Esercizi del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”

Giada Franz

26 maggio 2015

Sommario

Raccolgo con questo documento alcuni esercizi da me risolti del corso di “Ultrafiltri e metodi non standard”, tenuto dal professor Di Nasso durante il secondo semestre dell’anno 2014-2015 alla facoltà di matematica a Pisa.

Indice

1 Ultrafiltri e corrispondenza con ideali **2**

2 Δ-set e Δ_f-set **4**

3 Il teorema dei 3 colori **5**

4 Pre-ordine di Rudin-Keisler **7**

5 Somma di ultrafiltri e ultrafiltri idempotenti **9**

6 Pre-ordine di immergibilità finita **11**

7 Caratterizzazioni non standard **13**

1 Ultrafiltri e corrispondenza con ideali

Teorema 1.1. *Sia $\mathscr{F}$ un filtro su I, allora le seguenti proposizioni sono equivalenti:*

1. *Se $A^c \notin \mathscr{F}$, allora $A \in \mathscr{F}$.*
2. *Se $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$, allora esiste i tale che $A_i \in \mathscr{F}$.*
3. *$\mathscr{F}$ è massimale rispetto all'inclusione.*

Dimostrazione. **1 $\implies$ 2** Supponiamo per assurdo di avere $A_1 \cup \ldots \cup A_n \in \mathscr{F}$ e $A_i \notin \mathscr{F}$ per ogni i. Allora, per quanto assunto, vale che $A_i^c \in \mathscr{F}$ per ogni i. Perciò abbiamo che $(A_1 \cup \ldots \cup A_n)^c = A_1^c \cap \ldots \cap A_n^c \in \mathscr{F}$ ($\mathscr{F}$ è chiuso per intersezioni finite), ma questo è assurdo perché in un filtro non ci possono stare sia un insieme e che il suo complementare.

2 $\implies$ 3 Sia $\tilde{\mathscr{F}}$ un filtro contenente $\mathscr{F}$ e sia $A \in \tilde{\mathscr{F}}$. Dato che $A \cup A^c = I \in \mathscr{F}$, uno fra A e A^c appartiene ad $\mathscr{F}$. Ma A^c non appartiene ad $\tilde{\mathscr{F}}$, perché un filtro non può contenere un insieme e il suo complementare, quindi A^c non appartiene ad $\mathscr{F} \subseteq \tilde{\mathscr{F}}$; di conseguenza A appartiene ad $\mathscr{F}$. Abbiamo quindi dimostrato che $\mathscr{F} = \tilde{\mathscr{F}}$ e perciò $\mathscr{F}$ è massimale.

3 $\implies$ 1 Supponiamo per assurdo che esista A tale che $A, A^c \notin \mathscr{F}$. Vogliamo mostrare innanzitutto che uno fra A e A^c ha intersezione non vuota con ogni elemento di $\mathscr{F}$. Supponiamo che ciò non sia vero ed esistano quindi $B, C \in \mathscr{F}$ tali che $A \cap B = \emptyset$ e $A^c \cap C = \emptyset$. Ciò però è assurdo in quanto otterrei che $B \cap C = \emptyset \in \mathscr{F}$.

Senza perdità di generalità abbiamo quindi che $A \cap B \neq \emptyset$ per ogni $B \in \mathscr{F}$. Considerò perciò l'insieme $\tilde{\mathscr{F}} = \mathscr{F} \cup \{B \in \mathcal{P}(I) \mid A \subseteq B\} \cup \{A \cap B \mid B \in \mathscr{F}\}$. Verifichiamo che $\tilde{\mathscr{F}}$ sia un filtro. Sia $C \in \mathcal{P}(I)$ che contiene un elemento di $\tilde{\mathscr{F}}$, vogliamo dire che $C \in \tilde{\mathscr{F}}$. L'unico caso non ovvio è quando C contiene un elemento della forma $A \cap B$ con $B \in \mathscr{F}$. In tal caso però $C \cup A, C \cup B \in \tilde{\mathscr{F}}$ (perché $C \cup A \supseteq A \in \{B \in \mathcal{P}(I) \mid A \subseteq B\}$ e $C \cup B \supseteq B \in \mathscr{F}$, che sono banalmente chiusi per sovrainsiemi) e perciò $C = C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B) \in \tilde{\mathscr{F}}$. Ci manca da verificare che $\tilde{\mathscr{F}}$ sia chiuso per intersezione. Ancora una volta l'unico caso non banale è verificare che l'intersezione di due elementi $A \cap B, A \cap C$ con $B, C \in \mathscr{F}$ stia ancora in $\tilde{\mathscr{F}}$. Questo però è vero perché $(A \cap B) \cap (A \cap C) = A \cap (B \cap C)$, che sta in $\tilde{\mathscr{F}}$ perché $B \cap C \in \mathscr{F}$.

Abbiamo quindi mostrato che $\tilde{\mathscr{F}}$ è un filtro contenente strettamente $\mathscr{F}$, ma ciò è assurdo per l'ipotesi di massimalità di $\mathscr{F}$.

□

Definizione 1.2. Se un filtro rispetta una delle tre proprietà equivalenti del Teorema 1.1 viene detto ultrafiltro.

Proposizione 1.3. *C'è una corrispondenza biunivoca fra i filtri su I e gli ideali di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$ con $\mathbb{K}$ campo. Tale corrispondenza definisce anche una bigezione fra gli ultrafiltri e gli ideali massimali.*

Dimostrazione. Consideriamo innanzitutto l'applicazione f che associa ad un filtro $\mathscr{F}$ il sottoinsieme di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$ dato da $M = \{\varphi \in \mathrm{Fun}(I, \mathbb{K}) \mid \ker(\varphi) \in \mathscr{F}\}$. Vogliamo verificare che M è un ideale di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$.

Siano $\varphi, \psi \in M$, allora $\ker(\varphi + \psi) \supseteq \ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$; perciò, dato che $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi) \in \mathscr{F}$ ed $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi, $\ker(\varphi + \psi) \in \mathscr{F}$ e quindi $\varphi + \psi \in M$.

Siano ora $\varphi \in M$ e $\psi \in \mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$, allora vale che $\ker(\psi \cdot \varphi) \supseteq \ker(\varphi)$ e quindi analogamente a prima, visto che $\ker(\varphi) \in \mathscr{F}$, abbiamo che $\ker(\psi \cdot \varphi) \in \mathscr{F}$ e perciò $\psi \cdot \varphi \in M$.

Abbiamo quindi dimostrato che M è un ideale di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$, in quando è chiuso rispetto alla somma e al prodotto per un elemento dell'anello.

Consideriamo ora invece l'applicazione g che associa ad un ideale M di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$ l'insieme $\mathscr{F} = \{\ker(\varphi) \mid \varphi \in M\} \subseteq \mathcal{P}(I)$. Vogliamo dimostrare che $\mathscr{F}$ è un filtro su I.

Innanzitutto mostriamo che $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi. Sia $\varphi \in M$ e sia $A \in \mathcal{P}(I)$ tale che $A \supseteq \ker(\varphi)$, consideriamo $\psi \in \mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$ l'applicazione data da $\psi(x) = 0$ se $x \in A$ e $\psi(x) = 1$ altrimenti. Abbiamo allora che $\psi \cdot \varphi \in M$, poichè M è un ideale, e inoltre $\ker(\psi \cdot \varphi) = A$, quindi $A \in \mathscr{F}$.

