



APPUNTI DI FISICA II

Carmine Frascella

14 Gennaio 2015

Indice

5	Introduzione all'elettrostatica	86	Metodo delle cariche immagine
7	Legge di Coulomb	91	Conduttori: piani e lastre
9	Campo elettrico, potenziale elettrico	93	Effetto delle punte
13	L'esperimento di Millikan	94	Condensatori e capacità
14	Forza gravitazionale e forza elettrica	97	Conduttore in un condensatore
18	Alcuni esercizi	100	Metodo delle cariche immagine: caso sferico
19	Sistemi di cariche in equilibrio stabile	104	Conduttore sferico in un campo elettrico costante esterno
24	Energia potenziale elettrica e densità volumetrica, superficiale, lineare di carica	106	Sfera conduttrice cava
26	Flusso del campo elettrico	108	Dielettrici
28	Teorema di Gauss	114	Correnti
30	Studio di un filo	116	Leggi di Ohm e resistenze
33	Studio di un anello circolare	120	Effetto Joule
36	Campo elettrico di un piano	123	Resistenze in parallelo
38	Campo elettrico di una sfera: due varianti	125	Complementi sull'effetto Joule
42	Stati liberi e legati	126	Introduzione alla magnetostatica
44	Campo elettrico di un cilindro	129	Esperimento di Thompson
46	Gradiente	131	Come funziona un televisore?
48	Divergenza e rotore	133	Spettrometro di massa
50	Teorema della divergenza	134	Esperimento di Hall
51	Prima equazione di Maxwell. Densità di energia nel campo elettrico	136	Forza magnetica su un filo
54	Potenziale ed energia elettrica di una sfera	137	Induzione magnetica
56	Complementi vari	139	Legge di Lenz
58	Masse dei nuclei atomici	141	Analisi della seconda equazione di Maxwell
59	Uranio o T.N.T.?	142	Analisi di una spira ruotante
60	Analisi dei quark	144	Formula integrale per il campo magnetico
62	Esperimento di Rutherford	147	Esercizi vari
64	Pressione elettrostatica	152	Disco di Rowland
66	Teorema del rotore	153	Forza magnetica, forza elettrica
67	Equazioni di Maxwell e teorema di Gauss	156	Esercizi vari
69	Gradiente, divergenza, rotore, laplaciano in coordinate cilindriche e sferiche	190	Ancora sulle equazioni di Maxwell
72	Dipolo elettrico	193	Formula della circuitazione: alcuni esempi
78	Forza sentita da un dipolo elettrico in un campo elettrico esterno	195	Dipolo magnetico
80	Momento delle forze di un dipolo elettrico	201	Induttanza e induttori
81	Esercizi vari	203	Energia magnetica
84	Conduttori	204	Circuiti RLC, impedenze
		206	Mutua induzione
		208	Trasformatori
		210	Magnetismo nella materia
		215	Esercizio
		217	Esercizi vari

224 Inconsistenza delle equazioni
di Maxwell
225 Corrente di spostamento
228 Onde piane nel vuoto
231 Teorema di Poynting
232 Esercizi vari

236 Onde nella materia
237 Potenziale vettore, potenziale scalare,
invarianza di gauge
239 Invarianza relativistica
241 Esercizi vari
247 Esercizi vari

INTRODUZIONE ALL'ELETTROSTATICA

Fin dal VI secolo a.C. ci si era resi conto che, presi due oggetti dello stesso materiale, essi tenderanno a respingersi, dopo essere stati strofinati, ed esempio, con un pezzo di lana.

In particolare, dopo lo strofinio:

- due corpi dello stesso sostanza si respingono;
- due corpi di sostanza diverse si attraggono o si respingono, a seconda dei casi.

La fenomenologia osservata ha introdotto dunque il concetto di AZIONE ELETTRICA: il processo descritto prima, in particolare, è detto ELETTRIZZAZIONE PER STROFINIO.

In base ai fenomeni di attrazione e repulsione osservati, si è introdotto il concetto di CARICA ELETTRICA. Essa può essere POSITIVA o NEGATIVA: cariche dello stesso segno si respingono, mentre cariche di segno opposto si attraggono.

L'elettizzazione per strofinio ha portato a distinguere i materiali in due categorie:

- i CONDUTTORI, ossia quelli in cui le cariche elettriche trasferite per strofinio si distribuiscono in tutto il corpo;
- gli ISOLANTI, ossia quelli in cui le cariche elettriche trasferite per strofinio restano localizzate.

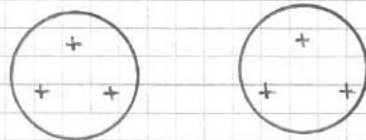
In ogni caso, si è visto sperimentalmente che quando un corpo viene elettrizzato per strofinio si è un passaggio di cariche elettriche negative da un corpo all'altro. Uno dei due, dunque, si carica positivamente; l'altro si carica negativamente (i "ruoli" dipendono dalla natura dei materiali considerati).

Esistono altre due tipi di elettrizzazione.

Si parla di ELETRIZZAZIONE PER CONTATTO quando un corpo carico e un corpo neutro vengono a contatto. Supponiamo ad esempio di avere un corpo carico positivamente e uno neutro. Avvicinando il corpo carico a quello neutro, le cariche negative si concentrano nella parte del corpo neutro più vicina al corpo carico:

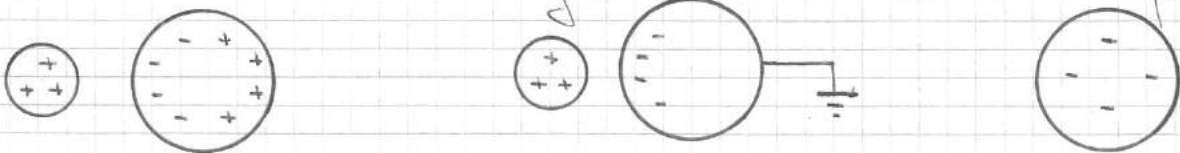


Dopo il contatto, vi è il passaggio delle cariche negative verso il corpo carico positivamente. Il risultato è il seguente:



Il corpo neutro si è dunque caricato positivamente; di contro, il corpo carico ha ridotto il suo stato di positività.

Si parla di INDUZIONE ELETTROSTATICA quando si considera un conduttore neutro, e si avvicina ad esso un corpo carico positivamente. Come prima, le cariche negative si concentrano nella parte del conduttore più vicina al corpo carico. Collegando con un filo metallico il conduttore alla Terra, ad esempio, si ha, dopo aver allontanato il corpo carico, che il conduttore è carico negativamente. Ecco la sequenza:



LEGGE DI COULOMB

Mediante l'uso di una bilancia di torsione, Coulomb giunse a formulare la legge delle forze di natura elettrostatica, detta LEGGE DI COULOMB.

Siano dunque q_1 e q_2 due cariche puntiformi poste nel vuoto ad una distanza r . Allora q_2 subisce una forza ad opera di q_1 , diretta radialmente, pari a:

$$\vec{F}_{21} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

Per il principio di azione e reazione:

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12}$$

La costante k ha valore approssimativo pari a:

$$k \approx 8,9875 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$$

nel vuoto. L'unità di misura della carica elettrica, il COULOMB, è indicata con C. Il valore numerico di k deriva dalla definizione di Coulomb, che daremo più avanti, quando introdurremo l'AMPÈRE (A).

Si conviene poi di porre:

$$k = \frac{1}{4\pi \epsilon_0}, \quad \epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$$

ove ϵ_0 è detta COSTANTE DIELETTRICA NEL VUOTO.

Si ha allora:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21}$$

Nel caso in cui non vi sia il vuoto, si ha:

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 \epsilon_r} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{21},$$

con ϵ_r che è detta COSTANTE DIELETTRICA RELATIVA.

Tale numero puro, pari per definizione a 1 nel vuoto, vale:

- 1,0006, nell'aria (1 atmosfera);
- da 1 a 7, nel vetro;
- 80, nell'acqua.

Dati sperimentali confermano la validità di questa formula se la distanza z è tale che:

$$10^{-12} \text{ m} < z < 10^8 \text{ m}$$

CAMPO ELETTRICO, POTENZIALE ELETTRICO

Sia Q una carica puntiforme, fissa in una posizione dello spazio. Se una seconda carica q viene posta nello spazio, essa subisce una forza:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{r^2} \hat{r}$$

Il rapporto $\frac{\vec{F}}{q}$ non dipende dalla carica q , ma solo dalla posizione. Si definisce allora CAMPO ELETTRICO generato da Q :

$$\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\vec{F}}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}$$

Si può scrivere, però:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} Q$$

Il parametro temporale t , non presente nella formula, dimostra che il campo elettrico non dipende dal tempo.

L'unità di misura del campo elettrico è $\frac{N}{C}$.

La carica Q è detta SORGENTE del campo elettrico.

Vali opportunamente:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

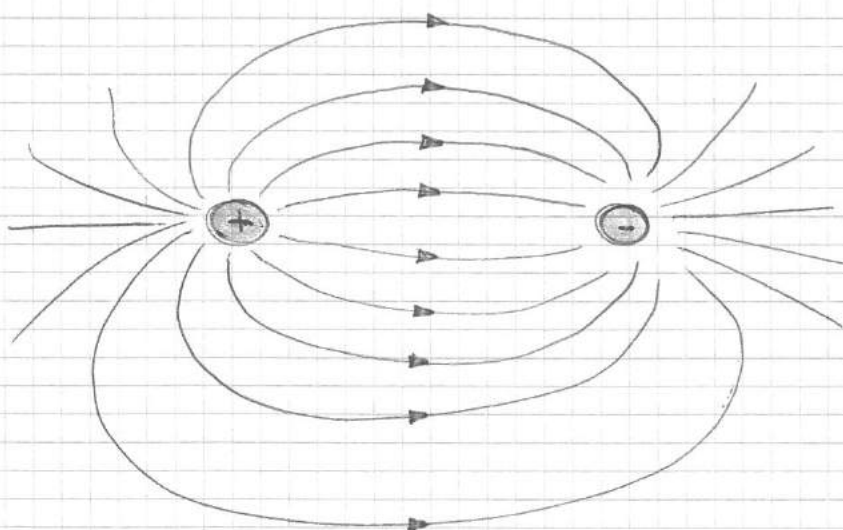
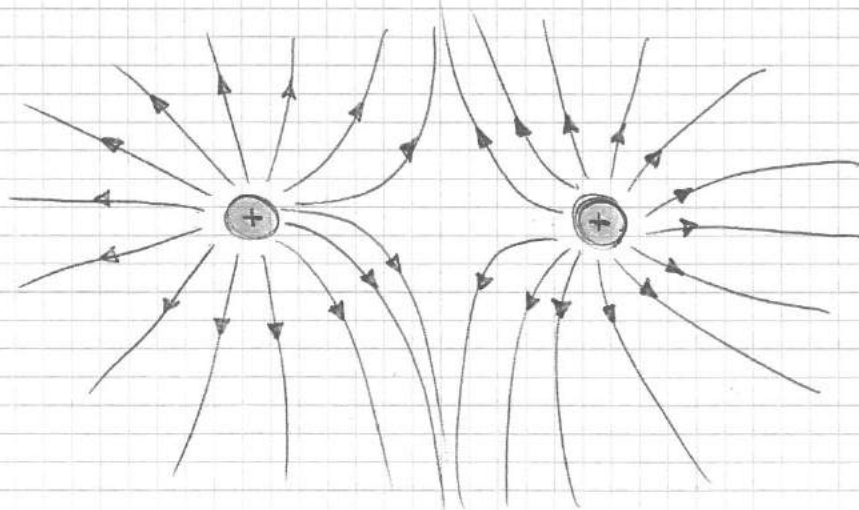
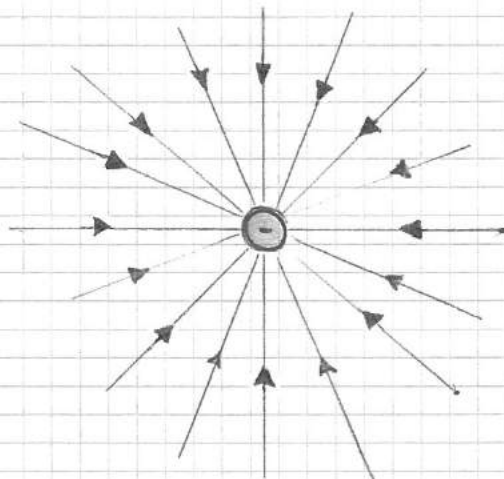
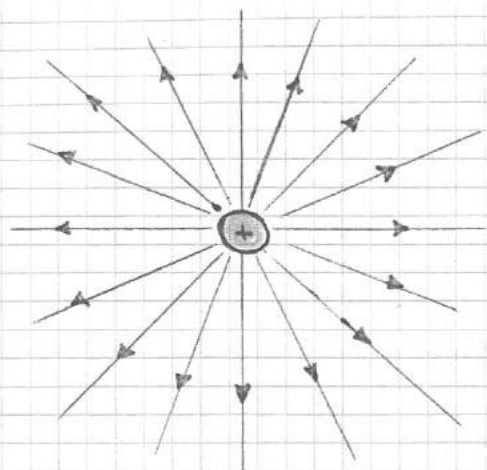
Supponiamo ora di aver fissato due cariche puntiformi Q_1 e Q_2 . Sperimentalmente si dimostra che una carica q posta nello spazio risente di una forza pari alla somma vettoriale delle forze di Coulomb esercitate da Q_1 e Q_2 . Generalizzando al caso di n cariche $Q_1, \dots, Q_n$, si ha allora:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} qQ_i = q \cdot \vec{E},$$

con:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n Q_i \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Il campo elettrico può essere rappresentato usando le linee di forza. Ecco alcuni esempi:



La forza di Coulomb è radiale, dunque conservativa.
 Data una carica Q , fissa nello spazio, il lavoro per portare una carica q da una posizione A a una posizione B è:

$$L(A \rightarrow B) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{1}{r^2} dr = \\ = U(A) - U(B),$$

ove:

$$U(P) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_p}$$

U è detta ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA: essa è l'opposto del lavoro compiuto per spostare q da una posizione di riferimento P_0 alla posizione P .

In analogia con la meccanica classica, vale:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

Ad esempio:

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}$$

Dalle seguenti relazioni:

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U$$

si ottiene:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = -\vec{\nabla} \frac{U}{q} = -\vec{\nabla} \varphi,$$

ove:

$$\varphi = \frac{U}{q}$$

è detto POTENZIALE ELETTRICO o ELETTROSTATICO.

In presenza di n cariche $Q_1, \dots, Q_n$ si ha:

$$\varphi(\vec{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

L'unità di misura del potenziale elettrico è il VOLT:

$$V = \frac{J}{C}$$

Da qui si ha l'uguaglianza dimensionale:

$$\frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

Si usa dunque affermare che l'unità di misura del campo elettrico è il VOLT-METRO:

$$[\vec{E}] = \frac{V}{m}$$

Detto che $\vec{E}$ è un campo conservativo, sono ben definite le SUPERFICI EQUIPOTENZIALI, superfici sulle quali il potenziale elettrico è costante.

L'ESPERIMENTO DI MILLIKAN

Il primo esperimento che fu condotto per scoprire che la carica elettrica è QUANTIZZATA (ovvero esiste una quantità minima di cariche, e che tutte le cariche sono multiple interi) è passato alla storia come ESPERIMENTO DI MILLIKAN.

Oggi si sa che tale valore è:

$$e \approx 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

L'esperimento fu condotto creando un condensatore a piastre piane e parallele, collegate ad un generatore di tensione. A quel tempo, si riusciva a generare un campo elettrico di intensità pari a 1000 V/m .

Spruzzando dunque, per mezzo di un polverizzatore, delle gocce d'olio, non elettricamente neutre e del diametro di 10^{-5} m , si notò che queste avevano velocità di caduta verso il basso differenti (a seconda della quantità di carica elettrica di ciascun elettrone): si notò in particolare che le varie velocità formavano un insieme di valori DISCRETO.

Si giunse dunque a dedurre che ogni carica fosse del tipo:

$$q = n \cdot e, \quad n \in \mathbb{Z},$$

con e "quantità minima di carica". Il valore di e , invece, è frutto di esperimenti più recenti.

Valle infine la relazione:

$$1 \text{ C} \approx 6,24 \cdot 10^{18} e$$

FORZA GRAVITAZIONALE E FORZA ELETTRICA

Ricordiamo che, date due cariche q_1, q_2 a distanza r , q_1 risente di una forza esercitata da q_2 , detta FORZA DI COULOMB:

$$\vec{F}_{E_{12}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12},$$

ove:

$$\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

Mostriamo che, date due masse m_1, m_2 a distanza r , la FORZA DI NEWTON esercitata da m_2 su m_1 è espressa da:

$$\vec{F}_{G_{12}} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}_{12},$$

ove:

$$G \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{N}{m \cdot kg^2}$$

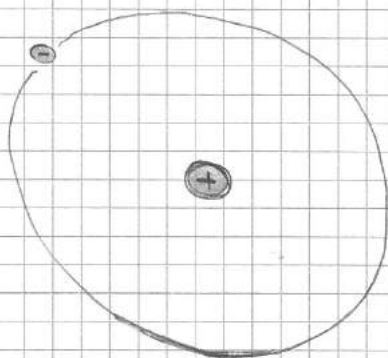
Apparentemente vi è una forte analogia tra le due formule, ma così non è:

- La forza elettrica di Coulomb può essere attrattiva o repulsiva, mentre la forza di Newton è sempre attrattiva;
- Il rapporto tra la forza elettrica di un atomo di idrogeno e la forza gravitazionale nello stesso atomo è circa $4,4 \cdot 10^{40}$: un numero elevatissimo
- La forza di Newton si percepisce solo quando sono coinvolti corpi molto grandi, mentre la forza di Coulomb è rilevante già a livello di protoni ed elettroni.

A livello di formule, comunque, vi sono forti analogie:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi & \vec{g} &= -\vec{\nabla}U \\ \vec{F} &= q\vec{E} & \vec{F} &= m\vec{g} \end{aligned}$$

Consideriamo ora il modello di Rutherford di un atomo di idrogeno:



Si ha:

- $m_e \approx 0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$;
- $m_p \approx 1836 m_e$;
- $q_e = -q_p \approx 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Una mole di idrogeno (ovvero N_A atomi di idrogeno, ove $N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23}$ è detto NUMERO DI AVOGADRO) pesa 1 g circa, e occupa un volume di 1 cm^3 .

Allora:

$$m_p \approx \frac{1 \text{ g}}{N_A} \approx 1,66 \cdot 10^{-24} \text{ g} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow m_e \approx 8,84 \cdot 10^{-28} \text{ g} =$$

$$= 8,84 \cdot 10^{-31} \text{ kg},$$

risultato non troppo lontano da $0,91 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$.

Inoltre il diametro d di un atomo di idrogeno è:

$$d \approx \frac{1 \text{ cm}}{\sqrt[3]{N_A}} \approx \sqrt[3]{1,66 \cdot 10^{-24}} \approx 1,18 \cdot 10^{-8} \text{ cm} \stackrel{\text{def}}{=} 1 \text{ \AA},$$

ove $\text{\AA}$ è una nuova unità di misura, detta ÅNGSTRÖM.

Stando al modello di Rutherford dell'atomo di idrogeno, si ha:

$$\bullet \quad F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \approx 8,987 \cdot 10^9 \cdot 2,56 \cdot 10^{-38} \cdot 10^{20} \approx$$

$$\approx 23 \cdot 10^{-7} \text{ N};$$

$$\bullet \quad F_G = G \frac{m_e m_p}{r^2} \approx 6,67 \cdot 10^{-11} \cdot \frac{10^{-30} \cdot 1,836}{1,7 \cdot 10^{-10}} \approx 0,7 \cdot 10^{-47} \text{ N.}$$

Allora:

$$\frac{F_E}{F_G} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \cdot \frac{r^2}{G m_e m_p} \approx 3,3 \cdot 10^{40}$$

Conti più precisi portano al risultato:

$$\frac{F_E}{F_G} \approx 4,4 \cdot 10^{40}$$

Tuttavia, le particelle si combinano (in presenza di fattori esterni) in modo da cancellare le forze elettriche, formando dunque materia neutra.

Il potenziale elettrico di un atomo vale:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e}{r} \approx 8,987 \cdot 10^9 \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{r}$$

$$\varphi \approx 14,4 \cdot \frac{10^{-8} \text{ V} \cdot \text{cm}}{r}$$

Nel dettaglio, vale:

$$\varphi \approx 14,4 \frac{\text{Å}}{r} \text{ V}$$

Studiamo ora l'energia di legame di un elettrone. Si ha, sommando le energie cinetica e potenziale:

$$E = \frac{m_e}{2} v_e^2 - k \frac{e^2}{r} = \frac{k}{2} \frac{e^2}{r} - k \frac{e^2}{r} = - \frac{k}{2} \frac{e^2}{r}$$

dato che (supponendo che l'elettrone si muova di moto circolare uniforme):

$$\frac{m_e v_e^2}{r} = k \frac{e^2}{r^2}$$

Si ha dunque:

$$E = - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{r} \approx - 4,5 \cdot 10^9 \cdot \frac{10^{-38}}{10^{-10}} \approx - 4,5 \cdot 10^{19}$$

Si ha, con conti più accurati, per $r \approx 0,5 \text{ \AA}$:

$$\bar{E} \approx -13,6 \text{ eV},$$

ovvero:

$$1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J},$$

è l'energia che un singolo elettrone acquista passando per una differenza di potenziale di 1V.

Infine, stimiamo la velocità dell'elettrone. Si ha:

$$\begin{aligned} \frac{m_e v_e^2}{2} &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \Rightarrow v_e = \sqrt{\frac{e^2}{m_e 4\pi\epsilon_0 r}} \approx \\ &\approx \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{10^{-15} \cdot 10^{-5} \cdot 10^{-5}} \approx 1,6 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}} \approx \frac{c}{137} \ll c, \end{aligned}$$

ovvero:

- c è la velocità della luce:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}};$$

- $137 \approx 137,036$ è detta COSTANTE DI STRUTTURA FINE.

L'elettrone non è dunque relativistico: la sua velocità, infatti, è molto meno elevata di quella della luce.

ALCUNI ESERCIZI

Ex. Una bacchetta ha una sezione di 1 cm^2 . Che forza bisogna avere per romperla?

Se la materia è costituita da atomi di dimensione $a_0 \sim 1 \text{ \AA}$ legati dalla forza di Coulomb, si ha:

$$\bullet N = \frac{1 \text{ cm}^2}{1 \text{ \AA}^2} \approx 10^{16};$$

$$\bullet F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \approx 10^{-8} \text{ N.}$$

Allora:

$$F_{\text{tot}} = F_1 \cdot N \approx 10^8 \text{ N}$$

Non abbiamo distinto tra idrogeno, gas, ferro, né abbiamo considerato che i legami intermolecolari sono meno intensi dei legami tra protoni ed elettroni all'interno di uno stesso atomo.

La stima è dunque dell'alto:

$$F_{\text{tot}} \lesssim 10^8 \text{ N}$$

Ex. Stimare l'energia liberata in una reazione chimica, assumendo che essa abbia origine elettromagnetica.

1 cm^3 di idrogeno contiene circa N_A atomi, cioè sono con un'energia di legame di 1 eV , come visto precedentemente. Concludiamo che, in una reazione chimica, sono liberati o richiesti:

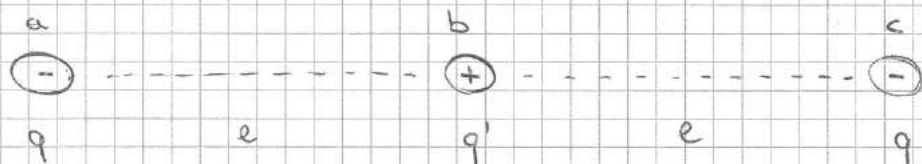
$$N_A \cdot 1 \text{ eV} \approx 10^5 \text{ J} \approx 10^3 \text{ kcal}$$

Questa è comunque una sovrastima.

SISTEMI DI CARICHE IN EQUILIBRIO STABILE

Vogliamo, in questo paragrafo, capire se è possibile assemblare un sistema di cariche elettriche in modo che sia elettricamente stabile.

Sicuramente, dobbiamo considerare almeno 3 cariche. Consideriamo la seguente configurazione:



Quindi:

$$E_b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{e^2} \hat{r}_{ba} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{e^2} \hat{r}_{bc} = 0,$$

in quanto i vettori sono uguali a meno del verso (che è opposto). Imponiamo:

$$\vec{E}_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{e^2} \hat{r}_{ab} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4e^2} \hat{r}_{ca} = 0$$

Alcuni risagmas fanno:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q'}{e^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{4e^2} \Rightarrow q' = -\frac{q}{4}$$

Con questa scelta, dunque, il sistema è in equilibrio. Tuttavia l'equilibrio è instabile. Infatti, il campo elettrico per $(x, y, z) \approx (0, 0, 0)$ è:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-e+x), -y, -z}{((e+x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(e-x), -y, -z}{((e-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Quindi:

- $E_y(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2y)}{e^3};$
- $E_z(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-2z)}{e^3}.$

Finora le componenti di $\vec{E}(x, y, z)$ risultano tutte attrattive: se anche E_x lo è, q' risulta in equilibrio stabile.

Sfortunatamente non è così. Si ha infatti:

$$\begin{aligned}\vec{E}(x, y, z) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{e-x}{e^2(e-3x)} - \frac{e+x}{e^2(e+3x)} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{(e-x)(e+3x) - (e+x)(e-3x)}{e^2(e-3x)(e+3x)} \right] = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\cancel{e^2} - 3x^2 + 2ex - \cancel{e^2} - 3x^2 + 2ex}{e^2(e^2 - 9x^2)} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{4x}{e(e^2 - 9x^2)} \approx \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4x}{e^3}\end{aligned}$$

Dunque:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \begin{bmatrix} 4x \\ -2y \\ -2z \end{bmatrix},$$

e l'equilibrio non è stabile per piccole perturbazioni lungo l'asse x .

Notiamo che il vettore:

$$\begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ -2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

è tale che:

- La prima coordinata ha segno opposto alle altre due;
- La somma dei coefficienti è 0.

In effetti, neanche a e c (il conto è analogo, lo facciamo per a) è in equilibrio stabile. In particolare:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e-x, -y, -z)}{((2e-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \frac{(e-x, -y, -z)}{(e-x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}},$$

e in particolare:

$$\begin{aligned}E_x(x, y, z) &= -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{2e-x}{8e^3 - 12e^2x} + \frac{q}{16\pi\epsilon_0} \frac{e-x}{e^2(e-3x)} = \\ &= -\frac{q}{16\pi\epsilon_0} \left[\frac{(2e-x)}{e^2(2e-3x)} - \frac{(e-x)}{e^2(e-3x)} \right] =\end{aligned}$$

$$= -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 e^2} \left[\frac{2e^2 + 3x^2 - 7ex - 2e^2 - 3x^2 + 5ex}{2e^2 - 9ex + 9x^2} \right] \approx$$

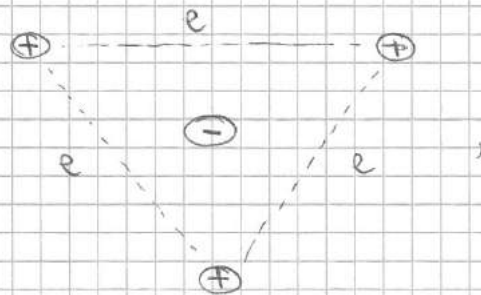
$$= -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 e^2} \cdot \frac{-2ex}{2e} = -\frac{q}{16\pi\epsilon_0 e^3} (-x)$$

In sostanza, si ha:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 e^3} \begin{bmatrix} \frac{x}{4} \\ \frac{x}{8} \\ -\frac{x}{8} \end{bmatrix},$$

e anche questo vettore ha le caratteristiche citate prima.

Potremmo provare un'altra configurazione, ad esempio la seguente:

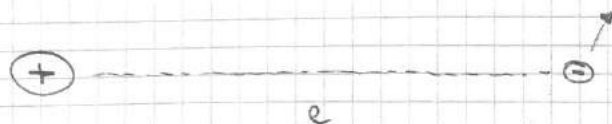


con la carica negativa nel baricentro. Purtroppo neanche in questa configurazione si ha equilibrio stabile.

Anche supponendo che, data una configurazione in cui tutte le cariche meno una sono in equilibrio stabile, si dimostra che l'equilibrio dell'ultima è instabile.

Sembra allora che non esistano configurazioni stabili anche per una sola carica. In effetti ciò è vero, ed è legato in qualche modo alle proprietà dei vettori enunciate precedentemente.

In generale, sia Q una carica fissa, e sia q una carica posta nella vicinanza di Q :



Allora q risente, nella posizione $(e, 0, 0)$, di una forza elettrica $\vec{F}$ con:

$$F_x = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qq}{e^2}, \quad F_y = F_z = 0$$

Supponiamo ora che q vari la sua posizione, e che si trovi nella posizione $(e+x, y, z)$, con $(x, y, z) \approx \underline{0}$: supponiamo allora lo spostamento infinitesimo.

Si ha, sostituendo il numero 3 con un generico $p \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$$\begin{aligned} \vec{E}(x, y, z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{x}}{x^p} = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{((e+x), y, z)}{((e+x)^2 + y^2 + z^2)^{\frac{p}{2}}} \end{aligned}$$

Dato che, mediante uno sviluppo di Taylor al primo ordine, si ha:

$$(e+x)^{-p} \approx e^{-p} \left(1 - \frac{p x}{e}\right),$$

si ha:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 e^p} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{e} \begin{bmatrix} (1-p)x \\ y \\ z \end{bmatrix} \right\},$$

e per $p = 3$:

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 e^3} \begin{bmatrix} 1 - \frac{2x}{e} \\ \frac{y}{e} \\ \frac{z}{e} \end{bmatrix}$$

Dunque il vettore:

$$\frac{1}{e} \begin{bmatrix} -2x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

è effettivamente tale che la somma dei coefficienti è nulla.

Quindi non è mai possibile che una carica sia in equilibrio stabile, in quanto, se la somma dei coefficienti di quel vettore è nulla, le componenti non possono essere tutte dello stesso segno.

ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA E DENSITÀ VOLUMETRICA, SUPERFICIALE, LINEARE DI CARICA

Consideriamo un corpo a tre dimensioni, di volume V , elettricamente carico.

Si definisce DENSITÀ VOLUMETRICA DI CARICA nel punto p :

$$\rho_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{dV}$$

Se invece consideriamo una superficie elettricamente carica, si definisce DENSITÀ SUPERFICIALE DI CARICA (nel punto p):

$$\sigma_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{dS}$$

Infine, se consideriamo un filo elettricamente carico, si definisce DENSITÀ LINEARE DI CARICA nel punto p :

$$\lambda_p \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dQ}{de}$$

È dunque dq una carica infinitesimale, vale:

$$dq = \rho dV + \sigma dS + \lambda de,$$

e tale formula è particolarmente utile nel caso in cui si hanno distribuzioni uniformi di cariche.

In precedenza abbiamo visto che, per un sistema finito di cariche, si definisce ENERGIA POTENZIALE ELETTRICA:

$$U = \sum_{i>j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Se invece si ha un sistema continuo di cariche:

$$U = \iint_V \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

Supponendo ad esempio che vi siano solamente cariche volumetriche:

$$U = \iint_V \frac{dq_1 dq_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|} =$$

$$= \iint_V \rho(\vec{r}_1) \rho(\vec{r}_2) \frac{dV_1 dV_2}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\|}$$

Questa formula, tuttavia, è poco pratica, e quindi molto poco usata.

Piuttosto, ricordiamo che:

$$\varphi(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}_i\|} \rightsquigarrow \int_V \frac{dq'}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

$$\varphi(\vec{r}) = \int_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{4\pi\epsilon_0 \|\vec{r} - \vec{r}'\|}$$

Allora, dall'uguaglianza:

$$U = \frac{1}{2} \sum_j q_j \varphi(\vec{r}_j),$$

si ottiene la seguente formula, ben più pratica:

$$U = \frac{1}{2} \int_V dq \varphi,$$

e supponendo che vi siano solamente cariche volumetriche, perfino distribuite uniformemente:

$$U = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi dV$$

Infine, vale anche:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{\vec{r} - \vec{r}_q}{\|\vec{r} - \vec{r}_q\|^3} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} dq$$

Vale ancora, ovviamente, la relazione:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$$

FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$, una qualunque superficie sufficientemente regolare può essere localmente orientata, mediante l'assegnamento di un vettore $\vec{n}$ ad essa ortogonale: esso si definisce **VERSO RE NORMALE ESTERNO**. Il verso è deciso automaticamente mediante la "regola della mano destra", ma svolgiamo su queste questioni.

Si ha dunque, per un elemento infinitesimo di superficie $d\vec{S}$:

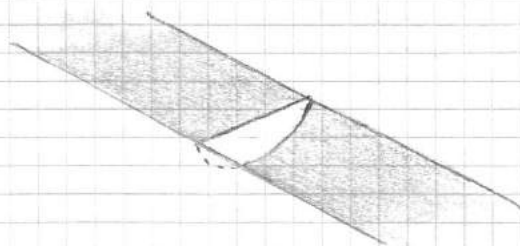
$$d\vec{S} = \hat{n} ds$$

In fisica, in presenza di fenomeni di TRASPORTO, si definisce **FLUSSO** il rapporto tra la quantità di grandezza che attraversa nell'unità di tempo una data superficie, e l'area della superficie stessa. Esso si indica, di solito, con la lettera maiuscola Φ .

Ad esempio, il flusso del fiume Reno alla foce è all'incirca:

$$\Phi \approx 110 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$$

Cio' vuol dire che, considerate una superficie S come quella nella figura sottostante, in media vi è un passaggio, attraverso quella superficie, di $110 \frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ per unità di superficie:



In generale, dato che il flusso non varia se si considera una superficie, ad esempio, con un'angolazione diversa, il flusso è dato da:

$$\Phi = \int_S \vec{v}(x, y, z, t) \cdot \hat{n} \, d\sigma,$$

ove $\vec{v}(x, y, z, t)$ indica la velocità registrata nel punto (x, y, z) all'istante t , nel caso di un flusso d'acqua.

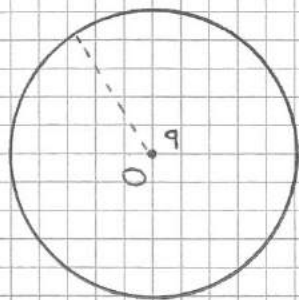
Nel caso elettrostatico, si definisce FLUSSO DEL CAMPO ELETTRICO:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \hat{n} \, d\sigma$$

All'analisi del flusso del campo elettrico è legato un'importante risultato, il TEOREMA DI GAUSS, che esponiamo nel prossimo paragrafo.

TEOREMA DI GAUSS

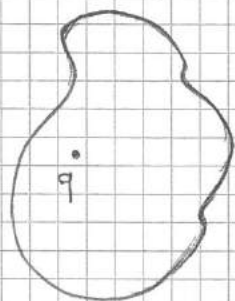
Consideriamo una superficie sferica S di raggio r e centro O , e una carica puntiforme q posizionata in O .



Calcoliamo il flusso del campo elettrico uscente dalla superficie. Si ha:

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \, d\sigma = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \int_S d\sigma = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

Consideriamo ora una superficie chiusa arbitraria, e una carica puntiforme posta in un punto qualsiasi:



In questo caso, per il TEOREMA DI GAUSS, si ha comun-
que:

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0}$$

In particolare, considerate una superficie chiusa S e una carica q esterna alla superficie, il flusso del campo elettrico entrante è uguale a quello uscente, da cui:

$$\Phi_E = 0$$

TEOREMA (DI GAUSS)

Dato una superficie chiusa S e un sistema di cariche puntiformi $(q_\alpha)_{\alpha \in A}$ in $\mathbb{R}^3$, vale:

$$\Phi_E = \frac{1}{\epsilon_0} \left(\sum_{\alpha \in S} q_\alpha \right),$$

ove Φ_E indica il flusso del campo elettrico uscente da S .

OSSERVAZIONE

Mediante il teorema di Gauss possiamo dimostrare in maniera elegante e stringata la non esistenza di configurazioni di cariche elettriche in equilibrio stabile.

In un qualsiasi punto dello spazio, infatti, considero un intorno del tipo $B(\underline{x}, \delta)$, con $\underline{x} \in \mathbb{R}^3$ e $\delta > 0$, che non contenga cariche al suo interno, si ha:

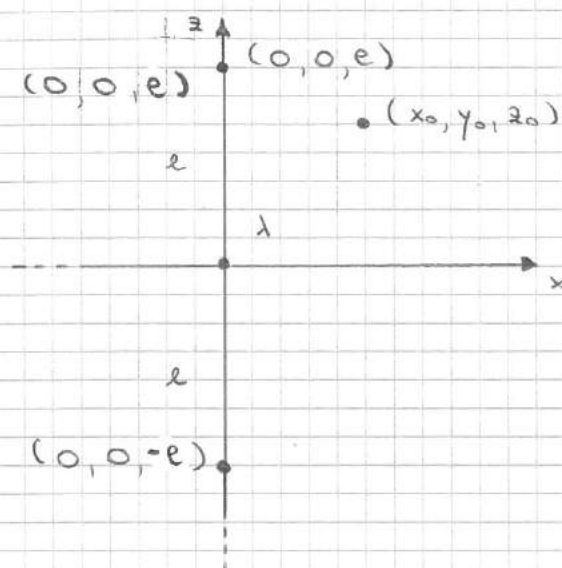
$$\Phi_E = 0,$$

da cui il campo è necessariamente sia entrante che uscente dalla sfera: se avessimo invece una posizione di equilibrio stabile, il campo dovrebbe essere solamente entrante.

