

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (5 punti). Determinare il campo di esistenza delle seguenti frazioni algebriche e poi ridurle ai minimi termini:

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^4 - 16}, \quad \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - x^2 - x - 2}, \quad \frac{x^4 + 2x^2y^2 + y^4}{x^3y + xy^3}.$$

Esercizio 2 (15 punti). Determinare il campo di esistenza e semplificare la seguente espressione ad un'unica frazione algebrica ridotta ai minimi termini:

$$\left[\left(\frac{1}{2a-1} - \frac{a}{4a^2-1} - \frac{a}{4a^2-4a+1} \right) \cdot \left(4 - \frac{1}{a^2} \right) \right] : \frac{a+1}{2a-1}.$$

Esercizio 3 (15 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti equazioni:

(a) $\frac{2}{x^2 - 4x} - \frac{3}{x^2 - 2x - 8} = \frac{2}{x^2 + 2x}$

(b) $\frac{1}{x^2 - 12x + 32} = \frac{2x}{x^2 - 16} - \frac{1}{x + 4}$

Esercizio 4 (10 punti). Si consideri la famiglia di equazioni

$$\frac{2a}{x-1} + \frac{1-2a}{x} = \frac{2-ax}{x^2-x} \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

Discutere l'esistenza di soluzioni al variare di a .

Esercizio 5 (10 punti). Risolvere in \mathbb{R} le seguenti disequazioni:

(a) $\frac{1}{x^2+x} - \frac{1}{x+1} \geq \frac{2}{x}$

(b) $\frac{(x-3)^{20}}{x(x-2)^5} \leq 0$

Esercizio 6 (10 punti). Risolvere in \mathbb{R} il seguente sistema di disequazioni:

$$\begin{cases} x^3 - x^2 - 4x + 4 < 0 \\ \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^2 - 2x} \leq 0 \end{cases} .$$

Esercizio 7 (10 punti). Si consideri il polinomio di secondo grado

$$p(x) = 4x^2 - 12x + 13.$$

- (a) Dimostrare che $p(x)$ non si annulla per nessun valore di $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Dimostrare che $p(x)$ ha segno positivo per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 8 (5 punti). Siano a, b, c tre numeri reali tali che $a + b + c = 1$ e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Dimostrare che allora vale

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1.$$

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6	Es. 7	Es. 8

Voto: _____