Campi vettoriali

Alessio Del Vigna

01 Giugno 2020

Esercizio 1. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + ye^{xy} \\ xe^{xy} + \cos y \end{pmatrix}$$

è irrotazionale e se è conservativo nel proprio dominio naturale. Se è conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione. Il dominio naturale del campo vettoriale $\mathbf{F}$ è $X = \mathbb{R}^2$ e il campo risulta differenziabile su tutto il suo dominio. Inoltre è evidente che la funzione $f(x,y) = x + \sin y + e^{xy}$ è un potenziale per $\mathbf{F}$, che quindi risulta irrotazionale e conservativo.

Esercizio 2. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} \\ -\frac{x}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

è irrotazionale e se è conservativo nel proprio dominio naturale. Se è conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione. Il dominio naturale di $\mathbf{F}$ è $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,1)\}$. Si verifica facilmente che il campo è irrotazionale, ma poiché l'insieme X non è semplicemente connesso non possiamo concludere immediatamente che $\mathbf{F}$ è conservativo. Consideriamo allora la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t + 1)$, così che γ è chiusa, il suo sostegno è contenuto in X e "gira intorno" al punto $(0,1)$. Il lavoro del campo lungo γ è

$$\mathcal{L}(\mathbf{F},\gamma) = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -1 \,\mathrm{d}t = -2\pi,$$

da cui concludiamo che il campo vettoriale $\mathbf{F}$ non è conservativo su X.

Esercizio 3. Stabilire se il campo vettoriale

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{y}{x^2+y^2} \\ -\frac{x}{x^2+y^2} \\ z \end{pmatrix}$$

è irrotazionale e se è conservativo nel proprio dominio naturale. Se è conservativo, determinarne un potenziale.

Soluzione. Il dominio naturale di $\mathbf{F}$ è $X = \mathbb{R}^3 \setminus \{x = 0,\ y = 0\}$, ossia $\mathbb{R}^3$ privato dell'asse z. Si ha

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{-(x^2+y^2)+2x^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} \end{pmatrix} = \mathbf{0},$$

quindi il campo è irrotazionale. L'insieme X non è semplicemente connesso, quindi non possiamo concludere immediatemente che $\mathbf{F}$ è conservativo. Consideriamo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definita da $\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$, così che γ è chiusa, il suo sostegno è contenuto in X e "gira intorno" all'asse z[1]. Il lavoro del campo lungo γ è

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}, \gamma) = \int_0^{2\pi} \langle \mathbf{F}(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} -1 \, \mathrm{d}t = -2\pi,$$

da cui concludiamo che il campo vettoriale $\mathbf{F}$ non è conservativo su X.

Esercizio 4. Calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2x}{x^2+(y-1)^2} \\ -\frac{2(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (\sin \frac{t}{2}, \sin t)$.

Soluzione. Si osserva immediatamente che il campo vettoriale è conservativo sul suo dominio naturale $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 1)\}$, con potenziale $f(x, y) = \log(x^2 + (y-1)^2)$. Così

$$\mathcal{L}(\mathbf{F}, \gamma) = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0)) = f(1, 0) - f(0, 0) = \log 2.$$

Esercizio 5. Calcolare il lavoro del campo di vettori

$$\mathbf{F}(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{x-y}{x^2+y^2} \\ -\frac{x+y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

lungo la curva $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = (2\cos t, 2 + \sin t)$.

Soluzione. Il campo $\mathbf{F}$ ha come dominio naturale $X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ed è irrotazionale. La curva γ è una curva chiusa e affermiamo che il suo sostegno racchiude una regione di piano che non contiene il punto $(0, 0)$. Infatti $1 \le 2 + \sin t \le 3$ per $0 \le t \le 2\pi$. La restrizione di $\mathbf{F}$ ad un insieme aperto e connesso $X' \subset X$ non contenente l'origine e contenente il sostegno di γ è un campo vettoriale definito su un insieme semplicemente connesso. Dunque $\mathbf{F}$ è conservativo su X' e il lavoro di $\mathbf{F}$ lungo γ è pertanto nullo.

[1] La curva γ ha come sostegno la circonferenza del piano $\{z = 0\}$, di centro $(0, 0, 0)$ e raggio 1.