

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (20 punti). Si consideri la funzione reale di variabile reale data da

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}.$$

- (a) Determinare il dominio naturale e l'immagine di f .
- (b) Dimostrare che f non è iniettiva.
- (c) Determinare le restrizioni massimali su cui f è invertibile e, per ciascuna di esse, determinare la funzione inversa.

Esercizio 2 (10 punti). Si consideri la funzione reale di variabile reale data da

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}}.$$

- (a) Determinare il dominio naturale e l'immagine di f .
- (b) Dimostrare che f è invertibile e determinare la funzione inversa.

Esercizio 3 (20 punti). Rispondere ai seguenti quesiti, giustificando opportunamente le risposte date.

- (a) Le funzioni date da $f(x) = x^3$ e $g(x) = \left(\frac{1}{x^3}\right)^{-1}$ sono uguali? Tracciare il grafico di g .
- (b) Sia $d : \mathbb{R}^2 \rightarrow [0, +\infty)$ la funzione che ad ogni punto del piano cartesiano associa la sua distanza dall'origine. Dire se d è iniettiva.
- (c) Siano $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow Z$ due funzioni. Dimostrare che se f e g sono surgettive allora $g \circ f$ è surgettiva. Vale anche il viceversa?
- (d) Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione invertibile. Se $f(5) = 1$, quanto vale $f^{-1}(1)$?
- (e) Sia $X \subseteq \mathbb{R}$ un insieme simmetrico rispetto allo 0 e siano $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni. Se f è pari dimostrare che la funzione $g \circ f$ è pari.
- (f) Consideriamo la funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ data da $f(x) = [x]$, dove $[x]$ è definita come il più grande numero intero $\leq x$ (*parte intera* di x). Dire se f è iniettiva e tracciare il suo grafico.

Esercizio 4 (15 punti). Si consideri la funzione reale di variabile reale data da

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - x + 1.$$

- (a) Determinare il dominio naturale di f .
- (b) Studiare il segno di f e rappresentarlo sul piano cartesiano.
- (c) Una volta determinati tutti gli elementi necessari, tracciare un grafico di f che sia con essi compatibile.

Esercizio 5 (5 punti + 🧑). Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione qualsiasi.

- (a) Sia $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Dimostrare che p è pari.
- (b) Sia $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione $d(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$. Dimostrare che d è dispari.
- (🧑) Dimostrare che ogni funzione $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ può essere scritta come somma di una funzione pari e di una funzione dispari.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5

Voto: _____