Dimostriamo ora invece che $\mathscr{F}$ è chiuso per intersezione. Visto che M è chiuso per moltiplicazione per un elemento dell'anello, dati $\varphi \in M$ e $k \in \mathbb{K}^*$ esiste $\tilde{\varphi} \in M$ tale che $\ker(\tilde{\varphi}) = \ker(\varphi)$ e $\tilde{\varphi}(x) = k$ se

$x \notin \ker(\varphi)$. Basta infatti moltiplicare φ per la funzione ψ definita come

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 \text{ se } x \in \ker(\varphi) \\ k \cdot (\varphi(x))^{-1} \text{ se } x \notin \ker(\varphi) \end{cases} .$$

Siano quindi $A, B \in \mathscr{F}$ e $\varphi, \psi \in M$ tali che $\ker(\varphi) = A$ e $\ker(\psi) = B$. Distinguiamo ora due casi:

- Se $\mathbb{K} \neq \mathbb{F}_2$, esistono $k_1, k_2 \in \mathbb{K}$ tali che $k_1 + k_2 \neq 0$. Inoltre per quanto detto precedentemente esistono $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi} \in M$, con gli stessi ker di φ e ψ e uguali a k_1 e k_2 altrove rispettivamente. Vale perciò facilmente che $\ker(\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) = \ker(\tilde{\varphi}) \cap \ker(\tilde{\psi}) = A \cap B$. Da cui perciò $\mathscr{F}$ è chiuso per intersezione, poichè $\ker(\tilde{\varphi} + \tilde{\psi}) \in \mathscr{F}$.

- Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$, consideriamo la funzione $\varphi + \psi + \varphi \cdot \psi$. Tale funzione si annulla in $\ker(\varphi) \cap \ker(\psi)$ e vale 1 altrove (è un semplice controllo sfruttando che se $\mathbb{K} = \mathbb{F}_2$ le funzioni valgono 0 o 1).

Abbiamo perciò dimostrato che f e g inducono delle funzioni:

$$f : \{\text{filtri su } I\} \to \{\text{ideali di } \mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})\}$$
$$g : \{\text{ideali di } \mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})\} \to \{\text{filtri su } I\}$$

Vale inoltre molto facilmente che $f \circ g$ e $g \circ f$ sono l'identità sui rispettivi insiemi, quindi otteniamo che f, g sono corrispondenze biunivoche.

Inoltre, per quanto dimostrato nel Teorema 1.1, gli ultrafiltri corrispondono ai filtri massimali rispetto all'inclusione e quindi tramite la funzione f vengono mappati negli ideali massimali di $\mathrm{Fun}(I, \mathbb{K})$. Tale corrispondenza è biunivoca in quando un ideale massimale, tramite g, viene mandato a sua volta in un elemento massimale dell'insieme dei filtri, cioè in un ultrafiltro. $\square$

2 Δ-set e Δ_f-set

Definizione 2.1. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice Δ-set se esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$, dove $\Delta(H) = \{h' - h \mid h' > h \in H\}$.

Definizione 2.2. Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{N}$ si dice Δ_f-set se per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ tale che $|H| = m$ e $\Delta(H) \subseteq A$.

Nota 2.3. È immediato notare che la famiglia dei Δ_f-set contiene quella dei Δ-set. Il contenimento è però stretto in quanto esistono sottoinsiemi $A \subseteq \mathbb{N}$ che sono Δ_f-set ma non sono Δ-set.

Dimostrazione. Consideriamo il sottoinsieme $A = \cup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \mathbb{N}$, dove $A_n = \{k_n, 2k_n, \ldots, nk_n\}$ e (k_n) è una successione di numeri naturali tali che $k_{n+1} > 2nk_n$. Notiamo innanzitutto che gli A_n sono a due a due disgiunti per costruzione. Vogliamo dimostrare che A è un Δ_f-set ma non è un Δ-set.

È facile mostrare che A è un Δ_f-set, infatti dato $H = \{a, a + k_m, \ldots, a + mk_m\}$ con $a \in \mathbb{N}$ si ha che $\Delta(H) = \{k_m, \ldots, mk_m\} = A_m \subseteq A$, per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Supponiamo ora invece che esista $H = \{h_1 < h_2 < \ldots\}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq A$. Poiché la successione $(h_m - h_2)_{m \in \mathbb{N}}$ è strettamente crescente, esiste sicuramente m abbastanza grande tale che $h_m - h_2$ e $h_2 - h_1$ appartengono a due A_n diversi, cioè $h_m - h_2 = ak_i$ e $h_2 - h_1 = bk_j$ con $a, b, i, j \in \mathbb{N}$ e $i > j$, $1 \leq a \leq i, 1 \leq b \leq j$. Deve valere inoltre che $(h_m - h_2) + (h_2 - h_1) = h_m - h_1$ appartiene ad A, ma ciò è impossibile perché $ak_i < ak_i + bk_j < (a + 1)k_i \leq k_{i+1}$ e quindi $ak_i + bk_j$ non appartiene a nessun A_n. □

Nota 2.4. Esistono sottoinsiemi infiniti $A \subseteq \mathbb{N}$ che non sono Δ_f-set.

Dimostrazione. Consideriamo il sottoinsieme A di $\mathbb{N}$ formato dalle potenze di 2; vogliamo mostrare che A non è un Δ_f-set. Supponiamo invece che lo sia, allora esiste $H = \{h_1 < h_2 < h_3 < h_4\} \subseteq \mathbb{N}$ tale che $\Delta(H) \subseteq A$; perciò in particolare $h_2 - h_1 = 2^a$, $h_3 - h_2 = 2^b$, $h_4 - h_2 = 2^c$. Vale quindi che $2^a + 2^b = (h_3 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_3 - h_1 \in A$ e $2^a + 2^c = (h_4 - h_2) + (h_2 - h_1) = h_4 - h_1 \in A$, però sicuramente uno fra $2^a + 2^b$ e $2^a + 2^c$ non è una potenza di 2 e ciò porta ad un assurdo. □

Enunciamo ora una versione leggermente generalizzata del lemma di Ramsey, che al posto di considerare come insieme di partenza $\mathbb{N}$ considera un generico insieme X infinito. Questa nuova versione si ottiene da quella classica semplicemente considerando una copia di $\mathbb{N}$ in X e applicando Ramsey su di lei.

Lemma 2.5 (Ramsey generalizzato, versione infinita)**.** *Dato X insieme infinito e $[X]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$, esiste $H \subseteq X$ infinito ed esiste i tale che $[H]^k \subseteq C_i$.*

Lemma 2.6 (Ramsey generalizzato, versione finita)**.** *Dato X insieme infinito, per ogni $k, r, m \in \mathbb{N}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che per ogni $Y \subseteq X$ con $|Y| = n$, se $[Y]^k = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ esiste $H \subseteq X$ con $|H| = m$ ed esiste i tale che $[H]^k \subseteq C_i$.*

Proposizione 2.7. *Le famiglie dei Δ-set e dei Δ_f-set sono regolari per partizioni.*

Dimostrazione. La dimostrazione ricalca quella del teorema delle distanze in versione infinita e finita rispettivamente.

Sia X un Δ-set e $X = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ una partizione di X, vogliamo dimostrare che esiste i tale che C_i è un Δ-set. Per definizione di Δ-set esiste $H \subseteq \mathbb{N}$ infinito tale che $\Delta(H) \subseteq X$. Possiamo allora partizionare $[H]^2$ nel seguente modo: $[H]^2 = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_r$ con $D_i = \{\{n, m\} \in [H]^2 \mid m > n \wedge m - n \in C_i\}$.

Per il Lemma 2.5 (Ramsey generalizzato, versione infinita) su H esiste $K \subseteq H$ infinito ed esiste i tali che $[K]^2 \subseteq D_i$. Questo vuol dire che $\Delta(K) = \{k' - k \mid k' > k \in K\} \subseteq C_i$ e perciò C_i è un Δ-set.

Dimostriamo ora invece la regolarità per partizioni dei Δ_f-set. Sia X un Δ_f-set e $X = C_1 \sqcup \ldots \sqcup C_r$ una sua partizione. Analogamente a prima vogliamo mostrare che uno dei C_i è un Δ_f-set.