La non esistenza di tali configurazioni è nota come **TEOREMA DI EARNSHAW**.

STUDIO DI UN FILO

Consideriamo un filo, di lunghezza finita $2l$, uniformemente carico, con una densità lineare di carica λ :



Calcoliamo il potenziale nel punto (x_0, y_0, z_0) .

Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z_0) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\lambda dz}{r} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dz}{r(x_0, y_0, z_0)} \end{aligned}$$

Poniamo $z' = z - z_0$. Si ha:

$$\begin{aligned} \varphi(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - z_0)^2}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l-z_0}^{l-z_0} \frac{dz'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z'^2}} = \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln \left(z' + \sqrt{x^2 + y^2 + z'^2} \right) \right]_{-l-z_0}^{l-z_0} \end{aligned}$$

Calcoliamo ora il campo elettrico, usando le coordinate cilindriche:

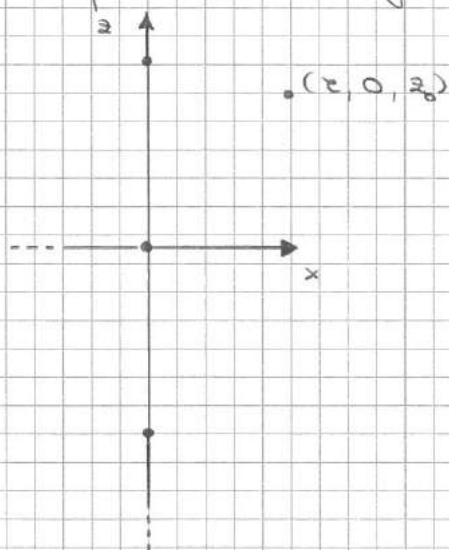
$$\vec{E}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\vec{v}}{v^3} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{\lambda dz}{r^2(z^2 + (z - z_0)^2)} \cos \theta(r, z),$$

ove:

- il punto considerato ha coordinate $(r, 0, z_0)$;

- $\cos \theta(r, z) = \frac{z}{\sqrt{r^2 + (z - z_0)^2}}$, al variare di r e z .

Ci troviamo dunque nella seguente situazione:



Sostituendo $z - z_0$ con $z' \in [-e - z_0, e - z_0]$, si ottiene dunque:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-e-z_0}^{e-z_0} \frac{\lambda z' dz'}{(r^2 + z'^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{z}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right]_{-e-z_0}^{e-z_0}$$

Se chiamiamo p la distanza del punto dal filo, e $p \ll e$, allora:

$$E_c = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$$

In effetti:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \left[\frac{z}{\sqrt{r^2 + z'^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\cancel{2}1}{2\pi\epsilon_0 r} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0 r}$$

In particolare, la formula è valida per un filo ideale di lunghezza infinita.

Lo stesso risultato si può ottenere facilmente usando in maniera opportuna il teorema di Gauss.

Consideriamo un cilindro di raggio r , avente asse coincidente con una porzione del filo, di altezza h , come in figura (ricordiamo che il filo ha lunghezza infinita):



Essendo il campo elettrico nullo lungo la componente z :

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda h}{\epsilon_0}$$

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = E(r) 2\pi r h,$$

da cui:

$$E(r) = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \frac{1}{2\pi r h} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r}$$

Notiamo che, nel caso di un filo di lunghezza infinita:

$$\varphi(r) = \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{\sqrt{r^2 + z^2}} = +\infty$$

Avendo cariche all'infinito, non è infatti possibile porre $\varphi(\infty) = 0$. Finendo invece $\varphi(r_0) = 0$ per un certo r_0 :

$$\begin{aligned} \varphi(r) &= \frac{\lambda}{4\pi \epsilon_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{r_0^2 + z^2}} \right] dz = \\ &= -2K\lambda \ln \frac{r}{r_0} = -2K\lambda \ln r + 2K\lambda \ln r_0, \end{aligned}$$

con $2K\lambda \ln r_0$ costante.

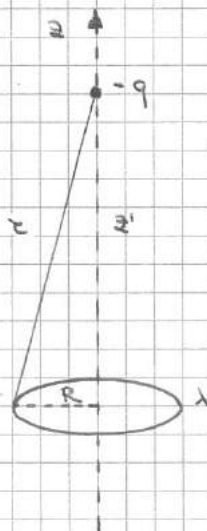
Chiaramente, vale $\vec{E} = -\vec{\nabla} \varphi$. Ad esempio:

$$E_r = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} = + \frac{2K\lambda}{r} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r},$$

come ci si aspettava.

STUDIO DI UN ANELLO CIRCOLARE

Consideriamo nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ un anello carico circolare di raggio R , carico uniformemente con una densità lineare di carica $\lambda > 0$. Sull'asse passante per il centro dell'anello e ortogonale al piano su cui l'anello giace, è vincolata a muoversi una particella di carica negativa $-q$:



Calcoliamo innanzitutto il campo elettrico (o meglio, la sua componente lungo z):

$$\begin{aligned} E_z(z') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3} dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{z'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} \lambda d\ell = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} (2\pi R \lambda) = \frac{R \lambda z'}{2\epsilon_0 (R^2 + z'^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

Alternativamente, dato che il potenziale in funzione di z' è:

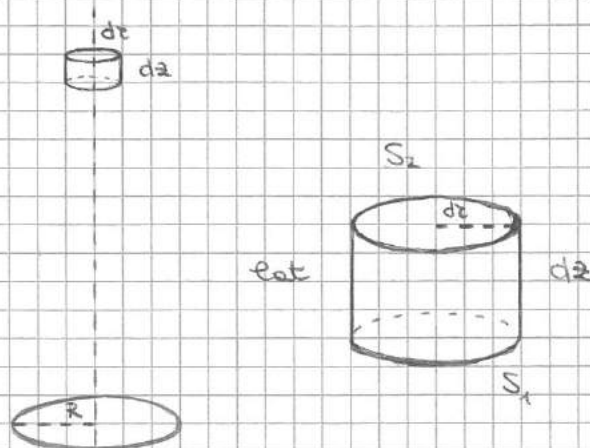
$$\begin{aligned} \varphi(z') &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{\|\vec{r}\|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda d\ell}{(R^2 + z'^2)^{1/2}} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{(R^2 + z'^2)^{1/2}} (2\pi R) = \frac{\lambda R}{2\epsilon_0 (R^2 + z'^2)^{1/2}}, \end{aligned}$$

sfruttando la relazione $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$ otteniamo:

$$E_z(z') = -\frac{\partial \varphi(z')}{\partial z'} = -\frac{1}{4\epsilon_0} \frac{\lambda R}{(R^2 + z'^2)^{3/2}} 2z' = -\frac{\lambda R z'}{2\epsilon_0 (R^2 + z'^2)^{3/2}},$$

come ci si aspettava.

Applichiamo ora il Teorema di Gauss sul cilindro rappresentato nel disegno, di altezza dz e raggio dr :



Più precisamente, data l'esistenza di cariche interne:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{n} \, dV = 0$$

Si ha ora (se consideriamo positivo il flusso uscente):

- $\Phi(S_1) = -\pi(dr)^2 E_z(z)$;
- $\Phi(S_2) = \pi(dr)^2 E_z(z + dz)$,

da cui:

$$\Phi(S_{lat}) = -\pi(dr)^2 E_z(z + dz) + \pi(dr)^2 E_z(z),$$

con:

$$\Phi(S_{lat}) = \int_{S_{lat}} \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = E_r(z) \cdot 2\pi dr dz,$$

da cui:

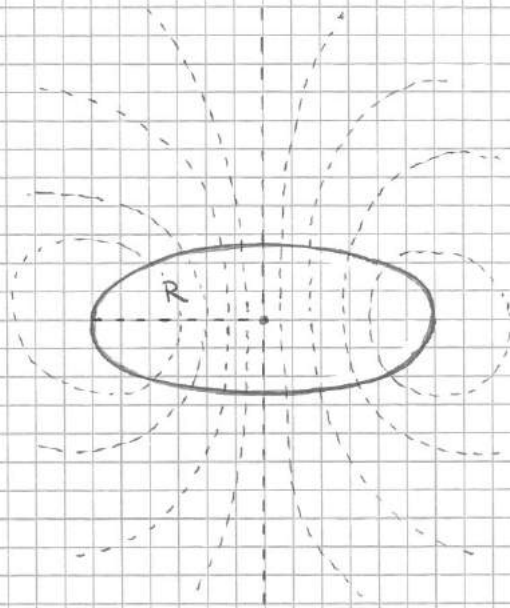
$$\begin{aligned} E_r(z) &= -\pi(dr)^2 dz \frac{\partial E_z(z)}{\partial z} \frac{1}{2\pi dr dz} = \\ &= -\frac{dr}{2} \frac{\partial E_z(z)}{\partial z}, \end{aligned}$$

da cui, essendo:

$$\frac{\partial E_z(z)}{\partial z} < 0,$$

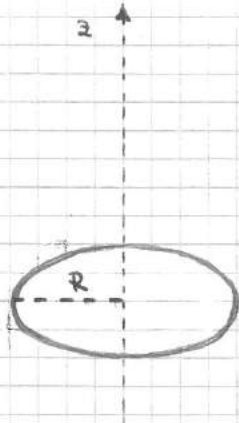
si ha che il flusso calcolato lungo la superficie laterale è uscente: dunque non vi sono zone di equilibrio stabile.

Le campo elettrico generato presenta dunque la seguente
linea di forza, approssimativamente:



CAMPO ELETTRICO DI UN PIANO

Consideriamo ora una piastra piana e circolare carica, con densità superficiale di carica σ , di raggio R :



Lungo l'asse z si ha, per motivi di simmetria, che il campo elettrico è nullo nelle componenti x, y .

Si ha:

$$\begin{aligned} E(z) = E_z(z) &= \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(r^2+z^2)^{3/2}} \sigma(2\pi r) dr = \\ &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \int_0^R \frac{r dr}{(r^2+z^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{r^2+z^2}} \right]_0^R = \\ &= -\frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{R^2+z^2}} - \frac{1}{z} \right] = \\ &= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1 \right] \end{aligned}$$

Nel caso in cui $R \ll z$:

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow 0^+} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2+z^2}} - 1 \right] &= \lim_{R \rightarrow 0^+} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{1+\frac{R^2}{z^2}}} - 1 \right] = \\ &= \lim_{R \rightarrow 0^+} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{R^2}{z^2} - 1 \right] = \frac{\sigma}{4\epsilon_0} \frac{R^2}{z^2} = \\ &= \frac{\sigma \pi R^2}{4\pi \epsilon_0 z^2} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q}{z^2}, \end{aligned}$$

da cui la piastra carica si può modellizzare con una carica puntiforme, di carica:

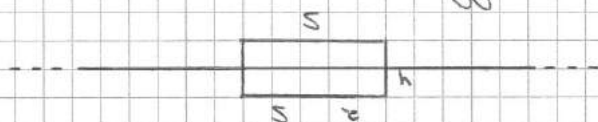
$$Q = \pi R^2 \sigma$$

Nel caso in cui, invece, si ha $z \ll R$, si può pensare ad un "piano infinito". Infatti:

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} - 1 \right] = \lim_{R \rightarrow +\infty} -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left[\frac{z}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{z^2}{R^2}}} - 1 \right] =$$

$$= -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Consideriamo ora un piano idealmente infinito, e un cilindro di altezza h e raggio r :



Per il Teorema di Gauss:

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 2 \Phi_E(S) =$$

$$= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\sigma \pi r^2}{\epsilon_0},$$

da cui:

$$\Phi_E(S) = E(z) \pi r^2 \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

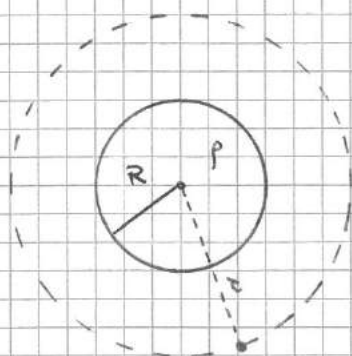
come ci si aspettava.

Da qui si ha che:

$$\varphi(z) = -\frac{\sigma |z|}{2\epsilon_0}$$

CAMPO ELETTRICO DI UNA SFERA: DUE VARIANTI

Consideriamo ora una sfera uniformemente carica, con densità volumetrica di carica ρ , di raggio R :



Per ogni modo di simmetria, il campo elettrico è radiale. Consideriamo dunque $P = (r, 0, 0)$. Si ha:

$$E_r(r) = E_x(P) = \frac{\rho}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi 2\pi R^2 \sin\theta \frac{r - R\cos\theta}{[(r - R\cos\theta)^2 + R^2\sin^2\theta]^{\frac{3}{2}}} d\theta$$

OSSERVAZIONE

Una piccola nota storica: pare che J. Newton si fosse imbattuto in questo integrale, e abbia impiegato 20 anni per risolverlo.

Mediante il Teorema di Gauss possiamo aggirare l'ostacolo.

Per $r > R$ si ha:

$$\Phi_E(r) = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{\epsilon_0},$$

da cui:

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho \frac{4}{3}\pi R^3}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2},$$

da cui, per $r > R$, è come se la carica totale fosse una carica puntiforme, concentrata nel centro della sfera.

Se invece $r < R$, si ha, sempre usando il Teorema di Gauss con una sfera di raggio r :

$$\Phi_E(Sr) = \int_{Sr} \vec{E} \cdot \vec{n} d\sigma = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_r}{\epsilon_0} = \rho \frac{4\pi r^3}{3\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0} \frac{r^3}{R^3} \Rightarrow$$

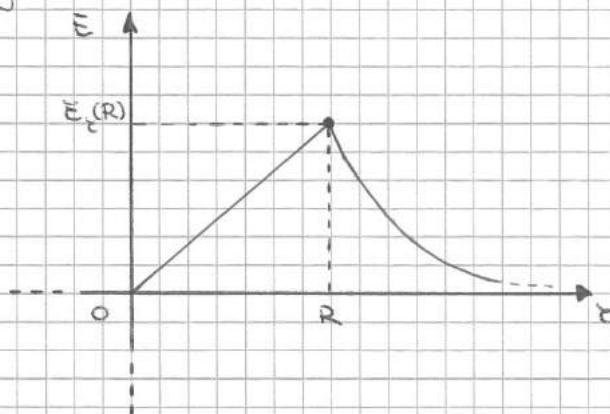
$$\Rightarrow E_r(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} r,$$

da cui E_r dipendenza $\propto$ lineare.

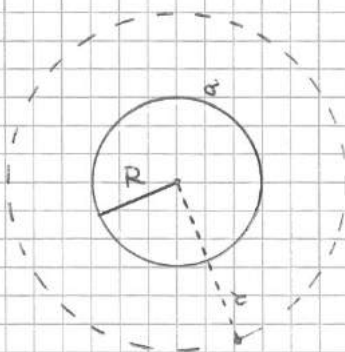
Per $r=R$, notando, si ha continuità:

$$E_r(R) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$$

Il grafico dell'intensità del campo elettrico è dunque il seguente:



Consideriamo ora una sfera uniformemente carica solamente in superficie, con densità di carica σ , di raggio R :



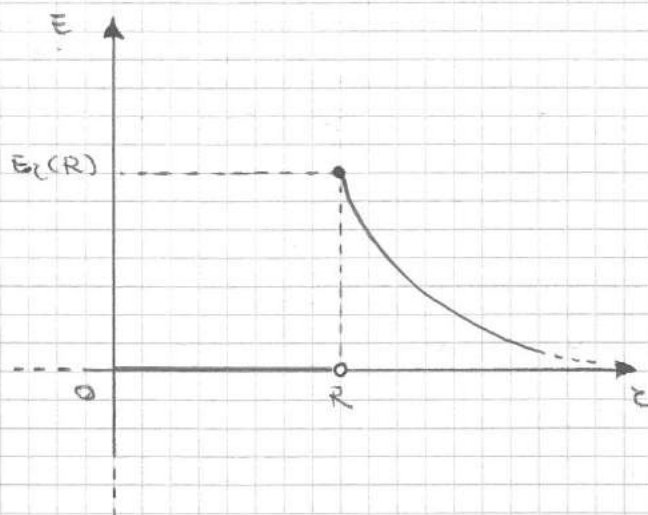
Innananzitutto, per il Teorema di Gauss, se $r < R$:

$$E_r(r) = 0$$

Per il conto effettuato precedentemente, invece, se $r \geq R$:

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma 4\pi R^2}{r^2} = \frac{\sigma R^2}{\epsilon_0 r^2}$$

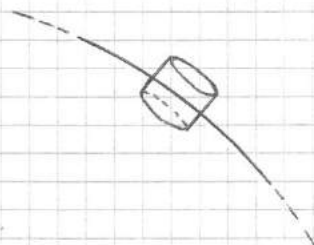
Il grafico dell'intensità del campo elettrico, in questa caso, è:



Il potenziale φ , che è una funzione continua in questo $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, è costante per $R \geq z$. Si ha dunque:

$$\varphi_z(z) = \begin{cases} \frac{\partial R^2}{\epsilon_0 z}, & z > R \\ k, & z \leq R \end{cases}$$

Quanto vale k ? Usiamo il Teorema di Gauss, usando un cilindro che attraversa la superficie, di raggio a e altezza infinitesimi:



Approssimando la superficie della sfera, in prossimità del cilindro, con un piano infinito, si ha:

$$\begin{aligned} \Phi_E(C) &= 2\pi z E_z(R+dh) = \\ &= 2\pi z^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ &\Rightarrow E_z(R) = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

da cui $k = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$. Altrimenti, per continuità:

$$\lim_{z \rightarrow R^+} \frac{\partial R^2}{\epsilon_0 z} = k = \frac{\sigma R}{\epsilon_0} \Rightarrow k = \frac{\sigma R}{\epsilon_0}$$

A questo punto, per concludere, calcoliamo l'energia elettrostatica:

$$U = \frac{1}{2} \int_S dq \varphi = \frac{1}{2} \frac{R\sigma}{\epsilon_0} 4\pi R^2 = 2 \frac{R^3 \sigma^2 \pi}{\epsilon_0}$$

Dato che:

$$Q = 4\pi R^2 \sigma,$$

vale anche:

$$U = 2 \frac{R^3 \sigma^2 \pi}{\epsilon_0} = \frac{1}{8} \frac{(4\pi R \sigma)^2}{\pi R \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Q^2}{R},$$

e questa formula vale per corpi generici, opportunamente modificata.

STATI LIBERI E LEGATI

Abbiamo dimostrato che il campo elettrico e l'energia elettrostatica hanno intensità:

$$E_3 = O\left(\frac{1}{r^2}\right), \quad U_3 = O\left(\frac{1}{r}\right),$$

nel caso di una carica puntiforme nello spazio.

Assimilando un filo infinito nello spazio come un punto nel piano, potremmo sostenere che in 2 dimensioni si ha:

$$E_2 = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad U_2 = O(\ln r)$$

Assimilando un piano infinito nello spazio potremmo sostenere che in 1 dimensione si ha:

$$E_1 = O(1), \quad U_1 = O(r)$$

Potremmo dunque, in vista del tutto ipotetico, compilare la seguente tabella, in funzione della dimensione:

D	E	U
1	$O(1)$	$O(r)$
2	$O\left(\frac{1}{r}\right)$	$O(\ln r)$
3	$O\left(\frac{1}{r^2}\right)$	$O\left(\frac{1}{r}\right)$
4	$O\left(\frac{1}{r^3}\right)$	$O\left(\frac{1}{r^2}\right)$
5	$O\left(\frac{1}{r^4}\right)$	$O\left(\frac{1}{r^3}\right)$
...		

Il caso a 3 dimensioni funziona dal punto di vista fisico (e lo dice "l'esperienza"), mentre gli altri casi sono fisicamente impossibili. Vediamo perché.

Nei casi 1 e 2, si ha:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} |U(r)| = +\infty$$

Dato che l'energia elettrica è conservativa, se la carica puntiforme è detta q , allora, detta q' una particella interagente con q , ossia una particella

di massa m e carica q (cariche opposte) si ha:

$$E_{\text{tot}} = \frac{1}{2} m q v_q^2 + U_q \Rightarrow$$
$$\Rightarrow U_q = E_{\text{tot}} - \frac{1}{2} m q v_q^2 \leq E_{\text{tot}}$$

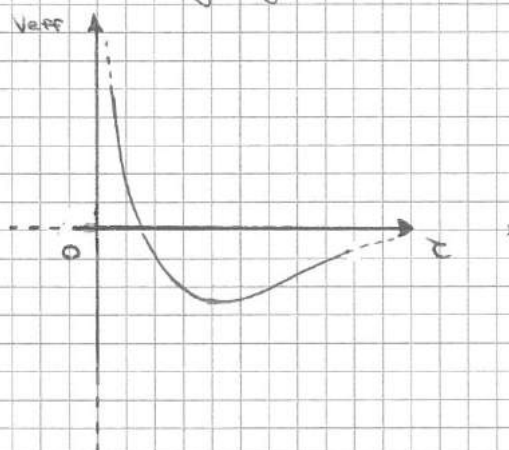
da cui la particella non potrebbe allontanarsi indefinitamente da Q .

Non esisterebbero dunque le cosiddette CARICHE LIBERE, e ciò è fisicamente inammissibile.

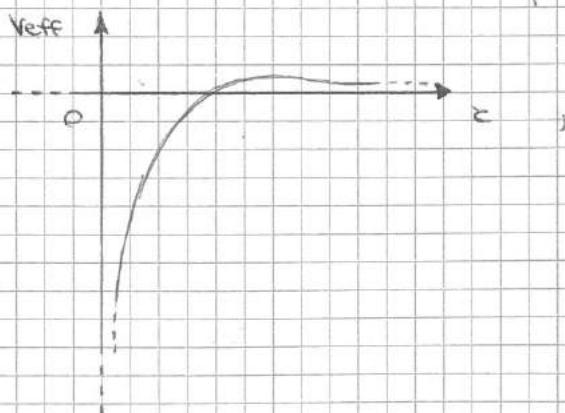
Per $d \geq 3$, ricordiamo brevemente la definizione di POTENZIALE EFFICACE:

$$V_{\text{eff}} = V + \frac{L^2}{2\mu r^2}$$

Nel caso $d = 3$, si ha un grafico simile al seguente:



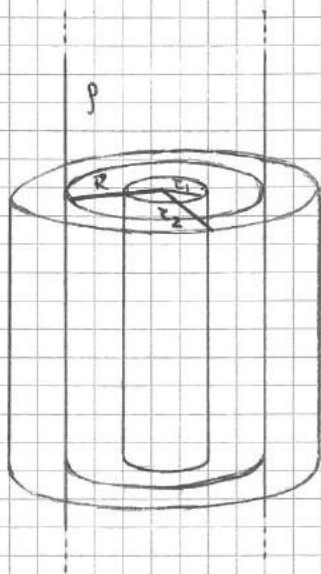
e questo grafico giustifica la presenza in natura di oggetti orbitanti, ad esempio. Se $d \geq 4$, si ha invece un grafico, fisicamente inammissibile, come questo:



da cui non potrebbero esistere CARICHE LEGATE.

CAMPO ELETTRICO DI UN CILINDRO

Consideriamo un cilindro avente raggio R , lunghezza idealmente infinita, e densità volumetrica di cariche uniforme ρ :



Per $r > R$, usando il Teorema di Gauss applicato a un cilindro di raggio maggiore e altezza h , si ha, essendo il campo elettrico radiale:

$$\Phi_E = 2\pi r h E_r(r) = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0},$$

da cui:

$$E_r(r) = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0 2\pi r h} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$$

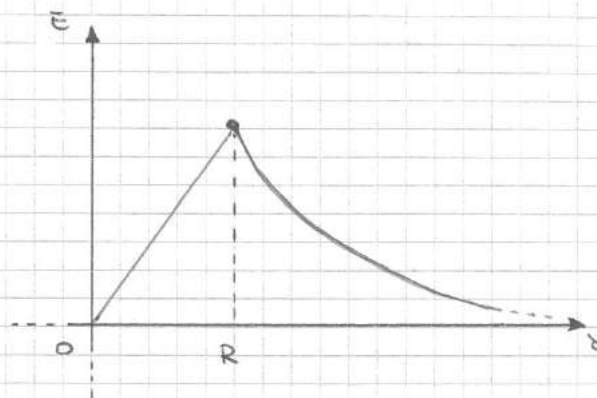
Se invece $r < R$, allo stesso modo:

$$\begin{aligned}\Phi_E = 2\pi r h E_r(r) &= \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow E_r(r) &= \frac{\rho r}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

da cui, in sintesi:

$$E_r(r) = \begin{cases} \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} & , r > R \\ \frac{\rho r}{2\epsilon_0} & , r \leq R \end{cases}$$

Il grafico dell'intensità del campo elettrico è all'incirca il seguente:



Calcoliamo ora il potenziale in funzione del raggio. Si ha, ponendo $\varphi(r_0) = 0$ (con r_0 da calcolare):

$$\begin{aligned}\varphi(r) &= - \int_{r_0}^r \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} ds = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left[\ln s \right]_{r_0}^r = \\ &= - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{r}{r_0} \right),\end{aligned}$$

per $r > R$. Per $r < R$, si ha:

$$\varphi(r) = - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}, \quad r < R$$

Perché il potenziale sia continuo (anzi, C^1), l'iso-potenziale deve essere:

$$- \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} = - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln \left(\frac{R}{r_0} \right)$$

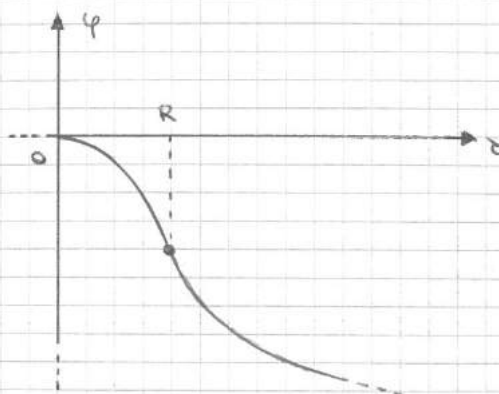
$$\frac{1}{2} = \ln \left(\frac{R}{r_0} \right)$$

$$\frac{R}{r_0} = e^{\frac{1}{2}} \Rightarrow r_0 = R e^{-\frac{1}{2}},$$

da cui:

$$\varphi(r) = \begin{cases} - \frac{\rho r^2}{4\epsilon_0}, & r < R \\ \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(2 \ln \left(\frac{R}{r} \right) - 1 \right), & r > R, \end{cases}$$

e il grafico di $\varphi = \varphi(r)$ è quello a fianco.



GRADIENTE

Si definisce GRADIENTE il seguente oggetto:

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Esso è sia un vettore che un operatore differenziale.
Ad esempio, vale:

$$\vec{\nabla}(f_1 f_2) = f_1 \vec{\nabla} f_2 + \vec{\nabla} f_1 \cdot f_2,$$

in quanto esso obbedisce alle regole di derivazione (in questo esempio, la cosiddetta "regola di Leibniz").

Esso è anche un vettore, ossia una rappresentazione del gruppo ortogonale speciale $SO(3, \mathbb{R})$ delle rotazioni speciali. Quest'aspetto è fondamentale, in quanto le leggi della fisica risultano invariate per rotazioni.

Ad esempio, la rotazione di un angolo θ intorno all'asse z è data dalla matrice:

$$\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in SO(3, \mathbb{R})$$

Si chiede dunque che, tra vettori, valga:

$$V'_i = R_{ij} V_j, \quad \begin{aligned} i' &= (x', y', z') \\ i &= (x, y, z) \end{aligned}$$

In notazione vettoriale:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = R \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad R \in SO(3, \mathbb{R})$$

Dati due vettori $\vec{v}$ e $\vec{w}$, vale allora:

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z = v_{x'} w_{x'} + v_{y'} w_{y'} + v_{z'} w_{z'}$$

In effetti:

$$\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^3 R_{ji} \nabla_j,$$

da cui $\nabla = \vec{\nabla}$ è un vettore: $\vec{\nabla}' = R \vec{\nabla}$, infatti.

In maniera più intuitiva, data una qualunque funzione f sufficientemente regolare:

$$\begin{aligned} (df) &= \sum_{i=1}^3 f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \\ &= \sum_{i=1}^3 dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f, \end{aligned}$$

da cui $\vec{\nabla}$ è un vettore, perché al primo membro vi è uno scalare e al secondo membro un prodotto scalare (tra vettori).

Cambiando coordinate, ad esempio usando le coordinate polari, la situazione cambia leggermente. Infatti non è $\vec{\nabla} = \left[\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \varphi} \right]^T$. Sia infatti:

$$\begin{aligned} d\vec{x} &= \hat{x} dx + \hat{y} dy + \hat{z} dz = \\ &= \hat{r} dr + \hat{\theta} r d\theta + \hat{\varphi} r \sin \theta d\varphi \end{aligned}$$

Essendo $df = dr \frac{\partial f}{\partial r} + d\theta \frac{\partial f}{\partial \theta} + d\varphi \frac{\partial f}{\partial \varphi}$, imponendo:

$$df = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f$$

deve essere necessariamente:

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix}$$

DIVERGENZA E ROTORE

Dato un campo elettrico radiale $\vec{E}$ e il vettore gradiente $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{bmatrix},$$

si definiscono:

• Per DIVERGENZA $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi};$$

• e ROTORE $\vec{\nabla} \times \vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & E_r & \hat{r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & E_\theta & \hat{\theta} \\ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} & E_\varphi & \hat{\varphi} \end{bmatrix} =$$

$$= \hat{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_\theta}{\partial \varphi} \right) + \hat{\theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial E_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial E_\varphi}{\partial r} \right) + \hat{\varphi} \left(\frac{\partial E_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial E_r}{\partial \theta} \right).$$

Consideriamo, ad esempio, il seguente campo vettoriale:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} x \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{bmatrix} \partial_x E_x \\ \partial_y E_y \\ \partial_z E_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \text{div}(\vec{E}) = 1 + 0 + 1 = 2$$

Effettuiamo ora una rotazione di un angolo θ .

Si ha allora:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta$$

$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta$$

Dunque:

$$\bullet E_{z'} = E_z;$$

$$\bullet E_{y'} = E_y \cos \theta + E_x \sin \theta = x \cos \theta + x \sin \theta = \\ = (\cos \theta + \sin \theta)(x' \cos \theta + y' \sin \theta);$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad E_{x'} &= \bar{E}_x \cos \vartheta - E_y \sin \vartheta = x (\cos \vartheta - \sin \vartheta) = \\ &= (x' \cos \vartheta - y' \sin \vartheta) (\cos \vartheta - \sin \vartheta). \end{aligned}$$

Donque :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} E_{x'} + \frac{\partial}{\partial y'} E_{y'} + \frac{\partial}{\partial z'} E_{z'} &= \cos \vartheta (\cos \vartheta - \sin \vartheta) + \sin \vartheta (\cos \vartheta + \\ &\quad + \sin \vartheta) + 1 = \\ &= \cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta + 1 = 2, \end{aligned}$$

da cui risulta che la divergenza è invariante per rotazioni di $\mathbb{R}^3$.

TEOREMA DELLA DIVERGENZA

Ricordiamo brevemente la definizione di GRADIENTE:

$$\vec{\nabla} = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

Dato un campo elettrico $\vec{E}$, si definisce DIVERGENZA di $\vec{E}$:

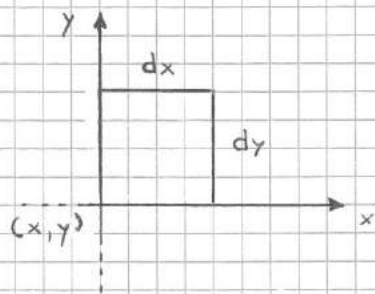
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Il TEOREMA DELLA DIVERGENZA afferma che:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{E} \, d\sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv,$$

per una qualunque porzione volumica $V \subseteq \mathbb{R}^3$ avente frontiera S .

Facciamo una dimostrazione intuitiva. V può essere diviso in cubetti infinitesimi, e su tali cubetti la formula è vera. Infatti, considerando un cubetto di dimensioni dx, dy, dz , si ha (per semplificare il conto, supponiamo che il campo elettrico componente lungo z sia nullo):



$$\begin{aligned} \Phi_E &= dx [E_y(x, y+dy) - E_y(x, y)] + \\ &+ dy [E_x(x+dx, y) - E_x(x, y)] = \\ &= dx dy \left[\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} \right], \end{aligned}$$

e integrando sul volume si ottiene la tesi.

A questo punto, si generalizza al caso di volumi $V \subseteq \mathbb{R}^3$ generici, perché dividendo il volume in cubetti infinitesimi, i contributi interni si annullano.

PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL. DENSITÀ DI ENERGIA DEL CAMPO ELETTRICO

Consideriamo il seguente integrale, che esprime l'intensità del flusso uscente da una superficie chiusa:

$$\int_S \vec{n} \cdot \vec{E} \, d\sigma$$

Per il teorema della divergenza:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv$$

Per il teorema di Gauss, invece:

$$\int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \frac{Q}{\epsilon_0} = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} \, dv$$

Derivando rispetto a v , si ottiene la PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

ove ρ indica la densità volumetrica di carica.

Un'applicazione di questa nuova formula ci permette di stabilire una nuova formula per l'energia potenziale elettrica. Si ha:

$$U = \frac{1}{2} \int dq \, \varphi = \frac{1}{2} \int dv \, \rho \, \varphi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv \, \varphi \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}),$$

usando appunto la prima equazione di Maxwell.

Mostriamo ora che:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{E} + \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

In fatti:

$$\vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \vec{E}_i + \sum_{j=1}^3 \varphi \frac{\partial \vec{E}_j}{\partial x_j} = \vec{\nabla} \varphi \cdot \vec{E} + \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})$$

Mostriamo inoltre che

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int dv \, \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int_S ds \, \varphi \vec{E} \cdot \vec{n} \approx \frac{\epsilon_0}{2} \int R^2 d\omega \, \frac{1}{R} \frac{1}{R^2} \approx$$

$$\approx \frac{\epsilon_0}{2} \int d\omega \, \frac{1}{R} \Rightarrow \lim_{R \rightarrow +\infty} \frac{\epsilon_0}{2} \int_{V(R)} dv \, \vec{\nabla} \cdot (\varphi \vec{E}) = 0$$

È dunque giustificata la seguente uguaglianza:

$$\begin{aligned}\frac{\epsilon_0}{2} \int dv \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dv (-\vec{\nabla} \varphi) \cdot \vec{E} = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dv \vec{E} \cdot \vec{E} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv E^2\end{aligned}$$

Tornando al calcolo di U , si ha dunque:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv \varphi (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv E^2$$

OSSERVAZIONE

La formula:

$$U = \frac{1}{2} \int dq \varphi$$

è sempre vera.

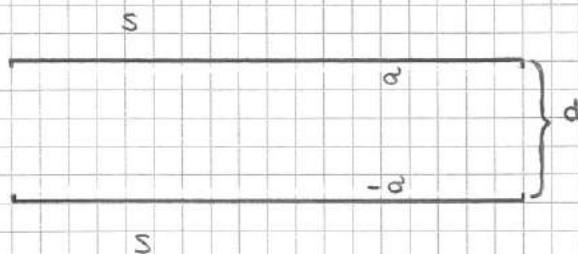
La formula:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv E^2,$$

invece, è vera solo per sistemi finiti.

La applicheremo dunque nel caso di una sfera uniformemente carica, ma nel caso di un filo infinito, ad esempio, essa non vale più. Si suppone infatti, nella dimostrazione, che il potenziale sia nullo all'infinito.

Consideriamo ad esempio due piastre piane e parallele di superficie S , e distanza d , cariche densità di carica uguali e opposte, come nel disegno:



Usando il principio di sovrapposizione, il campo elettrico è nullo al di fuori della zona compresa tra le due piastre, ove vale:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Inmediatamente, da:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

si ha:

$$\Delta\varphi = dE,$$

ove d è la distanza tra le piastre, e $\Delta\varphi$ è la differenza di potenziale tra le due piastre:

$$\Delta\varphi = dE = \frac{d\sigma}{\epsilon_0}$$

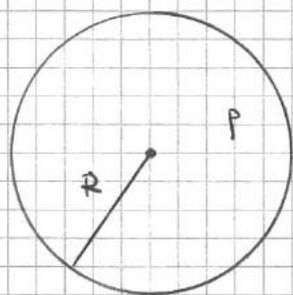
Sempre:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{Q}{2} \Delta\varphi = \\ &= \frac{Q}{2} dE = \frac{Q}{2} \frac{d\sigma}{\epsilon_0} = \frac{S d \sigma^2}{2\epsilon_0} = \\ &= \frac{U \sigma^2}{2\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0}{2} U \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dv E^2, \end{aligned}$$

da cui, in questo caso, la formula risulta.

