

Nome e cognome: _____

Classe: _____

Liceo Scientifico "A. Vallisneri"
Prova scritta di matematica

Esercizio 1 (36 punti). Semplificare le seguenti espressioni, utilizzando ove possibile i prodotti notevoli.

(a) $(x^2 - y^2)(x^4 + y^4 + x^2y^2)(x + 1) - x^2(x^5 + x^4 + 1) + y^2(y^4 + xy^4 + 1)$

(b) $(a - 4b)^2 - 2(a - 4b)(a + 4b) - 4(a - 2b)^2 - 6(6b^2 - a^2) + 4b^2$

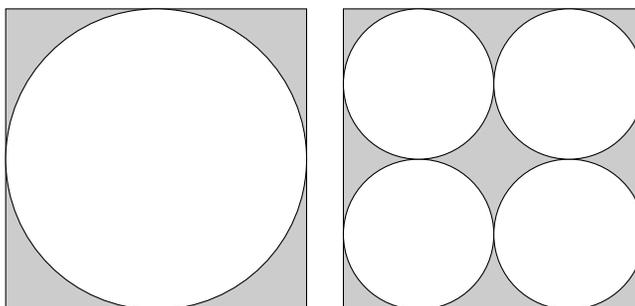
(c) $3(2a - 3) - (a - 2)^3 + (a + 1)^3 - \left[\left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - \left(a + \frac{1}{2} \right)^2 \right]^2 - a(a + 13)$

(d) $\frac{1}{4}(2a - b - 2c)^2 - \frac{3}{4}(2a + b - 2c)(2a - b + 2c) - \left(\frac{1}{2}a - b - 2c \right)^2 + \left(-\frac{3}{2}a \right)^2$

(e) $(\sqrt{2}a - 1)(\sqrt{2}a + 1) + (a + 1)^2(a - 1)^2 - (-a)^2$

(f) $(x^n - x^2)^2 + 2x^n(x + 2)(x - 2) - (x^n - 1)(x^n + 9)$

Esercizio 2 (5 punti). Le figure mostrate sotto sono costituite da un quadrato di lato ℓ e da dei cerchi. Calcolare in funzione di ℓ l'area della regione colorata in ciascuna delle due figure. Cosa si osserva?



Esercizio 3 (10 punti).

(a) Calcolare il coefficiente di A^2B^6 e di A^5B^3 nello sviluppo di $(A + B)^8$, sia usando il triangolo di Tartaglia sia usando la formula per i coefficienti della potenza di un binomio.

(b) Calcolare il coefficiente dei monomi a^6b^{12} e $a^{15}b^6$ nello sviluppo di $\left(\frac{1}{2}a^3 - b^2 \right)^8$.

Esercizio 4 (11 punti + 🏆). Un polinomio in $\mathbb{Z}[x]$ si dice *pigro* se può avere come coefficienti solo 0 e 1.

(a) Dire quali dei seguenti polinomi sono pigri:

$$x^2 + 1, \quad x^3 - x + 1, \quad x, \quad x^4 + x^3 + x + 1, \quad -x^2 + x - 1, \quad x^3 + x + 1.$$

- (b) Scrivere tutti i polinomi pigri di grado 0, di grado 1, di grado 2 e di grado 3.
- (c) Per ogni $n \geq 0$, esiste almeno un polinomio pigro di grado n . Dire se l'affermazione è vera o falsa, giustificando opportunamente la risposta.
- (d) La somma di due polinomi pigri è un polinomio pigro? E il prodotto? Giustificare adeguatamente la risposta.
- (e) Preparare una tabella con tre colonne. Per ciascuno dei polinomi pigri del punto (a): scrivere nella prima colonna il polinomio, nella seconda colonna la stringa dei suoi coefficienti (compresi gli 0), e nella terza colonna la valutazione del polinomio in $x = 2$. Che legame c'è fra la seconda e la terza colonna? Cosa accade quindi in generale valutando un polinomio pigro in $x = 2$?
- (🏆) Basandosi sul punto (b), formulare una congettura su quanti sono i polinomi pigri di grado n . Poi dimostrarla.

Esercizio 5 (9 punti). Provare che il prodotto di tre numeri naturali consecutivi aumentato del numero intermedio è un cubo perfetto.

Esercizio 6 (9 punti). Si considerino un numero naturale di tre cifre e il numero che si ottiene scrivendo le cifre del primo numero in ordine inverso. Dimostrare che la differenza tra i due numeri è multipla di 99.

Es. 1	Es. 2	Es. 3	Es. 4	Es. 5	Es. 6

Voto: _____