Per il Lemma 2.6 (Ramsey generalizzato, versione finita), per ogni $m \in \mathbb{N}$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che preso un qualsiasi $H \subseteq \mathbb{N}$ con $|H| = n$ e $[H]^2 = D_1 \sqcup \ldots \sqcup D_r$, esiste $K \subseteq H$ con $|K| = m$ e tale che $[K]^2 \subseteq D_i$ per un qualche i. Poiché X è un Δ_f-set possiamo scegliere H di cardinalità n tale che $\Delta(H) \subseteq X$ e possiamo considerare $D_i = \{\{n, m\} \in [H]^2 \mid m > n \wedge m - n \in C_i\}$ come partizione di $[H]^2$. Allora per quando detto esiste $K \subseteq H$ con $|K| = m$ e tale che $[K]^2 \subseteq D_i$, ma ciò analogamente a prima implica che $\Delta(K) \subseteq D_i$ e quindi C_i è un Δ_f-set. □

3 Il teorema dei 3 colori

Proponiamo qui di seguito due dimostriamo del teorema dei 3-colori.

Teorema 3.1 (3 colori)**.** *Sia $f : X \to X$ una funzione senza punti fissi, allora la famiglia $\mathcal{F} = \{\{x, f(x)\} \mid x \in X\}$ non è 3-regolare su X.*

Definizione 3.2. Chiamiamo *buona* una 3-colorazione di un sottoinsieme Y di X se y ed $f(y)$ hanno colori diversi per ogni $y \in Y$ tale che $f(y) \in Y$.

Nota 3.3. Risulta immediato dalla definizione che $\mathcal{F} = \{\{x, f(x)\} \mid x \in X\}$ non è 3-regolare su X se e solo se X ammette una 3-colorazione *buona*. Quindi per dimostrare il Teorema 3.1 (3 colori), ci basta trovare una 3-colorazione *buona* per X.

Nota 3.4. Analogamente notiamo inoltre che $\mathcal{F}$ non è 3-regolare su un sottoinsieme $Y \subseteq X$ se e solo se Y ammette una 3-colorazione *buona*.

La prima dimostrazione che riportiamo del Teorema 3.1 (3 colori) si avvale di metodi classici della combinatoria e costruisce una 3-colorazione *buona* di X utilizzando il lemma di Zorn.

Dimostrazione 1. Sia Σ la famiglia dei sottoinsiemi Y di X chiusi rispetto a f e non 3-regolari, associati ad una loro 3-colorazione *buona*. Poniamo inoltre su Σ la relazione d'ordine tale che $Y_1 \leq Y_2$ se $Y_1 \subseteq Y_2$ e la 3-colorazione di Y_2 ristretta ad Y_1 coincide con la 3-colorazione di quest'ultimo.

Mostriamo che $(\Sigma, \leq)$ è un insieme induttivo. Prendiamo una catena $\{Y_i\}_{i\in I} \subseteq \Sigma$ e consideriamo $Y = \cup_i Y_i$ con la 3-colorazione indotta dagli Y_i, cioè $y \in Y$ ha il colore C se esiste $i \in I$ tale che y ha il colore C in Y_i. Tale colorazione è ben definita perché se y ha colore C in Y_i, ha colore C in tutti gli Y_j tali che $y \in Y_j$, dato che $\{Y_i\}_{i\in I}$ è una catena. Dato ora $y \in Y$ esiste $i \in I$ tale che $y \in Y_i$, ma allora $f(y) \in Y_i \subseteq Y$, visto che Y_i è chiuso rispetto ad f. Inoltre y ed $f(y)$ hanno colori diversi in Y_i e quindi anche in Y. Perciò Y è chiuso rispetto ad f e associato ad una 3-colorazione *buona*, perciò appartiene a Σ e banalmente maggiora tutti gli Y_i.

Abbiamo quindi mostrato che $(\Sigma, \leq)$ è induttivo, inoltre non è vuoto in quanto contiene il sottoinsieme vuoto; di conseguenza per il lemma di Zorn esiste un elemento $M \in \Sigma$ massimale rispetto all'inclusione. Supponiamo che M non sia tutto X; esiste quindi $x \in X \setminus M$. Consideriamo allora $Z = \{z \in X \mid \exists n \in \mathbb{N}\ z = f^{(n)}(x)\}$ l'insieme di tutti gli elementi di X raggiungibili da x applicando f un numero finito di volte. Allora banalmente $M \cup Z$ è chiuso rispetto ad f, vogliamo mostrare che ammette anche una 3-colorazione *buona* che estende quella di M, contraddicendo l'ipotesi di massimalità e mostrando quindi $M = X$, che è proprio quello che volevamo.

È molto facile osservare che Z o è un ciclo di lunghezza finita che non interseca M, o è una catena che dopo un numero finito di elementi interseca M e vi rimane poi sempre contenuta (M è chiuso rispetto ad f), oppure è una catena infinita che non interseca M. Distinguiamo quindi 3 casi:

- Se Z è un ciclo di lunghezza finita, possiamo facilmente colorarlo con al più 3 colori. Da cui risulta che $M \cup Z$ ammette una 3-colorazione *buona* perché M e Z sono disgiunti.

- Se Z è una catena contenuta in M da un certo punto in poi, riusciamo anche qui facilmente a colorare $Z \setminus M$ alternando due colori e al più usando il terzo colore per aggiustare l'intersezione con M.

- Se Z è una catena infinita che non interseca M la coloriamo alternando due colori.

Da tutti e tre i casi risulta quindi facilmente che $M \cup Z$ ammette una 3-colorazione *buona*, da cui la tesi per quanto detto precedentemente. □

Per la seconda dimostrazione sfrutteremo gli ultrafiltri attraverso il seguente teorema di compattezza combinatoria dimostrato a lezione.

Teorema 3.5 (compattezza combinatoria)**.** *Data una famiglia di insiemi finiti $\mathscr{A}$ che è r-regolare su X, esiste un sottoinsieme finito Y di X tale che $\mathscr{A}$ è r-regolare su Y.*

L'idea sarà utilizzare tale teorema per restringere il problema ad un insieme finito, sul quale possiamo dimostrare il teorema dei 3-colori il modo molto semplice e immmediato.

Dimostrazione 2. Supponiamo per assurdo che la famiglia $\mathcal{F}$ sia 3-regolare su X, allora per il Teorema 3.5 (compattezza combinatoria) esiste un sottoinsieme finito Y di X tale che $\mathcal{F}$ è 3-regolare su Y.

Dimostriamo però ora che dato un sottoinsieme finito $Y \subseteq X$, esiste sempre una 3-colorazione *buona* di Y. Questo contraddirebbe il fatto che Y sia 3-regolare e di conseguenza che anche X lo sia, concludendo la dimostrazione.

Consideriamo il grafo diretto finito che ha come vertici gli elementi di Y e ha un arco dal nodo x al nodo y se $y = f(x)$. Avrei facilmente la tesi se riuscissi a colorare i nodi di tale grafo in modo che i vertici di un arco abbiano sempre colori diversi. Notiamo innanzitutto che mi basta riuscire a colorare ogni componente connessa separatamente. Sfruttando che il grado in uscita da ogni vertice è al più 1, è facile osservare che una componente connessa di tale grafo è un albero oppure un unico ciclo con delle diramazioni semplici ("linee" di vertici) che arrivano ad alcuni nodi del ciclo. Nel primo caso è ovvio che si possa colorare il grafo con due colori, basta infatti radicare il grafo in un nodo e colorare alternativamente i vertici alla stessa altezza (primo colore alla radice, secondo colore a quelli ad altezza 1, primo colore a quelli ad altezza 2, ecc.). Nel secondo caso invece riusciamo innanzitutto a colorare il ciclo con 3 colori (ne bastano 2 se il ciclo ha lunghezza pari) e successivamente coloriamo tutti i grafi lineari che escono dal ciclo, alternando i colori partendo dal vertice sul ciclo, che è già colorato. $\square$

4 Pre-ordine di Rudin-Keisler

Definizione 4.1. Date $f, g : I \to J$ e dato $\mathscr{U}$ un ultrafiltro su I, indicheremo $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ se l'insieme in cui f e g coincidono appartiene all'ultrafiltro, cioè se $\{i \in I \mid f(i) = g(i)\} \in \mathscr{U}$.