POTENZIALE ED ENERGIA ELETTRICA DI UNA SFERA

Consideriamo una sfera di raggio R uniformemente carica, con densità volumetrica di carica ρ :



Abbiamo già dimostrato che:

$$E_z(z) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho}{R^3} z, & z \leq R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z^2}, & z > R \end{cases}$$

Vogliamo ora determinare φ . Integrando, per $z > R$, si ottiene:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{z}, \quad z > R$$

In particolare:

$$\varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Per $z < R$, invece, si ha:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^3} z^2 + K, \quad K \in \mathbb{R},$$

ove:

$$\varphi(R) = -\frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

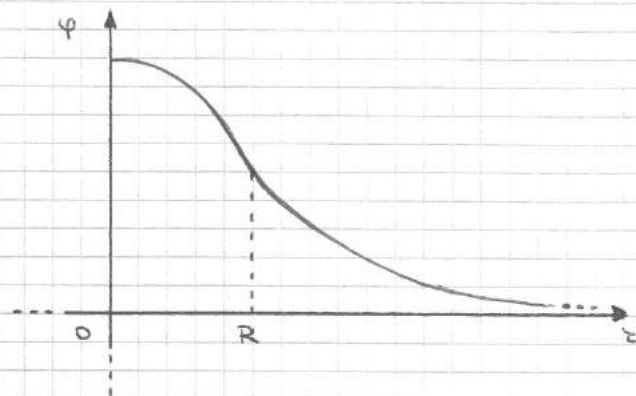
Ne conseguentemente, allora, dobbiamo imporre:

$$K = \frac{3}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R},$$

da cui:

$$\varphi(z) = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - z^2), \quad z < R$$

Le grafico di $\varphi \equiv \varphi(r)$ è all'incirca il seguente:



Esaminiamo ora l'energia elettrostatica U :

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} \int_0^R \rho 4\pi r^2 dr \frac{Q}{8\pi\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^R \frac{\rho Q r^2}{2\epsilon_0 R^3} (3R^2 - r^2) dr = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\rho Q}{2\epsilon_0 R^3} \left[R^3 r^3 - \frac{r^5}{5} \right]_0^R = \frac{1}{2} \frac{\rho Q}{2\epsilon_0 R^3} \frac{4}{5} R^5 = \\
 &= \frac{1}{5} \frac{\rho Q}{\epsilon_0} R^2 = \\
 &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R},
 \end{aligned}$$

con $\rho = \left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1} Q$.

Con la formula introdotta nel paragrafo precedente, si ha:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2$$

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{\epsilon_0}{2} \left[\int_0^R 4\pi r^2 dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} r^2 \frac{Q^2}{R^6} + \int_R^{+\infty} 4\pi r^2 dr \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{Q^2}{r^4} \right] = \\
 &= \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left[\int_0^R \frac{r^4}{R^6} dr + \int_R^{+\infty} \frac{1}{r^2} dr \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{5R} + \frac{1}{R} \right] = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5} \frac{1}{R} = \\
 &= \frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R},
 \end{aligned}$$

da cui l'uguaglianza sussiste.

COMPLEMENTI VARI

I conti fatti nel paragrafo precedente valgono anche per la gravità: vediamo un esempio.

L'energia potenziale gravitazionale del sole vale:

$$U_{\odot} \approx G \frac{M_{\odot}^2}{R_{\odot}},$$

ove:

- $G \approx 6,6 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N m}^2}{\text{kg}^2}$ è la costante di gravitazione universale;
- $M_{\odot} \approx 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ è la massa del sole;
- $R_{\odot} \approx 7 \cdot 10^8 \text{ m}$ è il raggio del sole.

Dunque:

$$U_{\odot} \approx 10^{42} \text{ J}$$

Mediante misurazioni, si sa che l'energia emessa dal sole ha potenza pari a:

$$K_{\odot} \approx 1366 \frac{\text{J}}{\text{m}^2 \text{ s}}$$

In particolare, $K_{\odot}$ è detta COSTANTE SOLARE.

Ora, la distanza tra il sole e la Terra è circa:

$$r \approx 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m},$$

da cui:

$$\frac{dU}{dt} = 4\pi r^2 K_{\odot} \approx 10^{26} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Si giunge dunque a ipotizzare che l'età del sole fosse minore o uguale di:

$$T_0 = 30 \text{ Myr},$$

ovvero 30 milioni di anni.

In realtà, l'universo esiste da oltre 13 miliardi di anni, e $T_0 \approx 3000 \text{ Myr}$: il sole ha dunque un'altro sorgente di energia, quella nucleare.

Ricordiamo ora che, date due cariche puntiformi:

$$q_1 \oplus \quad \ominus q_2$$

si ha $U = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$.

In effetti, questa formula non spiega bene cosa succede in presenza di una carica puntiforme. S'altronde:

$$U = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dv = +\infty$$

Per una carica puntiforme, dunque, l'energia U diverge.

Per risolvere questo problema, sono state fatte diverse tentative: ad esempio, è stato proposto di approssimare l'elettrone come una sfera di raggio R . Si ha allora:

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_e^2}{R} < +\infty,$$

ove:

- $d = \frac{3}{5}$ se la carica è distribuita uniformemente nella sfera;
- $d = \frac{1}{2}$ se la carica è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera.

Assumendo che tutta la massa dell'elettrone sia di origine elettromagnetica, si ha:

$$m_{em} = \frac{U}{c^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \frac{1}{c^2},$$

ove c è la velocità della luce.

Sostituendo i valori, si ricava il RAGGIO CLASSICO dell'elettrone, che vale:

$$R = r_c = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 m_{em} c^2} \approx 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

In realtà, vale:

$$R \approx 2,82 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

e più precisamente:

$$R \approx 137 \cdot r_c$$

MASSE DEI NUCLEI ATOMICI

Un nucleo si può approssimare come una sfera con Z protoni e $(A-Z)$ neutroni, con raggio:

$$R = A^{\frac{1}{3}} r_m, \quad r_m = 1,2 \cdot 10^{-15} \text{ m}$$

Si ha:

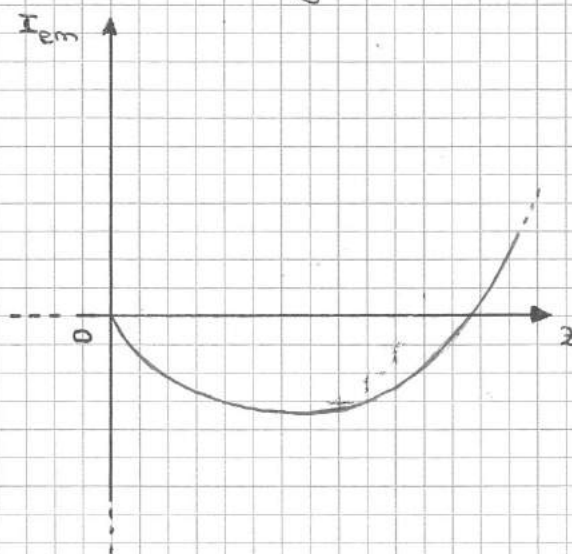
$$m_m \approx 2m_p + (A-Z)m_n + E_{\text{leg}} \frac{1}{c^2} + \frac{U}{c^2},$$

con:

$$U = \frac{3}{5} \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

energia elettromagnetica, e E_{leg} è l'energia dovuta alle interazioni forti (e c è la velocità della luce). In particolare, E_{leg} è detta ENERGIA DI LEGAME FORTE.

Si ha che il grafico dell'interazione magnetica, che dipende da Z e Z^2 , è il seguente:



In un primo momento l'attrazione dei legami forti, dunque ha la meglio, ma in natura atomi con molti protoni, diciamo più di 100, risultano instabili. In natura, infatti, il nucleo più stabile è quello del ferro, che conta 26 protoni.

URANIO O T.N.T. ?

Consideriamo 1 kg di uranio (circa 4 moli), e procediamo ad una fissione nucleare totale. Ogni nucleo, dunque, si spezza in due nuclei di carica $Q' = \frac{Q}{2}$ e raggio $R' = \frac{R}{2^{\frac{1}{3}}}$ (visto che $V' = \frac{V}{2}$).

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}\Delta E_{em} &= E_{em} - 2E'_{em} = \frac{3}{5} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[1 - 2^{-\frac{2}{3}} \right] \approx \\ &\approx 0,2 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}\end{aligned}$$

Per $Q = 100e$ e $R \approx 10^{-14} \text{ m}$, si ha:

$$\Delta U = 0,2 \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 250 \text{ MeV}$$

L'energia liberata mediante fissione nucleare è, per 1 kg di uranio, ossia circa 4 moli, ossia circa $4 \cdot 10^{23}$ atomi, pari a:

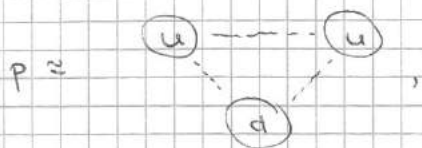
$$\begin{aligned}E_{tot} &= 4N_A \cdot 250 \text{ MeV} = N_A \cdot 1 \text{ GeV} \approx 10^{14} \text{ J} \approx \\ &\approx 20 \text{ Kton},\end{aligned}$$

ovvero 1 Kton è l'energia rilasciata da 1000 tonnellate di T.N.T., mediante esplosione.

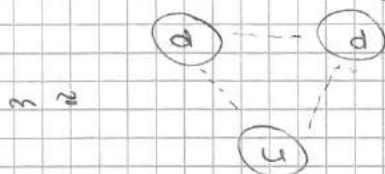
Un kg di uranio, dunque, rilascia mediante fissione nucleare un'energia pari a quella liberata nell'esplosione di 20'000 tonnellate di T.N.T.

ANALISI DEI QUARK

Si sa che, in natura, un protone è formato approssimativamente da 3 QUARKS, disposti in questo modo:



ovvero ai vertici di un triangolo. Per un neutrone, invece:



I quark sono di due tipi:

- QUARK UP (u), con carica $\frac{2}{3} e \stackrel{\text{def}}{=} q_u$;
- QUARK DOWN (d), con carica $-\frac{1}{3} e \stackrel{\text{def}}{=} q_d$.

Entrambi hanno un raggio $R_q \approx 10^{-15} \text{ m}$.

Calcoliamo allora l'energia elettrostatica:

$$U_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} (2q_u q_d + q_u^2) = 0$$

$$U_d = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} (2q_u q_d + q_d^2) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{3}$$

Semberebbe dunque che il protone sia più pesante del neutrone (convertendo energia in massa tramite $E=mc^2$, e l'elettromagnetismo tende a renderlo più pesante). Se però fosse $m_p > m_n$, non esisterebbero atomi. In realtà, mediante risultati sperimentali, si è scoperto che $m_d \approx 2m_u$, da cui:

$$m_p = C\epsilon + \frac{U_p}{c^2} + 2m_u + m_d < C\epsilon + \frac{U_d}{c^2} + 2m_d + m_u = m_n$$

Introdurremo, ad esempio:



Valore:

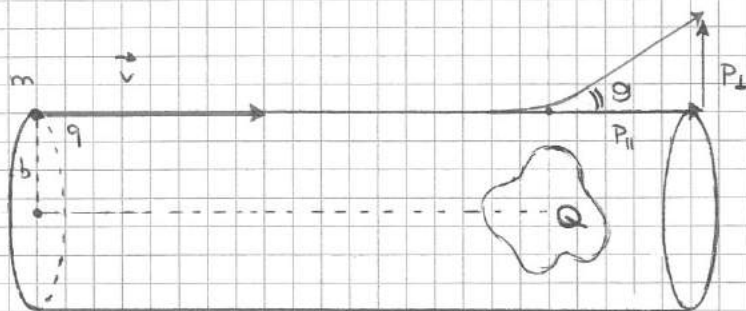
$$U_{\Lambda} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0 R} q_u^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \frac{1}{3}$$

$$m_{\Lambda} = Cte + \frac{U_{\Lambda}}{c^2} + 3m_u$$

Se dunque esiste solo l'effetto dovuto all'elettromagnetismo, il più leggero sarebbe il neutrone; se esistessero solo i quark, il più leggero sarebbe Λ . Fortunatamente, la combinazione tra massa dei quark e effetti elettromagnetici fa sì che il più leggero sia il protone.

ESPERIMENTO DI RUTHERFORD

Consideriamo una particella di massa m e carica q positiva, che viene lanciata a velocità $\vec{v}$ contro un sistema di cariche totali Q positive:



Vediamo di calcolare, in modo approssimativo, l'angolo $\theta(b)$ di deviazione:

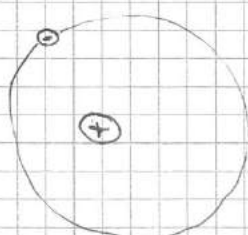
$$\begin{aligned} \theta(b) &= \frac{p_{\perp}}{p_{\parallel}} = \frac{\int F_{\perp} dt}{mv} \approx \int \frac{F_{\perp}}{mv} \frac{dx}{v} = \frac{\int F_{\perp} dx}{mv^2} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\int F_{\perp} dx}{k} = \frac{q}{2} \frac{\int E_{\perp} dx}{k} = \frac{q}{2} \frac{\Phi_E(s)}{2\pi b k} = \\ &= \frac{q}{2} \frac{Q(r < b)}{2\pi b k \epsilon_0} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0 b} \frac{q Q(r < b)}{k}, \end{aligned}$$

ove:

- k è l'energia cinetica della particella ($k = \frac{1}{2}mv^2$);
- $Q(r < b)$ è la quantità di carica racchiusa nel cilindro.

Se Q è puntiforme, allora, l'angolo di deviazione è proporzionale (in modo approssimativo) a $\frac{1}{b}$.

Questo esperimento, noto come ESPERIMENTO DI RUTHERFORD, ha dimostrato che la forma degli atomi è quella di un nucleo centrale, di carica positiva, circondato da un numero di elettroni, di carica negativa.



In realtà il conto può essere migliorato, tenendo conto l'effetto di schermatura degli elettroni, nel caso in cui il sistema di cariche Q sia un atomo di massa m_h e carica Ze . Supponiamo allora che la particella m sia una particella α :

$$m_e \ll m \ll m_h, \quad q = 2e, \quad E = 4 \text{ MeV}$$

In questo caso, la forza:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(2e)(2e)}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r^2}$$

è repulsiva.

Si tiene in effetti (sia $\alpha = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 2Ze^2$):

$$\gamma = \frac{c}{1 + e \cos \theta}, \quad \beta^2 = 1 + \frac{2EL^2}{\alpha^2 m},$$

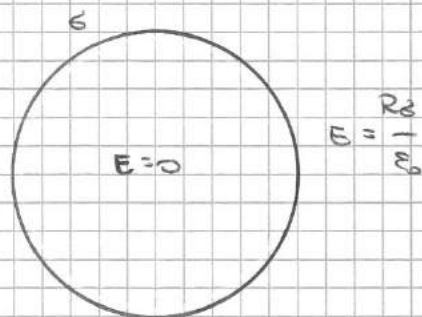
da cui:

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{e}$$

Questo spiega, in parte, ciò che si era osservato: alcune particelle, infatti, "tornavano indietro".

PRESSIONE ELETTROSTATICA

Consideriamo una sfera uniformemente carica in superficie, con densità superficiale di carica σ . Abbiamo già dimostrato che il campo elettrico è nullo all'interno della sfera, ed è pari a $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{R}_s$ sulla sua superficie:



Si definisce **PRESSIONE ELETTROSTATICA** in un punto p della superficie:

$$p = \frac{dF_{\perp}}{ds}$$

Nel nostro caso:

$$p = \frac{dF_{\perp}}{ds} = \frac{dq E_{\perp}}{ds} = \sigma E_{\perp}$$

La formula è più inesatta.

In generale vale infatti:

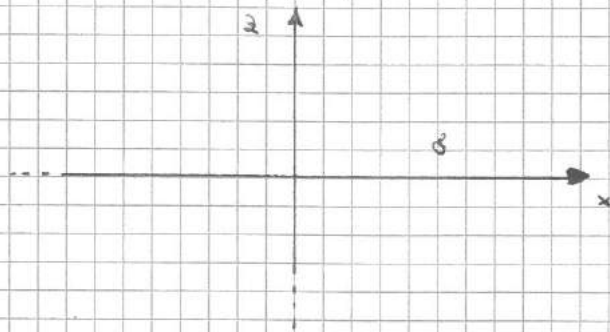
$$p = \frac{dq}{ds} \frac{E_{\perp \text{ in}} + E_{\perp \text{ out}}}{2}$$

ove $E_{\perp \text{ in}}$ e $E_{\perp \text{ out}}$ sono le componenti normali del campo elettrico calcolate dentro e fuori la superficie (o meglio, da entrambi i lati).

Nel caso della sfera:

$$p = \frac{dq}{ds} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

Consideriamo ora un piano carico, ove $q' = \int dz \rho$, con ρ densità volumetrica di carica (un piano è un limite, si considerano cariche ma mai piet sottili). Si ha:



Per la prima equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

nel nostro caso:

Sempre:

$$p = \frac{dF_z}{ds} = \frac{dq E_z}{ds} = \int dz E_z \rho = \int \rho E_z dz,$$

dato che $dq = ds dz \rho$. Ora:

$$p = \int \rho E_z dz = \epsilon_0 \int E_z \frac{\partial E_z}{\partial z} dz = \epsilon_0 \frac{1}{2} [E_z^2]_{in}^{out} =$$

$$= u_2 - u_1,$$

ovvero p è uguale alla differenza di densità di energia.

Ricordando che:

$$u = \int dv \epsilon_0 \frac{E^2}{2} = \int dv u,$$

si ha:

$$p = u_2 - u_1 = \epsilon_0 \frac{E_{z2}^2 - E_{z1}^2}{2} = \left(\epsilon_0 \frac{E_{z2} - E_{z1}}{2} \right) \left(\frac{E_{z1} + E_{z2}}{2} \right) =$$

$$= \epsilon_0 \frac{E_{z1} + E_{z2}}{2},$$

come si voleva.

TEOREMA DEL ROTORE

Sia γ una curva chiusa liscia e tratti:

$$\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2,$$

tale che:

- $\gamma(a) = \gamma(b)$;
- $\forall s, t \in]a, b[: \gamma(s) = \gamma(t) \Rightarrow s = t$.

Sia $D \subseteq \mathbb{R}^2$, con $\partial D = \gamma$.

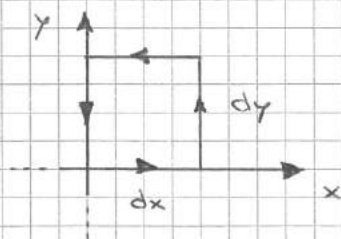
Siano inoltre $\vec{F}$ un campo vettoriale su $\mathbb{R}^2$, e sia $\psi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ una funzione liscia. Se $S = \psi(D)$, e $\Gamma = \psi(\gamma)$, allora vale la seguente uguaglianza:

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{T} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{F}) \cdot \vec{n} \, ds$$

Ricordiamo infatti che:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= \\ &= \det \begin{bmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{bmatrix} \end{aligned}$$

La formula vale per un quadratino:



Supponiamo $E_z = 0$. Allora:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{T} &= \int E_x(x, y) - E_x(x, y + dy) \, dx + \\ &+ \int E_y(x + dx, y) - E_y(x, y) \, dy = \\ &= \int dx \, dy \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \int dx \, dy (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z, \\ \text{ovvero } (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}. \end{aligned}$$

Da qui si ottiene la SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\oint_{\gamma} \vec{E} \cdot d\vec{s} = 0 \Rightarrow (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underline{\underline{0}}$$

EQUAZIONI DI MAXWELL E TEOREMA DI GAUSS

Abbiamo dunque visto che, in elettrostatica, si ha:

$$\vec{F} = q\vec{E}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

In tale ambito, valgono le seguenti formule:

- PRIMA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

- SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \underline{0}$$

Essendo la forza $\vec{F} = q\vec{E}$ conservativa, in quanto $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$, si ha ad esempio:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x} = 0,$$

per il teorema di simmetria del differenziale secondo.

Le equazioni di Maxwell sono equivalenti alle seguenti tre equazioni

$$\begin{cases} \vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi \\ \nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \times (-\vec{\nabla}\varphi) = 0, \end{cases}$$

ove:

- $\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}$ è detto LAPLACIANO;
- la seconda equazione è detta EQUAZIONE DI POISSON, e ammette come soluzione:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^{(3)}x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|},$$

ove l'integrale è svolto sul volume.

Effettuiamo ora un conto astratto, in dimensione arbitraria. Si ha, se d è la dimensione su cui lavoriamo:

$$r^2 = x_1^2 + \dots + x_d^2$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$$

Si ha che l'equazione di Poisson è l'unica equazione invariante per rotazioni.

Studiamo ora:

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

Cerchiamo una soluzione del tipo $\varphi = r^p$. Si ha:

$$\partial_{x_i} r^p = \partial_{x_i} (r^2)^{\frac{p}{2}} = \frac{p}{2} (r^2)^{\frac{p}{2}-1} 2x_i = p x_i r^{p-2}$$

Dunque:

$$\partial_{x_i}^2 r^p = p r^{p-2} + p(p-2) x_i^2 r^{p-4}$$

Allora:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= \nabla^2 r^p = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i}^2 r^p = \\ &= d p r^{p-2} + p(p-2) r^2 r^{p-4} = \\ &= [d p + p(p-2)] r^{p-2} \end{aligned}$$

Bisogna dunque porre:

$$d + p - 2 = 0$$

$$d + p = 2$$

$$d = 2 - p,$$

da cui $\varphi \propto r^{2-d}$, e $E \propto r^{1-d} = (r^{d-1})^{-1}$, ossia è proporzionale all'inverso di un' "area". Il teorema di Gauss, dunque, mantiene la sua validità in ogni dimensione.

OSSERVAZIONE

Dall'equazione di Poisson (e dalla sua soluzione) si può ottenere:

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = -4\pi \delta^{(3)}(\vec{x})$$

GRADIENTE, DIVERGENZA, ROTORE, LAPLACIANO IN COORDINATE CILINDRICHE E SFERICHE

PREMESSA

Le coordinate sferiche sono anche dette POLARI.

Passando ad un sistema di coordinate generico, l'elemento di distanza diventa una forma quadratica, indotta da una matrice detta MATRICE METRICA.

Se però ci restringiamo a sistemi ORTOGONALI, le cose si semplificano drasticamente. Infatti si ha:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 g_{ii} dx_i^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x},$$

da cui:

$$d\vec{x} = \sum_{i=1}^3 g_i dx_i \hat{x}_i,$$

ove $g_i = \sqrt{g_{ii}}$.

In coordinate polari, ad esempio, si ha:

$$g_r = 1 \quad g_\theta = r \quad g_\varphi = r \sin \theta,$$

da cui:

$$d\vec{x} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\varphi}$$
$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + r^2 \sin^2 \theta (d\varphi)^2$$

In coordinate cilindriche, invece:

$$g_r = 1 \quad g_\theta = r \quad g_z = 1,$$

dunque:

$$d\vec{x} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + dz \hat{z}$$
$$ds^2 = (dr)^2 + r^2 (d\theta)^2 + (dz)^2$$

detta dunque:

$$g = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ r \sin \theta \end{bmatrix} \quad h = \begin{bmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$d\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i dx_i g_i \quad d\vec{x} = \sum_{i=1}^3 \hat{x}_i dx_i h_i,$$

in coordinate rispettivamente polari e cilindriche.

Calcoliamo ora il gradiente, definito come:

$$(df) = d\vec{x} \cdot \vec{\nabla} f$$

Sostituendo a $d\vec{x}$ una delle espressioni scritte prima, si ottiene che, in coordinate polari, vale:

$$\vec{\nabla}_p = \left[\frac{d}{dr}, \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \right]^t,$$

mentre in coordinate cilindriche:

$$\vec{\nabla}_c = \left[\frac{d}{dr}, \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta}, \frac{d}{dz} \right]^t$$

Le due versioni sono dunque:

$$\vec{\nabla}_p = \frac{d}{dr} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{d}{d\varphi} \hat{\varphi}$$

$$\vec{\nabla}_c = \frac{d}{dr} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{d}{d\theta} \hat{\theta} + \frac{d}{dz} \hat{z}$$

Passiamo ora al calcolo della divergenza: occorre subito notare che $\vec{\nabla}$ applicata ad un vettore $\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_i \hat{x}_i$ opera non solo sulle componenti, ma anche sui vettori. Ad esempio, supponendo $E_\theta = E_\varphi = 0$ (dunque $\vec{E} = \hat{r} E_r$) si ha, in coordinate polari:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r \left(\frac{\hat{\theta}}{r} \frac{d\hat{r}}{d\theta} + \frac{\hat{\varphi}}{r \sin \theta} \frac{\partial \hat{r}}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1+1}{r} E_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r \end{aligned}$$

In questi casi, però, una via più furba usa il teorema di Gauss. Si ha dunque:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{E} \, dv = \int_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

Considerando un volume elementare di lato dx_1, dx_2, dx_3 , si ottiene quella che è la formula generale:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} (E_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2} (E_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3} (E_3 g_1 g_2) \right]$$

ciò conferma quanto già detto:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} E_r r^2 \sin \theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r,$$

nel caso in cui $E_\theta = E_\varphi = 0$.

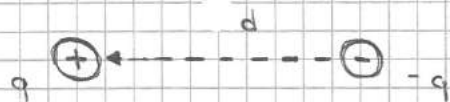
Nel caso del rotore e della divergenza, diamo i risultati senza dimostrarli. Si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{bmatrix} g_1 \hat{x}_1 & g_2 \hat{x}_2 & g_3 \hat{x}_3 \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 & g_3 E_3 \end{bmatrix}$$

$$\nabla^2 \varphi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\partial_1 \frac{g_2 g_3}{g_1} \partial_1 \varphi + \partial_2 \frac{g_1 g_3}{g_2} \partial_2 \varphi + \partial_3 \frac{g_1 g_2}{g_3} \partial_3 \varphi \right]$$

DIPOLO ELETTRICO

Consideriamo un sistema composto da due cariche a distanza d , con cariche uguali in modulo ma di segno opposto:



Una tale disposizione di cariche è detta **DIPOLO ELETTRICO**.

A cosa serve studiare i dipoli? Sappiamo che, a grandi distanze, si ha:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r},$$

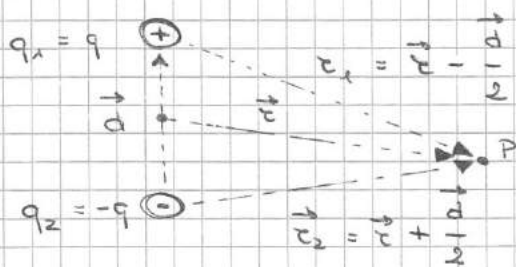
ove Q è la carica totale. In alcuni casi $Q=0$ (come nel caso descritto sopra), e in questi casi l'effetto dominante è quello del dipolo.

In natura molti corpi sono dipoli elettrici: lo è, ad esempio, una molecola d'acqua.

Si definisce **MOMENTO DEL DIPOLO ELETTRICO**:

$$\vec{p} \stackrel{\text{def}}{=} q \vec{d}$$

Proviamo di calcolare ora il campo elettrico di un dipolo: d'ora in poi, $\vec{d}$ punterà verso la carica positiva.



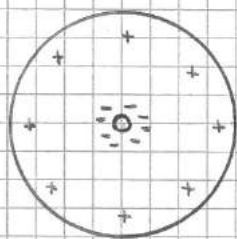
Si ha allora:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(r_2^2 - r_1^2)}{(r_1 r_2)(r_2 + r_1)} = \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{d} \cdot \vec{r}}{r_1 r_2 r} \right) \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \end{aligned}$$

Nel caso in cui si ha una generica distribuzione di cariche:

$$\vec{p} = \int dq \vec{x}$$

Se ad esempio consideriamo un corpo con fatto, si ha $\vec{p} = 0$ per motivi di simmetria:



Più in generale, se la carica totale è nulla, e si sono una carica positiva Q_+ con baricentro $\vec{r}_+$ e una carica negativa Q_- con baricentro $\vec{r}_-$ (con $Q_+ = -Q_-$, ovviamente), vale:

$$\vec{p} = Q (\vec{r}_+ - \vec{r}_-)$$

Nella figura precedente, $\vec{r}_+ = \vec{r}_-$, da cui $\vec{p} = 0$.

Turniamo ad analizzare la formula:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3}$$

Effettuiamo dei conti preliminari. Calcoliamo $\vec{\nabla} r$.

Si ha:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

da cui ad esempio:

$$\frac{\partial}{\partial x} r = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot 2x$$

Allora:

$$\vec{\nabla} r = \frac{\vec{r}}{r}$$

Calcoliamo ora $\vec{\nabla} \frac{1}{r}$. Allora stesso procedimento di prima, si ottiene:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$$

Possiamo allora dedurre che:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{r}$$

Questi calcoli servono per calcolare il campo elettrico di un dipolo tramite l'uguaglianza $\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$.

Effettuiamo prima altri conti preliminari.

Ad esempio:

$$\vec{\nabla} \frac{1}{r^3} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}$$

Inoltre (se $\vec{p}$ è costante):

$$\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{p}$$

Sufficiente infatti che sia $\vec{p} = [p_x, 0, 0]^t$. Allora:

$$\vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{r}) = \vec{\nabla}(p_x x) = p_x [1, 0, 0]^t,$$

da cui si giunge facilmente alla tesi.

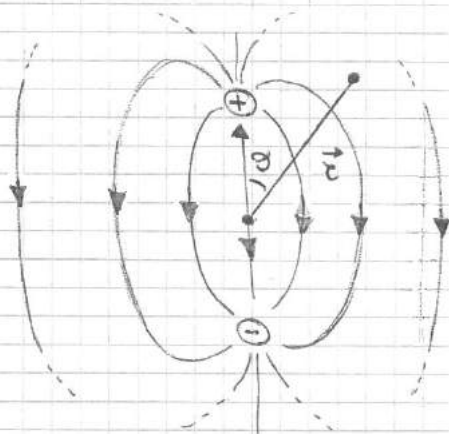
Allora:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r^3} \vec{p} - 3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right], \end{aligned}$$

e questo è effettivamente il campo elettrico generato da un dipolo. Una formulazione analoga è la seguente:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[2 \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \vec{r} + \frac{\vec{r} \times (\vec{r} \times \vec{p})}{r^5} \right]$$

La rappresentazione del campo elettrico è all'incirca la seguente:



Calcoliamo ora $E = \sqrt{\vec{E} \cdot \vec{E}}$. Effettuando il prodotto scalare, si ottiene:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[q \frac{p^2 r^2 \cos^2 \theta}{r^4} + p^2 - 6 \frac{p^2 r^2 \cos^2 \theta}{r^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{P}{4\pi\epsilon_0 r^3} [1 + 3 \cos^2 \theta]^{\frac{1}{2}}$$

Usando le coordinate polari, si ha:

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p r \cos \theta}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2},$$

da cui:

- $E_r = - \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial r} = - \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$;
- $E_\theta = - \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi(\vec{r})}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{p \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}$;
- $E_\varphi = 0$, banalmente.

In un dipolo, dunque, si ha:

$$\varphi \propto \frac{1}{r^2}, \quad E \propto \frac{1}{r^3},$$

da cui comunque, a grande distanza, l'effetto dei dipoli di un corpo carico è trascurabile rispetto al resto, e l'oggetto carico può essere considerato puntiforme.

Il campo elettrico può essere in realtà descritto in maniera esatta, mediante una ESPANSIONE IN MULTIPOLI.

In generale, vale infatti:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l=0}^{+\infty} \sum_{m=-l}^l \frac{1}{l+1} q_{lm} \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}},$$

ove:

- per $l=0$ si ha il monopolo, per $l=1$ il dipolo, per $l=2$ il quadrupolo, e così via;
- $Y_{lm}(\theta, \phi)$ sono particolari funzioni, dette ARMONICHE SFERICHE;
- i momenti valgono:

$$q_{lm} = \int dV r^l Y_{lm}^*(\theta, \phi) \rho(r, \theta, \phi)$$

In ogni caso si risolve $\nabla^2 \varphi = 0$ nella zona vuota contenuta dalle cariche:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r\varphi) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2} = 0$$

Usando il METODO DELLA SEPARAZIONE DELLE VARIABILI:

$$\varphi(r, \theta, \phi) = \frac{U(r)}{r} P(\theta) Q(\phi)$$

Sostituendo, con un artificio si ottiene:

$$Q(\phi) = e^{\pm i m \phi},$$

con $m \in \mathbb{Z}$. Continuando (trascuriamo i dettagli), si ottiene in particolare:

$$U = A r^{e+1} + B r^{-e},$$

e che e è intero, e infine che $P(\theta)$ risolve l'EQUAZIONE DI LEGENDRE GENERALIZZATA, ed è periodica in θ solo per $e \in \mathbb{N}$. In particolare, le funzioni P_e sono ortogonali.

La forma più generale della soluzione di $\nabla^2 \varphi = 0$ è dunque:

$$\varphi(r, \theta, \phi) \propto \sum_{\ell=0}^{+\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1} \left(A_{\ell m} r^{\ell} + \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}} \right) Y_{\ell m}(\theta, \phi),$$

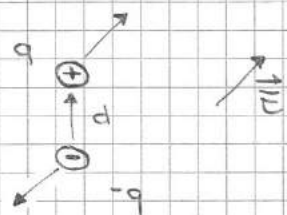
ma si pone $A_{\ell m} = 0$ sempre, per evitare l'esplosione delle soluzioni a $r \rightarrow +\infty$.

Ricordiamo invece che la soluzione di $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$ (EQUAZIONE DI POISSON) è:

$$\varphi(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3x' \frac{\rho(\vec{x}')}{\|\vec{x} - \vec{x}'\|}$$

FORZA SENTITA DA UN DIPOLO ELETTRICO IN UN CAMPO ELETTRICO ESTERNO

Consideriamo un dipolo immerso in un campo elettrico costante:



Detti $\vec{E}_+$ e $\vec{E}_-$ i campi elettrici calcolati su q_+ e q_- , si ha (dato che $\vec{E}_+ = \vec{E}_- = \vec{E}$):

$$\vec{F} = q_+ \vec{E}_+ + q_- \vec{E}_- = q \vec{E} - q \vec{E} = \vec{0}$$

Se $\vec{E}$ non è costante, si ha invece:

$$\vec{F} = q (\vec{d} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E},$$

ove $\vec{d} \cdot \vec{\nabla}$ è il gradiente calcolato lungo la direzione tra le cariche.

Visto che $\vec{p} = q\vec{d}$, vale anche:

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$$

Un'altra formulazione è la seguente, nel caso di $\vec{p}$ costante:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} U, \quad U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$$

Tuttavia, questa formulazione è equivalente alle precedenti solo nell'ambito dell'elettrostatica (le due precedenti sono vere in generale). Solo in quest'ambito, infatti, vale la seconda equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

Allora:

$$0 = \vec{p} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E} - \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E}),$$

da cui la tesi.

Volendo fare un esempio, supponiamo che sia:

$$\vec{p} = [0, p_y, 0]^t$$

allora:

- se $\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}) \vec{E}$, allora:

$$F_x = p_y \frac{\partial E_x}{\partial y};$$

- se $\vec{F} = -\vec{\nabla}(-\vec{p} \cdot \vec{E})$, allora:

$$F_x = \frac{\partial}{\partial x} (p_y E_y) = p_y \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Ma $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, da cui:

$$0 = (\vec{\nabla} \times \vec{E})_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y},$$

da cui l'uguaglianza delle due formulazioni.

MOMENTO DELLE FORZE DI UN DIPOLO ELETTRICO

Un dipolo è una particella che può anche ruotare: serve quindi una seconda equazione del moto, ossia quella per il suo momento angolare.

Si ha allora:

$$\begin{cases} m \cdot \vec{a} = \vec{F} \\ \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \end{cases}$$

Ora, per quanto riguarda il momento delle forze:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \sum_{i=1}^2 \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \frac{\vec{d}}{2} \times q\vec{E} + \left(-\frac{\vec{d}}{2}\right) \times (-q\vec{E}) = \\ &= \vec{d} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}, \end{aligned}$$

considerando come polo il centro del dipolo. Dunque:

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$$

L'energia è dunque minima quando il dipolo è orientato lungo la direzione del campo elettrico: ecco perché un dipolo tende a orientarsi in quel modo, sotto l'effetto di un campo elettrico.

OSSERVAZIONE

Un forno a microonde utilizza un campo elettrico oscillante. Le molecole d'acqua (che sono dipoli) cambiano continuamente la loro orientazione, liberando in breve tempo molta energia termica. Il forno a microonde non è dunque adatto per scongelare gli alimenti: una zona scongelata tende infatti a scaldarsi moltissimo, lasciando ghiacciate le zone vicine.

ESERCIZI VARI

Consideriamo due dipoli a distanza $\vec{r}$ finita, liberi di ruotare su se stessi. Come si dispongono?



