatti, visto che $A \in \mathcal{U}$, abbiamo $g(A) \in g_\star(\mathcal{U}) = f_\star(U)$ e questo si ha se e solo se $f^{-1}(g(A)) \in \mathcal{U}$. Preso $i \in f^{-1}(g(A)) \cap A$ abbiamo che esiste $j \in A$ tale che $f(i) = g(j)$. Così

$$i = h(f(i)) = h(g(j)) = j,$$

e questo dimostra che f e g coincidono sull'insieme $f^{-1}(g(A))$, il quale appartiene all'ultrafiltro $\mathcal{U}$.

Osservazione A.10. Se f non è iniettiva l'implicazione non vale più: infatti riusciamo a trovare un ultrafiltro $\mathcal{U}$ e due funzioni f e g tali che $f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U})$ ma $f \not\equiv_{\mathcal{U}} g$. Basta prendere un ultrafiltro $\mathcal{U}$ del tipo $\mathcal{U} = \mathcal{V} \otimes \mathcal{V}$ con $\mathcal{V}$ non principale e si ha

$$(\pi_1)_\star(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{V} = (\pi_2)_\star(\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}),$$

ma $\pi_1 \not\equiv_{\mathcal{U}} \pi_2$.

Esercizio A.11. Dimostrare che un ultrafiltro selettivo è di Hausdorff.

SOLUZIONE. Ricordiamo che un ultrafiltro $\mathcal{U}$ si dice di Hausdorff se per ogni $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ abbiamo $f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U})$ implica $f \equiv_{\mathcal{U}} g$. Siano dunque f e g due funzioni e distinguiamo due casi.

- Supponiamo che g sia $\mathcal{U}$–equivalente ad una funzione costante, diciamo $g \equiv_{\mathcal{U}} c_k$, con $c_k : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la funzione che vale costantemente k. L'ipotesi ci dice

  $$f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U}) = (c_k)_\star(\mathcal{U}) = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid k \in A\} = \mathcal{U}_k.$$

  In particolare l'inclusione $\mathcal{U}_k \supseteq f_\star(\mathcal{U})$ ci dice che per ogni A che contiene k vale $f^{-1}(A) \in \mathcal{U}$; preso $A = \{k\}$ abbiamo $f^{-1}(k) \in \mathcal{U}$. Questo equivale a dire $f \equiv_{\mathcal{U}} c_k \equiv_{\mathcal{U}} g$.

- Se g non è $\mathcal{U}$–equivalente ad una costante allora una delle formulazioni equivalenti della definizione di ultrafiltro selettivo ci dice che $g \equiv_{\mathcal{U}} g'$ con g' iniettiva. Così

$$f_\star(\mathcal{U}) = g_\star(\mathcal{U}) = g'_\star(\mathcal{U}),$$

ed essendo g' iniettiva, l'esercizio precedente ci dice che $f \equiv_{\mathcal{U}} g' \equiv_{\mathcal{U}} g$.

Questi esauriscono tutti i possibili casi, dunque abbiamo la tesi.

Esercizio A.12. Vale che

$$S_\star(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V},$$

dove $S : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione somma $S(n, m) = n + m$.

Soluzione. È sufficiente mostrare una sola delle due inclusioni in quanto l'altra è garantità dalla massimalità degli ultrafiltri per inclusione. In particolare dimostriamo l'inclusione $\supseteq$. Preso dunque $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ dobbiamo far vedere che $S^{-1}(A) \in \mathcal{U} \otimes \mathcal{V}$. Dato che $S^{-1}(A) = \{m \mid n + m \in A\}$ abbiamo che

$$S^{-1}(A)_n = \{m \mid m + n \in A\} = A - n;$$

dunque $\{n \mid S^{-1}(A)_n \in \mathcal{V}\} = \{n \mid A - n \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{U}$ perché $A \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$.

Esercizio A.13. Vale che $P_\star(\mathcal{U} \otimes \mathcal{V}) = \mathcal{U} \odot \mathcal{V}$, dove $P : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è la funzione prodotto $S(n, m) = nm$.

Soluzione. Analogo.

Esercizio A.14. Se $\mathcal{U}$ è idempotente allora per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme dei multipli $k\mathbb{N} \in \mathcal{U}$. In particolare, gli ultrafiltri idempotenti sono non principali.

Soluzione. Per $k = 1$ l'affermazione è vera per ogni ultrafiltro $\mathcal{U}$. Fissiamo adesso un $k \geq 2$ e scriviamo

$$\mathbb{N} = \bigsqcup_{a=0}^{k-1} (k\mathbb{N} + a).$$

Per le proprietà di ultrafiltro abbiamo l'esistenza di un a tale che $k\mathbb{N}+a \in \mathcal{U}$. Per una proprietà della pseudosomma abbiamo $(k\mathbb{N} + a) + (k\mathbb{N} + a) = k\mathbb{N} + 2a \in \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$. Se per assurdo $a \neq 0$ allora avremmo l'esistenza di due insiemi disgiunti, $k\mathbb{N}+a$ e $k\mathbb{N}+2a$, entrambi nell'ultrafiltro $\mathcal{U}$, e ciò è assurdo.