Definizione 4.2. Dati $f : I \to J$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, definiamo $f(\mathscr{U}) = \{A \subseteq J \mid f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\}$.

Proposizione 4.3. *Dati $f : I \to J$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, $f(\mathscr{U})$ è un ultrafiltro su J.*

Dimostrazione. La dimostrazione è molto semplice e consta nel verificare innanzitutto che $f(\mathscr{U})$ è un filtro e successivamente che se $A^c \notin f(\mathscr{U})$ allora $A \in f(\mathscr{U})$, dimostrando così che $f(\mathscr{U})$ è un ultrafiltro.

Verifichiamo quindi che $f(\mathscr{U})$ ha tutte le proprietà richieste:

- Banalmente l'insieme vuoto non appartiene a $f(\mathscr{U})$, perché altrimenti avrei che $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in \mathscr{U}$, che è assurdo.
- Siano A e B due elementi di $f(\mathscr{U})$, allora $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \in \mathscr{U}$, quindi $A \cap B$ appartiene a $f(\mathscr{U})$, che perciò è chiuso per intersezione.
- Sia ora $A \in f(\mathscr{U})$ e $B \supseteq A$, allora $f^{-1}(B) \supseteq f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$ e perciò $f^{-1}(B) \in \mathscr{U}$, visto che $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Quindi $B \in f(\mathscr{U})$ e di conseguenza $f(\mathscr{U})$ è chiuso per sovrainsiemi.
- Sia ora A un sottoinsieme di J tale che $A^c \notin f(\mathscr{U})$. Questo vuol dire che $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \notin \mathscr{U}$, da cui perciò $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, poiché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro. Di conseguenza otteniamo che $A \in f(\mathscr{U})$.

Le prime tre proprietà dimostrano che $f(\mathscr{U})$ è un filtro su J, mentre la quarta ci dice che $f(\mathscr{U})$ è proprio un ultrafiltro, concludendo così la dimostrazione. □

Proposizione 4.4. *Valgono le seguenti proprietà:*

1. *Date $f : I \to J$, $g : J \to K$ e dato $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, si ha che $g \circ f(\mathscr{U}) = g(f(\mathscr{U}))$.*
2. *Dati $f : I \to I$ e $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, se $f(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ allora $f \equiv_{\mathscr{U}} id$.*
3. *Date $f, g : I \to J$ e dato $\mathscr{U}$ ultrafiltro su I, se $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ allora $f(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U})$.*

Dimostrazione. 1 Vale che $g \circ f(\mathscr{U}) = \{A \in K \mid (g \circ f)^{-1}(A) \in \mathscr{U}\} = \{A \in K \mid f^{-1}(g^{-1}(A)) \in \mathscr{U}\} = \{A \in K \mid g^{-1}(A) \in f(\mathscr{U})\} = g(f(\mathscr{U}))$, che è quello che volevamo.

2 Notiamo innanzitutto che $f(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ implica che per ogni $A \subseteq I$ vale che $A \in \mathscr{U}$ se e solo se $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$.

Sia ora $A = \{i \in I \mid f(i) = i\}$, la tesi equivale a dimostrare che A appartiene ad $\mathscr{U}$. Chiamiamo $B = A^c$ e supponiamo per assurdo che $A \notin \mathscr{U}$, allora vale che $B \in \mathscr{U}$ perché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro.

Poiché f non ha punti fissi su B, per una facile conseguenza del Teorema 3.1 (3 colori) esiste una 3-colorazione *buona* di B, cioè tale che x ed $f(x)$ hanno colori diversi per ogni $x \in B$ tale che $f(x) \in B$. Indichiamo tale colorazione con $B = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$.

Per le proprietà degli ultrafiltri almeno uno fra i C_i appartiene a $\mathscr{U}$ (perché $B \in \mathscr{U}$); supponiamo senza perdita di generalità $C_1 \in \mathscr{U}$. Allora per quanto detto precedentemente vale che $f^{-1}(C_1) \in \mathscr{U}$, ma per come abbiamo costruito la colorazione $C_1 \cap f^{-1}(C_1) = \emptyset$, il che risulta assurdo perché entrambi i sottoinsiemi appartengono ad $\mathscr{U}$ e non possono quindi avere intersezione vuota.

3 Supponiamo che $f \equiv_{\mathscr{U}} g$ e dimostriamo che $f(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U})$. In particolare ci basta dimostrare che $f(\mathscr{U}) \subseteq g(\mathscr{U})$, poiché l'altro contenimento si dimostrerà analogamente per simmetria.

Sia quindi $A \subseteq J$ tale che $f^{-1}(A) \in \mathscr{U}$, vogliamo dimostrare che $g^{-1}(A) \in \mathscr{U}$. Chiamiamo $B = \{i \in I \mid f(i) = g(i)\}$, che appartiene a $\mathscr{U}$ per definizione di $\equiv_{\mathscr{U}}$. Visto che f e g coincidono su $\mathscr{U}$, otteniamo che $g^{-1}(A) \cap B = f^{-1}(A) \cap B \in \mathscr{U}$, da cui $g^{-1}(A) \in \mathscr{U}$ perché $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi.

□

Definizione 4.5. Dati $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ ultrafiltri su I diciamo che $\mathscr{U} \leq_{RK} \mathscr{V}$ se esiste $f : I \to I$ tale che $f(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$. Tale relazione è detta pre-ordine di Rudin-Keisler.

Proposizione 4.6. *Dati $\mathscr{U}$ e $\mathscr{V}$ ultrafiltri su I, se $\mathscr{U} \leq_{RK} \mathscr{V}$ e $\mathscr{V} \leq_{RK} \mathscr{U}$ allora $\mathscr{U} \cong \mathscr{V}$, cioè esiste una bigezione $\sigma : I \to I$ tale che $\sigma(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$.*

Dimostrazione. Per definizione di pre-ordine di Rudin-Keisler esistono $f, g : I \to I$ tali che $f(\mathscr{V}) = \mathscr{U}$ e $g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$. Per il punto 1 della Proposizione 4.4, vale che $f \circ g(\mathscr{U}) = \mathscr{U}$ e $g \circ f(\mathscr{V}) = \mathscr{V}$, da cui $f \circ g \equiv_{\mathscr{U}} id$ e $g \circ f \equiv_{\mathscr{V}} id$ per il punto 2 della stessa proposizione.

Sia ora $A = \{i \in I \mid f \circ g(i) = i\}$, allora A appartiene ad $\mathscr{U}$ per quanto appena detto. Chiamiamo inoltre $B = g(A)$.

Abbiamo che $f \circ g$ è l'identità su A e $g \circ f$ è l'identità su B (infatti $g(f(g(i))) = g(i)$, perché $f(g(i)) = i$ su A), quindi è facile osservare che $g|_A : A \to B$ è una bigezione.

Se A^c e B^c hanno la stessa cardinalità possiamo estendere $g|_A$ ad una bigezione $\sigma : I \to I$. Poiché σ coincide con g su $A \in \mathscr{U}$, abbiamo che $\sigma \equiv_{\mathscr{U}} g$ e per il punto 3 della Proposizione 4.4 risulta quindi che $\sigma(\mathscr{U}) = g(\mathscr{U}) = \mathscr{V}$, da cui la tesi.

Supponiamo quindi che A^c e B^c abbiamo cardinalità diversa, allora deve valere necessariamente che I ha cardinalità infinita e $|A^c| \leq |A|, |B^c| \leq |B|$; infatti se I ha cardinalità infinita vale $|I| = \max\{|A|, |A^c|\} = \max\{|B|, |B^c|\}$ e ciò sarebbe assurdo se A^c e B^c avessero cardinalità diversa e uno dei due avesse cardinalità maggiore del suo complementare.