Si ha:

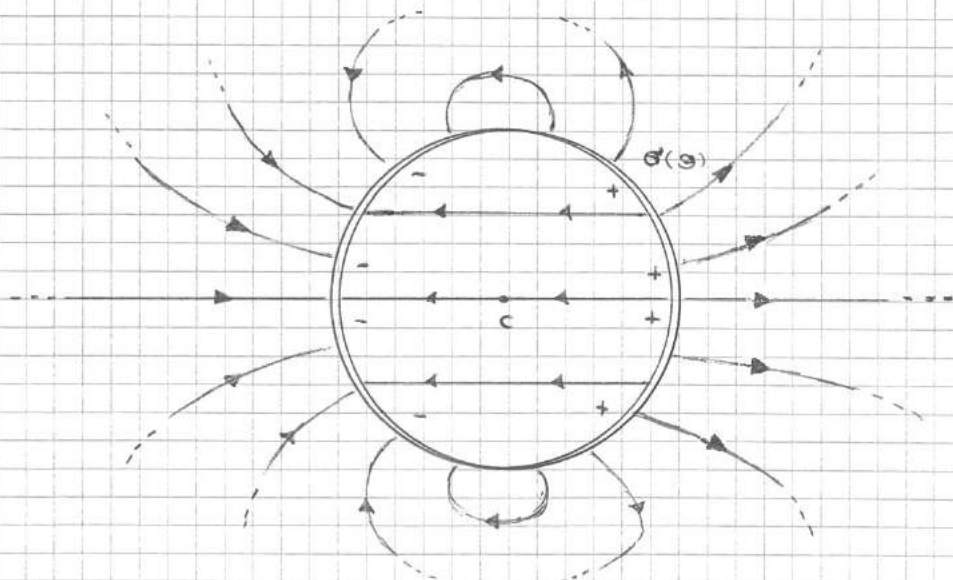
$$\begin{aligned}
 U &= - \vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} \right] = \\
 &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[3 p_1 p_2 \cos \theta_1 \cos \theta_2 - p_1 p_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) \right] = \\
 &= \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left[\cos(\theta_2 - \theta_1) - 3 \cos \theta_1 \cos \theta_2 \right]
 \end{aligned}$$

Si dimostra che il minimo si ha in due situazioni:

- $\theta_1 = \theta_2 = 0$;
- $\theta_1 = \theta_2 = \pi$.

I due dipoli si dispongono dunque paralleli alla direzione di separazione.

Consideriamo ora una sfera polarizzata, ossia una sfera di raggio R con carica superficiale $\sigma(\theta) = \sigma_0 \cos \theta$:



Calcoliamo il campo elettrico generato, il potenziale, l'energia elettrostatica, la pressione sulla superficie.

Usando il principio di sovrapposizione, possiamo pensare ad una coppia di sfere uniformemente cariche con densità ρ e $-\rho$, tale che i centri distino tra loro d , e risulti $d \cdot \rho = d_0$: la corrispondenza diventa esatta quando $d \rightarrow 0$.

Calcoliamo comunque primo il campo elettrico al centro della sfera polarizzata. Sato che:

$$dS = 2\pi R^2 d \cos \theta,$$

si ha:

• $E_y = E_z = 0$, per simmetria;

$$\begin{aligned} E_x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cancel{R^2} d \cos \theta \frac{\sigma_0 \cos \theta}{\cancel{R^2}} \cos \theta = \\ &= \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}. \end{aligned}$$

In un punto generico all'interno della sfera, sfruttando l'osservazione precedente:

$$\begin{aligned} E &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2} \right) - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2} \right) = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{d} = -\frac{\int \frac{1}{3} \pi R^3}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{1}{R^3} \vec{d} = -\frac{\rho}{3\epsilon_0} \vec{d}, \end{aligned}$$

da cui $E_x = -\frac{\sigma_0}{3\epsilon_0}$, $E_y = E_z = 0$. Dunque il campo elettrico all'interno della sfera è costante.

All'esterno, il sistema è approssimabile come un dipolo elettrico, avente momento:

$$\vec{p} = Q\vec{d} = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho \vec{d} = \frac{4}{3} \pi R^3 \sigma_0 \vec{d},$$

lungo l'asse x .

In effetti:

$$p = \int z \, dq = 2R \int d\cos\theta \, 2\pi R^2 \epsilon_0 \cos^2\theta = \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon_0$$

Dunque:

$$E_z = - \frac{p \cos\theta}{4\pi\epsilon_0 z^3}, \quad E_\theta = \frac{p \sin\theta}{4\pi\epsilon_0 z^3}, \quad E_\varphi = 0$$

Calcoliamo ora il potenziale elettrico. Integrando, si ha che, per $z > R$, vale:

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos\theta}{z^2} = \frac{4}{3} \pi R^3 \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 z} \cos\theta = \\ &= \frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} \cos\theta \left(\frac{R}{z}\right)^3 \end{aligned}$$

Per $z \leq R$, invece:

$$\varphi(z) = \frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} x + K, \quad K \in \mathbb{R}$$

Ponendo $x = z \cos\theta$, per motivi di continuità bisogna porre $K=0$. Dunque:

$$\varphi(z, \theta) = \begin{cases} \frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} z \cos\theta & , z \leq R \\ \frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} z \cos\theta \left(\frac{R}{z}\right)^3 & , z > R \end{cases}$$

A questo punto:

$$\begin{aligned} U &= \int \frac{1}{2} dq \, \varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi}^0 \frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} R \cos\theta \, \epsilon_0 \cos\theta \, 2\pi R^2 d\cos\theta = \\ &= \frac{\epsilon_0^2 \pi R^3}{3\epsilon_0} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} \right]_{\pi}^0 = \frac{2}{9} \frac{\epsilon_0^2 \pi R^3}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

Infine:

$$p = \sigma \frac{E_1^2 + E_2^2}{2}$$

In direzione radiale si ha:

$$\begin{aligned} p &= \sigma \frac{E_1^2 + E_2^2}{2} = \epsilon_0 \cos\theta \frac{-\frac{\epsilon_0}{3\epsilon_0} \cos\theta + \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0}{\epsilon_0} \cos\theta}{2} = \\ &= \frac{\epsilon_0^2 \cos^2\theta}{6\epsilon_0} \end{aligned}$$

CONDUTTORI

I CONDUTTORI sono particolari materiali che contengono elettroni che sono liberi di muoversi all'interno.

Quando le cariche sono ferme, il conduttore è in equilibrio. In tal caso:

- $\vec{E} = 0$ all'interno del conduttore;
- $\vec{E}_{\parallel} = 0$ sulla superficie (qui il campo elettrico è sempre perpendicolare).

Se così non fosse, tramite la formula $\vec{F} = q\vec{E}$ si dimostrerebbe la presenza di cariche in movimento, e ciò è assurdo.

Il potenziale φ è dunque costante in tutto il volume del conduttore (superficie compresa).

Le cariche si dispongono dunque in superficie. Infatti, all'interno del conduttore, per la prima equazione di Maxwell:

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \rho &= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0\end{aligned}$$

Nelle vicinanze della superficie, si ha (usando il Teorema di Gauss):

$$E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Dunque:

$$p = \sigma \frac{E_{\perp}}{2} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$$

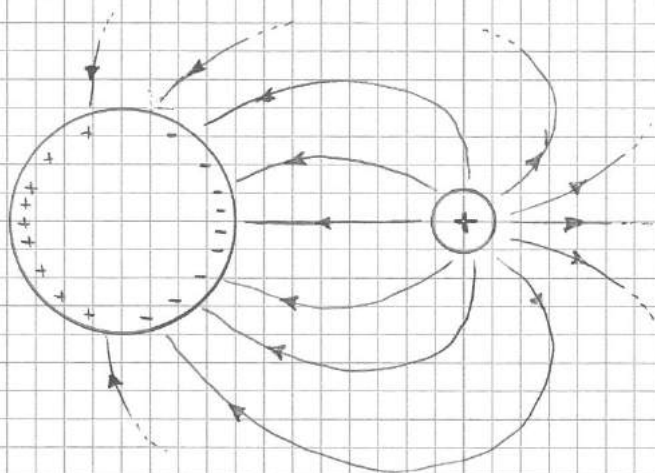
Consideriamo ad esempio una sfera conduttrice. Se ha che le cariche si dispongono uniformemente in superficie, con densità superficiale di cariche:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Infatti:

- $\vec{E} = 0$ all'interno (già dimostrato);
- $\vec{E}_n = 0$ per motivi di simmetria (si intende in superficie).

Se ad una sfera conduttrice carica avviciniamo una carica positiva, le cariche si dispongono in modo da contrastare il campo elettrico generato dalla carica. Si ha dunque una disposizione del genere:

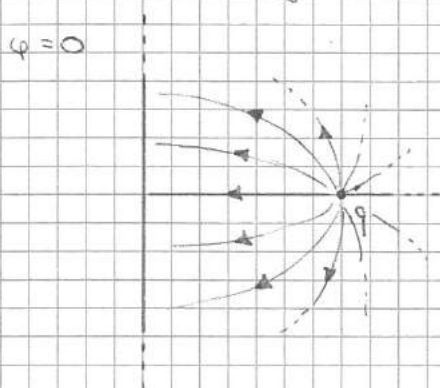


E' dunque indotta un' **ATTRAZIONE** tra i due corpi.

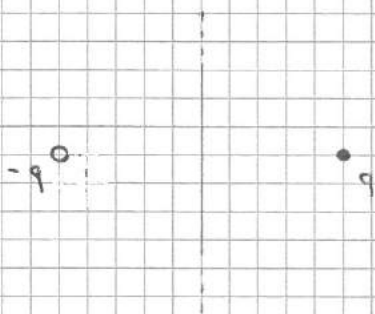
Se la sfera è cava, ossia contiene una porzione vuota al suo interno, l'esperimento precedente porta agli stessi risultati: questo risultato è noto come **ESPERIMENTO DELLA GABBIA DI FARADAY**.

METODO DELLE CARICHE IMMAGINE

Consideriamo una carica q puntiforme, posta a distanza d da un piano conduttore infinito posto a $\varphi = 0$:



In questo caso, conviene usare il cosiddetto METODO DELLE CARICHE IMMAGINE. Immaginiamo dunque di sostituire il conduttore con una carica puntiforme $-q$ disposta in maniera simmetrica di q rispetto al piano:



Tale carica genera, in assenza del conduttore, la stessa configurazione di potenziale generata da q e dalla distribuzione incognita di cariche presenti sul conduttore.

Tale potenziale è facilmente calcolabile. Si ha infatti:

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{x} - \vec{d}\|} - \frac{1}{\|\vec{x} + \vec{d}\|} \right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

da cui:

$$\vec{E}(\vec{x}) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{x} - \vec{d}}{\|\vec{x} - \vec{d}\|^3} - \frac{\vec{x} + \vec{d}}{\|\vec{x} + \vec{d}\|^3} \right), & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases},$$

da cui il campo elettrico per $x > 0$ è quello generato da q e $-q$.

Ora:

$$\begin{aligned}\sigma(y, z) &= \epsilon_0 E_{\perp} = -\epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = \\ &= -\frac{q}{4\pi} \left(\frac{\vec{x} - \vec{a}}{\|\vec{x} - \vec{a}\|^3} - \frac{\vec{x} + \vec{a}}{\|\vec{x} + \vec{a}\|^3} \right) = \\ &= -\frac{q}{4\pi} \frac{2a}{(y^2 + z^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{1}{2\pi} \frac{dq}{(y^2 + z^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

La carica indotta è dunque:

$$\begin{aligned}q_{\text{ind}} &= -\int dy dz \sigma = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} r dr d\theta = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{dq}{(r^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} dr^2 d\theta = -\frac{1}{2} dq \left[-\frac{2}{(r^2 + d^2)^{\frac{1}{2}}} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{1}{2} dq \left(-\frac{2}{d} \right) = -q,\end{aligned}$$

come ci si aspettava.

D'altronde, applicando il Teorema di Gauss a una sfera di raggio r via via crescente, si ha:

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0 \Rightarrow \lim_{r \rightarrow +\infty} q_{\text{ind}} = -q$$

La carica q risente così di una forza attrattiva opposta a:

$$\begin{aligned}\vec{F}_p &= \int dS \vec{p} = \int dy dz \sigma \frac{\vec{E}_{\perp}}{2} = \int dy dz \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} = \\ &= \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{+\infty} \frac{d^2 q^2}{(r^2 + d^2)^3} r dr d\theta = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int_0^{+\infty} \frac{d^2 q^2}{(r^2 + d^2)^3} dr^2 = \\ &= \frac{d^2 q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{(r^2 + d^2)^2} \right]_0^{+\infty} = \\ &= \frac{d^2 q^2}{16\pi\epsilon_0 d^4} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2}\end{aligned}$$

Dunque:

$$\vec{F}_q = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2}$$

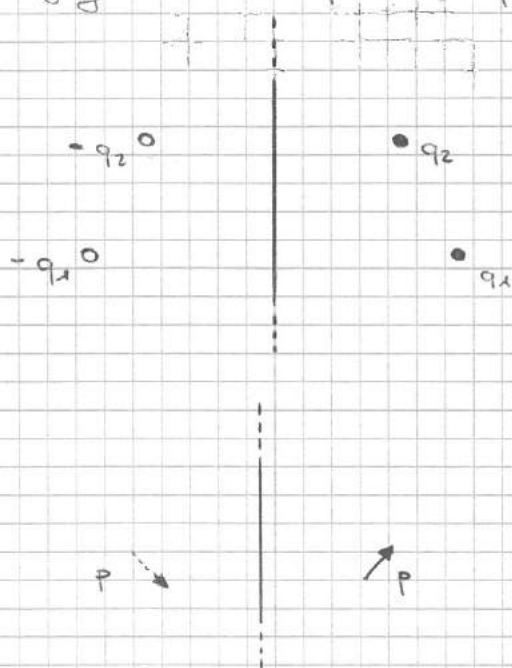
e notiamo che il conto è analogo, se si considera la carica immagine.

Infine:

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} \frac{q(-q)}{4\pi\epsilon_0(2d)}$$

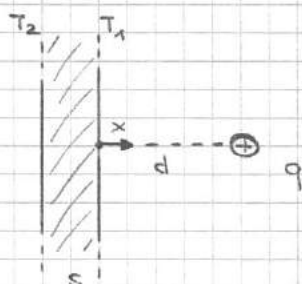
Il metodo si può generalizzare.

Ecco alcune configurazioni più complesse:

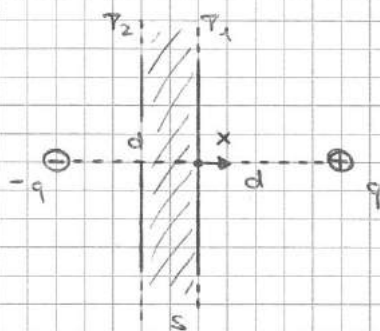


Un dipolo può infatti essere pensato come una coppia di cariche opposte, molto vicine tra loro.

Consideriamo ora una lastra di spessore s , e una carica q posta a distanza d dalla lastra (che supporremo infinita):



Ponendo allora una carica immagine di carica opposta $-q$ in posizione simmetrica rispetto al piano T_1 , si ha:



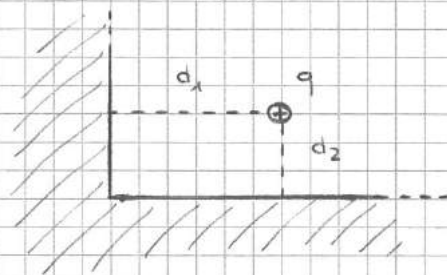
Una funzione potenziale, ellena, è data da:

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\|\vec{x}-\vec{d}\|} - \frac{1}{\|\vec{x}+\vec{d}\|} \right) & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0 \end{cases}$$

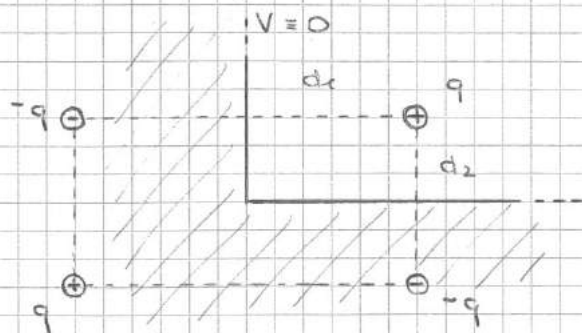
Per unicità, questa è l'unica funzione potenziale che descrive l'interazione tra la piastra conduttrice e la carica positiva q .

Il fatto che il potenziale sia nullo anche a sinistra della piastra, ossia che quella zona non risente della presenza della carica q , è da ricondursi al fenomeno della gabbia di Faraday.

Consideriamo ora una configurazione più complessa:



Il potenziale sulla superficie del conduttore si può rendere nullo posizionando tre cariche immagine:



Calcoliamo l'energia elettrostatica del sistema.

Si ha:

$$U = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} q \left[-\frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d_1} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \cdot 2d_2} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{d_1^2 + d_2^2}} \right]$$

Congetturiamo che U sia un quarto dell'energia elettrostatica che ci sarebbe se tutte le cariche fossero vere; dimostriamo ciò in via generale.

Sicuramente vale ($V = \{ \text{insieme delle cariche vere} \}$, $I = \{ \text{insieme delle cariche immagine} \}$):

$$U = \frac{1}{2} \sum_{q_i \in V} q_i \varphi_i,$$

ove:

$$\varphi_i = \sum_{q_j \in V} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \sum_{q_j \in I} \frac{q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Dunque:

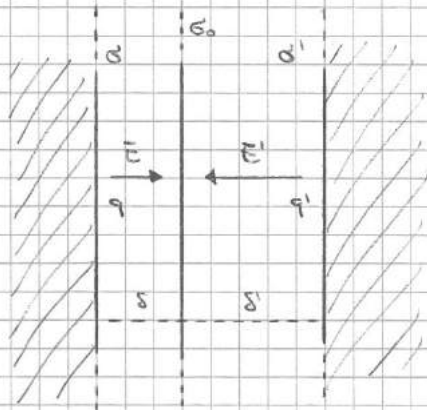
$$U = \sum_{\substack{i < j \\ q_i \in V \\ q_j \in V}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{q_i \in V} \sum_{q_j \in I} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}}$$

Nel nostro caso, comunque, il risultato è deducibile per motivi di simmetria (lo stesso conto si effettua una volta per le cariche vere, e tre volte per le cariche immagine).

Dato che le cariche sono ferme, il lavoro necessario a spostare la carica vera dalla posizione A alla posizione B è pari all'opposto della variazione di energia potenziale.

CONDUTTORI : PIANI E LASTRE

Consideriamo due semispazi conduttori collegati a Terra ($\varphi = 0$), a distanze $\delta + \delta'$. A distanza δ dal primo semispazio, è presente un piano carico infinito, con densità superficiale σ_0 :



Vogliamo calcolare q e q' , o meglio δ e δ' .
In effetti

$$\begin{cases} E - E' = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \\ E\delta = -E'\delta' \end{cases}$$

La prima equazione è dovuta al teorema di Gauss; la seconda è dovuta al fatto che si sta imponendo $\varphi = K$ sul piano carico (potenziale costante).

Si ottiene dunque:

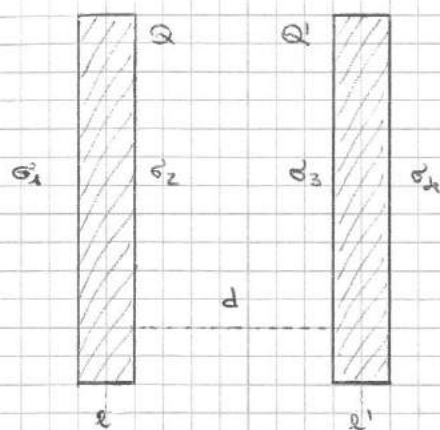
$$E = -\frac{E'\delta'}{\delta}$$
$$-E'\left(1 + \frac{\delta'}{\delta}\right) = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \Rightarrow E' = -\frac{\sigma_0 \delta}{\epsilon_0 (\delta' + \delta)}$$

Analogamente, si ottiene:

$$E = \frac{\sigma_0 \delta'}{\epsilon_0 (\delta' + \delta)}$$

La differenza di segno è dovuta al fatto che i campi hanno stessa direzione, ma verso opposto.

Consideriamo ora due lastre cariche, con cariche Q e Q' , a distanza d (disposte in modo parallelo):



Imponendo che i potenziali siano nulli sulle quattro superfici, si ottiene:

$$\begin{cases} \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 - \sigma_4 = 0 \\ \sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3 = 0 \\ (\sigma_1 + \sigma_2) S = Q \\ (\sigma_3 + \sigma_4) S = Q' \end{cases}$$

Dunque:

$$\sigma_3 = \frac{Q'}{S} - \sigma_4$$

$$\sigma_1 = \frac{Q}{S} - \sigma_2$$

$$\frac{Q}{S} - 2\sigma_2 - \frac{Q'}{S} = 0$$

$$2\sigma_4 - \frac{Q'}{S} - \frac{Q}{S} = 0$$

Dunque:

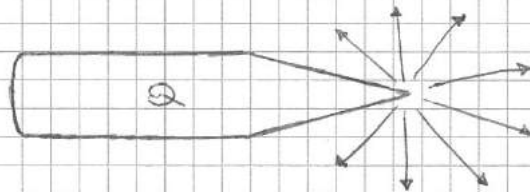
$$\sigma_3 = -\sigma_2 = \frac{Q' - Q}{2S}$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q + Q'}{2S}$$

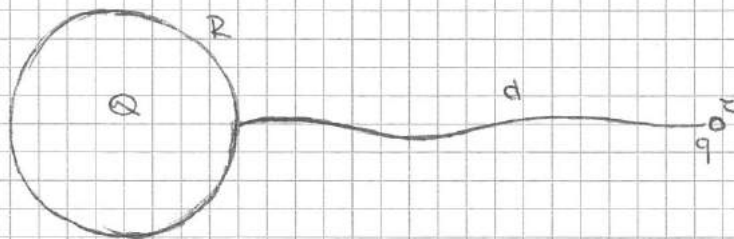
Nel caso in cui Q e Q' sono uguali per intensità, e opposte, il sistema è un CONDENSATORE a facce piane e parallele.

EFFETTO DELLE PUNTE

Vogliamo dimostrare ora, con un esempio molto semplice, che se si ha un conduttore appuntito, in prossimità della punta il campo elettrico è molto elevato:



Consideriamo due sfere conduttrici cariche, molto lontane tra loro, di raggi $r \ll R$, connesse da un filo conduttore, di lunghezza $d \gg R$:



Imponendo che i potenziali sulle due superfici siano identiche, si ha:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \Rightarrow \frac{Q}{R} = \frac{q}{r}$$

Dunque:

$$\frac{E(r)}{E(R)} = \frac{q}{Q} \frac{R^2}{r^2} = \frac{R}{r} \gg 1,$$

da cui la tesi.

CONDENSATORI E CAPACITÀ

Un CONDENSATORE è, innanzitutto, una coppia di conduttori carichi, con cariche Q e $-Q$ uguali per intensità ma opposte.

Abbiamo già visto come è fatto, ad esempio, un condensatore piano a facce parallele: in particolare, le cariche hanno uguale intensità, in modo tale che il campo elettrico all'esterno sia (approssimativamente) nullo. In questo caso, si ha:

$$\sigma = \frac{Q}{S}, \quad E = \frac{\sigma}{\epsilon_0},$$

ove S è la superficie dei due conduttori piani.

Si ha:

$$Q = CV,$$

ove C è detta CAPACITÀ. Si ha:

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} = \text{FARAD}$$

Nale ora:

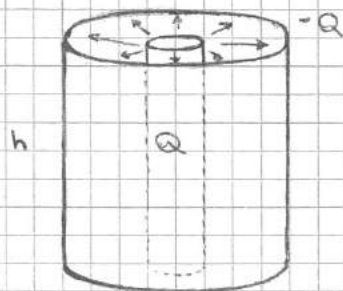
$$U = \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} Q (\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2} QV = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C}$$

Nel caso di un condensatore piano:

$$V = dE = d \frac{\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow C = \frac{Q}{V} = \frac{QS}{\frac{d}{\epsilon_0} S} = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

La capacità dipende, dunque, solamente dalle caratteristiche geometriche del condensatore.

Nel caso di un condensatore cilindrico:



Se i raggi sono r e R , allora per il Teorema di Gauss:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 2\pi r h}$$

Allora:

$$V = \frac{Q}{2\pi \epsilon_0 h} \ln \frac{R}{r},$$

da cui:

$$C = \frac{Q}{V} = 2\pi \epsilon_0 h \frac{1}{\ln \frac{R}{r}}$$

Nel caso di un condensatore sferico:

$$E = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right)$$

Quindi:

$$C = 4\pi \epsilon_0 \frac{Rr}{r_2 - r_1}$$

In ogni caso, $C = \epsilon_0 \times \Lambda$, ove Λ dipende dalle dimensioni del condensatore.

In condizioni reali (ad esempio $S = 1 \text{ m}^2$, $d = 1 \text{ m}$, si ha:

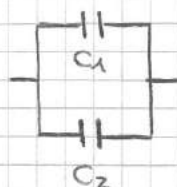
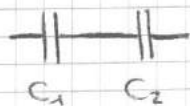
$$C \approx 10^{-11} \text{ F}$$

Sono stati allora introdotti il NANOFARAD nF (10^{-9} F), e il MICROFARAD (10^{-6} F).

L'energia potenziale di un condensatore mantenuto a una differenza di potenziale di 300 Volt, avente una capacità di $1 \mu\text{F}$, è:

$$U = \frac{CV^2}{2} \approx \frac{1}{2} \text{ J}$$

I condensatori possono essere disposti in SERIE e in PARALLELO:



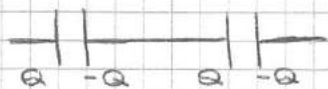
Se consideriamo due condensatori in parallelo, si ha:

$$V = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_1 + Q_2}{C_{eq}}$$

da cui la CAPACITÀ EQUIVALENTE $\bar{C}$:

$$C_{eq} = \frac{Q_1 + Q_2}{V} = \frac{C_1 V + C_2 V}{V} = C_1 + C_2$$

Nel caso dei condensatori in serie, invece:



$$V_1 = \frac{Q}{C_1} \quad V_2 = \frac{Q}{C_2}$$

$$V_1 + V_2 = Q \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1} \right),$$

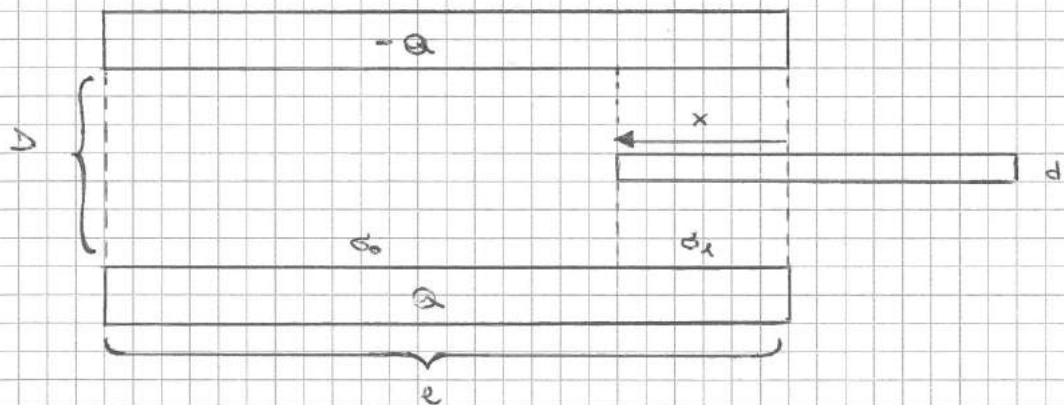
da cui:

$$C_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_1}}$$

CONDUTTORE IN UN CONDENSATORE

Consideriamo un condensatore piano con facce parallele di lunghezza l , e cariche Q e $-Q$, poste a distanza $D \ll l$. Siano le due facce quadrate.

Tra queste, inseriamo una terza conduttrice piano elettricamente neutra, di spessore $d < D$, in posizione parallela rispetto al condensatore:



Vogliamo sapere in che modo varia la capacità $C = C(x)$ del condensatore, al variare di x .

Si hanno, come evidenziato dal disegno, due campi elettrici distinti:

$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\epsilon_0} \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0}$$

In particolare, essi soddisfanno le seguenti due equazioni:

$$\begin{cases} \sigma_0 (l-x)e + \sigma_1 l \cdot x = Q \\ E_0 D = E_1 (D-d) \end{cases}$$

Da qui si ottiene:

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_1 (D-d)}{D}$$

$$\frac{\sigma_1 (D-d)(e-x)e}{D} + \sigma_1 l \cdot x = Q \Rightarrow \sigma_1 = \frac{DQ}{e(xD + (e-x)(D-d))}$$

da cui:

$$\sigma_1 = \frac{DQ}{e(xD + e(D-d))} \quad , \quad \sigma_0 = \frac{(D-d)Q}{e(xD + e(D-d))}$$

Da qui si ha:

$$C(x) = \frac{Q}{V} = \epsilon_0 \left(\frac{e(e-x)}{D} + \frac{ex}{D-d} \right) =$$

$$= \epsilon_0 \left(\frac{e(e-x)(D-d) + exD}{D(D-d)} \right)$$

Altamente, il sistema può essere visto come un insieme di tre condensatori, posizionati in questa maniera:



con:

$$C_0 = \epsilon_0 \frac{e(e-x)}{D}, \quad C_1 = \epsilon_0 \frac{ex}{D-d},$$

e:

$$C(x) = \epsilon_0 \left(\frac{e(e-x)(D-d) + exD}{D(D-d)} \right)$$

Possiamo scrivere anche:

$$C(x) = \frac{\epsilon_0 e^2}{D} \left[1 + \frac{x d}{L(D-d)} \right],$$

da cui si evince che $C(x)$ cresce quando cresce x .

Considerato ora un condensatore piano a facce parallele, a distanza s . La forza elettrica è:

$$F = -pS = -\frac{\sigma E}{2} S = -\epsilon_0 \frac{E^2}{2} S = -\frac{\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{s} \right)^2 S$$

Per la conservazione dell'energia:

$$F ds = -dU = -d\left(\frac{Q^2}{2C}\right) = -\frac{Q^2}{2} d\left(\frac{1}{C}\right) = \frac{Q^2}{2} \frac{1}{C^2} dC,$$

avendo rapporto Q costante.

Da qui:

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{ds} = \frac{V^2}{2} \frac{d}{ds} \left(\frac{\epsilon_0 S}{s} \right) = -\frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 S}{s^2} = -\frac{\epsilon_0 S}{2} \left(\frac{V}{s} \right)^2,$$

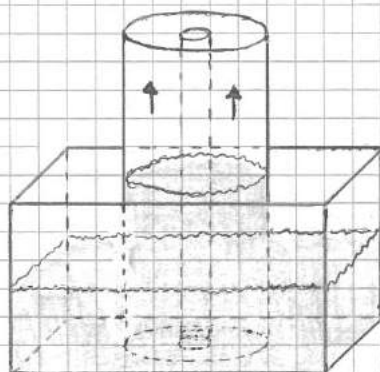
per un condensatore piano.

Se dunque inseriamo un conduttore in un condensatore (il caso discusso prima), esso risente di una forza:

$$F = \frac{V^2}{2} \frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2} \frac{\epsilon_0 L^2 d}{D(D-d)}$$

diretta nella direzione che ne aumenta la capacità, ossia verso l'interno.

Ciò può essere usato, ad esempio, per costruire una pompa idraulica. Basta infatti immergere un condensatore, ad esempio cilindrico, in un contenitore pieno d'acqua, per vedere l'acqua salire attraverso il condensatore: l'acqua è infatti un conduttore.



METODO DELLE CARICHE IMMAGINE: CASO SFERICO

Consideriamo una sfera conduttrice collegata a Terra ($\varphi \equiv 0$), di raggio r , e una carica q posta a distanza R dal centro della sfera.

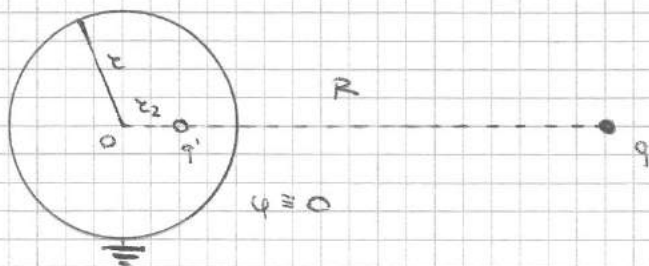
In questo caso, si può dimostrare che può essere usato il metodo delle cariche immagine, ponendo una carica:

$$q' = -q \frac{r}{R},$$

a distanza:

$$d = \frac{r^2}{R}$$

dal centro, sul segmento congiungente q e il centro della sfera:



Infatti, in generale:

$$\varphi \propto \frac{q_1}{r_1} - \frac{q_2}{r_2},$$

e il luogo dei punti tali che:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{q_2}{q_1}$$

forma una sfera. Infatti:

$$\frac{r_2^2}{r_1^2} = \frac{q_2^2}{q_1^2} \Rightarrow r_1^2 q_2^2 - r_2^2 q_1^2 = 0,$$

che è l'equazione di una sfera. Nel nostro caso, imponendo ad esempio:

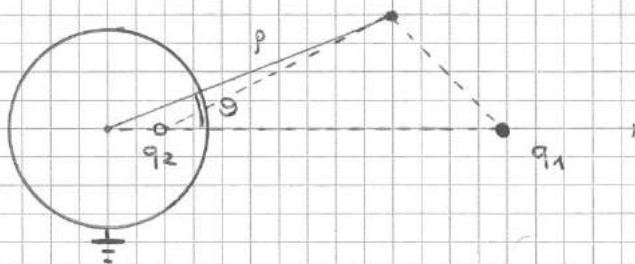
$$\begin{cases} \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{R-r} + \frac{q'}{r-r_2} \right] = 0 \\ \varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{r+R} + \frac{q'}{r+r_2} \right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{q}{R-r} + \frac{q'}{r-r_2} = 0 \\ \frac{q}{r+R} + \frac{q'}{r+r_2} = 0 \end{cases},$$

si ha:

$$\begin{cases} (r+r_2)q + (R-r)q' = 0 \\ (r-r_2)q + (R+r)q' = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} rq + Rq' = 0 \\ (r-r_2)q + (R+r)q' = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} q' = -\frac{r}{R}q \\ (r-r_2)q + (R+r)q\frac{r}{R} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q' = -\frac{q}{R}r \\ r_2 = \frac{r^2}{R} \end{cases}$$

Il potenziale può essere dunque calcolato mediante la carica immagine. Nella fattispecie:



si ha:

$$\varphi(p, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q_2}{\sqrt{p^2 + r_2^2 - 2pr_2\cos\theta}} + \frac{q_1}{\sqrt{p^2 + R^2 - 2pR\cos\theta}} \right] =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{\sqrt{p^2 + R^2 - 2pR\cos\theta}} - \frac{r}{R} \frac{1}{\sqrt{p^2 + \left(\frac{r^2}{R}\right)^2 - 2\frac{r}{R}p\cos\theta}} \right]$$

Essendo il campo elettrico ortogonale sulla superficie, è ora facile calcolare la densità superficiale di carica indotta:

$$\sigma(\theta) = \epsilon_0 E_{\perp} = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \varphi}{\partial p} \right|_{p=R} =$$

$$= -\frac{q_1}{4\pi} \left[-\frac{1}{2} \frac{2R - 2R\cos\theta}{(R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} + \frac{r}{2R} \frac{2R - 2\frac{r^2}{R}\cos\theta}{\left(R^2 + \frac{r^4}{R^2} - 2\frac{r^3}{R}\cos\theta\right)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{q_1}{4\pi} \left[\frac{1}{2} \frac{2R - 2R\cos\theta}{(R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} - \frac{R^2}{2r^2} \frac{2R - 2\frac{r^2}{R}\cos\theta}{(R^2 + \frac{r^4}{R^2} - 2\frac{r^3}{R}\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right] =$$

$$= \frac{q}{4\pi R} \left[\frac{1}{2} \frac{(R^2 - R^2)}{(R^2 + R^2 - 2R^2\cos\theta)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

La carica totale indotta si può ottenere integrando $\sigma(\theta)$ sulla superficie (ma è sconsigliato).

Essa può essere pari a q_2 , in quanto:

$$Q_{ind} = \int dS \sigma = \epsilon_0 \int dS E_n = \epsilon_0 \int dS \vec{E} \cdot \vec{n} = \\ = \epsilon_0 \oint \vec{E} = q_{in} = q_2,$$

usando la definizione di flusso del campo elettrico, e il Teorema di Gauss.

Il campo elettrico può essere dunque pensato come quello generato da q_2 : usando ciò, la carica indotta è facile da calcolare.

La forza totale sentita da q_1 è:

$$F_{q_1} = q_1 E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{d_{12}^2} = - \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R(R - \frac{c^2}{R})^2} = \\ = - \frac{q_1^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{cR}{(R^2 - c^2)^2}$$

Essa decresce come $\frac{1}{R^3}$, per $R \gg c$.

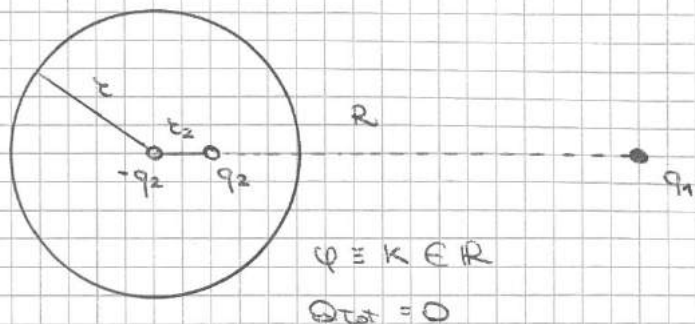
Infine, l'energia totale del sistema è:

$$U = \frac{1}{2} \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 d_{12}} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} q_1^2 \frac{c}{(R^2 - c^2)},$$

e il lavoro necessario per spostare la carica q_1 da una distanza R a una distanza R' è ovviamente:

$$L = -\Delta U = U(R) - U(R')$$

Supponiamo ora che la sfera conduttrice sia isolata, e abbia carica totale nulla. Posizionando una carica $q' = -\frac{qR}{c}$ a distanza $d = \frac{c^2}{R}$ dal centro, come nel caso precedente, otteniamo un potenziale nullo all'interno del conduttore, ma una carica non nulla. Basta allora aggiungere una carica immagine $-q'$ al centro della sfera, in modo da avere carica totale nulla e potenziale costante sulla superficie.



