

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"  
Prova scritta di matematica

## PARTE I

**Esercizio 1 (15 punti).** Si consideri la famiglia di equazioni

$$(k - 2)x^2 - 4x + k - 2 = 0, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} \text{ e } k \neq 2.$$

Determinare i valori di  $k$  per i quali la corrispondente equazione

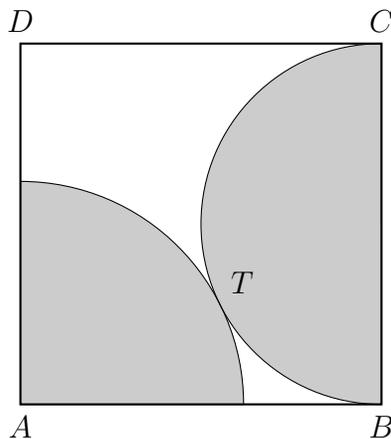
- (a) ha soluzioni reali;
- (b) ha soluzioni reali che hanno somma uguale a 4;
- (c) ha soluzioni reali la cui somma e il cui prodotto coincidono;
- (d) ha soluzioni reali positive;
- (e) ha soluzioni reali  $x_1$  e  $x_2$  tali che  $x_1^2 + x_2^2 = 7$ .

Consideriamo la famiglia di funzioni  $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $f_k(x) = (k - 2)x^2 - 4x + k - 2$ .

- (f) Tracciare il grafico di  $f_k$  per  $k = 6$ , dopo averne determinato gli elementi significativi.
- (g) Determinare per quali  $k$  il grafico di  $f_k$  non interseca l'asse delle ascisse.

**Esercizio 2 (10 punti).** Sia  $ABCD$  un quadrato di lato  $a$  e si consideri il semicerchio di diametro  $BC$  interno al quadrato. Si consideri infine il quadrante circolare di centro  $A$  e tangente al semicerchio, e sia  $T$  il punto di tangenza.

- (a) Dimostrare che  $A$ ,  $T$  e il punto medio di  $BC$  sono allineati.
- (b) Determinare il raggio del quadrante circolare.



PARTE II

**Esercizio 3 (15 punti).** Risolvere in  $\mathbb{R}$  le seguenti equazioni, specificando la molteplicità delle soluzioni:

(a)  $x^7 + 2x^6 - 3x^5 - 8x^4 - 4x^3 = 0$

(b)  $x^4 - 4x^3 + x^2 + 12x - 12 = 0$

(c)  $\frac{1}{2x-2} - \frac{1}{2x+2} + x^2 - 3 = \frac{1}{x^2-1}$

**Esercizio 4 (10 punti).** Discutere il numero di soluzioni (contate con molteplicità) dell'equazione

$$x^4 + (a-3)x^3 - 4ax^2 + 3ax = 0 \quad \text{con } a \in \mathbb{R}.$$

PARTE III

**Esercizio 5 (20 punti).** Risolvere in  $\mathbb{R}$  le seguenti disequazioni:

(a)  $\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} \geq 0$

(b)  $\frac{4-x^2}{2x^2+3x-5} \leq 0$

(c)  $\frac{(x^2-4x)^3(x^2-1)^2}{7x^2+2x+1} \geq 0$

**Esercizio 6 (10 punti).** Risolvere il sistema di disequazioni

$$\begin{cases} (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) \geq (2x - 1)(x + 3) \\ x^3 + 5x^2 + 8x + 4 < 0 \end{cases}.$$

*La prova è suddivisa in tre parti, di due esercizi ciascuna. La valutazione delle prova è sufficiente se e solo se ciascuna delle parti lo è.*

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: \_\_\_\_\_