Dividiamo quindi A in due parti $A = C_1 \sqcup C_2$ di uguale cardinalità; poiché $A \in \mathscr{U}$, possiamo supporre che C_1 appartenga a sua volta a $\mathscr{U}$. Allora vale che $|C_1| = |C_1^c| = |A| = \max\{|A|, |A|^c\} = |I|$ (perché $|C_2| = |C_1|$ e $C_2 \subseteq C_1^c$) e $|f(C_1)| = |f(C_2)| = |f(C_1)^c| = |I|$ analogamente; perciò esiste una bigezione fra C_1^c e $f(C_1)^c$ e di conseguenza posso estendere $g|_{C_1}$ ad una bigezione $\sigma : I \to I$. Questo conclude la dimostrazione ripetendo il ragionamento fatto precedentemente. $\square$

5 Somma di ultrafiltri e ultrafiltri idempotenti

Definizione 5.1. Chiamiamo $\beta\mathbb{N} = \{\mathscr{U} \mid \mathscr{U}$ è un ultrafiltro su $\mathbb{N}\}$ l'insieme degli ultrafiltri su $\mathbb{N}$.

Definizione 5.2. Definiamo un operazione $\oplus$ su $\beta\mathbb{N}$ tale che $A \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ se e solo se $\{n \mid A - n \in \mathscr{V}\} \in \mathscr{U}$.

Nel corso di tutta questa sezione sottoinderemo che gli ultrafiltri considerati sono ultrafiltri su $\mathbb{N}$.

Definizione 5.3. Diciamo che un ultrafiltro $\mathscr{U}$ è idempotente se è idempotente rispetto all'operazione $\oplus$, cioè $\mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$.

Esercizio 5.4. *Se $\mathscr{U}$ è idempotente, allora $k\mathbb{N} \in \mathscr{U}$ per ogni $k \in \mathbb{N}$.*

Dimostrazione. Definiamo $A_i = k\mathbb{N} - i$ per $i = 1, \ldots, k$, allora $\mathbb{N} = A_1 \sqcup \ldots \sqcup A_k$; per cui esiste un unico m tale che $A_m \in \mathscr{U}$. Osserviamo inoltre che dato $n \in \mathbb{N}$ vale che $A_i - n = A_j$ con $j \equiv i + n \pmod{n}$ e quindi che $A_i - n = A_j \in \mathscr{U}$ se e solo se $j = m$.

Poiché $\mathscr{U}$ è idempotente abbiamo che $\{n \mid A_m - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$; ma per quanto detto vale che $\{n \mid A_m - n \in \mathscr{U}\} = \{n \mid m + n \equiv m \pmod{k}\} = \{n \mid n \equiv 0 \pmod{k}\} = k\mathbb{N}$, di conseguenza abbiamo che $k\mathbb{N} \in \mathscr{U}$ e quindi la tesi. $\square$

Proposizione 5.5. *Dato un ultrafiltro $\mathscr{U}$, esiste un ultrafiltro $\mathscr{V}$ tale che $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto che se esiste un ultrafiltro $\mathscr{V}$ tale che $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ allora per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$. Vale infatti che se $\mathscr{V} \oplus \mathscr{U} = \mathscr{U}$ allora per ogni $A \in \mathscr{U}$ abbiamo che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{V}$ e perciò in particolare $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\}$ non è vuoto, quindi esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $A - n \in \mathscr{U}$.

Dimostriamo ora la freccia opposta. Per ogni $A \in \mathscr{U}$ definiamo $B_A = \{n \mid A - n \in \mathscr{U}\}$, che è non vuoto per ipotesi, e definiamo quindi

$$\mathscr{F} = \bigcup_{A \in \mathscr{U}} \bigcup_{C \supseteq B_A} \{C\}.$$

Mostriamo innanzitutto che $\mathscr{F}$ è un filtro.

L'insieme vuoto non appartiene a $\mathscr{F}$ perché tutti i B_A sono non vuoti per quanto già detto. Inoltre è facile osservare che $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi per sua stessa costruzione.

Consideriamo ora $C_1, C_2 \in \mathscr{F}$, allora sicuramente esistono $A_1, A_2 \in \mathscr{U}$ tali che $C_1 \supseteq B_{A_1}$ e $C_2 \supseteq B_{A_2}$. Perciò, per dimostrare che $C_1 \cap C_2 \in \mathscr{F}$, basta mostrare che $B_{A_1} \cap B_{A_2} \in \mathscr{F}$; infatti $\mathscr{F}$ è chiuso per sovrainsiemi e $C_1 \cap C_2 \supseteq B_{A_1} \cap B_{A_2}$.

Abbiamo però che $B_{A_1} \cap B_{A_2} = \{n \mid A_1 - n \in \mathscr{U} \wedge A_2 - n \in \mathscr{U}\} = \{n \mid (A_1 - n) \cap (A_2 - n) \in \mathscr{U}\} = \{n \mid (A_1 \cap A_2) - n \in \mathscr{U}\} = B_{A_1 \cap A_2} \in \mathscr{F}$, che è proprio quello che volevamo.

Perciò abbiamo mostrato che $\mathscr{F}$ è un filtro. Consideriamo quindi $\mathscr{V}$ un ultrafiltro contente $\mathscr{F}$ (che sappiamo esistere).

Abbiamo perciò che per ogni $A \in \mathscr{U}$ vale che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} = B_A \in \mathscr{F} \subseteq \mathscr{V}$, quindi $A \in \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$. Di conseguenza $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$ e per massimalità degli ultrafiltri $\mathscr{U} = \mathscr{V} \oplus \mathscr{U}$, che è la tesi. $\square$

Proposizione 5.6. *Un ultrafiltro $\mathscr{U}$ è idempotente se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$.*

Dimostrazione. Se $\mathscr{U}$ è idempotente allora per ogni $A \in \mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$ vale che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$, quindi $A \cap \{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$ e perciò esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$.

Dimostriamo quindi la freccia opposta. Prendiamo $A \in \mathscr{U}$, vogliamo dimostrare che $\{n \mid A - n \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$; da questo avremmo che $\mathscr{U} \subseteq \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$ e quindi per massimalità degli ultrafiltri $\mathscr{U} = \mathscr{U} \oplus \mathscr{U}$, che è la tesi.

Dimostriamo in particolare che $\{a \in A \mid A - a \in \mathscr{U}\} \in \mathscr{U}$, da cui avremmo quanto desiderato poiché $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Supponiamo per assurdo che ciò non valga, cioè $B = \{a \in A \mid A - a \in \mathscr{U}\} \notin \mathscr{U}$, allora per le proprietà degli ultrafiltri $A \setminus B = A \cap B^c \in \mathscr{U}$. Per ipotesi esiste quindi $a' \in A \setminus B$ tale che $(A \setminus B) - a' \in \mathscr{U}$. Perciò $A - a' \in \mathscr{U}$, visto che $A - a' \supseteq (A \setminus B) - a'$ e $\mathscr{U}$ è chiuso per sovrainsiemi. Questo però è assurdo perché $a' \notin B$. $\square$

Proposizione 5.7. *Dato $\alpha \in {}^*\mathbb{N}$, l'ultrafiltro $\mathscr{U}_\alpha = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \alpha \in {}^*A\}$ è idempotente se e solo se per ogni A tale che $\alpha \in {}^*A$, esiste $a \in A$ tale che $\alpha + a \in {}^*A$.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 5.6, sappiamo che $\mathscr{U}_\alpha$ è idempotente se e solo se per ogni $A \in \mathscr{U}_\alpha$ esiste $a \in A$ tale che $A - a \in \mathscr{U}$. Quest'ultima affermazione è però facilmente equivalente a dire che per ogni A tale che $\alpha \in {}^*A$ esiste $a \in A$ tale che $\alpha \in {}^*A - a$, cioè $\alpha + a \in {}^*A$. □

6 Pre-ordine di immergibilità finita

Definizione 6.1. Dati A, B sottoinsiemi di $\mathbb{N}$, diciamo che $A \leq_{fe} B$, cioè A è finitamente immergibile in B, se per ogni $F \subseteq A$ finito, esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq B$.