La forza sentita dalla sfera è l'opposto di quella sentita da q_1 in presenza della sfera, che può essere calcolata ricorrendo alle cariche immagine:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{q_1} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q_1 \left[\frac{q_2}{\left(R - \frac{z^2}{R}\right)^2} - \frac{q_2}{R^2} \right] = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{z^2}{R^2}\right)^2} - 1 \right] = \\ &= \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 R^2} \frac{2R^2 z^2 - z^4}{(R^2 - z^2)^2} = - \frac{q_1^2 z}{4\pi\epsilon_0 R^3} \frac{(2R^2 z^2 - z^4)}{(R^2 - z^2)^2}, \end{aligned}$$

da cui si evince che la forza è lievemente attrattiva.

Il potenziale (costante) sulla superficie della sfera è semplicemente:

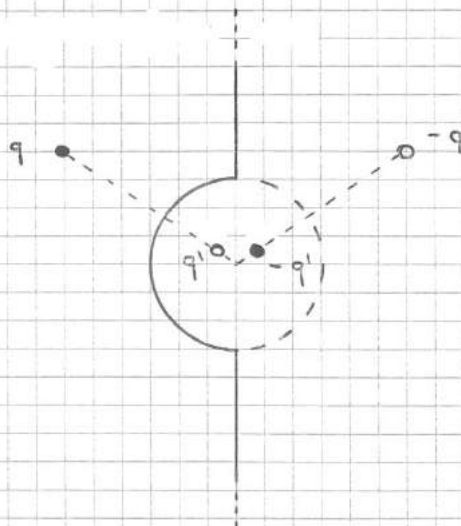
$$\varphi(z) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q_2}{z} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1}{R}$$

Infine, in base alla formula già dimostrata:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \sum_i q_i \varphi_i = \frac{1}{2} q_1 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 (R - z_2)} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \right) = \\ &= \frac{q_1 q_2}{8\pi\epsilon_0 R (R - z_2)} = - \frac{q_1^2 z}{8\pi\epsilon_0 R (R - \frac{z^2}{R})} = \\ &= - \frac{q_1^2 z^3}{8\pi\epsilon_0 R^2 (R^2 - z^2)} \end{aligned}$$

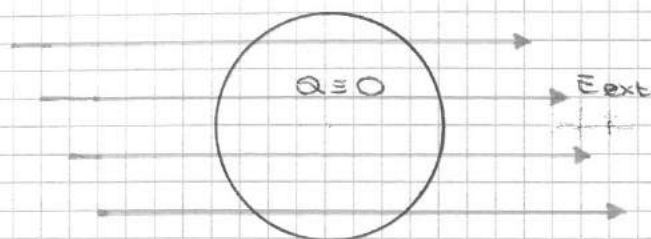
Il metodo delle cariche immagine può essere usato anche per configurazioni più complesse.

A titolo di esempio, si analizza il disegno affianco.



CONDUTTORE SFERICO IN UN CAMPO ELETTRICO COSTANTE ESTERNO

Consideriamo un conduttore sferico isolato, con carica totale nulla, immerso in un campo elettrico esterno costante:



Per tornare riconducerci ai problemi precedenti, consideriamo una carica q a distanza R dal centro della sfera, con:

$$q, R \rightarrow +\infty \quad , \quad \frac{q}{R^2} = 4\pi\epsilon_0 E_{\text{ext}}$$

Da qui si ha che le due cariche immagine, entrambe di carica in modulo pari a $q' = q \frac{r}{R} \rightarrow +\infty$ (di segno opposto), sono una al centro della sfera, e una ad una distanza $r_2 = \frac{R^2}{r} \rightarrow 0$.

In sostanza, si ha un DIPOLO IMMAGINE, avente momento:

$$p = q' r_2 = -q \frac{r}{R} \cdot \frac{r}{R} = -4\pi\epsilon_0 r^3 E_{\text{ext}}$$

All'esterno della sfera, perciò, il campo elettrico è la somma vettoriale di E_{ext} con quello generato dal dipolo.

Verifichiamo che il potenziale è costante sulla superficie della sfera ($r = R$):

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta) &= -\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{r^2} + E_{\text{ext}} r \cos \theta \right) = \\ &= \left(\frac{r^3}{r^2} - p \right) E_{\text{ext}} \cos \theta \Rightarrow \\ &\Rightarrow \varphi(R, \theta) = 0 \end{aligned}$$

Per calcolare la densità superficiale di carica, deriviamo:

$$\begin{aligned}\sigma(\theta) &= \epsilon_0 E_n = -\epsilon_0 \left. \frac{\partial \phi}{\partial p} \right|_{p=r} = \\&= \epsilon_0 \left(-2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cos \theta}{p^3} + E_{\text{ext}} \cos \theta \right) \Big|_{p=r} = \\&= \epsilon_0 \left(-\frac{1}{4\pi\epsilon_0} (-2) \frac{4\pi\epsilon_0 \cancel{r^3} E_{\text{ext}} \cos \theta}{r^3} + E_{\text{ext}} \cos \theta \right) = \\&= 3 \epsilon_0 E_{\text{ext}} \cos \theta = \sigma_0 \cos \theta,\end{aligned}$$

ovvero $\sigma_0 = 3\epsilon_0 E_{\text{ext}}$.

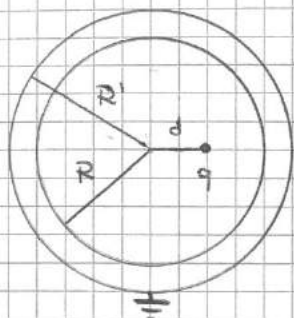
Ritorniamo allora l'esercizio della sfera polarizzata.

Si ha, all'interno della sfera:

$$E = E_{\text{ext}} - \frac{\sigma_0}{3\epsilon_0} = 0$$

SFERA CONDUTTRICE CAVA

Una carica puntiforme q è posta all'interno di un guscio conduttore sferico di raggio interno R e raggio esterno R' , posto a terra.



Calcolare:

- il potenziale ed il campo elettrico in tutto lo spazio;
- la forza sulla carica q ;
- la carica totale indotta sulla sfera;
- il potenziale e il campo elettrico, nel caso in cui il conduttore sia isolato.

Si tratta, questa volta, di calcolare la carica immagine all'esterno. Le relazioni sono le seguenti:

$$q = -Q \frac{R}{r}, \quad d = \frac{R^2}{r}$$

Da qui si ha:

$$r = \frac{R^2}{d}, \quad Q = -q \frac{r}{R} = -q \frac{R}{d}$$

Si ha dunque $\varphi = 0$ nella sfera cava e all'esterno di essa. All'interno della sfera:

$$\begin{aligned} \varphi(p, \theta) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{\sqrt{p^2 + d^2 - 2pd \cos \theta}} + \frac{Q}{\sqrt{p^2 + r^2 - 2rp \cos \theta}} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{q}{\sqrt{p^2 + d^2 - 2pd \cos \theta}} - \frac{q \frac{R}{d}}{\sqrt{p^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2p \frac{R^2}{d} \cos \theta}} \right] \end{aligned}$$

da cui, in effetti:

$$\varphi(R, \theta) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{R^2 + d^2 - 2Rd \cos \theta}} (1 - 1) = 0$$

Per quanto riguarda il campo elettrico all'interno della sfera, invece:

$$\vec{E}(p, \theta) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q}{p^2 + d^2 - 2pd \cos \theta} - \frac{q \frac{R}{d}}{p^2 + \frac{R^4}{d^2} - 2p \frac{R^2}{d} \cos \theta} \right)$$

La forza sulla carica q è attrattiva, e vale:

$$\begin{aligned} F_q &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q(-q \frac{R}{d})}{(\frac{R^2}{d} - d)^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(-q^2) \frac{R}{d}}{\frac{1}{d^2}(R^2 - d^2)^2} = \\ &= - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2 R d}{(R^2 - d^2)^2} \end{aligned}$$

È facile ora calcolare la carica totale indotta. Usando il Teorema di Gauss su una sfera di raggio $s > \frac{R^2}{d}$. Allora $\vec{E} \equiv 0$ sulla superficie, da cui:

$$\Phi_E = \int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0 \Rightarrow$$

$$Q = q + q_{\text{ind}} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q_{\text{ind}} = -q$$

Se invece il conduttore è isolato, all'interno della sfera, sulla superficie interna, si distribuisce in modo non uniforme una carica $-q$, in modo che l'effetto di q sia schermato per $r > R$. All'esterno, invece, sulla superficie esterna, si è una distribuzione uniforme di carica, con densità superficiale:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R'^2}$$

Quindi:

- per $r < R'$ la situazione è invariata;
- per $r \geq R'$, si ha:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}$$

DIELETTICI

La trattazione vista finora è stata fatta nel vuoto, ossia in assenza di materia.

All'interno di un materiale, si ha:

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}_{12},$$

ovvero:

$$\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r,$$

con ϵ_r COSTANTE DIELETTICA RELATIVA. Vale sempre $\epsilon_r > 1$, da cui l'intensità della forza diminuisce.

Iniziamo subito a dividere i dielettrici in:

- POLARI, se costituiti da molecole dotate di un dipolo elettrico, come l'acqua;
- NON POLARI, se costituiti da molecole prive di dipolo elettrico, come l'idrogeno.

In condizioni normali, tutti i dielettrici hanno dipolo totale nullo: in particolare, nei dielettrici polari, l'orientazione casuale delle molecole tende a rendere nullo il dipolo totale.

In presenza di un campo elettrico esterno, però:

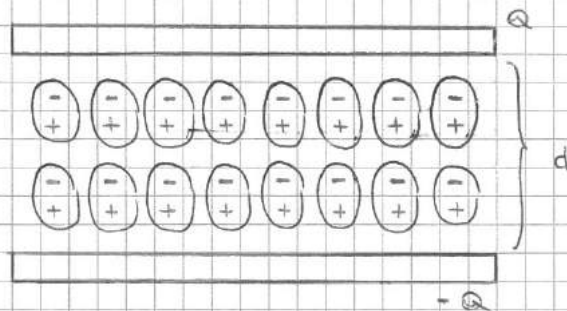
- nei dielettrici non polari, le molecole subiscono una deformazione, e diventano un dipolo elettrico;
- nei dielettrici polari, le molecole (dipoli) si orientano in una maniera già vista in passato.

Ciascuna molecola diventa perciò un dipolo elettrico, avente momento:

$$\vec{p} = \alpha \epsilon_0 \vec{E}$$

Questi dipoli generano un campo elettrico che si oppone a quello esterno: il campo elettrico totale risulta quindi ridotto (ecco perché $\epsilon_r > 1$).

Nel caso di un condensatore pieno, ad esempio:



Si ha dunque una CARICA DI POLARIZZAZIONE INDOTTA:

$$\sigma_{pol} = \pm n \vec{p},$$

ove n è la densità dei dipoli. Si ha allora:

$$\vec{E} = \frac{\vec{\sigma}}{\epsilon_0} = \frac{\sigma_{free} + \sigma_{pol}}{\epsilon_0} \approx \frac{\sigma_{free}}{\epsilon},$$

con:

$$\epsilon = \epsilon_0 \frac{\sigma_{free}}{\sigma_{free} + \sigma_{pol}},$$

$$\epsilon_r = \frac{\sigma_{free}}{\sigma_{free} + \sigma_{pol}} > 1$$

Si ha in effetti:

$$\epsilon = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_{pol}}{\sigma} \right) = \epsilon_0 (1 + n \alpha),$$

visto che:

$$\begin{aligned} \sigma_{pol} &= -n p = -n \alpha \epsilon_0 \vec{E} \\ \sigma &= \epsilon_0 \vec{E} \end{aligned}$$

La costante α è detta COSTANTE DI POLARIZZABILITÀ.

Si ha, nei solidi o liquidi:

$$n \approx \frac{1}{\alpha},$$

da cui il risultato $n \alpha$ è dell'ordine di $10^0 = 1$.

Se invece consideriamo un gas, si ha:

$$n \ll \frac{1}{\alpha},$$

da cui $n \alpha$ è molto minore di 1.

Nel caso generale, si definisce:

$$\vec{P} = n \vec{p}$$

Sulla superficie fisica del bordo del dielettrico, si ha:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n},$$

ove $\vec{n}$ è la normale esterna.

Dentro il dielettrico esiste una DENSITÀ DI POLARIZZAZIONE:

$$\rho_{pol} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Infatti:

$$\int \rho_{pol} dv = - \int ds \vec{P} \cdot \vec{n} = - \int dv \vec{\nabla} \cdot \vec{P},$$

ove nell'ultima uguaglianza si usa il Teorema della divergenza. Si ha allora:

$$\rho_{pol} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

Considerando la prima equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{pol} + \rho_{free}}{\epsilon_0},$$

da cui si definisce:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P},$$

e si riscrive l'equazione nella forma:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{free}$$

$\vec{D}$ è detto VETTORE SPOSTAMENTO ELETTRICO. In presenza di dielettrici si hanno allora queste quattro equazioni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{free} \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \\ \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{P} = \chi \epsilon_0 \vec{E} \end{array} \right.,$$

con χ = α (adimensionale).

Dunque:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \chi \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E},$$

con:

$$\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi)$$

Se si ha un materiale unico e uniforme, ϵ è costante, da cui:

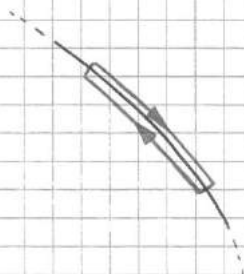
$$\vec{\nabla} \cdot (\epsilon \vec{E}) = \epsilon (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = \rho_{free}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{free}}{\epsilon}$$

In molti casi pratici, ϵ è costante all'interno di ciascun materiale. Si risolve allora in ciascun materiale imponendo le seguenti due condizioni al bordo:

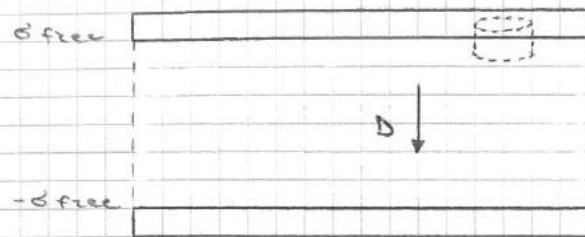
$$\begin{cases} \Delta E_{\parallel} = 0 \\ \Delta D_{\perp} = \sigma_{free} \end{cases}$$

La prima si dimostra mediante il teorema del rotore: essendo $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, la circuitazione è nulla su un circuito del genere:



Da qui si ha che $\Delta E_{\parallel} = 0$, essendo i contributi paralleli uguali in modulo ma di verso opposto.

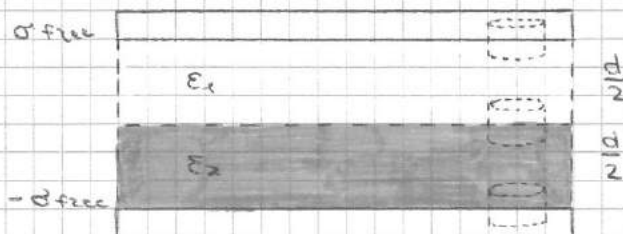
Consideriamo ad esempio un condensatore piano a facce parallele, immerso in un dielettrico:



Applicando il teorema di Gauss, si ha:

$$D = \sigma_{\text{free}} = \epsilon E$$

Se invece abbiamo questa situazione:



Si ha sempre:

$$D = \sigma_{\text{free}}$$

da cui:

$$E_1 = \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_1}, E_2 = \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_2}$$

Il campo elettrico, quindi, non è più costante.
Come varia la capacità? Si ha:

$$Q = \sigma_{\text{free}} S$$

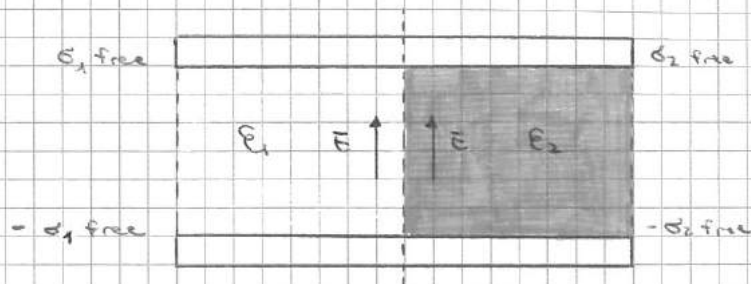
$$V = (E_1 + E_2) \frac{d}{2}$$

da cui:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma_{\text{free}} S}{(E_1 + E_2) \frac{d}{2}} = \frac{\sigma_{\text{free}} S}{\frac{d}{2} \left(\frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_1} + \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_2} \right)}$$

$$= \frac{S}{\frac{d}{2} \left(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2} \right)} = \frac{2S \epsilon_1 \epsilon_2}{d (\epsilon_1 + \epsilon_2)}$$

Nel seguente caso, invece:



Si ha, pensando ad una coppia di condensatori in parallelo:

$$C = C_1 + C_2 = \left(\frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \right) \frac{S}{d}$$

In effetti, dall'equazione $\Delta E_{||} = 0$ si ottiene che il campo elettrico è costante. Allora:

$$\begin{cases} D_1 = \epsilon_1 E \\ D_2 = \epsilon_2 E \end{cases}$$

da cui la distribuzione di carica sulle lastre conduttrici non è uniforme:

$$D_1 = \sigma_{1 \text{ free}}$$

$$D_2 = \sigma_{2 \text{ free}}$$

Allora:

$$Q = \frac{(\sigma_{1 \text{ free}} + \sigma_{2 \text{ free}}) S}{2}$$

$$V = Ed,$$

da cui:

$$\begin{aligned} C = \frac{Q}{V} &= \frac{(\sigma_{1 \text{ free}} + \sigma_{2 \text{ free}}) S}{2dE} = \frac{(\epsilon_1 E + \epsilon_2 E) S}{2dE} = \\ &= \frac{(\epsilon_1 + \epsilon_2) S}{2d} \end{aligned}$$

In effetti, l'esercizio precedente a questo poteva essere schematizzato con una coppia di condensatori in serie: la capacità, calcolata in questo modo, è ovviamente la stessa.

CORRENTI

Consideriamo un filo conduttore, sul quale viene immessa una carica, dato un punto del filo, la quantità di carica che passa da quel punto. Si definisce **INTENSITA' DI CORRENTE**:

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

Si ha:

$$[I] = \frac{[Q]}{[t]} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{sec.}} \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ampère}$$

Si ha inoltre:

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds,$$

ove $\vec{J}$ è detta **DENSITA' DI CORRENTE**.

Il verso di I e J è per convenzione dato dalle cariche positive: si è scelto in seguito che a muoversi erano soprattutto gli elettroni (che hanno carica negativa). Si è dunque mantenuta la convenzione che afferma che il verso della corrente è opposto a quello del moto degli elettroni.

Vige il principio di **CONSERVAZIONE DELLA CARICA**, che per i circuiti si esprime come:

$$\dot{Q} = \sum I_i,$$

diverso da 0 solo presso i condensatori (ove le cariche si accumulano). In generale:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = -\Phi_J = - \int \vec{J} \cdot \vec{n} \, ds,$$

dove $\Phi_J > 0$ se la carica è uscente.

In forma differenziale, usando il teorema della divergenza:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int dv \, \rho &= - \int dv \, \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} &= - \vec{\nabla} \cdot \vec{J}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} = 0$$

Si noti che esistono correnti anche se $\dot{p} = 0$.

LEGGI DI OHM E RESISTENZE

Sperimentalmente si osserva che vale:

$$I = \frac{V}{R}, \quad V = IR,$$

ove R è detta RESISTENZA ELETTRICA.

Supponiamo di avere una barra di lunghezza L , in cui vi è un'intensità di corrente costante.

Allora:

$$\frac{Q}{T} = I = \frac{Ne \cdot v}{L},$$

dato che:

- $Q = Ne$, $N \approx 6 \cdot 10^{23}$;
- $T = \frac{L}{v}$, ove v è la velocità.

Se ad esempio $I = 1 \text{ A}$, $L = 10 \text{ m}$, allora:

$$v = \frac{IL}{Ne} \approx 10^{-4} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Sembra che la velocità sia molto bassa. In realtà, quando si preme l'interruttore, una onda di pressione si propaga molto velocemente, facendo muovere tutte le cariche all'istante: ecco perché la luce si accende istantaneamente.

Considerato ora un materiale a $300 \text{ K} = T$, esso ha un'energia pari a $k_B T$, ove:

$$k_B \approx 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$$

è detta COSTANTE DI BOLTZMANN. Per un elettrone si ha:

$$\frac{m_e v_e^2}{2} \approx k_B T \approx \frac{\text{eV}}{40} \approx 10^{-18} \text{ J},$$

da cui:

$$v_e = \sqrt{\frac{k_B T}{m_e} \cdot 2} \approx 10^5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Vi è dunque una velocità costante molto elevata: la sua somma è nulla, ma è per questo che i segnali sono trasmessi istantaneamente.

Torniamo ora a:

$$V = IR$$

Consideriamo una barretta cilindrica di sezione S e lunghezza L e R :

$$V = IR$$

$$EL = JSR,$$

da cui:

$$J = \sigma E,$$

$$\sigma = \frac{L}{SR}$$

σ è detta CONDUCTIBILITÀ ELETTRICA, e dipende dal materiale trattato. Il suo inverso è detto RESISTIVITÀ ELETTRICA:

$$\rho = \frac{RS}{L},$$

da cui:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho}$$

Prima di continuare l'unità di misura della resistenza è l'OHM:

$$[R] = \frac{[V]}{[I]} = \Omega$$

ρ e R sono costanti, in ogni materiale: essi variano leggermente con la temperatura.

Proviamo di dare un'interpretazione alla formula scritta prima. Se un materiale ha una densità n di elettroni liberi, allora, dato un campo elettrico $\vec{E}$ costante, essi subiscono un'accelerazione pari a:

$$m_e a = eE \Rightarrow a = \frac{eE}{m_e}$$

Allora, integrando :

$$v(t) = v_0 + \frac{eE}{m_e} t$$

Supponiamo che gli elettroni urtino in media in un tempo

τ :

$$\tau = \langle t \rangle \approx \frac{d}{v} \approx \frac{1 \text{ \AA}}{10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} \approx 10^{-15} \text{ s},$$

si ha :

$$\langle v \rangle = \langle v_0 \rangle + \frac{eE}{m_e} \tau,$$

con $\langle v_0 \rangle$ trascurabile.

Allora :

$$J = ne \langle v \rangle = \frac{ne^2 E}{m_e} \tau = \sigma E = \frac{E}{\rho},$$

con :

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}, \quad \rho = \sigma^{-1}$$

Abbiamo dunque derivato, a livello teorico, la legge di Ohm, per ottenere :

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

Quindi :

$$R = \frac{L}{S} \rho, \quad \rho = \frac{m_e}{ne^2 \tau},$$

da cui si evince che la resistenza è direttamente proporzionale alla lunghezza e inversamente proporzionale alla sezione. Si ha :

- $\rho \approx 10^{-8} \Omega \cdot \text{m}$ nei conduttori ;
- $\rho \approx 10^{10} \Omega \cdot \text{m}$ negli isolanti ;
- valori intermedi nei semiconduttori ;
- $\rho = 0$ nei superconduttori (ideali).

La differenza è conseguente ai differenti valori di n nei vari materiali.

Definiamo ora ENERGIA DI IONIZZAZIONE:

$$U \approx \frac{eQ}{4\pi\epsilon_0 a}$$

In natura, molto spesso si ha $U \sim kT$, ove T è l'energia termica. Per questo la vita non si è sviluppata nel Sole ($kT \gg U$) o su Plutone ($U \gg kT$), bensì sulla Terra ($kT \sim U$).

Una formula più accettata è dunque:

$$\rho = \frac{m_e}{e^2 n_{\text{free}} \tau}$$

$$n_{\text{free}} = n e^{-\frac{U}{kT}}$$

EFFETTO JOULE

Consideriamo un filo conduttore, ai cui capi vi è una differenza di potenziale V , in cui scorre una corrente di intensità I . L'EFFETTO JOULE afferma che la POTENZA ELETTRICA:

$$W = VI$$

viene, totalmente o parzialmente, trasformata in calore o in altre forme di energia.

Se vale la legge di Ohm:

$$W = I^2 R$$

Consideriamo una carica dQ che in un tempo dt si sposta tra due punti con differenza di potenziale V . Allora:

$$\begin{aligned} dU &= Q dV, \quad \varphi = \frac{U}{Q} \\ \frac{dU}{dt} &= \frac{dQ}{dt} V \Rightarrow W = IV = I^2 R \end{aligned}$$

In forma integrale:

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot \vec{v} \, m \, dV = \int \vec{E} (e \vec{v} m) \, dV = \\ &= \int \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV \end{aligned}$$

Nel caso di un filo di lunghezza L e sezione S :

$$\int \vec{E} \cdot \vec{J} \, dV = E J L S = (LE)(JS) = VI,$$

come volevari dimostrare.

Consideriamo ora un condensatore piano con in mezzo un dielettrico con costante dielettrica ϵ e conduttività σ , con cariche Q e $-Q$ sulle armature:



Si ha ovviamente :

$$E = \frac{Q}{SE}$$
$$J = \sigma E = \frac{\sigma Q}{SE}$$

Si ha :

$$\frac{dQ}{dt} = I = SJ = - \frac{\sigma Q}{SE} = - \frac{Q}{\tau},$$

ove :

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} = \rho \epsilon$$

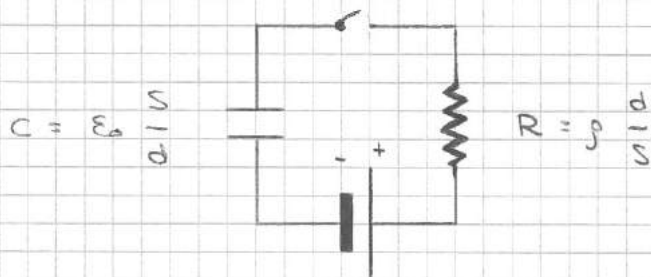
è detto TEMPO DI SCARICA, e non dipende dalla geometria del condensatore. Risolvendo l'equazione differenziale, si ha:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Per un conduttore, $\tau = \rho \epsilon \approx 10^{-19}$, da cui il sistema si scarica praticamente all'istante.

Per un isolante, invece, $\tau = \rho \epsilon \approx 10^9$ può durare anche alcuni secondi.

Consideriamo ora un CIRCUITO, come quello in figura, ove è presente una resistenza, un condensatore e un generatore:



Chiudendo il circuito, si ha :

$$V = \frac{Q}{C} = -IR = - \frac{dQ}{dt} R,$$

da cui :

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{Q}{RC} \Rightarrow Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{RC}},$$

da cui $\tau = RC$ è la costante di scarica.

Si ha in questi casi che :

$$U = \int_0^{+\infty} \omega dt = \int_0^{+\infty} R I^2 dt = \int_0^{+\infty} R \frac{Q_0^2}{\tau^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt,$$

dato che :

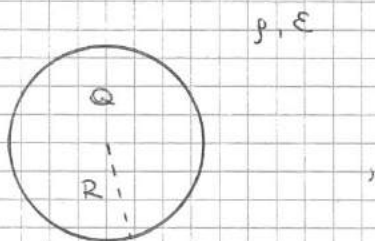
$$I(t) = -\frac{Q_0}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Dunque :

$$\begin{aligned} U &= \int_0^{+\infty} R \frac{Q_0^2}{\tau^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = R \frac{Q_0^2}{\tau^2} \left[-\frac{\tau}{2} e^{-\frac{2t}{\tau}} \right]_0^{+\infty} = \\ &= R \frac{Q_0^2}{\tau^2} \frac{\tau}{2} = \frac{R Q_0^2}{2\tau} = \frac{Q_0^2}{2C} \end{aligned}$$

In queste ipotesi, dunque, tutta l'energia elettrostatica del sistema viene dissipata per effetto Joule sotto forma di calore.

Nel caso di un conduttore sferico di raggio R e carica Q , immerso in un dielettrico di costante ϵ e resistività ρ :



si ha :

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad \vec{J} = \sigma \vec{E} = \frac{\vec{E}}{\rho},$$

da cui, per il principio di conservazione della carica elettrica :

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= -\Phi_J(S) = -4\pi R^2 J = -4\pi R^2 \sigma \frac{Q}{4\pi\epsilon R^2} = \\ &= -\frac{1}{\tau} Q, \end{aligned}$$

come previsto.

RESISTENZE IN SERIE E IN PARALLELO

Anche le resistenze, così come i condensatori, possono essere combinate. E anche in questo caso, i casi sono due:

- in SERIE;
- in PARALLELO.

Considerate due resistenze in serie, si ha una comune intensità di corrente:

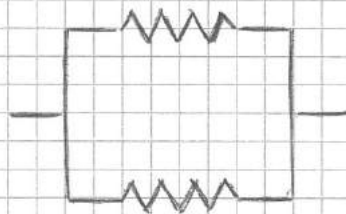


$$V_1 = R_1 I, \quad V_2 = R_2 I$$

$$V = V_1 + V_2 = (R_1 + R_2) I = R_{eq} I$$

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

Considerate due resistenze in parallelo, si ha una comune differenza di potenziale:



$$V = R_1 I_1 = R_2 I_2,$$

$$I_1 + I_2 = I$$

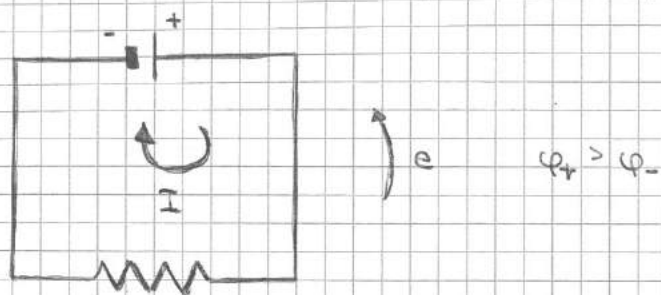
$$V = R_{eq} I$$

$$R_{eq} = \frac{V}{I} = \frac{V}{I_1 + I_2} = \frac{V}{\frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

In particolare, è uguaglianza $I_1 + I_2 = I$ e' enunciato del PRIMO TEOREMA DI KIRCHOFF, detto anche TEOREMA DEI NODI.

OSSERVAZIONE

Consideriamo un circuito, come quello in figura:



Si definisce allora FORZA ELETTRIMOTRICE:

$$\mathcal{E} = \varphi_+ - \varphi_-$$

Tale forza elettromotrice soddisfa l'equazione:

$$\mathcal{E} = RI$$

COMPLEMENTI SULL' EFFETTO JOULE

Avremmo calcolato, in uno dei paragrafi precedenti, che per una sfera conduttrice di raggio R e carica Q , immersa in un dielettrico di costante ϵ e resistività ρ , vale:

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon r^2}, \quad r > R$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \vec{E} \cdot \frac{1}{\rho}$$

Inoltre vale:

$$\frac{dQ}{dt} = - \frac{\sigma}{\epsilon} Q = - \frac{Q}{\tau},$$

con $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} = \epsilon \rho$.

Allora:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

La potenza $w(t)$ dissipata per effetto Joule è:

$$w(t) = \int \vec{E} \cdot \vec{J} dV = \int dV \sigma E(t)^2 =$$

$$= 4\pi\sigma \int_R^{+\infty} \frac{Q^2(t)}{(4\pi)^2 \epsilon^2 r^2} dr =$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{Q_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}{\epsilon^2} \cdot \frac{1}{R}$$

da cui l'energia totale dissipata per effetto Joule è uguale a:

$$U_J = \int_0^{+\infty} \frac{\sigma}{4\pi\epsilon} \frac{Q_0^2}{\epsilon^2} \frac{1}{R} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon R} = U_{in} - U_{fin},$$

ove U_{fin} è 0, e $U_{in} = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon R}$ è l'energia iniziale del sistema.

In fatti, considerando il sistema come un condensatore sferico con $r_2 \rightarrow +\infty$, si ha:

$$C = 4\pi\epsilon \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \rightarrow 4\pi\epsilon r_1,$$

da cui $U = \frac{Q_0^2}{8\pi\epsilon R}$.

INTRODUZIONE ALLA MAGNETOSTATICA

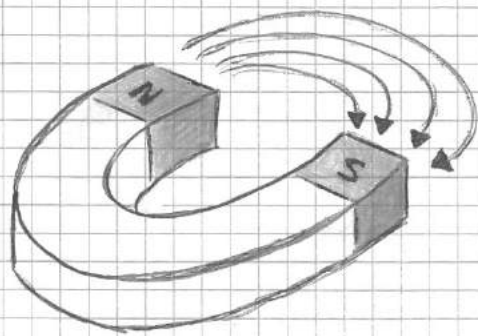
Prima di cominciare con la trattazione vera e propria, anticipiamo che il CAMPO MAGNETICO è una "correzione relativistica" del campo elettrico, che in condizioni normali è pressoché trascurabile, ma che diventa considerevole in presenza di correnti elettriche.

I fenomeni elettromagnetici erano noti già nell'antico greco: si era scoperto infatti un minerale, detto MAGNETITE, capace di attirare piccoli pezzi di ferro, ad esempio.

Inoltre, due frammenti di magnetite interagiscono tra di loro, attraendosi o respingendosi a seconda dei casi.

È stato dunque introdotta il concetto di POLO MAGNETICO, che può essere POSITIVO o NEGATIVO: è differente dalle cariche elettriche (con cui si sono forti analogie), però, i monopoli magnetici non esistono.

Le linee di forza del campo magnetico, quindi, escono dal polo positivo, per convergere a quello negativo, come nel disegno:



È stato poi scoperto che una carica elettrica q in movimento con una velocità $\vec{v}$, immersa in un campo elettrico $\vec{E}$, è posta nel piano di un magnete risente di una forza proporzionale alla carica elettrica:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

ove $\vec{B}$ è uno PSEUDOVETTORE, detto CAMPO MAGNETICO.

$\vec{B}$ è una pseudovettore in quanto è invariante per PAR: $\vec{A}$:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ x & \rightarrow & -x \\ & P & \\ y & \rightarrow & -y \\ & P & \\ z & \rightarrow & -z \end{array}$$

Sotto parità, allora:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \vec{a} & \rightarrow & -\vec{a} \\ & P & \\ \vec{v} & \rightarrow & -\vec{v} \\ & P & \\ \vec{B} & \rightarrow & \vec{B} \end{array}$$

da cui:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ m\vec{a} = \vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} & & \\ \downarrow P & \downarrow P & \downarrow P \downarrow P \\ -m\vec{a} = -\vec{F} = q(-\vec{v}) \times ? \end{array}$$

da cui $\vec{B}$ è invariante per parità:

$$\begin{array}{ccc} & P & \\ \vec{B} & \rightarrow & \vec{B} \end{array}$$

Con questa definizione, anche il MOMENTO ANGOLARE è una pseudovettore:

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Un vettore che risulta invariante sotto parità, in generale, si dice pseudovettore.

Per quanto riguarda l'unità di misura, si introduce il TESLA T:

$$[B] = \frac{N}{\frac{C \cdot m}{s}} = \frac{N}{A \cdot m} = T$$

Un'unità ormai in disuso è il GAUSS G.

$$1 T = 10^{-4} G$$

Alcuni campi magnetici noti sono i seguenti:

- il campo magnetico terrestre vale circa $10^{-4} T$;
- il campo magnetico generato da una calamita vale circa $10^{-2} T$;
- il campo magnetico nella nostra galassia vale, in media, $10^{-10} T$;

- il campo magnetico di una stella di neutroni naturalmente può valere anche 10^8 T ;
- con le tecniche attuali, si può ottenere un campo magnetico di intensità al più pari a circa 10 T : all'interno del LHC, ad esempio, si raggiungono campi magnetici di circa 8 T .

ESPERIMENTO DI THOMPSON

Nella prima parte del corso abbiamo affermato che, a livello di fotoni ed elettroni, vale:

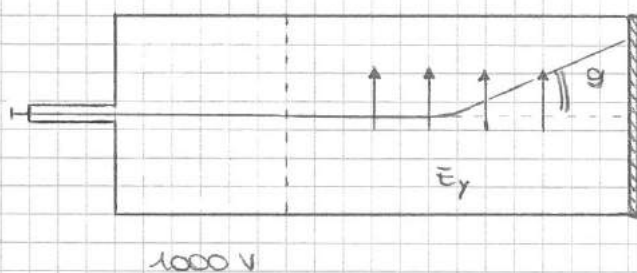
$$m_e \approx \frac{1}{1836} m_p$$

Tuttavia, tale relazione fu dimostrata da J.J. Thompson nel 1897 attraverso l'uso di campi magnetici.