Esercizio A.15. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $\mathcal{U}, \mathcal{V} \in \beta\mathbb{N}$ vale

$$(\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}) \odot \mathfrak{U}_n = (\mathcal{U} \odot \mathfrak{U}_n) \oplus (\mathcal{V} \odot \mathfrak{U}_n).$$

Soluzione. Basta esplicitare tutte le definizioni.

Esercizio A.16. L'operazione di somma tra ultrafiltri non è continua a sinistra, cioè per ogni $\mathcal{U}$ non principale, la funzione $S_{\mathcal{U}} : \beta\mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ definita da $S_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ non è continua.

Soluzione. Sia $\mathcal{U}$ un ultrafiltro non principale: come sappiamo $\mathcal{U}$ non sta nel centro di $\beta\mathbb{N}$, dunque sia $\mathcal{V}$ un ultrafiltro che non commuta con $\mathcal{U}$. Fissiamo poi due intorni disgiunti X e Y rispettivamente di $\mathcal{U} \oplus \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Consideriamo $S_{\mathcal{U}}^{-1}(X)$ e $T_{\mathcal{U}}^{-1}(Y)$, con $T_{\mathcal{U}}(\mathcal{V}) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{U}$. Se $S_{\mathcal{U}}$ fosse continua, i due insiemi sarebbero intorni di $\mathcal{V}$ (in quanto $T_{\mathcal{U}}$ è sempre continua), quindi per densità di $\mathbb{N}$ in $\beta\mathbb{N}$ esisterebbe $n \in \mathbb{N}$ tale che $\mathfrak{U}_n \in S_{\mathcal{U}}^{-1}(X) \cap T_{\mathcal{U}}^{-1}(Y)$. Ma, dato che $\mathfrak{U}_n$ è nel centro di $\beta\mathbb{N}$,

$$S_{\mathcal{U}}(\mathfrak{U}_n) = \mathcal{U} \oplus \mathfrak{U}_n = \mathfrak{U}_n \oplus \mathcal{U} = T_{\mathcal{U}}(\mathfrak{U}_n) \in X \cap Y,$$

il che è assurdo perché X e Y erano disgiunti.

Esercizio A.17. Trovare un insieme additivamente grande che non include nessuna 3–AP.

Soluzione. Basta prendere $X = \{10^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e considerare come insieme $A = FS(X)$: tale insieme A è costituito dai naturali che in base 10 si scrivono soltanto con le cifre 0 e 1. Una generica progressione aritmetica lunga 3 è della forma a, b, $2b - a$. Adesso osserviamo che la scrittura di $2b$ in base 10 ha come cifre soltanto 0 e 2; inoltre, dal momento che $a < b$, esiste la minima posizione i (partendo da destra) in cui la i–esima cifra di b è diversa dalla i–esima cifra di a. Ma allora la i–esima cifra di $2b - a$ non può essere né 1 né 0, da cui $2b - a \notin A$.

Nella parte di teoria abbiamo visto e dimostrato il seguente rafforzamento del teorema di Hindman:

Teorema A.18 (Hindman generalizzato)**.** *Sia A un insieme additivamente grande. Per ogni r–colorazione $A = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste un i tale che C_i è additivamente grande.*

Un metodo alternativo per dimostrare il teorema di Hindman generalizzato è il seguente:

Esercizio A.19. Le seguenti proprietà sono equivalenti:
(1) teorema di Hindman;
(2) teorema di Hindman generalizzato;
(3) per ogni r–colorazione $\mathrm{Fin}\,\mathbb{N} = C_1 \sqcup \cdots \sqcup C_r$ esiste una famiglia $\mathcal{F} = \{F_1 < F_2 < \cdots\} \subseteq \mathrm{Fin}\,\mathbb{N}$ tale che esiste un colore i con la proprietà che $FU(\mathcal{F}) \subseteq C_i$.[1]

I seguenti esercizi sono piuttosto difficoltosi. La risoluzione si trova, ma va ricercata accuratamente, nel libro *Algebra in the Stone–Čech compactification* di Hindman e Strauss.

Esercizio A.20. Esistono ultrafiltri di Hindman che non sono idempotenti.

Esercizio A.21. L'insieme $\mathcal{H}$ degli ultrafiltri di Hindman non è chiuso per somme.

Esercizio A.22. Verificare che l'unico ultrafiltro $\mathcal{U}$ su $\mathbb{N}$ tale che $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U} \odot \mathcal{U}$ è l'ultrafiltro principale generato da 2.

Esercizio A.23. Sia $\mathcal{U} = \mathcal{U} \oplus \mathcal{U}$ un ultrafiltro idempotente rispetto alla pseudosomma, e sia $\mathcal{V} = (2 \odot \mathcal{U}) \oplus \mathcal{U}$. Allora ogni $A \in \mathcal{V}$ contiene una progressione aritmetica di lunghezza 3.

Esercizio A.24. Se $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$ allora $\mathcal{U} \oplus \mathcal{U} = \mathcal{U}$.

Esercizio A.25. Il più piccolo ideale $K(\beta\mathbb{N})$ non è chiuso.

[1] l'ordinamento $F_n < F_{n+1}$ è definito d $\max F_n < \min F_{n+1}$; inoltre abbiamo denotato $FU(\mathcal{F})$ l'insieme delle unioni finite di elementi di $\mathcal{F}$.