Nota 6.2. È molto facile osservare che la relazione di immergibilità finita è transitiva. Infatti se $A \leq_{fe} B$ e $B \leq_{fe} C$, per ogni $F \subseteq A$ finito esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq B$ e, poiché $F + x$ è a sua volta finito, esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $F + x + y \subseteq C$. Da questo otteniamo ovviamente che $A \leq_{fe} C$.

Dimostriamo ora alcune proprietà del pre-ordine di immergibilità finita.

Proposizione 6.3. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, vale che $A \geq_{fe} B$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$ se e solo se A è spesso.*

Dimostrazione. Se vale che $A \geq_{fe} B$ per ogni $B \subseteq \mathbb{N}$, in particolare $A \geq_{fe} \mathbb{N}$. Consideriamo quindi il sottoinsieme finito dei naturali $F_n = \{1, \ldots, n\}$. Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F_n + x \subseteq A$, quindi A contiene intervalli arbitrariamente lunghi e di conseguenza A è spesso.

Dimostriamo ora la freccia opposta. Siano A spesso e B un qualsiasi sottoinsieme di $\mathbb{N}$ e consideriamo $F \subseteq B$ un sottoinsieme finito di B. Chiamiamo m ed M rispettivamente il minimo e il massimo dell'insieme F. Poiché A è spesso, esiste un intervallo con $M - m + 1$ elementi contenuto tutto in A; perciò esiste x tale che $[m, M] + x \subseteq A$, ma questo implica ovviamente che $F + x \subseteq A$, da cui la tesi. □

Definizione 6.4. Diciamo che $A \subseteq \mathbb{N}$ è *AP-rich* se contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe.

Proposizione 6.5. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è AP-rich e $A \leq_{fe} B$, allora B è AP-rich.*

Dimostrazione. Per definizione di *AP-rich*, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste una progressione aritmetica F lunga n contenuta in A. Per ipotesi esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq B$; ma $F + x$ è ancora una progressione aritmetica lunga n, perciò anche B contiene progressioni aritmetiche arbitrariamente lunghe e di conseguenza è *AP-rich*. □

Proposizione 6.6. *Se $A \leq_{fe} B$, allora $BD(A) \leq BD(B)$.*

Dimostrazione. Dato $n \in \mathbb{N}$, sia $\bar{x} \in \mathbb{Z}$ che realizza $\max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$. Per ipotesi esiste $y \in \mathbb{N}$ tale che $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y \subseteq B$, poiché $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n]$ è un sottoinsieme finito di A. Di conseguenza vale che $A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y \subseteq B \cap [\bar{x}+y+1, \bar{x}+y+n]$, da cui otteniamo che

$$\max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} = \frac{|A \cap [\bar{x}+1, \bar{x}+n] + y|}{n} \leq$$
$$\leq \frac{|B \cap [\bar{x}+y+1, \bar{x}+y+n]|}{n} \leq \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|B \cap [x+1, x+n]|}{n},$$

da cui segue molto facilmente che $BD(A) \leq BD(B)$, poiché

$$BD(A) = \lim_{n \to \infty} \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n} \leq \lim_{n \to \infty} \max_{x \in \mathbb{Z}} \frac{|B \cap [x+1, x+n]|}{n} = BD(B).$$

□

Nota 6.7. Non vale invece che se $A \leq_{fe} B$, allora $\bar{d}(A) \leq \bar{d}(B)$.

Dimostrazione. Poniamo $B = \cup_{n \in \mathbb{N}} [2^n + 2^{n-1} + 1, 2^{n+1}]$ e $A = \mathbb{N}$. Allora B è ovviamente spesso perché contiene intervalli arbitrariamente lunghi e inoltre $\bar{d}(B) = \frac{1}{2}$ facilmente. Per la Proposizione 6.3 vale che $A \leq_{fe} B$, però si ha che $\bar{d}(A) = 1 > \frac{1}{2} = \bar{d}(B)$. □

Lemma 6.8 (König). *Un albero radicato con un numero infinito di vertici tale che ogni vertice ha un numero finito di figli, ammette un cammino infinito che parte dalla radice e che da un nodo si muove in un suo figlio.*

Proposizione 6.9. *Si ha che $B \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.*

Dimostrazione. Dimostriamo separatamente le due implicazioni. Innanzitutto prendiamo B sindetico a tratti e dimostriamo che esiste $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$.

Poiché B è sindetico a tratti, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che B ha buchi al più grandi k su un insieme spesso. Consideriamo ora un albero tale che ogni suo nodo rappresenta un insieme $F \subseteq \mathbb{N}$ con $F \subseteq [1,n]$ per qualche n, F sindetico su quell'intervallo con buchi grandi al più k e $F + x \subseteq B$ per qualche $x \in \mathbb{N}$. Inoltre poniamo alla radice di questo albero $F = \emptyset$ e imponiamo che F_1 è padre di F_2 se e solo se $F_1 \subset F_2$ e $|F_2| = |F_1| + 1$. Diciamo inoltre per semplicità che non ci possono essere due nodi che rappresentano lo stesso insieme.

Notiamo che possiamo rappresentare nell'albero ogni insieme $F \subseteq [1,n]$ che è sindetico con buchi al più grandi k e tale che $F + x \subseteq B$ per qualche $x \in \mathbb{N}$. Infatti ogni prefisso di tale F rispetta le ipotesi e perciò esiste una catena $\emptyset \subset F_1 \subset \ldots \subset F_s \subset F$, in cui la cardinalità cresce ad ogni passaggio di 1.

Inoltre esistono F di cardinalità arbitrariamente grande che rispettano queste ipotesi, poiché B è sindetico a tratti; di conseguenza l'albero avrà infiniti nodi.

Infine ogni nodo avrà un numero finito di figli in quanto se consideriamo F che rispetta le ipotesi, allora abbiamo solo $k+1$ possibili scelte di un $G \supset F$ tale che rispetta a sua volta le ipotesi e tale che $|G| = |F| + 1$.

Possiamo perciò applicare il Lemma 6.8 (König) a questo albero e otteniamo una catena infinita $\emptyset \subset F_1 \subset F_2 \subset \ldots$; consideriamo quindi $A = \cup_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Vale facilmente che A è sindetico perché ovviamente $A \cap [1,m]$ è sindetico con buchi al più grandi k per ogni m. Inoltre dato $F \subseteq A$ finito, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $F \subseteq F_n$; allora per le proprietà degli F_n esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $F + x \subseteq F_n + x \subseteq B$, da cui $A \leq_{fe} B$.

Dimostriamo ora l'implicazione opposta. Supponiamo che esista $A \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $A \leq_{fe} B$. Chiamiamo $\mathcal{F} = \{F \subseteq A \mid |F| < \infty\}$.

Poiché $A \leq_{fe} B$, per ogni $F \in \mathcal{F}$ esiste $x_F \in \mathbb{N}$ tale che $F + x_F \subseteq B$. Perciò in particolare $S = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (F + x_F) \subseteq B$. Consideriamo ora $T = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} ([\min F, \max F] + x_F)$. Vale facilmente che B è sindetico su T, perché $S \subseteq B \cap T$. Inoltre T è spesso per la Proposizione 6.3, in quanto $\mathbb{N} \leq_{fe} T$, poiché gli F in $\mathcal{F}$ sono arbitrariamente grandi. Questo ci dice proprio che B è sindetico a tratti, in quanto sindetico sull'insieme spesso T. □

Corollario 6.10. *Se $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti e $A \leq_{fe} B$, allora B è sindetico a tratti.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 6.9, esiste $C \subseteq \mathbb{N}$ sindetico tale che $C \leq_{fe} A$, ma allora per la Nota 6.2 abbiamo che $C \leq_{fe} B$, da cui B è sindetico a tratti sfruttando nuovamente la Proposizione 6.9. □

Nota 6.11. Notare che il corollario precendente non varrebbe se al posto di sindetici a tratti parlassimo di sindetici.