Creiamo una differenza di potenziale $V \sim 1000 \text{ V}$, e poi creiamo un campo elettrico E_y nella zona adiacente. Un elettrone acquista dunque un'energia cinetica

$$K = m_e \frac{v^2}{2} \approx 1000 \text{ eV},$$

e viene deflesso per effetto del campo elettrico:



Si ha:

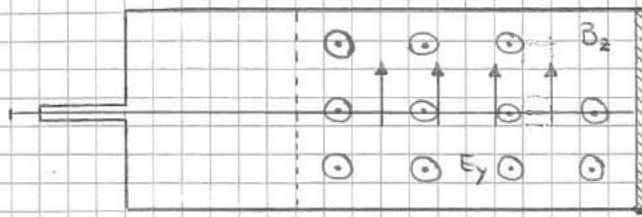
$$\theta \approx \frac{P_{\perp}}{P_{\parallel}} = \frac{F \cdot t}{m_e \cdot v} \approx \frac{e E_y L}{m_e v} = \frac{e E_y L}{m_e v^2} \approx \frac{e E_y L}{2K},$$

con K energia cinetica dell'elettrone. Dunque, per la conservazione dell'energia:

$$\theta \approx \frac{e E_y L}{2K} \approx \frac{e E_y L}{2eV} = \frac{E_y L}{2V}$$

Tale misurazione non consente, dunque, di misurare m_e : per far ciò è equivalente, ad esempio, misurare $\vec{v}$.

Si può allora aggiungere un campo magnetico orientato lungo l'asse z , in modo tale, ad esempio, che l'elettrone non subisca deflessioni:



Dunque:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

Se regoliamo opportunamente $\vec{B}$, si avrà $\vec{F} = \vec{0}$.

Sarà dunque:

$$v = \frac{E_y}{B_z} \Rightarrow m_e = \frac{\sqrt{2eV}}{v},$$

e il problema è risolto. A livello sperimentale, lo ricordiamo:

$$m_p \approx 1836 m_e$$

COME FUNZIONA UN TELEVISORE?

Una particella carica, immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$, si muove di moto elicoidale o circolare, con un'accelerazione centripeta:

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{q}{m} v B$$

Dunque la quantità di moto è:

$$p^{\text{def}} = mv = qBr,$$

ovvero stiamo supponendo q positivo.

Si ha pertanto un periodo:

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi m}{qB},$$

e una pulsazione:

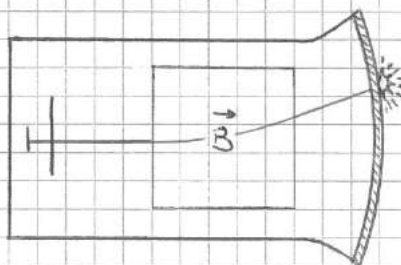
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{qB}{m}$$

Dato che, in questo caso, i vettori $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono sempre ortogonali, si ha:

$$\omega = \vec{F} \cdot \vec{v} = 0,$$

da cui v è costante.

Consideriamo dunque un televisore a raggi catodici (bianco e nero, per semplicità):



Nella zona evidenziata, un campo magnetico variabile deflette opportunamente il fascio di elettroni, che illumina così lo schermo secondo i segnali ricevuti da un'antenna.

L'impulso $p = e B r$ è fissato. Si ha allora:

$$p = \sqrt{2 m_e K}, \quad K \approx 1000 \text{ eV},$$

da cui:

$$K = \frac{p^2}{2 m_e}$$

Detto che p e e sono fissati, dalla relazione:

$$p = q B r$$

si ottiene che, maggiore è l'intensità di B , più "sotile" è il televisore. Ma, per motivi che non discutiamo, può essere al massimo $B \approx 10^{-2} \text{ T}$, cosicché è dover essere nell'ordine di 1 m : i televisori a schermo piatto, infatti, non usano i raggi catodici, bensì una tecnologia diversa.

Notiamo che, sempre dalla relazione:

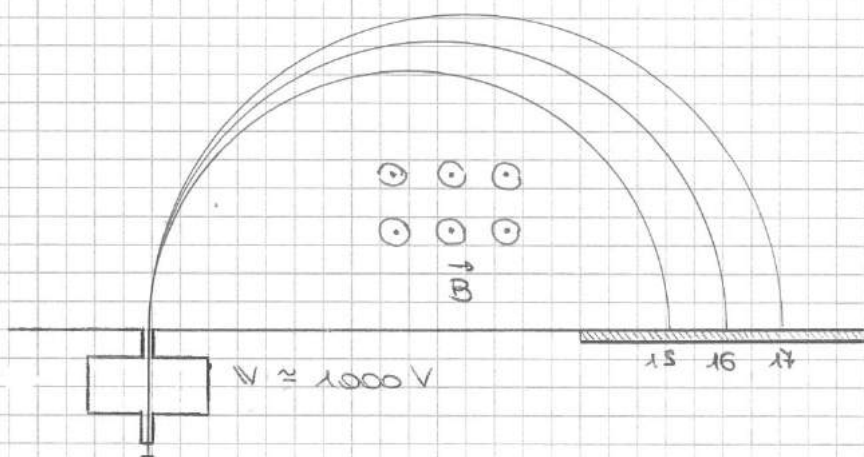
$$p = q B r,$$

deduciamo che, con un campo magnetico e un raggio enormi, si ottiene un impulso elettromagnetico molto elevato: ecco perché il LHC ha un raggio di $4,3 \text{ km}$ circa, e un campo magnetico tra i più alti ottenibili sulla Terra.

SPETTRONETRO DI MASSA

Nell'ambito della chimica, alla base di uno dei più importanti strumenti di misurazione, lo SPETTRONETRO DI MASSA, vi sono i campi magnetici.

Il principio è molto simile a quello usato per il televisore. Lo illustreremo di seguito:



Un fascio di ioni d'ossigeno (ma l'esperimento si può condurre con un gas qualsiasi), che supponiamo tutti aventi la stessa carica elettrica, vengono accelerati in una zona con una differenza di potenziale molto elevata, e poi sottoposti all'azione di un campo magnetico uniforme.

Sulla formula:

$$m = \frac{q B r}{v}$$

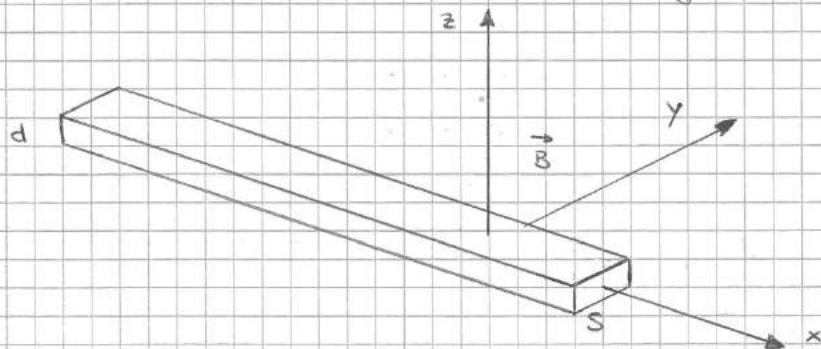
si può risalire dunque alla massa del singolo ione. Sperimentalmente, dunque, ci si è accorti che la maggior parte degli ioni d'ossigeno ha massa pari a 16 volte quella dell'idrogeno; tuttavia, ci si è accorti della presenza di minuscole percentuali di particelle di idrogeno aventi massa differente. In generale, tali ioni sono detti ISOTOPi.

Sulla Terra fisica, dunque, le masse registrate sono una media ponderata, non la massa effettiva, che è sempre un valore intero.

ESPERIMENTO DI HALL

È fatto che gli elettroni abbiano carica negativa, ossia si muovono con verso opposto a quello della corrente, è dovuto all'ESPERIMENTO DI HALL, eseguito nel 1879.

Consideriamo un filo conduttore percorso da una corrente continua, lungo l'asse x , posto in un campo magnetico $\vec{B} = (0, B_y, 0)$ orientato lungo y :



Si ha allora:

$$I_x = n q_e S v_x,$$

ove S è la sezione del filo, n è la densità numerica degli elettroni, che hanno carica q_e (di segno per ora sconosciuto). Dato che:

$$\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}),$$

si ha che gli elettroni risentono di una forza diretta lungo l'asse z :

$$F_z = q_e v_x B_y,$$

e dunque si concentrano su una ben definita faccia del filo, quella superiore o quella inferiore: in base a ciò, si può risalire al segno di q_e .

L'accumulo delle cariche crea un campo elettrico E_z opposto rispetto a F_z , e gli elettroni cominciano ad avere velocità parallela all'asse x solamente quando:

$$F_z = q_e (E_z + v_x B_y) = 0$$

Se d è la distanza tra le due facce, all'equilibrio si ha una differenza di potenziale:

$$V = - d E_z$$

Misurando V mediante un voltmetro, si misura E_z , dunque V_x , e si scopre quindi che $q_e < 0$.

La differenza di potenziale registrata è nota come FORZA ELETTROMOTRICE DI HALL. Essa è dovuta alla FORZA DI LORENTZ, che, lo ricordiamo, è:

$$\vec{F}_L = q \vec{v} \times \vec{B}$$

Il fenomeno di accumulo delle cariche, e di conseguente differenza di potenziale generata, è nota come EFFETTO HALL.

Sempre in via sperimentale si può dimostrare che vale:

$$V_x \approx 10^{-4} \frac{m}{s},$$

nel caso in cui $I_x = 1 \text{ A}$, e il filo è lungo 10 m. In effetti, spostando il filo lungo x con tale velocità, l'effetto Hall avviene, in quanto gli elettroni risultano "fermi".

FORZA MAGNETICA SU UN FILO

Consideriamo un filo dritto di lunghezza L e sezione S , contenente $N = nLS$ elettroni in moto a velocità $\vec{v}$.

Allora la forza totale di Lorentz vale:

$$\vec{F} = N e v B = L S n e v B = L I B,$$

essendo:

$$I = S \cdot J = S n e v$$

In generale, per un filo di forma arbitraria, vale:

$$\vec{F} = \int I d\vec{L} \times \vec{B}$$

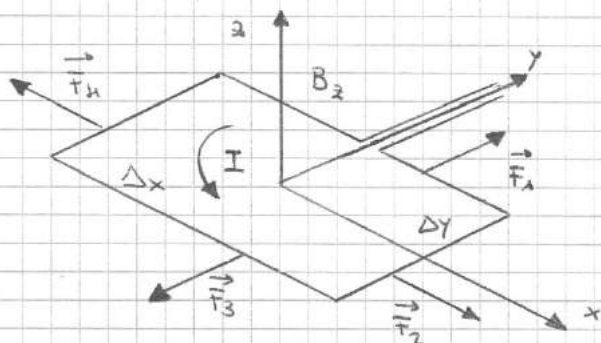
Una prima applicazione consiste nell'AMPEROMETRO, che, sulla base dei dati registrati, misura la corrente che si registra in una porzione di filo, mediante la relazione (semplificata):

$$I = \frac{F}{LB}$$

Anche i motori elettrici usano queste relazioni: non entrano nei dettagli, però.

INDUZIONE MAGNETICA

Consideriamo una spira rettangolare di lati Δx e Δy , ferma nel piano $\{z=0\}$, in presenza di un campo magnetico $\vec{B} = (0, 0, B_z)$:



In modulo, vale:

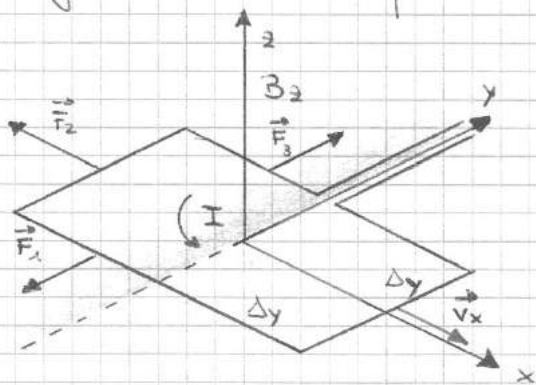
$$F_1 = F_3 = B_z I \Delta y$$

$$F_2 = F_4 = B_z I \Delta x$$

Le forze sono dirette verso l'esterno, se I gira in senso antiorario; verso l'interno in caso contrario. In ogni caso, se $\vec{B}$ è uniforme, la forza totale è nulla:

$$\vec{F} = I \left(\oint d\vec{s} \right) \times \vec{B} = \vec{0}$$

Supponiamo ora che la spira sia immersa solo per metà in un campo magnetico come quello precedente:



Si ha $\vec{F}_1 = -\vec{F}_3$, da cui:

$$\vec{F}_{\text{tot}} = \vec{F}_2 = (-\Delta y I B_z, 0, 0)$$

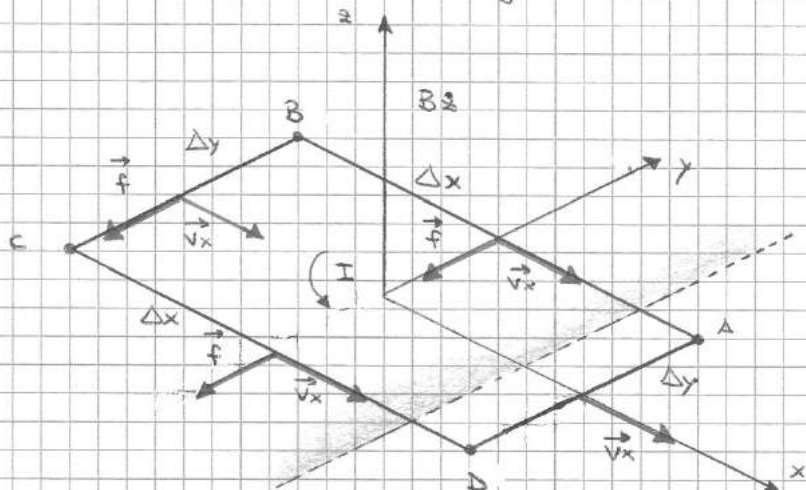
Se però muoviamo la spirale con velocità $\vec{v}$ (indicata in verde nel disegno precedente), si ottiene una relazione effettivamente esatta:

$$\omega = \vec{\pi} \cdot \vec{v} \neq 0$$

A livello fondamentale, la forza magnetica non compie lavoro, mentre in questo caso compie lavoro. Come si spiega tutto ciò? Il prossimo paragrafo lo spiega.

LEGGE DI LENZ

Consideriamo il seguente disegno:



In particolare $\vec{v}_x$ è la velocità meccanica della spina, e $\vec{f}$ è una forza diretta sempre nella stessa direzione, ma che non compie lavoro.

Tale forza si riduce all'effetto Hall nei lati paralleli a $\vec{v}_x$, ma provoca un'accelerazione negli elettroni nel tratto BC, ove per una carica positiva q vale:

$$\vec{f} = q \vec{v}_x \times \vec{B}_z,$$

diretta da B verso C.

È come se esistesse un campo elettrico $\vec{E} = (0, -E_y, 0)$, con:

$$E_y = v_x B_z$$

Si ha perciò una FORZA ELETTROMOTRICE indotta:

$$\mathcal{E} = -\Delta y E_y = -\Delta y v_x B_z$$

Se dunque consideriamo la potenza meccanica $\mathcal{W}_m$ e la potenza elettrica $\mathcal{W}_e$, si ha:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_m &= \vec{F} \cdot \vec{v} = + (-\Delta y I B_z) v_x = \\ &= \Delta y I B_z v_x \end{aligned}$$

$$\mathcal{W}_e = \mathcal{E} I = -\Delta y v_x B_z I,$$

ovvero $\mathcal{W}_e = -\mathcal{W}_m$, dunque $\mathcal{W}_{tot} = \mathcal{W}_e + \mathcal{W}_m = 0$.

In generale, conta la differenza tra i due lati traversali:

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y (B_z(x + \Delta x) - B_z(x))$$

Nell'ambito più generale possibile, vale la cosiddetta
LEGGE DI LENZ:

$$\mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B,$$

ove Φ_B è il FLUSSO DEL CAMPO MAGNETICO, e si misura in WEBER Wb.

Per una spira rettangolare, infatti, se $v_x = \frac{dx}{dt}$:

$$\Phi_B(t) = B_z \Delta y [\Delta x + t v_x] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\dot{\Phi}_B(t) = -B_z \Delta y v_x = \mathcal{E},$$

e l'esempio generale si ottiene decomponendo una spira di forma generica in tante spire rettangolari.

La forza elettromotrice, pertanto, è data dalla derivata del flusso del campo magnetico: talvolta questa formula è nota come LEGGE DI FARADAY-NEUMANN.

Notiamo che, dato che $W_{tot} = 0$, l'energia meccanica si trasforma in energia elettrica e viceversa: in particolare, questa è l'idea con cui, oggi giorno, si produce energia elettrica.

La legge di Lenz rimane valida se lasciamo fissa la spira e modifichiamo il campo magnetico: si è dimostrato sperimentalmente che la legge sussiste ancora.

ANALISI DELLA SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL

In base a quanto visto finora, per ogni superficie S vale:

$$-\dot{\Phi}_B = - \int_S \vec{B} \cdot \vec{v} \, d\sigma$$

$$\mathcal{E} = \oint \vec{E} \, d\vec{s} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \vec{v} \, d\sigma,$$

dove nella seconda relazione abbiamo usato il Teorema di Stokes. Vale anche, per la legge di Lenz, $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$.

Per arbitrarietà della superficie S :

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\dot{\vec{B}} = \vec{\nabla} \times \vec{E} \Rightarrow \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

e questa è la "versione definitiva" della SECONDA EQUAZIONE DI MAXWELL.

La prima equazione di Maxwell, invece, rimane invariata:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Un campo elettrico, dunque, si può generare sia mediante una densità di carica (in questo caso il rotore è nullo), sia mediante campi magnetici (in questo caso la $di =$ divergenza è nulla).

Notiamo che il campo elettrico così ottenuto è irrotazionale se e solo se $\vec{B}$ è uniforme. Dunque, in generale, non vale più:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi,$$

perché se $\vec{B}$ non è costante il rotore è non nullo.

Le equazioni più importanti finora viste, dunque, sono le due equazioni di Maxwell, assieme alla FORZA DI LORENTZ:

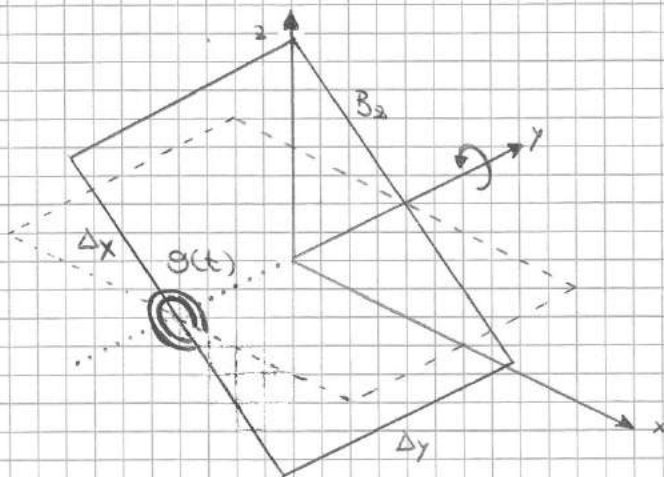
$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

e alla CONSERVAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{J}$$

ANALISI DI UNA SPIRA RUOTANTE

Consideriamo un campo magnetico uniforme $\vec{B} = (0, 0, B_z)$, e consideriamo una spirale nel piano $\{z=0\}$, che faccia ruotare intorno all'asse y , come in figura:



Si ha:

$$\Phi_B(t) = B_z \Delta x \Delta y \cos \theta(t),$$

da cui:

$$\mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B(t) = B_z \Delta x \Delta y \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

Vogliamo però calcolare $\mathcal{E}$ a partire dalla forza di Lorentz.

Ricordando che $\mathcal{E}$ si regita solo sui lati di lunghezza Δy , si ha che ogni particella si muove con una velocità:

$$\vec{v}(t) = \begin{bmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) \parallel \vec{B} \end{bmatrix},$$

da cui $\vec{v}(t) \times \vec{B} \parallel \hat{y}$.

Quindi:

$$\mathcal{E}(t) = -2 \Delta y v_x(t) B_z,$$

ove:

$$v_x(t) = \frac{d}{dt} x(t) = \frac{d \Delta x}{dt} \cos \theta(t) = - \frac{\Delta x}{2} \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

Quindi:

$$\mathcal{E} = \Delta x \Delta y \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) B_z,$$

come previsto.

Valore Rel. relazione $W_{el} = W_m$?

Si ha:

- $W_m = \vec{F} \cdot \vec{w} = 2 F_x v_x = 2 I \Delta y B_z \left(- \frac{\Delta x}{2} \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) \right);$
- $W_{el} = I \mathcal{E} = I \Delta x \Delta y \dot{\theta}(t) \sin \theta(t) B_z.$

Quunque, come si voleva:

$$W_m = - W_{el} = - B_z I (\Delta x \Delta y) \dot{\theta}(t) \sin \theta(t)$$

Quando vedremo, più avanti, come si generano i campi magnetici, vedremo che la legge di Lenz afferma, tra l'altro, che la forza elettromotrice indotta genera una corrente I , che genera un campo magnetico $\vec{B}$, che si oppone alla variazione del flusso nel tempo $\dot{\Phi}_B$: ad esempio, essa tende a frenare una spirale in movimento.

FORMULA INTEGRALE PER IL CAMPO MAGNETICO

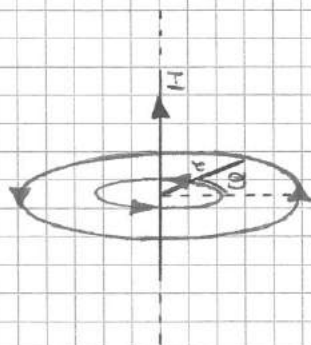
In passato si pensava che le interazioni elettromagnetiche fossero di tipo newtoniano, ossia generassero forze agenti sulla congiungente tra i due corpi.

Nel 1820 H.C. Ørsted smentì tale ipotesi, dopo aver notato che l'ago di una bussola posto nelle vicinanze di un filo conduttore percorso da una corrente elettrica si disponeva in maniera perpendicolare alla congiungente filo-ago.

In ogni caso, fu scoperto che le correnti elettriche generano dei campi magnetici.

Consideriamo ora un filo rettilineo infinito, percorso da una corrente I . In una sperimentale, si è visto che esso genera un campo magnetico:

$$\vec{B}(r, \theta) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



In particolare μ_0 è detta PERMEABILITÀ MAGNETICA NEL VUOTO, e vale:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T}{mA}$$

Essa è usata per definire l'unità di misura dell'intensità di corrente, l'AMPERE: due fili rettilinei paralleli, di lunghezza infinita e di sezione trascurabile, posti a distanza di 1 m l'uno dall'altro, sono percorsi da una corrente di intensità costantemente pari a 1 A e (nel vuoto) si registra una forza

fra i conduttori pari a $2 \cdot 10^{-7}$ N per ogni metro.

Un COULOMB è dunque la quantità di carica elettrica che passando attraverso un filo conduttore percorso da una corrente di 1 A, nell'arco di un secondo:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$$

Allora:

$$[\mu_0] = \frac{\text{T}}{\text{mA}} = \frac{\text{N}}{\text{A}^2} = \frac{\text{N s}}{\text{A C}} = \frac{\text{V s}}{\text{A m}} = \frac{\Omega \text{ s}}{\text{m}} = \frac{\text{H}}{\text{m}},$$

ovvero $\text{H} = \Omega \text{ s}$ è detto HENRY. Dunque:

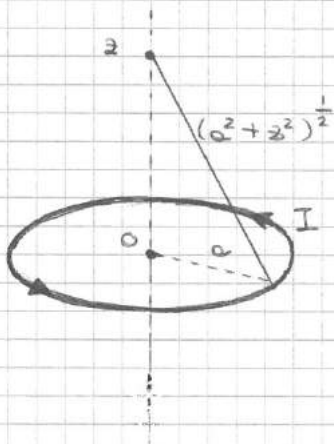
$$\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \frac{\text{H}}{\text{m}}$$

Consideriamo ora una spira circolare nel piano $\{z=0\}$. Nel suo centro si registra, sperimentalmente, un campo magnetico:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

ovvero a è il raggio della spira. Per un punto sull'asse z , a distanza z dal centro, si registra invece:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} \frac{I a^2}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}$$



In generale, il campo magnetico $\vec{B}$ generato da un'intensità di corrente I , da una densità di corrente $\vec{J}$ o da una carica q è:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} qV \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

Infatti, nel caso del filo rettilineo:

$$\begin{aligned} B(r, \theta) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \sin \theta = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dz = \\ &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \left[\frac{2}{r^2 (r^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{2\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}, \end{aligned}$$

e una verifica analogo vale per una spira circolare:

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a}{2r^2} \cos \theta = \frac{\mu_0 I a^2}{2r^3},$$

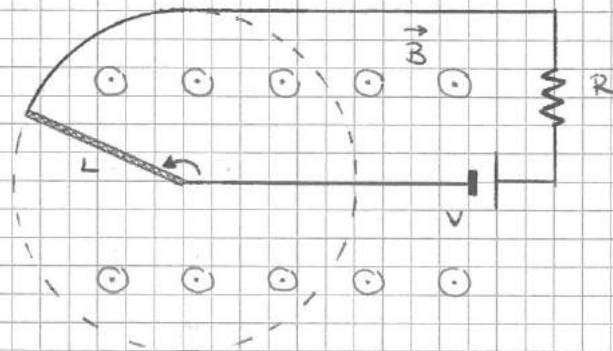
essendo $\cos \theta = \frac{a}{r}$. Nel centro, in particolare:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I a^2}{2a^3} = \frac{\mu_0 I}{2a},$$

come previsto.

ESERCIZI VARI

1. Un motore fa ruotare una sbarretta conduttrice di lunghezza L attorno ad un'estremità, con una velocità angolare ω costante, facendo una circonferenza nel piano ortogonale ad un campo magnetico $\vec{B}$ costante. Ai due estremi della sbarretta è collegato un circuito che contiene una forza elettromotrice costante V e una resistenza R :



Calcolare la corrente I che passa nel circuito. Per quale valore di ω è possibile fermare il motore, senza che la sbarretta modifichi il suo moto?

In questo caso, l'equazione del circuito è:

$$\mathcal{E} + V = IR,$$

con:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= -\dot{\Phi}_B = -\frac{d}{dt} \left(B \cdot \left(A_{\text{fix}} + \frac{1}{2} L^2 \omega t \right) \right) = \\ &= -B \frac{1}{2} L^2 \omega = -\frac{1}{2} BL^2 \omega \end{aligned}$$

Dunque:

$$I = \frac{V - \frac{1}{2} BL^2 \omega}{R}$$

Per rispondere alla seconda domanda, ricordiamo che:

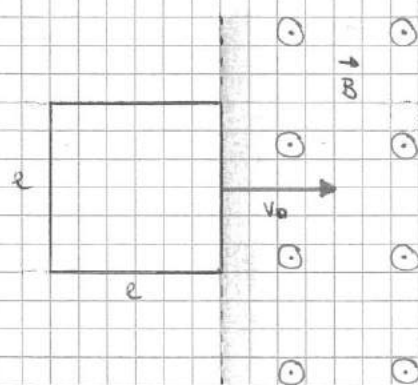
$$\vec{F} = I \int d\vec{s} \times \vec{B},$$

da cui si ha $\vec{F} = \vec{0}$ se $I = 0$, ad esempio, ossia se:

$$V - \frac{1}{2} BL^2 \omega = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{2V}{BL^2}$$

2. Una spira rigida conduttrice di forma quadrata, di lati di lunghezza ℓ e paralleli agli assi x e y , si muove nel piano xy con velocità iniziale v_0 parallela a $\hat{x}$, nel suo verso positivo. A $t=0$ interseca la regione $x \geq 0$, in cui risiede un campo magnetico $\vec{B}$ uniforme e costante diretto lungo il suo verso positivo.



Calcolare in funzione di v , la corrente I circolante nella spira mentre penetra nella regione sede del campo magnetico.

Calcolare la forza $\vec{F}$ agente sulla spira.

Calcolare poi la minima velocità iniziale $v_0^{\min}$ necessaria perché la spira penetri totalmente nella regione sede del campo magnetico.

Calcolare poi la carica totale circolante nella spira, sia nel caso in cui $v_0 > v_0^{\min}$ che nel caso in cui $v_0 < v_0^{\min}$.

Si ha :

$$\mathcal{E} = IR,$$

con :

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt} = - B_z \dot{S} = - B_z e v.$$

Quindi :

$$I = - \frac{B e v}{R}$$

Si ha ora :

$$F = B e I = - \frac{B^2 e^2 v}{R},$$

da cui la forza è frenante.

Per calcolare ora $v_0^{\min}$, possiamo risolvere l'equazione del moto :

$$\begin{cases} \dot{v}(t) = \frac{1}{m} F(t) = - \frac{B^2 e^2}{R m} v(t), \\ v(0) = v_0 \end{cases},$$

da cui :

$$v(t) = v_0 e^{-\frac{B^2 e^2}{R m} t} = v_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

con $\tau = \frac{m R}{B^2 e^2}$. Quindi :

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_0^t v(s) ds = v_0 \int_0^t e^{-\frac{s}{\tau}} ds = \\ &= - v_0 \tau \left[e^{-\frac{s}{\tau}} \right]_0^t = v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \end{aligned}$$

Allora :

$$\begin{aligned} x(t) \geq e &\Leftrightarrow v_0 \tau (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) = v_0 \frac{m R}{B^2 e^2} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}}) \geq e \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v_0 \geq \frac{B^2 e^3}{m R} \frac{1}{(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})} \geq \frac{B^2 e^3}{m R} \end{aligned}$$

da cui :

$$v_0^{\min} = \frac{B^2 e^3}{m R}$$

Per calcolare ora la carica totale circolata nella spira, nel caso in cui $v_0 > v_0^{\min}$, partiamo con l'equazione :

$$I = \frac{dQ}{dt} = - \frac{B v e}{R} = - \frac{B e}{R} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}},$$

da cui:

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= \int_0^T Q(t) dt = \int_0^T \frac{Be}{R} v_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = \\ &= v_0 \frac{Be}{R} \left[-\tau e^{-\frac{t}{\tau}} \right]_0^T = \\ &= v_0 \frac{Be}{R} \left(-\tau e^{-\frac{T}{\tau}} + \tau \right) \end{aligned}$$

ove T è tale che:

$$\begin{aligned} v_0 \tau (1 - e^{-\frac{T}{\tau}}) &= e \Rightarrow e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 - \frac{e}{v_0 \tau} \Rightarrow \\ \Rightarrow -\frac{T}{\tau} &= \ln \left(1 - \frac{e}{v_0 \tau} \right) \Rightarrow T = -\tau \ln \left(1 - \frac{e}{v_0 \tau} \right) \end{aligned}$$

Adesso, sostituendo:

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= v_0 \frac{Be}{R} \left(-\tau \left(1 - \frac{e}{v_0 \tau} \right) + \tau \right) = \\ &= v_0 \frac{Be}{R} \frac{e}{v_0} = \frac{Be^2}{R} \end{aligned}$$

D'altronde, in maniera molto più rapida:

$$\begin{aligned} Q_{\text{tot}} &= \int I dt = - \int \frac{E}{R} dt = \int \frac{\Phi_B}{R} dt = \\ &= \frac{1}{R} \left[\Phi_B \right]_{\text{inizio}}^{\text{fine}} = \frac{\Delta \Phi_B}{R}, \end{aligned}$$

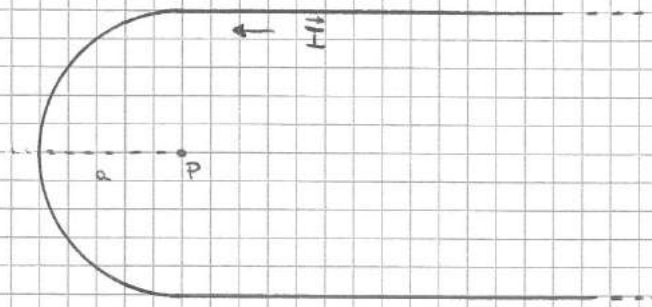
e dato che $\Delta \Phi_B = Be^2$, si ha di nuovo il risultato.

Se $v_0 < v_0^{\text{min}}$, non c'è nullo:

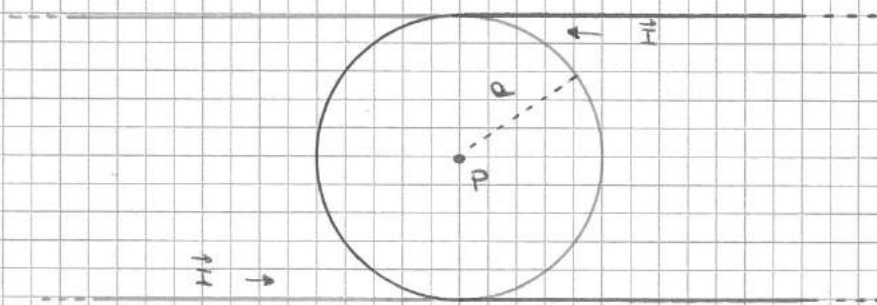
$$Q_{\text{tot}} = \frac{\Delta \Phi_B}{R} = \frac{Be^2}{R},$$

con e' opportuno (che non scegliamo).

3. Calcolare il campo magnetico nel punto P descritto nella figura, centro della semicirconferenza:



Sfruttando il principio di sovrapposizione, introduciamo una spira simmetrica:



Si può dunque che l'intensità del campo magnetico è la metà dell'intensità calcolata in questo sistema, che è:

$$\vec{B} = 2B_{\text{filo}} + B_{\text{spira}}$$

Allora:

$$B_P = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} + \frac{\mu_0 I}{4a} =$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2a} \left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \right)$$

DISCO DI ROWLAND

Vogliamo ora studiare i campi magnetici generati da moti meccanici di cariche.

Consideriamo un piatto cilindrico, e posizioniamo una carica Q di 1 C sulla sua faccia superiore. Facendo ruotare il piatto con una frequenza $\nu = 1\text{ Hz}$ (una volta al secondo), si ottiene una corrente:

$$I = \frac{dQ}{dt} = 1\text{ A}$$

A una distanza di 1 m si registra dunque un campo magnetico:

$$B \approx \frac{\mu_0 I}{4\pi r^2} = 10^{-7}\text{ T}$$

Questo genera un campo elettrico di intensità elevatissima:

$$E \approx \frac{Q}{\epsilon_0 r^2} \approx 10^{11} \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

un valore che provoca fuochini nell'aria.

Utilizzando i seguenti dati:

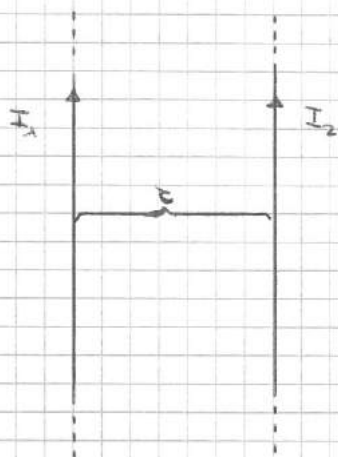
- $Q = 10^{-6}\text{ C}$;
- $\nu = 100\text{ Hz}$;
- $r = 0,1\text{ m}$,

si ha $B \approx 10^{-10}\text{ T}$, quindi $E \approx 10^5 \frac{\text{V}}{\text{m}}$, un valore decisamente più accettabile.

Tuttavia, inserendo un conduttore (che schermi il campo elettrico), Rowland riuscì a rivelare la presenza di un campo magnetico, nonostante questo fosse di intensità circa 10^5 volte minore di quello terrestre.

FORZA MAGNETICA, FORZA ELETTRICA

Consideriamo due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, posti a distanza c , percorsi da un'intensità di corrente I_1 e I_2 :



Allora:

$$F_1 = L_1 I_1 B_2$$

da cui:

$$\frac{F_1}{L_1} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi c}$$

a meno del segno. Notiamo che la formula è simmetrica.

Si ha che la forza è attrattiva se le correnti sono concordi, repulsiva in caso contrario.

Consideriamo ora due fili rettilinei paralleli di lunghezza infinita, posti a distanza c , con una densità di carica λ comune, in moto lungo i fili con velocità $\vec{v}$.

Il moto di ciascun filo equivale a una corrente:

$$I = \lambda v$$

per cui ciascun filo produce un campo elettrico:

$$E_c = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{c}$$

è un campo magnetico:

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

Si ha perciò una forza elettrica (repulsiva) e una forza magnetica (attrattiva tra i due fili):

$$\begin{aligned}\frac{F(v)}{L} &= \frac{F_e(v)}{L} + \frac{F_m(v)}{L} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} - \frac{\mu_0 I^2}{2\pi r} = \\ &= \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \epsilon_0 v^2 \mu_0\right),\end{aligned}$$

da cui, a circolo dimensionale:

$$[\epsilon_0 \mu_0] = [v]^{-2} = [s]^2 [m]^{-2}$$

Definiamo dunque:

$$c^2 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0},$$

e notiamo che:

$$\begin{aligned}c &= \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = \frac{1}{\sqrt{0,885 \cdot 10^{-12} \cdot 4\pi \cdot 10^{-7}}} \frac{m}{s} \approx \\ &= 2,998 \cdot 10^8 \frac{m}{s}\end{aligned}$$

c è dunque la velocità della luce. Dunque:

$$\frac{F(v)}{L} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2\right)$$

Notiamo che il principio di relatività galileiana non vale più: la forza non rispetta l'invarianza galileiana. Infatti:

$$\frac{F(v)}{L} \neq \frac{F(0)}{L}$$

Si conclude quindi che il campo magnetico è una "cooperazione relativistica" del campo elettrico.

