

Nome e cognome: \_\_\_\_\_

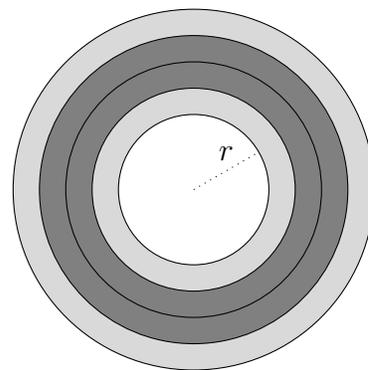
Classe: \_\_\_\_\_

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"  
Prova scritta di matematica

**Esercizio 1 (25 punti).** Semplificare le seguenti espressioni, utilizzando ove possibile i prodotti notevoli. Se possibile, scrivere il risultato come prodotto di polinomi.

- (a)  $ab^3 - ab [(ab - a^2)(3ab + b^2) - 3ab (\frac{1}{3}b^2 + 3ab - a^2)] - 2a(a^2b^3 - 1)$
- (b)  $(a - 2b)^2(a + 2b)^2 - (a^2 - ab - b^2)(a^2 - ab + b^2) + 9(-ab - b^2)(-ab + b^2)$
- (c)  $(2a^2 - \frac{1}{2}b^2)^3 + (2a^2 + \frac{1}{2}b^2)^3 - 12a^2(2a^2 - \frac{1}{2}b^2)(-2a^2 - \frac{1}{2}b^2)$
- (d)  $(a^{n+1} - a^n)^2 - (a^{n+1} + a^n)^2 + (a^{2n} + 2a)^2 - (a^n)^4$
- (e)  $(x^3 - x^2 - 1)^2 - (x^3 + x^2 + 1)^2 - 4x^3(x - 1)(x + 1)$

**Esercizio 2 (8 punti).** La figura a fianco è costituita da un cerchio centrale di raggio  $r$  e da quattro corone concentriche, ciascuna spessa 1. Calcolare l'area della regione colorata in chiaro e l'area della regione colorata in scuro. Cosa si osserva?



**Esercizio 3 (10 punti).**

- (a) Sia  $p(x)$  un polinomio in  $\mathbb{R}[x]$  e sia  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Cosa significa valutare  $p$  in  $x = \alpha$ ?
- (b) Valutare il polinomio  $p(x) = 3x^3 + 5x^2 - 2x + 4$  in  $x = 1$ .
- (c) Valutare un polinomio in  $x = 1$  dà come risultato la somma dei coefficienti del polinomio. Dire se la precedente affermazione è vera o no, giustificando opportunamente la risposta.
- (d) Si consideri il polinomio  $(5x^5 + 3x - 1)^{2022}$ . Qual è la somma dei coefficienti del polinomio? Qual è il suo grado?

**Esercizio 4 (12 punti).**

- (a) Dare la definizione di *coefficiente binomiale* e spiegare cosa significa che i coefficienti binomiali sono simmetrici.
- (b) Scrivere la formula del binomio di Newton per lo sviluppo di  $(A + B)^8$  e calcolare esplicitamente il coefficiente del monomio  $A^2B^6$  in tale sviluppo.
- (c) Calcolare il coefficiente di  $a^2b^6$  nello sviluppo di  $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}a + \frac{1}{\sqrt[3]{4}}b\right)^8$ .
- (d) Calcolare il coefficiente del monomio  $a^6b^{28}$  nello sviluppo di  $(2a^2 + b^4)^{10}$ .

**Esercizio 5 (8 punti).** Dimostrare che il prodotto tra un numero pari e la differenza fra i quadrati dei due successivi numeri dispari è un multiplo di 32.

**Esercizio 6 (7 punti).** Si consideri un numero di due cifre e il numero che si ottiene invertendo la cifra delle unità con quella delle decine. Dimostrare che la differenza dei loro quadrati è multipla di 99.

**Esercizio 7 (10 punti).** In giro da ore sotto il sole cocente, 7 amici vedono in lontananza una panchina sufficientemente lunga da poterli accogliere tutti. Nel tragitto che li separa dalla panchina decidono di ingannare il tempo risolvendo qualche problema di combinatoria.

- (a) Come prima cosa vogliono sapere quanti sono i modi che hanno di sedersi sulla panchina. Qual è la risposta a questa domanda?
- (b) Nel gruppo c'è l'egocentrico Alessio, che dichiara di volersi sedere esattamente al centro. Con questo vincolo, quanti sono i modi possibili di sedersi sulla panchina?
- (c) Quando i 7 amici arrivano alla panchina si accorgono di essere stati ingannati da un miraggio: la panchina può in realtà ospitare soltanto 4 persone. In quanti modi possono sedersi?
- (d) Finito di rispondere ai problemi di combinatoria i 7 amici decidono di mandare 2 persone a prendere da mangiare. In quanti modi possono sceglierle?

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7

Voto: \_\_\_\_\_