Dimostrazione. Sia A un insieme sindetico qualunque e sia B un insieme spesso non sindetico (per esempio l'insieme spesso utilizzato nella dimostrazione della Nota 6.7, che non contiene intervalli arbitrariamente lunghi). Risulta ovvio che questi due insiemi ci forniscono il controesempio desiderato in quanto $A \leq_{fe} B$ per la Proposizione 6.3. □

7 Caratterizzazioni non standard

Elenchiamo di seguito le caratterizzazioni non standard di alcune nozioni classiche.

Definizione 7.1. Data $f : A \to B$, definiamo ${}^*f$ la sua estensione non standard, cioè la funzione ${}^*f : {}^*A \to {}^*B$ tale che ${}^*f([\nu]) = [f \circ \nu]$.

Definizione 7.2. Dati $\xi, \nu \in {}^*\mathbb{R}$, indichiamo $\xi \sim \nu$ se $\xi - \nu$ è infinitesimo.

Proposizione 7.3. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}$ se e solo se per ogni $\xi \sim x_0$ vale che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x_0. Consideriamo $\xi = [x_n] \sim x_0$ e dimostriamo che ${}^*f(\xi) - f(x_0)$ è infinitesimo. Per definizione di continuità, preso $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $|x - x_0| < \delta$, allora $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Visto che $\xi \sim x_0$ e quindi $\{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| < \delta\} \in \mathscr{U}$, vale che $\{n \in \mathbb{N} \mid |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ e quindi ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \sim x_0$ valga che ${}^*f(\xi) \sim f(x_0)$. Supponiamo per assurdo che f non sia continua in x_0, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x_n \in \mathbb{R}$ tale che $|x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ e $|f(x_n) - f(x_0)| > \varepsilon$. Chiamiamo $\xi = [x_n]$, allora $\xi \sim x_0$ facilmente, ma altrettanto facilmente $|{}^*f(\xi) - f(x_0)| > \varepsilon$, che contraddice l'ipotesi. □

Proposizione 7.4. *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è uniformemente continua se e solo se per ogni $\xi \sim \nu$ iperreali vale che ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$.*

Dimostrazione. Supponiamo f uniformemente continua e consideriamo $\xi = [x_n], \nu = [y_n] \in {}^*\mathbb{N}$ con $\xi \sim \nu$. Per definizione di uniforme continuità, vale che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che se $|x - y| < \delta$ allora $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Perciò, visto che $\xi \sim \nu$ e quindi $\{n \mid |x_n - y_n| < \delta\} \in \mathscr{U}$, abbiamo che $\{n \mid |f(x_n) - f(y_n)| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$ e di conseguenza ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$.

Viceversa, supponiamo che per ogni $\xi \sim \nu$ valga che ${}^*f(\xi) \sim {}^*f(\nu)$ e supponiamo per assurdo che f non sia uniformemente continua. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ con $|f(x_n) - f(y_n)| > \varepsilon$. Chiamando quindi $\xi = [x_n]$ e $\nu = [y_n]$, si ottiene facilmente un assurdo, perché $\xi \sim \nu$, ma $|{}^*f(\xi) - {}^*f(\nu)| > \varepsilon$. □

Proposizione 7.5. *Vale che $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se per ogni ν ipernaturale infinito $a_\nu \sim l$.*

Dimostrazione. La dimostrazione procede in modo molto simile alla dimostrazione della Proposizione 7.3.

Se $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che, per ogni $n \geq n_0$, $|a_n - l| < \varepsilon$. Perciò in particolare $\{n \mid |a_n - l| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$, perché $\mathscr{U}$ è un ultrafiltro non principale. Di conseguenza per ogni $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito $\{n \mid |a_{\nu_n} - l| < \varepsilon\} \in \mathscr{U}$, perché $\{n \mid \nu_n \geq n_0\} \in \mathscr{U}$, poiché ν è infinito, e $\mathscr{U}$ è chiuso per intersezione. Quindi $a_\nu \sim l$ per ogni ν ipernaturale infinito.

Viceversa, sia $a_\nu \sim l$ per ogni ν ipernaturale infinito. Supponiamo per assurdo che non valga $\lim_{n\to\infty} a_n = l$, allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che esiste $\nu_n \geq n$ con $|a_{\nu_n} - l| > \varepsilon$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Consideriamo quindi $\nu = [\nu_n]$, allora vale facilmente che ν è un ipernaturale infinito, ma che $|a_\nu - l| > \varepsilon$, che è assurdo. □

Proposizione 7.6. *Valgono le seguenti caratterizzazioni per i limiti superiore e inferiore:*

1. $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$ *se e solo se esiste ν ipernaturale infinito con* $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$.
2. $\limsup_{n\to\infty} a_n = l$ *se e solo se* $l = \max\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$.
3. $\liminf_{n\to\infty} a_n \leq l$ *se e solo se esiste ν ipernaturale infinito con* $\mathrm{st}(a_\nu) \leq l$.
4. $\liminf_{n\to\infty} a_n = l$ *se e solo se* $l = \min\{\mathrm{st}(a_\nu) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\}$.

Dimostrazione. Dimostriamo innanzitutto il punto 1. Se $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$, allora esiste una sottosuccessione $(a_{\nu_n})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che esiste $\lim_{n\to\infty} a_{\nu_n} \geq l$. Consideriamo allora $\nu = [\nu_n]$, che risulta un ipernaturale infinito perché la successione (ν_n) è illimitata. Per come ho scelto (ν_n), vale che $\{n \mid a_{\nu_n} > l - \varepsilon\} \in \mathscr{U}$ per ogni $\varepsilon > 0$ (poiché la disuguaglianza $a_{\nu_n} > l - \varepsilon$ vale definitivamente), perciò $a_\nu > l - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ e quindi $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$.

Se invece esiste $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito con $\mathrm{st}(a_\nu) \geq l$, vale facilmente (in modo analogo a come appena fatto) che $\limsup_{n\to\infty} a_{\nu_n} \geq l$, da cui a maggior ragione $\limsup_{n\to\infty} a_n \geq l$.

Il punto 2 è una facile conseguenza del punto 1, mentre i punti 3 e 4 si dimostrano in modo analogo ai punti precedenti. □

Proposizione 7.7. *Dato* $A \subseteq \mathbb{N}$*, valgono le seguenti*

1. $\bar{d}(A) = \alpha$ *se e solo se* $\alpha = \max\left\{\mathrm{st}\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu}\right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\right\}$.

2. $\underline{d}(A) = \alpha$ *se e solo se* $\alpha = \min\left\{\mathrm{st}\left(\frac{|{}^*A \cap [1,\nu]|}{\nu}\right) \mid \nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}\right\}$.

Dimostrazione. Sono entrambi facili conseguenze dei punti 2 e 4 della Proposizione 7.6. □

Proposizione 7.8. *Dato* $A \subseteq \mathbb{N}$*, vale che* $BD(A) = \alpha$ *se e solo se per ogni* ν *ipernaturale infinito*

$$\max\left\{\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \mid I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\right\} \sim \alpha\,.$$

Dimostrazione. Definiamo la successione $a_n = \max_{x\in\mathbb{N}} \dfrac{|A \cap [x+1, x+n]|}{n}$. Vogliamo innanzitutto dimostrare che dato ν ipernaturale infinito vale che

$$a_\nu = \max\left\{\frac{|{}^*A \cap I|}{\nu} \mid I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\right\}\,,$$

la tesi poi seguirà dalla Proposizione 7.5.