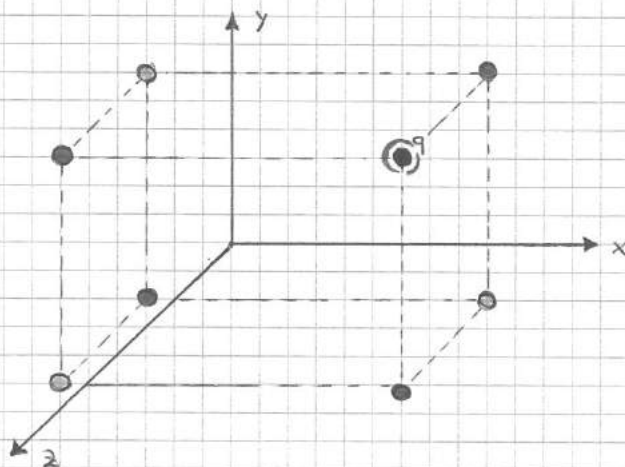
Per essere più precisi, bisognerebbe introdurre il concetto di INVARIANZA RELATIVISTICA, ma non entriamo nei dettagli.

ESERCIZI VARI

1. Una carica puntiforme q è situata nel punto di coordinate $x = y = z = d$. Un conduttore riempie la zona dove $x < 0$ o $y < 0$ o $z < 0$. Calcolare:

- l'energia potenziale del sistema;
- la forza che agisce sulla carica q ;
- la densità superficiale di carica σ nel punto di coordinate $x = 0, y = z = d$, e la carica totale presente nella porzione di superficie contenente tale punto;
- il potenziale elettrico nella regione di spazio a distanza $z \gg d$ al primo ordine non nullo in $\frac{1}{z}$, specificando la dipendenza da z e da x, y, z .

Si ha la seguente situazione:



L'unica carica reale è quella contrassegnata dalla lettera q ; le altre sono cariche immagine, e sono di carica q se positive, $-q$ se negative.

In particolare, le 8 cariche hanno coordinate $x = \pm d$, $y = \pm d$, $z = \pm d$.

L'energia potenziale del sistema, che conta 1 carica reale e 7 cariche immagine, è data da:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \left[\sum_{j=1}^3 \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)} + \sum_{j=1}^3 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{2d\sqrt{2}} + \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 2d\sqrt{3}} \right] = \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{2d} \left[-3 + \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right] = \frac{1}{2} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2d} \frac{-3\sqrt{6} + 3\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \\
 &= \frac{q^2}{96\pi\epsilon_0 d} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

La forza che agisce sulla carica q è un vettore puntato
 in l'origine, tale che:

$$\begin{aligned}
 F_x = F_y = F_z &= - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d\sqrt{2})^2} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d\sqrt{3})^2} = \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} \left[-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \right] = \\
 &= \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 4d^2} \frac{1}{18} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})
 \end{aligned}$$

In effetti:

- $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} = \sqrt{3} F_x = \frac{\sqrt{3}}{18} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0(2d)^2} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$;
- $-\frac{\partial U}{\partial d} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{q^2}{96\pi\epsilon_0 d^2} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$,

da cui l'esattezza della formula.

Per motivi di simmetria, se, la carica totale richiesta
 è $-\frac{q}{3}$. Per quanto riguarda la densità di carica, invece:

$$\begin{aligned}
 \sigma(y, z) &= \epsilon_0 E_z = -\epsilon_0 \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_P = -\epsilon_0 \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{q}{96\pi\epsilon_0 z} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \right) = \\
 &= \frac{q}{96\pi} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) \frac{1}{z^2} \Big|_P,
 \end{aligned}$$

nel punto $x=0, z=y=d$ si ha:

$$\sigma(P) = - \frac{q}{96\pi} \frac{1}{d^2} (-18 + 9\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$$

Per concludere, ci limitiamo a dire che, per $z \gg d$, φ
 ha la forma di un dipolo:

$$\varphi \approx \frac{30qd^3xyz}{\pi\epsilon_0 z^3}$$

2. Si considerino due superfici sferiche metalliche, di raggi $R_1 = 0,1 \text{ m}$ e $R_2 = 0,3 \text{ m}$. Sulla prima sfera vi è una carica $Q_1 = 10^{-5} \text{ C}$, mentre sulla seconda $Q_2 = 0$, e distanziati $d \gg R_2$, che ad un certo istante vengono collegati da un filo conduttore:

- calcolare Q_1 e Q_2 dopo che viene raggiunto l'equilibrio. Si poteva prevedere da subito il risultato?
- la pressione agente su ciascuna superficie metalliche all'equilibrio;
- l'energia totale dissipata nel filo conduttore in seguito alla redistribuzione di carica fra le due sfere;
- il filo conduttore ha una resistenza $R = 10^6 \Omega$. Dopo quanto tempo la carica sulla prima sfera raggiunge la metà del valore iniziale?

All'equilibrio si ha potenziale costante sulle due superfici:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{R_1} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_2}{R_2}$$

$$\frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} = \frac{Q_2}{3R_1}$$

da cui:

$$Q_1 + Q_2 = 10^{-5} \text{ C}, \quad Q_2 = 3Q_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}, \quad Q_2 = 7,5 \cdot 10^{-6} \text{ C}$$

Per quanto riguarda la densità:

$$\sigma_1 = \frac{Q_1}{4\pi R_1^2} = \frac{2,5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-2}} \approx 0,02 \cdot 10^{-3} = 2 \cdot 10^{-5} \frac{\text{C}}{\text{m}^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_2}{4\pi R_2^2} = \frac{7,5 \cdot 10^{-6}}{4\pi \cdot 10^{-1} \cdot 9} \approx 0,66 \cdot 10^{-7} \frac{\text{C}}{\text{m}^2},$$

da cui $\sigma_1 > \sigma_2$: ciò si poteva prevedere ricordando il fenomeno delle punte.

Per quanto riguarda le pressioni:

$$p_1 = \sigma_1 \frac{E_1}{2} = \frac{\sigma_1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=R_1} = \frac{\sigma_1}{2} \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{\sigma_1^2 4\pi R_1^2}{2 4\pi\epsilon_0 R_1} =$$

$$= \frac{\sigma_1^2 R_1}{2\epsilon_0} \approx \frac{2 \cdot 10^{-14} \cdot 10^{-1}}{2 \cdot 10^{-11}} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{C}{S}$$

$$p_2 = \sigma_2 \frac{E_2}{2} = \frac{\sigma_2^2 R_2}{2\epsilon_0} \approx \frac{\frac{1}{2} \cdot 10^{-14} \cdot 10^{-3} \cdot 3}{2 \cdot 10^{-11}} \approx 10^{-4} \frac{C}{S}$$

Formalmente, per $i = 1, 2$:

$$p_i = \frac{\sigma_i^2 R_i}{2\epsilon_0} = \frac{Q_i^2 R_i}{16\pi^2 R_i^4 2\epsilon_0} = \frac{Q_i^2}{32\pi^2 \epsilon_0 R_i^3}$$

Prima della presenza del filo conduttore:

$$U_1 = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} Q \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{1}{2} \frac{Q_1^2}{4\pi\epsilon_0 R_1}$$

Dopo il collegamento:

$$U_2 = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} Q \frac{\frac{1}{4} Q}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{3}{4} Q \frac{\frac{3}{4} Q}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{16} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} + \frac{3}{16} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_2} \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} \right),$$

da cui:

$$\Delta E = \frac{3}{8} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R_1} = \frac{3 \cdot 10^{-10}}{8 \cdot 12 \cdot 10^{-11} \cdot 10^{-1}} \approx$$

$$\approx 3 \text{ J}$$

Si ha ora:

$$U_{in} = \frac{1}{2} Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \frac{Q_1}{R_1}, U_{fin} = \frac{1}{2} \left(Q_1 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_1} \frac{Q_1}{R_1} + Q_2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R_2} \frac{Q_2}{R_2} \right) \Rightarrow$$

$$\Delta U = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1^2 + Q_2^2 + 2Q_1 Q_2}{R_1} - \frac{Q_1^2}{R_1} - \frac{Q_2^2}{R_2} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} Q_2 \left(\frac{2Q_1}{R_1} + Q_2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{3}{4} Q \left(\frac{Q}{2R_1} + \frac{3}{24} Q \frac{1}{3R_1} \right) = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{3}{4} \frac{Q^2}{R_1}$$

L'ultimo punto verrà affrontato dopo l'esercizio 3.

3. Un condensatore è costituito, come in figura, da due lastre piene conduttrici di lunghezza L a distanza d , ciascuna delle quali è attaccata ad una lastra piena conduttrice di lunghezza L' a distanza $d' > d$. Si supponga $d, d' \ll L$. Le piastre hanno lunghezza L , e contengono carica totale Q e $-Q$, rispettivamente.

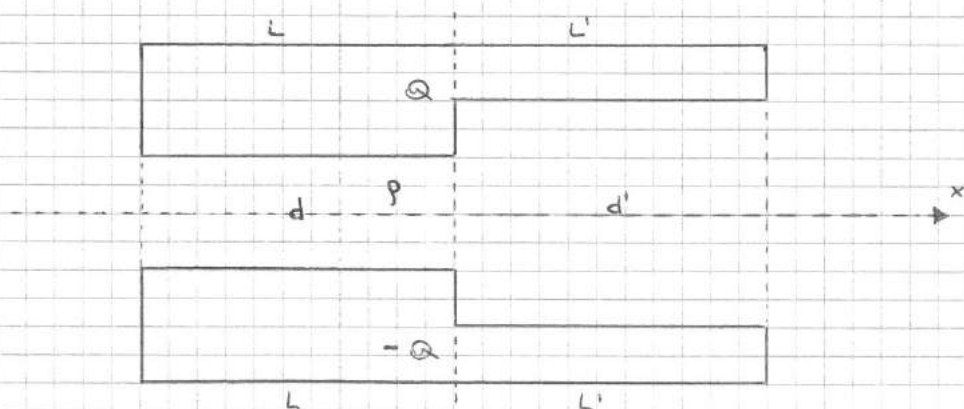
Si calcolino C e U , e le densità superficiali di carica σ, σ' delle due lastre.

Si calcoli la forza elettrostatica verticale esercitata sulla piastra superiore.

Si calcoli il campo elettrico lungo il piano di simmetria del sistema, a distanza $x \gg L$, approssimando il sistema con un dipolo elettrico.

Al tempo $t=0$ viene inserito un materiale con resistività ρ nello spazio di spessore d fra le armature, come in figura.

Calcolare la costante tempo τ per la scarica del sistema. Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule a $t=0$. Calcolare l'energia totale dissipata per effetto Joule, confrontandola con U .



Separando le due zone in base alla distanza, si ha:

$$C_1 = \epsilon_0 \frac{L^2}{d}, \quad C_2 = \epsilon_0 \frac{L^2}{d'},$$

da cui:

$$C = C_1 + C_2 = \epsilon_0 \frac{L^2(d+d')}{dd'}$$

Si ha ora:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d d'}{2\epsilon_0 L^2 (d+d')}$$

Calcoliamo ora le densità superficiali. Si ha:

$$\begin{cases} \sigma L^2 + \sigma' L^2 = Q \\ d \frac{\sigma}{\epsilon_0} = dE = d'E' = d' \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \end{cases}$$

Allora:

$$\sigma' = \frac{Q}{L^2} - \sigma = \frac{\sigma d}{d'} \Rightarrow \sigma' = \frac{Qd}{L^2(d+d')}, \quad \sigma = \frac{Qd'}{L^2(d+d')}$$

A questo punto:

$$\begin{aligned} F_y &= L^2 \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} + L^2 \frac{\sigma'^2}{2\epsilon_0} = L^2 \frac{1}{2\epsilon_0} \frac{Q^2 (d^2 + d'^2)}{L^4 (d+d')^2} \\ &= \frac{Q^2}{2\epsilon_0 L^2} \frac{d^2 + d'^2}{(d+d')^2} \end{aligned}$$

Si ha ora:

$$\begin{aligned} p &= \sigma L^2 d + \sigma' L^2 d' = L^2 \frac{Q d d'}{L^2 (d+d')^2} \cdot 2 = \\ &= 2 \frac{Q d d'}{(d+d')^2} \end{aligned}$$

Allora il campo elettrico generato dal dipolo nel punto di coordinate $(x, 0, 0)$, $x \gg L$, è:

$$\vec{E} = (0, 0, E_z), \quad E_z = -\frac{p}{4\pi\epsilon_0 x^3} = -\frac{Q d d'}{2\pi\epsilon_0 x^3 (d+d')^2}$$

ma il vettore è rivolto verso il basso.

Una volta inserito il dielettrico, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= I = -L^2 J = -L^2 \sigma E = -L^2 \frac{\sigma}{\rho} = \\ &= -L^2 \frac{\sigma}{\epsilon_0 \rho} = -\frac{Q d'}{(d+d') \epsilon_0 \rho} = -\frac{Q}{\tau}, \end{aligned}$$

con:

$$\tau = \frac{\epsilon_0 \rho (d+d')}{d'}$$

Se R_1 non è a $t=0$:

$$W_0 = \int \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = \frac{E^2}{2} L^2 d = \frac{\sigma^2}{\epsilon_0^2} \int L^2 d = \frac{Q^2 d'^2}{L^2 (d+d')^2 \epsilon_0^2} = \frac{Q^2 d d'^2}{L^2 \epsilon_0^2 p (d+d')^2}$$

Per concludere:

$$\int_0^{+\infty} W_0 e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = W_0 \frac{\tau}{2} = \frac{Q^2 d d'^2}{L^2 \epsilon_0^2 p (d+d')^2} \frac{\epsilon_0 p (d+d')}{2Q} = \frac{Q^2 d d'}{2 L^2 \epsilon_0 (d+d')} = U$$

Concludiamo ora l'esercizio 2. Siano:

$$Q_1(t) = \frac{Q}{4} + q(t), \quad Q_2(t) = \frac{3Q}{4} - q(t)$$

Allora:

- $q(0) = \frac{3}{4}Q$;
- $q(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$.

Inoltre:

$$-\frac{dQ}{dt} = -I = \frac{\Delta V}{R},$$

con:

$$\Delta V = \frac{Q}{C} = \frac{\frac{Q}{4} + q(t)}{4\pi\epsilon_0 R_1} - \frac{\frac{3Q}{4} - q(t)}{4\pi\epsilon_0 R_2} = \frac{q(t)}{3\pi\epsilon_0 R_1},$$

Allora, se $C = 3\pi\epsilon_0 R_1$:

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC},$$

da cui:

$$q(t) = \frac{3}{4}Q e^{-\frac{t}{RC}},$$

da cui bisogna risolvere $q(t) = \frac{Q}{4}$:

$$\frac{3}{4} e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{t}{RC} = \ln 3 \Rightarrow t \approx RC \ln 3$$

4. Una sfera isolante di raggio R contiene una carica totale Q distribuita uniformemente sulla superficie.

Calcolare il campo elettrico dentro la sfera, e l'energia elettrostatica.

Calcolare il lavoro necessario per portare una carica q da grande distanza fino al centro della sfera.

Con un trapano viene praticato un foro circolare lungo un diametro della sfera, di raggio $r \ll R$, rimuovendo la carica sulla superficie scavata. Calcolare il campo elettrico dentro la sfera, lontano dai due fori, e il lavoro necessario a portare una carica q da grande distanza fino al centro della sfera.

Una facile applicazione del teorema di Gauss ci permette di concludere immediatamente che $\vec{E} = 0$ dentro la sfera. Infine:

$$U = \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{Q}{2} \varphi(R), \quad \varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Quindi:

$$L(z \rightarrow 0) = \int_r^0 \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{s} = \left[\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{s} \right]_r^R \approx \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qQ}{R}$$

Lontano dalle estremità del foro, il campo elettrico è quello generato da due cariche puntiformi antipodali di carica $-\pi r^2 \sigma$, ove:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Allora:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \pi r^2 \frac{Q}{4\pi R^2} \left[\frac{(\vec{r} - \vec{p}_1)}{\|\vec{r} - \vec{p}_1\|^3} + \frac{(\vec{r} - \vec{p}_2)}{\|\vec{r} - \vec{p}_2\|^3} \right],$$

ove $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ sono i punti (antipodali) ove è stato praticato il foro.

Calcolando il campo elettrico interno, si ha all'incirca, usando lo stesso calcolo di prima:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} q \left(Q - \pi r^2 \frac{Q}{4\pi R^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} q \left(Q - \frac{Q r^2}{4 R^2} \right) \end{aligned}$$

5. Si consideri il seguente campo:

$$E_x = Ky, \quad E_y = Kx, \quad E_z = 0$$

Si dica per quali $K \in \mathbb{R}$ il campo $\vec{E}$ è un possibile campo elettrico (statico).

fissato K , si determini la forma del potenziale elettrico associato al campo $\vec{E}$. Si discuta poi sinteticamente la forma delle superfici equipotenziali.

Si consideri ora un condensatore composto da due lamine conduttrici, di estensione infinita, descritte dalle equazioni:

$$\begin{aligned} xy &= 0 \\ xy &= d^2, \quad d = 10 \text{ cm} \end{aligned}$$

nella porzione di spazio ove $x, y > 0$. La prima lamina è mantenuta ad un potenziale superiore a quello della seconda, con $\Delta V = 100 \text{ Volt}$.

Determinare il campo elettrico in tutti i punti compresi tra le due lamine.

Determinare poi, per ogni punto della prima lamina la densità superficiale di carica e la pressione elettrostatica.

Assumendo ora che $x, y < 1, |z| < \frac{1}{2}$ (in metri), si determini la capacità del condensatore e l'energia elettrostatica immagazzinata.

Posto ora un dipolo ideale $\vec{p} = (p_x, p_y)$ tra le due facce del condensatore, determinare la forza agente su $\vec{p}$.

deve essere necessariamente:

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = Ak = A = \frac{\partial E_y}{\partial x},$$

da cui $k=1$. Viceversa, se $k=1$, allora, considerata la funzione potenziale:

$$\varphi(x, y, z) = -Axy$$

è tale che:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\varphi$$

Le superfici equipotenziali sono dunque iperboli nel piano R^2 (z è non vincolato) paralleli all'asse z : non ci soffermiamo troppo sulla questione.

In particolare, le lamine considerate sono superfici equipotenziali.

Si può allora adottare il potenziale già trovato. In particolare, se $\varphi(x, y, z) = -Axy$, allora la differenza di potenziale tra le lamine è:

$$\Delta\varphi = 0 + Ad^2 = 10^{-2} A \text{ Volt},$$

da cui bisogna imporre $A = 10^4 \frac{\text{Volt}}{\text{m}^2}$.

Allora:

$$E_x = 10^4 y \quad E_y = 10^4 x \quad E_z = 0$$

Allora si ha:

$$\sigma = \epsilon E_0 \Rightarrow \sigma = 10^4 \epsilon_0 x, \text{ se } y=0,$$

$$\sigma = 10^4 \epsilon_0 y, \text{ se } x=0$$

A questo punto:

$$p = \sigma \frac{E_{\perp}}{2} = \begin{cases} \frac{10^4 \epsilon_0}{2} 10^4 x^2, & y=0 \\ \frac{10^8 \epsilon_0}{2} y^2, & x=0 \end{cases}$$

Si ha ora $V = 100 \text{ Volt}$, e:

$$Q = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 10^4 \epsilon_0 x dx + \int_0^1 10^4 \epsilon_0 y dy \right) = 2 \int_0^1 10^4 \epsilon_0 s ds = 10^4 \epsilon_0$$

da cui:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{10^4 \epsilon_0}{10^2} = 10^2 \epsilon_0 \approx 8,8 \cdot 10^{-10} \text{ F}$$

Ora:

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{10^8 \epsilon_0}{2 \cdot 10^2 \epsilon_0} = \frac{10^6 \epsilon_0}{2} \approx 4,4 \cdot 10^{-6} \text{ J}$$

Considerato invece $\vec{p}$, vale:

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -10^4 (p_x y + p_y x),$$

da cui in ogni caso si ha:

$$\vec{F} = (10^4 p_y, 10^4 p_x)$$

6. Una distribuzione a simmetria sferica si estende in tutto lo spazio con densità volumetrica:

$$\rho(r) = \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{b}}$$

Si determini la carica totale Q .

Determinare l'andamento del campo elettrico in funzione di r .

Determinare l'energia elettrostatica generata in tutto lo spazio dalla distribuzione di carica.

Ad un certo punto una particella di carica q dello stesso segno di Q e massa m viene lanciata dall'infinito verso il centro della distribuzione, con una certa velocità v . Determinare il minimo v tale che la particella raggiunga il centro.

Si ha, in coordinate sferiche:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{b}} r^2 \cos\theta \, d\varphi \, d\theta \, dr = \\ &= 4\pi a \int_0^{+\infty} r e^{-\frac{r}{b}} dr = 4\pi a \int_0^{+\infty} b e^{-\frac{r}{b}} dr = \\ &= 4\pi a b^2 \end{aligned}$$

Applicando il Teorema di Gauss:

$$\bullet \Phi_E(R) = \int_{\partial B} \vec{E} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 4\pi R^2 E(R);$$

$$\begin{aligned} \bullet \Phi_E(R) &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\partial B(0,R)} \frac{a}{r} e^{-\frac{r}{b}} r^2 \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \, dz = \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} 4\pi a \left(\left[-b r e^{-\frac{r}{b}} \right]_0^R + \int_0^R b e^{-\frac{r}{b}} \, dr \right) = \\ &= \frac{4\pi a b}{\epsilon_0} \left(-R e^{-\frac{R}{b}} + b - b e^{-\frac{R}{b}} \right). \end{aligned}$$

Allora:

$$E(R) = \frac{ab}{\epsilon_0 R^2} \cdot \left(b - e^{-\frac{R}{b}} (b+R) \right)$$

Per concludere:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} \int_0^{+\infty} 4\pi r^2 \frac{a^2 b^2}{\epsilon_0^2 r^4} \left(b - e^{-\frac{r}{b}} (b+r) \right)^2 dr = \\ &= \frac{2\pi}{\epsilon_0} a^2 b^2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left(b - e^{-\frac{r}{b}} (b+r) \right)^2 dr \end{aligned}$$

Infine, possiamo porre:

$$\frac{mv^2}{2} = q \int_0^{+\infty} E(r') \, dr'$$

Ci dev'essere tuttavia qualche errore, in quanto gli integrali non convergono.

4. Un condensatore è costituito da tre gusci sferici di spessore trascurabile e raggi $r_1 < r_2 < r_3$; il primo e il terzo sono collegati (idealmente) da un filo conduttore, e il guscio 2 contiene una carica Q_2 . Il condensatore è isolato.

Calcolare Q_1 e Q_3 , la capacità del condensatore, e la sua energia elettrostatica. Calcolare infine la pressione elettrostatica sul guscio 2.

La regione tra r_1 e r_2 viene riempita con un materiale di conducibilità σ . Calcolare $Q_2(t)$.

La carica totale deve essere nulla, da cui:

$$Q_1 + Q_3 = -Q_2$$

Inoltre dobbiamo imporre $\varphi_1 = \varphi_3$. Ora, per il teorema di Gauss, si ha:

• tra r_1 e r_2 :

$$E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \Delta V_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

• tra r_2 e r_3 :

$$E = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad \Delta V_3 = \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Imponiamo allora $\Delta V_1 = -\Delta V_3$. Si ha:

$$Q_1 \frac{r_1 - r_2}{r_2 r_1} = -(Q_1 + Q_2) \frac{r_2 - r_3}{r_3 r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 \left(\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2} + \frac{r_2 - r_3}{r_3 r_2} \right) = -Q_2 \frac{r_3 - r_2}{r_3 r_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q_1 = -Q_2 \frac{r_3 - r_2}{r_2} \cdot \frac{r_1 r_2}{(r_1 - r_2) r_3 + (r_2 - r_3) r_1} =$$

$$= Q_1 = - \frac{Q_2 (r_3 - r_2) r_1}{(r_1 - r_3) r_2} = -\lambda Q_2,$$

e:

$$Q_3 = -Q_2 - Q_1 = -(1 + \lambda) Q_2$$

A questo punto:

$$C = \frac{Q_2}{\Delta V_1} = \frac{4\pi\epsilon_0 Q_2}{Q_1} \frac{r_1 r_2}{r_1 - r_2} =$$

$$= \frac{4\pi\epsilon_0 \cancel{Q_2} r_2 (r_1 - r_2) \cancel{r_1} r_2}{\cancel{Q_2} r_1 (r_1 - r_2) (r_1 r_2)} = \frac{4\pi\epsilon_0 r_2^2 (r_3 - r_1)}{(r_3 - r_2)(r_2 - r_1)},$$

e:

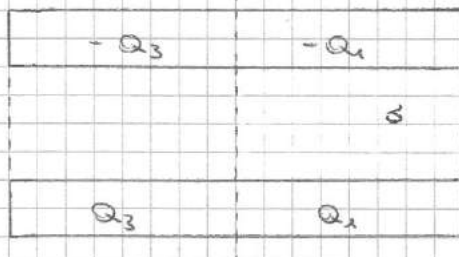
$$U = \frac{Q^2}{2C}$$

Per quanto riguarda la pressione elettrostatica:

$$p = \frac{\sigma_2}{2} (\vec{E}_{in \perp} + \vec{E}_{out \perp}) = \frac{Q_2^2}{8\pi r_2^2} \left(\frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} + \frac{Q_1 + Q_2}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} \right) =$$

$$= \frac{Q_2 (2Q_1 + Q_2)}{32\pi^2 \epsilon_0 r_2^4} = \frac{Q_2^2 (1 - 2\lambda)}{32\pi^2 \epsilon_0 r_2^4}$$

Il sistema è ora equivalente a un condensatore come in figura:



Si ha allora:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = I(t) = -4\pi r_2^2 J(t) = -4\pi r_2^2 \sigma E =$$

$$= -\sigma 4\pi r_2^2 \frac{Q_1(t)}{4\pi\epsilon_0 r_2^2} = -\sigma \frac{Q_1(t)}{\epsilon_0} = -\sigma \frac{-\lambda Q_2(t)}{\epsilon_0} = \frac{\lambda Q_2(t)}{\epsilon_0} \sigma$$

(si noti che $\lambda < 0$). Allora prendendo $\tau = \left(-\frac{\lambda}{\epsilon_0} \right)^{-1}$, si ha:

$$\frac{dQ_2(t)}{dt} = - \frac{Q_2(t)}{\tau}$$

$$Q_2(t) = Q_2 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

8. Tre sfere conduttrici isolate hanno raggio a e sono inizialmente neutre, e disposte sui tre vertici di un triangolo equilatero di lato b . La sfera 1 viene caricata fino a raggiungere un potenziale elettrico V . A questo punto, essa contiene una carica Q_1 .

Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

La sfera 2 viene poi caricata fino a raggiungere anch'essa il potenziale V : a questo punto la sfera contiene una carica Q_2 .

Calcolare l'energia elettrostatica del sistema.

Anche la sfera 3 viene poi caricata fino a raggiungere il potenziale V .

Calcolare Q_3 sulla terza sfera.

Calcolare V , assumendo $b \gg a$.

A priori vale:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} C_{ij} Q_i Q_j, \quad V_i = \sum_j C_{ij} Q_j$$

In questo caso, per simmetria, dati i, j , vale:

- $C_{ij} = C \propto i=j$
- $C_{ij} = C' \propto i \neq j$

Quindi, all'inizio si ha:

$$U = \frac{1}{2} C Q_1^2 = \frac{1}{2} Q_1 V, \quad V = C Q_1$$

Successivamente si ha:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} C (Q_1^2 + Q_2^2) + 2C' Q_1 Q_2 = & V &= C Q_2 + C' Q_1 \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{V}{Q_1} (Q_1^2 + Q_2^2) + \frac{2V(Q_1 - Q_2)Q_2}{Q_1} \right) = & C' &= \frac{V - C Q_2}{Q_1} = \frac{V(Q_1 - Q_2)}{Q_1^2} \\ &= \frac{V}{2} \frac{(Q_1^2 + 2Q_1 Q_2 - Q_2^2)}{Q_1} \end{aligned}$$

Infine:

$$\begin{aligned}
 V &= C Q_3 + C' (Q_1 + Q_2) \Rightarrow \\
 \Rightarrow Q_3 &= \frac{V - C' (Q_1 + Q_2)}{C} = \frac{V - \frac{V}{Q_1^2} (Q_1^2 - Q_2^2)}{\frac{V}{Q_1}} = \\
 &= Q_1 - \frac{1}{Q_1} (Q_1^2 - Q_2^2) = \frac{1}{Q_1} (Q_1^2 - Q_1^2 + Q_2^2) = \\
 &= \frac{Q_2^2}{Q_1}
 \end{aligned}$$

A questo punto, supponendo $b \gg a$:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{a},$$

comune per le tre sfere.

9. Un dipolo elettrico $\vec{p}$ è situato nel punto $(0, 0, h)$. La regione di spazio $-\frac{h}{2} < z < 0$ contiene un conduttore. Calcolare:

- $\vec{E}(0, 0, -h)$;
- l'energia elettrostatica del sistema;
- la forza da applicare nel dipolo per impedire il moto traslatorio.
- assumendo che il dipolo possa solo ruotare, ma non traslare, calcolare il momento delle forze elettrostatiche agente sul dipolo e l'orientazione del dipolo per cui si ha equilibrio stabile.

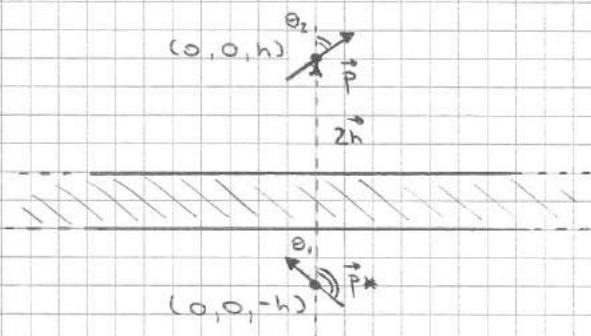
La prima risposta è banale. Infatti:

$$\vec{E}(0, 0, -h) = 0$$

Si ha ora, considerando un dipolo-immagine situato nel punto $(0, 0, -h)$:

$$U = -\vec{p}_2 \cdot \vec{E}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{(\vec{p}_1 \cdot \vec{r})(\vec{p}_2 \cdot \vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2}{r^3} \right]$$

Nel nostro caso, si abbiamo questa situazione:



Valgono:

- $\vec{c} = 2\vec{h}$;
- $\theta_2 = \pi - \theta_1 \Rightarrow \cos \theta_1 = -\cos \theta_2$;
- $p_x = p$.

Allora:

$$\begin{aligned} U &= \frac{p_1^2}{32\pi\epsilon_0 h^3} [-\cos(\theta_2 - \theta_1) - 3\cos\theta_1\cos\theta_2] = \\ &= \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 h^3} [3\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_1] = \\ &= \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 h^3} [3\cos^2\theta_1 + \cos^2\theta_1 - \sin^2\theta_1] = \\ &= \frac{p^2}{32\pi\epsilon_0 h^3} [-1 + 5\cos^2\theta_1] \end{aligned}$$

A questo punto, la forza da applicare è opposta a quella sentita da U , pari a $-\frac{\partial U}{\partial h}$.

Allora:

$$F = F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{3p^2}{32\pi\epsilon_0 h^4} [-1 + 5\cos^2\theta_1]$$

Si ha ora:

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E}_*$$

dunque:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{p_2}{r^4} (p_x, p_y, p_z) \times (0, 0, 2h) - \frac{(p_x, p_y, p_z) \times (-p_x, -p_y, p_z)}{r^3} \right] = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[3 \frac{p_2}{r^4} (p_y, -p_x, 0) - \frac{(2p_y p_z, -2p_x p_z, 0)}{r^3} \right] = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p_z}{r^3} (p_y, -p_x, 0)$$

Per concludere, l'orientazione che minimizza U è quella in cui $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, ossia il dipolo è disposto orizzontalmente.

10. Due piastre di materiale conduttore di spessore e massa trascurabili e di area Σ sono poste a distanza $d \ll \sqrt{\Sigma}$ e' una dall'altra. Le due piastre, inizialmente sciolte, sono collegate ad un generatore di tensione V .

Calcolare la carica Q presente sulle piastre, e il campo elettrico che si genera dopo l'accensione del generatore.

Quando la carica sulle piastre è Q , queste vengono scollegate dal generatore. La posizione della piastra A viene fissata, mentre all'altra viene appesa una massa m tramite un cavo isolante.

Se la faccia inferiore è libera di muoversi, calcolare m affinché le due piastre rimangano alla distanza d .

Nel caso in cui la faccia sia fissata, calcolare il lavoro che bisognerebbe compiere per inserire tra le piastre un parallelepipedo di dielettrico di costante $\epsilon = \epsilon \epsilon_0$, con base un quadrato di area $\Omega = \frac{\Sigma}{2}$ e altezza $h = \frac{1}{4}d$.

Ricalcolare ora la massa m , affinché le piastre rimangano a distanza d .

Si ha:

$$V = dE = d \frac{Q}{\epsilon_0 \Sigma} = d \frac{Q}{\Sigma \epsilon_0} \Rightarrow Q = \frac{V \Sigma \epsilon_0}{d}$$

Per rispondere alla seconda domanda, bisogna essenzialmente eguagliare la forza elettrica e quella gravitazionale. Si ha dunque:

$$\vec{F} = \frac{1}{2} Q E = \frac{1}{2} Q \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q^2}{2 \Sigma \epsilon_0} = m g$$

$$m = \frac{Q^2}{2 \Sigma \epsilon_0 g}$$

Ricordiamo infatti che:

$$\vec{F} = p \Sigma = \sigma \frac{E}{2} \Sigma = \frac{Q \sigma}{2 \epsilon_0}$$

Si ha ora:

$$\mathcal{L} = - \Delta U = U_{in} - U_{fin},$$

ove:

- $U_{in} = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2 d}{2 \Sigma \epsilon_0}$;

- Per calcolare U_{fin} , consideriamo il seguente sistema di condensatori:



Si ha:

$$C_1 = \frac{\Sigma \epsilon_0}{2d}$$

$$C_2 = \frac{\Sigma \frac{\epsilon \cdot d}{d}}{2} = \frac{\Sigma \frac{10 \epsilon_0}{d}}{2}, \quad C_3 = \frac{\Sigma \frac{\epsilon_0 \cdot d}{3d}}{2} = \frac{\Sigma \frac{2 \epsilon_0}{3d}}{2},$$

da cui:

$$\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} = \frac{d}{\Sigma \epsilon_0} \left(\frac{1}{10} + \frac{3}{2} \right) = \frac{8}{5} \frac{d}{\Sigma \epsilon_0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_{eq} = \left(\frac{1}{2} + \frac{5}{8} \right) \frac{\Sigma \epsilon_0}{d} = \frac{9}{8} \frac{\Sigma \epsilon_0}{d},$$

dunque:

$$U_{fin} = \frac{Q^2}{2C_{eq}} = \frac{8}{9} \frac{Q^2 d}{2 \Sigma \epsilon_0}.$$

Quindi:

$$\mathcal{L} = -\Delta U = -\frac{1}{9} \frac{Q^2 d}{2 \Sigma \epsilon_0}$$

A questo punto, lo riportate all'ultimo quesito e:

$$\frac{\partial U}{\partial d} = m g$$
$$m = \frac{8}{9} \frac{Q^2}{2 \Sigma \epsilon_0 g}$$

11. Si suppone che la Terra (una sfera conduttrice di raggio $R = 6350 \text{ km}$) ha una densità superficiale di carica negativa, e che al livello del suolo vale $E_0 = 100 \text{ V/m}$, diretto verso il centro.

Valutare la carica totale Q e la pressione elettrostatica sulla crosta terrestre.

Sopra l'atmosfera, schematizzata come una distribuzione uniforme di carica ρ di altezza $h = 40 \text{ km}$ ($h \ll R$), il campo elettrico è nullo. Quanto vale la carica totale? Quanto vale ρ ?

Determinare poi $E(z)$ al variare dell'altezza z dal suolo; la differenza di potenziale ΔV tra l'infinito e la crosta terrestre; l'energia elettrostatica.

Approssimando poi l'atmosfera come un conduttore con conducibilità $\sigma = 10^{-14} \text{ /}\Omega\text{m}$, determinare la potenza dissipata per effetto Joule.

Infine, calcolare come varierebbero, in funzione del tempo, Q e ρ .

Si ha:

$$E_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} = -100 \text{ V/m} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q &= -4\pi\epsilon_0 \cdot 100 \cdot R^2 \approx \\ &\approx -10 \cdot 10^{-11} \cdot 10^2 \cdot 4 \cdot 10^{13} = \\ &= -4 \cdot 10^5 \text{ C} \end{aligned}$$

Ora:

$$\begin{aligned} p &= \sigma \frac{E_0}{2} = \frac{Q(-100)}{4\pi R^2 \cdot 2} = \\ &= -\frac{4 \cdot 10^5}{2 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 10^{13}} 10^2 \approx -\frac{1}{2} 10^{-8} \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \end{aligned}$$

Se il campo elettrico è nullo al di fuori dell'atmosfera, allora necessariamente la carica totale è nulla: questa è una facile conseguenza del Teorema di Gauss.

