Università di Pisa - CdL in Informatica

Esercitazione 1

Pisa, 30 Aprile 2019

Esercizio 1. Determinare tutti e soli i valori di $t \in \mathbb{R}$ per cui i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$ sono indipendenti:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} t \\ 3t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ t^2-2 \\ t+2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. Per definizione, i tre vettori sono indipendenti se e solo se

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = \mathbf{0} \iff \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0.$$

Detta $\mathbf{A} \in \mathcal{M}_{4,3}(\mathbb{R})$ la matrice che ha per colonne i tre vettori, la precedente condizione equivale a chiedere che il sistema lineare omogeneo

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{$*$}$$

abbia un'unica soluzione. Per discutere il numero di soluzioni del sistema lineare riduciamo la matrice $\mathbf{A}$ tramite le mosse di Gauss. Si ha intanto

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 3t & t^2-2 \\ -2 & 1-2t & t+2 \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix}.$$

Applichiamo le seguenti mosse di Gauss[1]:

$$\begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 2 & 3t & t^2-2 \\ -2 & 1-2t & t+2 \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & t & t^2 \\ -2 & 1-2t & t+2 \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+2R_1} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & t & t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 4 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 4 \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-R_4} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 4-t^2 \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_4-tR_2} \begin{pmatrix} 1 & t & -1 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 4-t^2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Se $t \neq 2 \wedge t \neq -2$ allora i vettori v_1, v_2, v_3 sono indipendenti, poiché la matrice ha 3 pivots non nulli (il che implica che il sistema lineare $(*)$ abbia soluzione unica). Se invece $t = 2 \vee t = -2$ allora i tre vettori sono linearmente dipendenti perché la matrice ha due righe nulle.

[1] Si adotta la convenzione che, quando sulle frecce viene riportato $R_i + \sum_{j\neq i} k_j R_j$, con $k_j \in \mathbb{R}$, si rimpiazza la riga R_i con $R_i + \sum_{j\neq i} k_j R_j$.