Consideriamo quindi $\nu \in {}^*\mathbb{N} \setminus \mathbb{N}$. Innanzitutto, per il principio di transfer, vale che

$$a_\nu \geq \frac{|{}^*A \cap I|}{\nu}\,, \quad \text{per ogni } I \text{ intervallo di lunghezza } \nu\,. \tag{7.1}$$

Infatti $a_n \geq \dfrac{|A \cap I|}{n}$ per $n \in \mathbb{N}$ e I intervallo di lunghezza n, per definizione di densità di Banach.

Ora, dato $\nu = [\nu_n]$, chiamiamo ξ_n il naturale che realizza $\max_{x\in\mathbb{N}} \dfrac{|A \cap [x+1, x+\nu_n]|}{\nu_n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e definiamo $\xi = [\xi_n]$. Abbiamo allora che $a_{\nu_n} \leq \dfrac{|A \cap [\xi_n + 1, \xi_n + \nu_n]|}{\nu_n}$ e quindi per il principio di transfer

$$a_\nu \leq \frac{|{}^*A \cap [\xi + 1, \xi + \nu]|}{\nu}\,. \tag{7.2}$$

Infine, unendo le Equazioni (7.1) e (7.2), otteniamo la tesi. □

Proposizione 7.9. *Dato* $A \subseteq \mathbb{N}$*, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *A è spesso;*

2. *per ogni* $\nu \in {}^*\mathbb{N}$*, esiste* $I \subseteq {}^*A$ *intervallo di lunghezza* ν*;*

3. *esiste* $I \subseteq {}^*A$ *intervallo infinito, cioè* $I = [\nu, \mu]$ *con* $\mu - \nu$ *infinito;*

4. *esiste* $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ *tale che* $\xi + n \in {}^*A$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*;*

5. *esiste* $\mathscr{V}$ *ultrafiltro non principale tale che* $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.

Dimostrazione. **1** $\iff$ **2** Per definizione, A è spesso se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $I \subseteq A$ intervallo di lunghezza n, che per il principio di transfer è equivalente a dire che per ogni $\nu \in {}^*\mathbb{N}$ esista $I \subseteq {}^*A$ intervallo di lunghezza ν.

2 $\implies$ **3** Ovvio.

3 $\implies$ **4** Dato $I = [\nu, \mu] \subseteq {}^*A$, considero $\xi = \nu$, allora ovviamente $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

4 $\implies$ **5** Consideriamo ora $\mathscr{V} = \mathfrak{U}_\xi$ l'ultrafiltro generato da ξ, dove $\xi + n \in {}^*A$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora $\xi \in {}^*A - n$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, cioè $A - n \in \mathscr{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Vale allora che $\{n \mid A - n \in \mathscr{V}\} = \mathbb{N} \in \mathscr{U}$ per ogni ultrafiltro $\mathscr{U}$, da cui $A \in \mathscr{U} \oplus \mathscr{V}$ per ogni ultrafiltro $\mathscr{U}$, cioè $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$.

5 $\implies$ **1** Per ipotesi esiste $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale tale che $\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V} \subseteq \mathcal{O}_A$, il che è equivalente ad affermare che $A - n \in \mathscr{V}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, come risulta dalla dimostrazione dell'implicazione precendente. Sappiamo però che una famiglia di insieme può essere inclusa in un ultrafiltro se e solo se ha la FIP (la proprietà dell'intersezione finita), quindi in particolare otteniamo che $(A-1) \cap (A-2) \cap \ldots \cap (A-n) \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ e di conseguenza per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $x+1, x+2, \ldots, x+n \in A$, cioè A è spesso.

$\square$

Proposizione 7.10. *Dato $B \subseteq \mathbb{N}$, i seguenti fatti sono equivalenti:*

1. *B è sindetico;*
2. *esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che ${}^*B$ ha solo buchi di ampiezza minore o uguale a k;*
3. *${}^*B$ non ha buchi infiniti, cioè per ogni I intervallo infinito ${}^*B \cap I \neq \emptyset$;*
4. *per ogni $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V}) \cap \mathcal{O}_B \neq \emptyset$.*

Dimostrazione. **1** $\implies$ **2** Visto che B è sindetico, esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $B \cap [x+1, x+k] \neq \emptyset$ per ogni $x \in \mathbb{N}$. Supponiamo che esista $\nu = [\nu_n]$ ipernaturale infinito tale che ${}^*B \cap [\nu+1, \nu+k] = \emptyset$, questo però è assurdo per il principio di transfer, poiché $B \cap [\nu_n+1, \nu_n+k] \neq \emptyset$.

2 $\implies$ **3** Ovvio.

3 $\implies$ **1** Supponiamo per assurdo che B non sia sindetico, allora B^c è spesso e di conseguenza esiste $I \subseteq {}^*(B^c)$ intervallo infinito, per il punto 3 della Proposizione 7.9. Vale però che ${}^*(B^c) = ({}^*B)^c$ e quindi ${}^*B \cap I = \emptyset$, che contraddice l'ipotesi.

1 $\iff$ **4** Dato $\mathscr{V}$ ultrafiltro non principale, $(\beta\mathbb{N} \oplus \mathscr{V}) \cap \mathcal{O}_B \neq \emptyset$ se e solo se esiste $\mathscr{W}$ ultrafiltro tale che $B \in \mathscr{W} \oplus \mathscr{V}$, se e solo se $\{n \mid B - n \in \mathscr{V}\} \neq \emptyset$, se e solo se esiste $n \in \mathbb{N}$ con $B - n \in \mathscr{V}$.

Per ogni $\mathscr{V}$ non principale esiste $n \in \mathbb{N}$ con $B - n \in \mathscr{V}$ se e solo se la famiglia $\{(B-n)^c\}$ non ha la FIP, se e solo se esistono $n_1, \ldots, n_k$ tali che $(B-n_1)^c \cap \ldots \cap (B-n_k)^c = \emptyset$, se e solo se $(B-n_1) \cup \ldots \cup (B-n_k) = \mathbb{N}$, se e solo se B è sindetico.

$\square$

Proposizione 7.11. *Dato $A \subseteq \mathbb{N}$, A è sindetico a tratti se e solo se esiste I intervallo infinito tale che ${}^*A \cap I$ ha buchi finiti.*

Dimostrazione. Basta ricordare che $A \subseteq \mathbb{N}$ è sindetico a tratti se e solo se è sindetico su un insieme spesso e applicare i punti 3 e 2 rispettivamente delle Proposizioni 7.9 e 7.10. $\square$

Proposizione 7.12. *Dati $A, B \subseteq \mathbb{N}$, $A \leq_{fe} B$ se e solo se esiste $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ tale che $\xi + A \subseteq {}^*B$.*

Dimostrazione. Se $A \leq_{fe} B$, chiamiamo $\Delta_a = \{x \in \mathbb{N} \mid x + a \in B\}$ per ogni $a \in A$. Per ipotesi la famiglia $\{\Delta_a \mid a \in A\}$ ha la FIP ed è numerabile, perciò per $\aleph_0$-enlargement esiste $\xi \in \cap_{a\in A} {}^*\Delta_a$ ed è facile osservare che $\xi + A \subseteq {}^*B$.

Viceversa, supponiamo che esista $\xi \in {}^*\mathbb{N}$ con $\xi + A \subseteq {}^*B$. Sia $F = \{a_1, \ldots, a_k\} \subseteq A$ finito. Sappiamo che $\xi + a_i \in {}^*B$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, perciò per transfer esiste $x \in \mathbb{N}$ tale che $x + a_i \in B$ per ogni $i = 1, \ldots, k$, cioè $x + F \subseteq B$, da cui la tesi. $\square$