Ora, si ha:

$$\begin{aligned} -Q &= p \left(\frac{4}{3}\pi(R+h)^3 - \frac{4}{3}\pi R^3 \right) \approx p \frac{4}{3}\pi \cdot 3R^2 h = 4\pi R^2 h \Rightarrow \\ \Rightarrow p &= \frac{-Q}{4\pi R^2 h} \approx \frac{4 \cdot 10^5}{10 \cdot 4 \cdot 10^{13} \cdot 4 \cdot 10^4} = 2,5 \cdot 10^{-14} \frac{\text{C}}{\text{m}^3} \end{aligned}$$

Per $0 < z < h$, ora, applicando il principio di sovrapposizione e il Teorema di Gauss, si ha:

$$\begin{aligned} E(z) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{-Q}{4\pi R^2 h} \cdot \frac{4\pi R^2 z}{R^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{R^2} \left(1 - \frac{z}{h} \right) = \\ &= E_0 \left(1 - \frac{z}{h} \right) \end{aligned}$$

Per la differenza di potenziale, si ha:

$$\begin{aligned} \Delta V &= \int_0^h -E(z) dz = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h} \right) dz = \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R^2} \left[z - \frac{z^2}{2h} \right]_0^h = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{h}{2} \approx \\ &\approx \frac{4 \cdot 10^5 \cdot 4 \cdot 10^4}{10 \cdot 10^{-11} \cdot 4 \cdot 10^{13} \cdot 2} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ Volt} \end{aligned}$$

Per quanto riguarda l'energia elettrostatica:

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2} \int dq \varphi = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi R^2 \int_0^h \left(\frac{Q}{4\pi \epsilon_0 R^2} \right)^2 \left(1 - \frac{z}{h} \right)^2 dz = \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R^2} \int_0^h \left(1 - \frac{2z}{h} + \frac{z^2}{h^2} \right) dz = \\
 &= \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R^2} \left[z - \frac{z^2}{h} + \frac{z^3}{3h^2} \right]_0^h = \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R^2} \frac{h}{3} \approx \\
 &\approx \frac{16 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^4}{2 \cdot 10 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 10^{13} \cdot 3} \approx 2,3 \cdot 10^{11} \text{ J}
 \end{aligned}$$

Considerando ora l'atmosfera come un conduttore ohmico, si ha:

$$\begin{aligned}
 W_0 &= \int dV \vec{E} \cdot \vec{J} = \int \sigma E^2 dV = \sigma \frac{\epsilon_0}{2} \int \frac{E^2}{\epsilon_0} dV = \\
 &= \sigma \frac{\epsilon_0}{2} \frac{Q^2}{8\pi \epsilon_0 R^2} \frac{h}{3} \approx \\
 &\approx \frac{10^{-14}}{10^{-11}} \frac{16 \cdot 10^{10} \cdot 1 \cdot 10^4}{10 \cdot 10^{-11} \cdot 1 \cdot 10^{13} \cdot 3} \approx 5 \cdot 10^8 \text{ W}
 \end{aligned}$$

Si scrive ora:

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ(t)}{dt} &= 4\pi R^2 J(t) = 4\pi R^2 \sigma E(t) = -4\pi R^2 \sigma \frac{Q(t)}{4\pi \epsilon_0 R^2} = \\
 &= -\frac{Q(t)}{\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon_0}{\sigma},
 \end{aligned}$$

da cui:

$$Q(t) = Q e^{-\frac{t}{\tau}},$$

e analogamente:

$$p(t) = p e^{-\frac{t}{\tau}}$$

12. Si ha una sfera conduttrice di raggio a , che si trova all'interno di un guscio conduttore sferico di raggi $R > R_{in} > a$, concentrici alla sfera. Entrambi i corpi sono isolati: la sfera ha carica Q , il guscio è scarico.

Calcolare il potenziale e la pressione elettrostatica su ciascuna delle tre superfici.

La sfera viene compressa fino ad un raggio $a' = \frac{a}{2}$.

Calcolare il lavoro compiuto dalle forze durante la compressione del palloncino.

La sfera e il guscio vengono poi messi a terra, e a distanza $2R$ viene posizionata una carica Q . Si calcoli la carica indotta sulla sfera e sul guscio.

Sapendo il campo elettrico essere nullo all'interno del guscio sferico, sulla faccia interna del guscio è indotta una carica $-Q$, ossia una densità superficiale di carica che risulta, per la geometria del sistema, uniformemente pari a:

$$\sigma_{in} = \frac{-Q}{4\pi R_{in}^2}$$

Dunque sulla faccia esterna si ha:

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

Usando il teorema di Gauss, si ha dunque:

$$E(r) = \begin{cases} 0 & , r < a \vee R_{in} < a < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} & , a < r < R_{in} \vee r > R \end{cases}$$

Da qui si ha che il potenziale è:

$$\bullet \varphi(R) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}, \quad \varphi(R_{in}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R};$$

$$\bullet \varphi(a) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} + \int_a^{R_{in}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R} \right).$$

Per la pressione elettrostatica, si ha semplicemente:

- $p(a) = \frac{Q}{4\pi a^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Q^2}{(4\pi a^2)^2 2\epsilon_0}$;
- $p(R_{in}) = \frac{-Q}{4\pi R_{in}^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R_{in}^2} \cdot \frac{1}{2} = - \frac{Q^2}{(4\pi R_{in}^2)^2 2\epsilon_0}$;
- $p(R) = \frac{Q}{4\pi R^2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{Q^2}{(4\pi R^2)^2 2\epsilon_0}$.

Il segno negativo indica che, per la faccia interna, il verso è opposto rispetto agli altri due casi.

Per calcolare il lavoro, noi, sfruttiamo l'uguaglianza:

$$L = -\Delta U = U_{in} - U_{fin}$$

Si ha:

- $U_{in} = \frac{\epsilon_0}{2} \int dV E^2 = \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \int_0^{+\infty} E(r)^2 r^2 dr =$
 $= \frac{\epsilon_0}{2} 4\pi \left(\int_a^{R_{in}} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} r^2 dr + \int_{R_{in}}^{+\infty} \frac{1}{(4\pi\epsilon_0)^2} \frac{Q^2}{r^4} r^2 dr \right) =$
 $= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left(\left[-\frac{1}{r} \right]_a^{R_{in}} + \left[-\frac{1}{r} \right]_{R_{in}}^{+\infty} \right) =$
 $= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R_{in}} \right) ;$

- $U_{fin} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{a} - \frac{1}{R_{in}} + \frac{1}{R} \right) ,$

da cui:

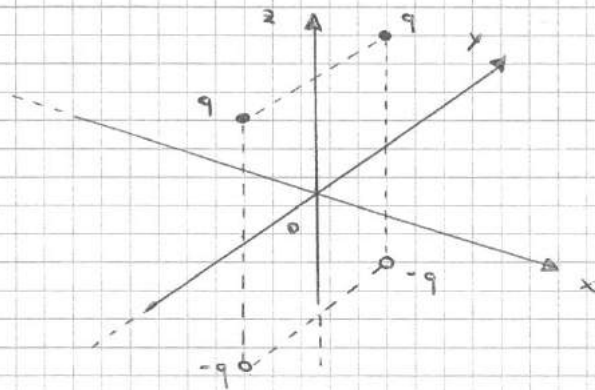
$$L = - \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \frac{1}{a}$$

La risposta alla prima domanda è no: la carica indotta è nulla, per il fenomeno delle gabbie di Faraday. Per quanto riguarda la carica esterna indotta, sappiamo che essa è pari a:

$$q' = -q \frac{R}{2R} = -\frac{q}{2}$$

13. Due cariche puntiformi, ciascuna uguale a q , sono poste di fronte ad un piano conduttore infinito e messo a terra, coincidente con il piano (x, y) . Le due cariche sono poste nelle posizioni $(x, y, z) = (0, \pm d, d)$. Calcolare:

- la forza totale esercitata dalle cariche sul piano;
- il campo elettrico sull'asse z a grande distanza dalle cariche;
- la densità superficiale di carica σ indotta sul piano conduttore lungo l'asse y ;
- l'energia elettrostatica del sistema.



Utilizzando un sistema di cariche immagini come quello illustrato in figura, si ha che la forza esercitata sul piano è l'opposto della forza esercitata sulle due cariche, ossia:

$$F = F_1 + F_2 = - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{(2d)^2} + \frac{2}{\sqrt{2}(2d\sqrt{2})^2} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F_p = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2}{4d^2} + \frac{\sqrt{2}}{8d^2} \right) = \frac{q^2}{32\pi\epsilon_0 d^2} (4 + \sqrt{2})$$

Chiusamente per $z < 0$ si ha $E(z) = 0$. Per $z > 0$, $z \gg d$, considerando un dipolo $\vec{p} = 2q\vec{d}$, con $\vec{d} = (0, 0, d)$, si ha:

$$E(z) = E_2(z) = \frac{2p}{4\pi\epsilon_0 z^3} = \frac{2qd}{4\pi\epsilon_0 z^3} \cdot 2 = \frac{2qd}{\pi\epsilon_0 z^3}$$

Per la densità, si ha:

$$\sigma(0, y, 0) = \sigma_1(0, y, 0) + \sigma_2(0, y, 0) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (dq) \left[\frac{1}{((y-d)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{((y+d)^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$$

Infine, dato che in generale vale:

$$U = \sum_{\substack{i < j \\ q_i, q_j \in V}} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} + \frac{1}{2} \sum_{q_i \in V} \sum_{j \in I} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}},$$

si ha in questo caso:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2d} + \frac{1}{2} \cdot 2 \left(-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 2d} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{8}d} \right) =$$

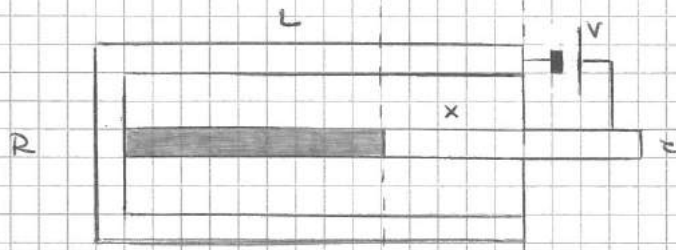
$$= -\frac{q^2}{\sqrt{8} \cdot 4\pi\epsilon_0 d}$$

14. Un condensatore variabile è costituito, come illustrato nella figura, da un barattolo cilindrico conduttore di raggio R e lunghezza $L \gg R$ e da un cilindro conduttore di raggio x , che penetra per una lunghezza $x \gg R$ variabile, ed è mantenuto in asse da un isolante. I due conduttori sono mantenuti a una differenza di potenziale V .

Dire dove si registra un campo elettrico non nullo, e calcolarlo; calcolare poi la densità superficiale di carica σ e le cariche totali $\pm Q$ sulle due armature.

Calcolare poi la capacità e l'energia del sistema.

Il generatore viene ora scollegato, lasciando la carica sulle armature. Calcolare la forza orizzontale agente sul cilindro interno, specificando il verso.



Considerando gli effetti ai bordi, l'unica regione ove il campo elettrico è non nullo è la parte del cilindro esterno che contiene il cilindro interno (in rosso nella figura). In questa zona si ha:

$$V = \frac{Q(x)}{2\pi\epsilon_0 x} \ln\left(\frac{r}{R}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q(x) = V 2\pi\epsilon_0 x \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1}$$

sul cilindro interno: $-Q$ su quello esterno.

Si ha dunque:

$$E = \frac{Q(x)}{2\pi r x \epsilon_0} = \frac{V}{r} \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1}$$

Da qui si ha, inoltre:

$$Q(x) = \frac{Q(x)}{V} = 2\pi\epsilon_0 x \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1}$$

Passando ora alle densità di carica, essa è non nulla solo dove $E \neq 0$. Dunque, nella zona in rosso della figura:

$$\sigma_i(x) = \frac{Q(x)}{2\pi R x} = \frac{V 2\pi\epsilon_0 x}{2\pi R x \ln\left(\frac{r}{R}\right)} = \frac{V\epsilon_0}{R \ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$

$$\sigma_e(x) = \frac{-Q(x)}{2\pi r x} = -\frac{V 2\pi\epsilon_0 x}{2\pi r x \ln\left(\frac{r}{R}\right)} = -\frac{V\epsilon_0}{r \ln\left(\frac{r}{R}\right)}$$

Per l'energia, si ha ovviamente:

$$U(x) = \frac{1}{2} E(x) V^2 = \frac{1}{2} V^2 2\pi\epsilon_0 x \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1}$$

Infine:

$$F(x) = \frac{V^2}{2} 2\pi\epsilon_0 \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1} = V^2 \pi \epsilon_0 \left(\ln\left(\frac{r}{R}\right)\right)^{-1}$$

diretta verso l'interno.

15. Un guscio sferico conduttore spesso e isolato ha raggio R e spessore trascurabile. Due cariche q_1 e q_2 sono poste lungo una retta uscente dal centro del guscio, a distanze $r_1 = \frac{R}{2}$ e $r_2 = 2R$.

Indicare un sistema di cariche immagine che consenta di calcolare il campo elettrico in tutto lo spazio.

Assumendo che il potenziale elettrostatico sia nullo all'infinito, calcolare il potenziale elettrostatico della sfera conduttrice, e nel suo centro.

Calcolare poi l'energia elettrostatica del sistema.

Calcolare la forza agente sulle cariche q_1 e q_2 .

Che forza sentirebbe, una volta immerso il guscio?

Usiamo il principio di sovrapposizione.

Considerando la carica esterna q_2 , ponendo due cariche immagine di cariche opposte q_2' e $q_1 - q_2'$, con:

$$q_2' = -q_2 \frac{1}{2} = -\frac{q_2}{2},$$

con q_2' a distanza $\frac{R}{2}$ dal centro, $q_1 - q_2'$ al centro.

Considerando invece la carica interna q_1 , basta porla a distanza $2R$, una carica q_1' , con:

$$q_1 = -q_1' \frac{1}{2} \Rightarrow q_1' = -2q_1$$

Il potenziale nel guscio è dunque:

$$V_g = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 - q_2'}{R} = \frac{2q_1 + q_2}{8\pi\epsilon_0 R},$$

e nel centro della sfera si ha:

$$\begin{aligned} V_c &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{R} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1}{2R} + V(R) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{R} + V(R) = \\ &= \frac{4q_1 + q_2}{8\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

Per l'energia elettrostatica, si ha:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{q_i \in V} q_i \varphi_i,$$

con:

$$\bullet \varphi_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1^2}{\frac{3}{2}R};$$

$$\bullet \varphi_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{\frac{3}{2}R} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1 + q_2}{2 \cdot 2R}.$$

Sommando:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R} \left(-\frac{2q_1^2}{\frac{3}{2}} - \frac{q_2^2}{3} + \frac{2q_2q_1 + q_2^2}{4} \right) = \\ &= \frac{1}{8\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{-16q_1^2 - 4q_2^2 + 3q_2^2 + 6q_2q_1}{12} \right) = \frac{-16q_1^2 - q_2^2 + 6q_1q_2}{96\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

La forza agente sulla carica q_2 è:

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{q_2^2}{2} \frac{1}{\frac{3}{2}R^2} + \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{2 \cdot 4R^2} \right) = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2q_2^2}{3R^2} + \frac{2q_1q_2 + q_2^2}{8R^2} \right) = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^2} \left(\frac{q_1q_2}{4} - \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{8} \right) q_2^2 \right) = \frac{1}{16\pi\epsilon_0 R^2} \left(q_1q_2 - \frac{7}{18} q_2^2 \right) \end{aligned}$$

Si ha invece:

$$\vec{F}_1 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2q_1^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2 R^2} = -\frac{2q_1^2}{9\pi\epsilon_0 R^2}$$

Se non ci fosse la sfera conduttrice si avrebbe un risultato totalmente diverso:

$$\vec{F}_1' = -\vec{F}_2' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1q_2}{\left(\frac{3}{2}R\right)^2} = \frac{2q_1q_2}{9\pi\epsilon_0 R^2}$$

16. Una sfera immersa nel vuoto ha raggio R , densità iniziale di cariche ρ_0 , costante dielettrica ϵ , conducibilità σ .

Calcolare il campo elettrico all'istante $t=0$, dentro e fuori la sfera.

Calcolare, a $t=0$, la distribuzione ρ_{pol} delle cariche di polarizzazione, e quella σ_{pol} di superficie.

Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule a $t=0$.
Si mostri che ρ rimane uniforme nel tempo, e si calcoli l'evoluzione temporale delle densità di cariche di volume, superficiale, di polarizzazione.

All'istante $t=0$, si ha:

$$E(r) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho_0 \frac{4\pi}{3} r & , r < R \\ \frac{1}{4\pi\epsilon} \rho_0 \frac{4\pi}{3} R^3 \frac{1}{r^2} & , r > R \end{cases}$$

$$E(r) = \begin{cases} \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} & , r < R \\ \frac{\rho_0 R^3}{3\epsilon} \frac{1}{r^2} & , r > R \end{cases}$$

Per calcolare ρ_{pol} , si può usare la prima equazione di Maxwell, e meno del segno si ha:

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \epsilon \vec{E} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \Rightarrow \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) \vec{E} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0) (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \rho_{pol} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \cdot \frac{\rho_0 r}{3\epsilon} \right) = \\ &= (\epsilon - \epsilon_0) \frac{1}{r^2} \rho_0 \frac{r^2}{\epsilon} = (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\rho_0}{\epsilon} \end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\begin{aligned} \sigma_{pol} &= - \frac{\int \rho_{pol}}{S} = - \frac{\frac{4\pi}{3} R^3}{4\pi R^2} (\epsilon - \epsilon_0) \frac{\rho_0}{\epsilon} = \\ &= -(\epsilon - \epsilon_0) \frac{\rho_0 R}{3\epsilon} \end{aligned}$$

Per il calcolo della potenza dissipata, ora, si ha:

$$\begin{aligned}
 W &= \int \vec{J} \cdot \vec{E} \, dV = \int dV \sigma E^2 = \\
 &= 4\pi\sigma \left(\int_0^R \frac{\rho_0^2 z^4}{(3E)^2} dz \right) = \frac{4\pi\sigma\rho_0^2}{9E^2} \left[\frac{z^5}{5} \right]_0^R = \\
 &= \frac{4\pi\sigma\rho_0^2}{9E^2} \frac{R^5}{5} = \frac{4}{45} \cdot \frac{\pi\sigma\rho_0^2}{E^2} R^5
 \end{aligned}$$

Si ha ora:

$$\begin{aligned}
 \frac{dQ(t)}{dt} &= -4\pi R^2 J(t) = -4\pi R^2 \sigma E(t) = -4\pi R^2 \sigma \frac{p(t) R}{3E} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dQ(t)}{dt} &= -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{dp(t)}{dt} = -\frac{4}{3} \pi R^3 \frac{p(t)}{\tau} \Rightarrow \\
 \Rightarrow \frac{dp(t)}{dt} &= -\frac{p(t)}{\tau}, \quad \tau = \frac{1}{\sigma}
 \end{aligned}$$

da cui:

$$p(t) = p_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Allora:

$$j_{par}(t) = \frac{(E - E_0)}{E} p(t) = \frac{E - E_0}{E} p_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\sigma(t) = (p_0 - p(t)) \frac{4}{3} \pi R^3 \cdot \frac{1}{4\pi R^2} = \frac{p_0 R}{3} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$

17. In un condensatore costituito da due armature conduttrici piane e parallele di raggio a , parte a distanza $d \ll a$, viene inserita una piastra di un materiale di raggio a , spessore h e costante dielettrica ϵ , appoggiandola su una delle due armature.

Calcolare la capacit  del sistema.

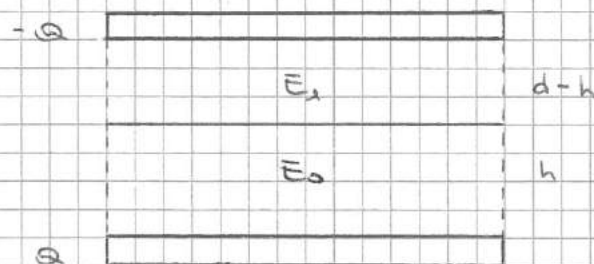
Una carica Q viene posta sull'armatura 1 a contatto con il dielettrico, e una carica $-Q$ su quella libera.

Calcolare la carica di polarizzazione indotta sulla superficie del dielettrico.

Il dielettrico ha anche una conducibilit  σ_c .

Calcolare come si evolve nel tempo $C(t)$, la capacit  del sistema, illustrando graficamente il risultato.

Calcolare poi l'energia finale, e l'energia dissipata per effetto Joule.



Possiamo schematizzare l'oggetto come una coppia di condensatori in serie. Dunque si ha:

$$C = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} = \frac{1}{\frac{h}{\pi a^2 \epsilon} + \frac{d-h}{\pi a^2 \epsilon_0}} = \frac{\pi a^2}{\frac{h}{\epsilon} + \frac{d-h}{\epsilon_0}}$$

Si ha poi:

$$D = \sigma_{\text{free}} \\ E_0 = \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon}, \quad E_1 = \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon_0}$$

da cui:

$$\sigma_{\text{pol}} = \left(-\frac{E_0}{E} + 1 \right) \sigma_{\text{free}},$$

sulla faccia inferiore del dielettrico.

Siano ora $\sigma_{up}(t)$, $\sigma_{down}(t)$, $\sigma_d(t)$ le densità superficiali di carica delle armature superiore (inferiore) del condensatore, e sulla superficie del dielettrico.

Chiamiamo:

$$\begin{cases} \sigma_{up}(t) \equiv \sigma_{free} \\ \sigma_{up}(t) = -\sigma_{down}(t) - \sigma_d(t) \end{cases}$$

Abbiamo ora:

$$D_0(t) = \epsilon E_0(t) = \sigma_{down}(t)$$

$$D_1 = \epsilon_0 E_1 = \sigma_{up}$$

Allora:

$$\Delta D_1(t) = \sigma_d(t) = \epsilon_0 (E_0 - E_1(t))$$

Ora:

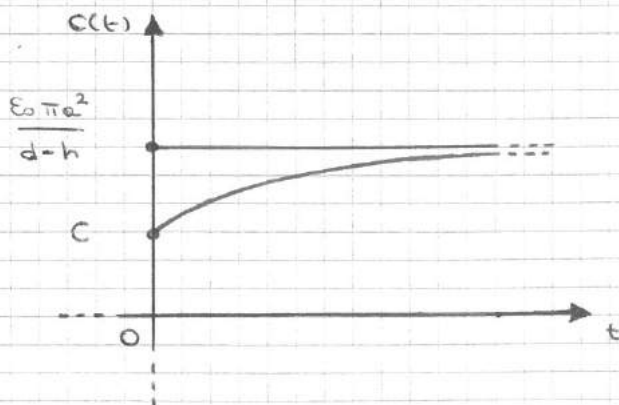
$$\begin{aligned} \frac{dQ(t)}{dt} &= \pi a^2 \frac{d\sigma_{down}(t)}{dt} = -\pi a^2 \sigma_c E_0(t) = \\ &= -\pi a^2 \sigma_c \frac{d\sigma_{down}(t)}{\epsilon} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{d\sigma_{down}(t)}{dt} &= \frac{\sigma_{down}(t)}{\tau}, \quad \tau = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \end{aligned}$$

$$\sigma_{down}(t) = \sigma_{down}(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Da cui:

$$C(t) = \frac{Q}{V(t)} = \frac{\frac{\sigma_{free} \cdot \pi a^2}{\epsilon} e^{-\frac{t}{\tau}}}{h + \frac{\sigma_{free}}{\epsilon_0} (d-h)} = \frac{\frac{\pi a^2}{\epsilon}}{e^{-\frac{t}{\tau}} \frac{h}{\epsilon_0} + \frac{d-h}{\epsilon_0}}$$

da cui si evince un aumento nel tempo:



Adesso si ha:

$$U(t) = \frac{Q^2}{2C(t)}$$

da cui $U(t)$ è decrescente. In particolare:

$$\begin{aligned} U(\infty) - U(0) &= \lim_{t \rightarrow +\infty} U(t) - U(0) = \frac{Q^2}{2} \left(-\frac{h\epsilon_0 - (d-h)\epsilon}{\pi a^2 \epsilon \epsilon_0} = \frac{d-h}{\pi a^2 \epsilon_0} \right) = \\ &= -\frac{Q^2}{2} \frac{h}{\pi a^2 \epsilon} \end{aligned}$$

Supponiamo che $-\Delta U = U(0) - U(\infty)$ sia l'energia dissipata per effetto Joule. In effetti:

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_V dV \vec{J}(t) \cdot \vec{E}_0(t) = \int_V dV \sigma_c \cdot E_0^2(t) = \\ &= h \pi a^2 \sigma_c E_0^2(t), \end{aligned}$$

e i

$$\begin{aligned} U_{\text{diss}} &= \int_0^{+\infty} W(t) dt = \frac{h \pi a^2 \sigma_c}{\epsilon^2} \int_0^{+\infty} E_{\text{down}}^2(t) dt = \\ &= \frac{h \pi a^2}{\epsilon \tau} \int_0^{+\infty} \frac{Q^2}{(\pi a^2)^2} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \frac{Q^2 \cdot h}{2 \pi a^2 \epsilon} \int_0^{+\infty} \frac{2}{\tau} e^{-\frac{2t}{\tau}} dt = \\ &= \frac{Q^2 h}{2 \pi a^2 \epsilon} = -\Delta U, \end{aligned}$$

come previsto.

ANCORA SULLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Ricordiamo il TEOREMA DI GAUSS

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Un analogo nella magnetostatica è stato dedotto da Ampère, e afferma che la CIRCOLAZIONE DEL CAMPO MAGNETICO vale:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c,$$

ove I_c è la CORRENTE CONCATENATA:

$$I_c = \Phi_J = \sum_i I_i$$

In effetti, nel caso di un filo rettilineo percorso da corrente I :

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_\theta 2\pi r = \mu_0 I,$$

una conferma.

Scriviamo per ora l'uguaglianza:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c$$

Per il Teorema di Stokes, considerate un'opportuna superficie S :

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{s} &= \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \cdot \vec{\nu} \, d\sigma = \\ &= \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot \vec{\nu} \, d\sigma, \end{aligned}$$

da cui si ottiene, per arbitrarietà:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \vec{J},$$

è (per noi) l'ultima QUARTA EQUAZIONE DI MAXWELL.

La TERZA EQUAZIONE DI MAXWELL, invece $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

ed è correlata all'assenza di monopoli magnetici in natura.

Per noi, dunque, le quattro equazioni di Maxwell sono :

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$;
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{1}{c} \frac{d\vec{B}}{dt}$;
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$;
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$.

Altre equazioni importanti sono le seguenti :

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{B} \right)$
- $\frac{d\vec{B}}{dt} = - \vec{\nabla} \times \vec{E}$

Torniamo ora alla formula di Ampere. Innanzitutto :

$$\vec{\nabla}^2 \frac{1}{r} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = - \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = 0,$$

per $r \neq 0$. In realtà vale :

$$\left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = -4\pi \delta(\vec{r}),$$

da cui :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \rho \frac{\vec{r}}{r^3} \Rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} 4\pi \rho = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \end{aligned}$$

una conferma.

Effettuiamo un'altra verifica :

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \vec{\nabla} \times \left(\vec{J} \times \frac{\vec{r}}{r^3} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dV \left[\vec{J} \left(\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right) - (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{\vec{r}}{r^3} \right] = \end{aligned}$$

$$= \mu_0 \vec{J},$$

e meno di una correzione:

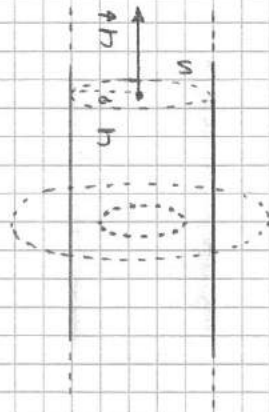
$$\frac{\mu_0}{4\pi} \int dV (\vec{J} \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{r^3},$$

che non analizziamo, per ora. Torneremo più avanti su questa questione: è infatti ancora un'insolvenza matematica, che analizzeremo e correggeremo più avanti.

Notiamo però che, nel caso in cui $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0$, mediante una generale integrazione per parti, si ottiene che tale correzione è nulla. Almeno in questo caso, perciò, la quarta equazione di Maxwell è verificata.

FORMULA DELLA CIRCUITAZIONE: ALCUNI ESEMPI

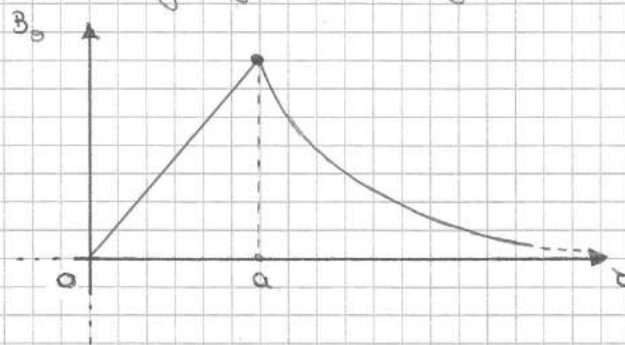
Consideriamo un cilindro di sezione S e lunghezza infinita, percorso da una densità di corrente J :



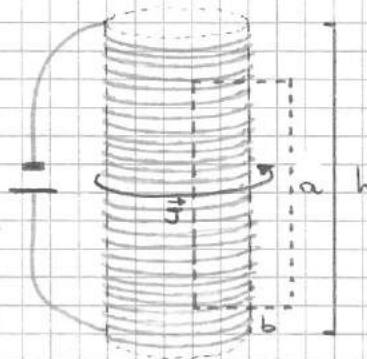
Usando la formula della circuitazione:

$$B_\theta = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & , r > a \\ \frac{\mu_0 J}{2} r = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r & , r < a \end{cases}$$

Si ha dunque un grafico del genere:



Consideriamo ora un SOLENOIDE cilindrico:



Detto N il numero di spire, si ha:

$$n = \frac{N}{h}$$

un indicatore della "densità" delle spire.

Se il cilindro c di lunghezza infinita, allora, usando il Teorema di Ampère con un circuito come quello in figura, si ha:

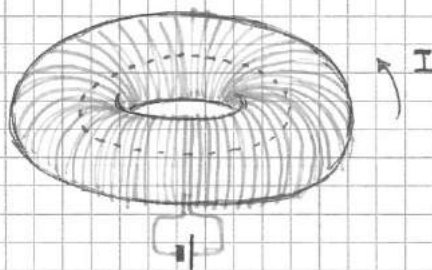
$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = B_z a =$$
$$= \mu_0 I_c = \mu_0 I a n,$$

da cui:

$$B_z = \mu_0 I n,$$

all'interno del cilindro. All'esterno, invece, il campo magnetico è da considerarsi nullo.

Infine, per un solenoide toroidale di raggi $r_1 < r_2$:



Applicando il Teorema di Ampère, si ha che il campo magnetico è non nullo solo per $r_1 < r < r_2$, e qui si ha:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B_c =$$
$$= \mu_0 I_c = \mu_0 I N,$$

da cui:

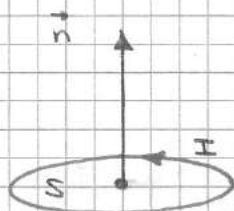
$$B_c = \frac{\mu_0 I N}{2\pi r}$$

DIPOLO MAGNETICO

Definiamo allora il MOMENTO DEL DIPOLO MAGNETICO:

$$\vec{\mu} = I S \vec{n} = I \int_S d\sigma \vec{n}$$

Si osservi la seguente figura:



In piena analogia con i dipoli elettrici:

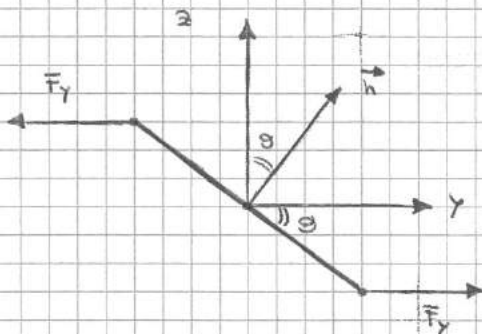
$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{\tau} = \vec{\mu} \times \vec{B} = -\frac{\partial U}{\partial \theta},$$

e:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left(3 \frac{(\vec{\mu} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{\mu}}{r^3} \right)$$

Nel caso di una spirale rotante:



Si ha:

$$\tau_x = B_z I S \sin \theta = \vec{\mu} \times \vec{B},$$

una conferma. In effetti:

$$U = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu B \cos \theta,$$

e derivando rispetto a θ si ottiene:

$$-\frac{\partial U}{\partial \theta} = \mu B \sin \theta = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Anche col formula per $\vec{B}$, nei casi di una spira, si riduce
 alle formule già viste, sfruttando il fatto che $\vec{\mu} \parallel \vec{r}$.

Si ottiene allora, ad esempio:

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I a^2}{r^3},$$

sull'asse della spira.

Passiamo ad una dimostrazione più impegnativa,
 ma più generale.

Consideriamo un circuito arbitrario immerso in un
 campo magnetico uniforme. Vale:

$$\vec{F} = I \left(\oint d\vec{r} \right) \times \vec{B} = 0$$

Il momento delle forze vale:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \oint \vec{r} \times d\vec{F} = I \oint \vec{r} \times (d\vec{r} \times \vec{B}) = \\ &= I \oint [d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B}) - \vec{B} \vec{r} d\vec{r}] \end{aligned}$$

Dato che $\vec{B}$ è costante:

$$I \oint \vec{B} (\vec{r} \cdot d\vec{r}) = I \vec{B} \oint \vec{r} d\vec{r} = 0,$$

da cui:

$$\vec{M} = I \oint d\vec{r} (\vec{r} \cdot \vec{B})$$

Lungo $\hat{x}$, ad esempio:

$$M_x = I \oint (\vec{r} \cdot \vec{B}) d\vec{r} \cdot \hat{x} = I \int_S d\sigma \vec{n} \cdot \vec{\nabla} \times [\hat{x} (\vec{r} \cdot \vec{B})],$$

usando il Teorema del rotore. Sempre:

$$M_x = I \int_S d\sigma \vec{n} \cdot \vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) \times \hat{x},$$

con:

$$\vec{\nabla} (\vec{r} \cdot \vec{B}) = \vec{B}$$

Però:

$$M_x = \int_S d\sigma \vec{n} \cdot \vec{B} \times \hat{x} = \hat{x} \cdot \left(I \int_S d\sigma \vec{n} \right) \times \vec{B} = \hat{x} \cdot \vec{\mu} \times \vec{B},$$

da cui in generale:

$$\vec{H} = \vec{\mu} \times \vec{B}$$

Proviamo ora a giustificare l'espressione per $\vec{B}$.

Per definizione:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{s} \times (\vec{R} - \vec{r})}{\|\vec{R} - \vec{r}\|^3}$$

Per $r \ll R$:

$$\begin{aligned} \vec{B} &\approx \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint d\vec{s} \times \left(\vec{R} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \vec{r} \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} - \frac{\vec{\mu}}{R^3} \right], \end{aligned}$$

e non proseguiamo con i conti.

Notiamo che:

$$- \oint d\vec{s} \times \vec{r} = -\vec{n} \oint ds r = -2S\vec{n},$$

ovvero:

$$- \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint d\vec{s} \times \vec{r} = - \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{\mu}}{R^3} \cdot 2,$$

da cui:

$$\begin{aligned} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^3} \oint d\vec{s} \times \left(\vec{R} - \frac{3\vec{R} \cdot \vec{r}}{R^2} \vec{r} \right) &= \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{\mu} \cdot \vec{R})\vec{R}}{R^5} + \frac{\vec{\mu}}{R^3} \right] \end{aligned}$$

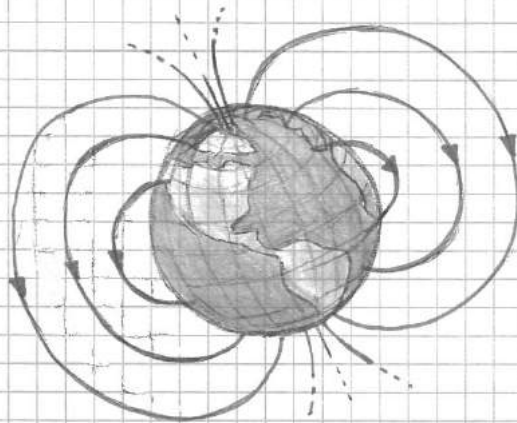
Per quanto concerne l'unità di misura:

$$[\mu] = A \cdot m^2 = \frac{J}{T}$$

Il nostro pianeta, la Terra, ha un campo magnetico di dipolo:

$$\mu_T \approx 8,05 \cdot 10^{22} \frac{J}{T},$$

diretto verso Sud:



Una bussola, ad esempio, è un dipolo magnetico, che per minimizzare l'energia si dispongono lungo $\vec{B}$, permettendoci di orientarci.

Si ha:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^3} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta},$$

da cui, essendo a Pisa $\theta \approx \frac{\pi}{4}$, si ha che il campo magnetico qui avrà l'intensità:

$$B_p \approx 0,5 \cdot 10^{-5} T$$

Consideriamo ora una particella di massa m e carica q che si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio a , con frequenza ν :



In tal caso, dato che $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$:

$$\mu = I \pi a^2 = q \nu \pi a^2 = \frac{q a^2 \omega}{2}$$

Si ha dunque un momento angolare:

$$L = m a v = m a^2 \omega$$

Nei cui:

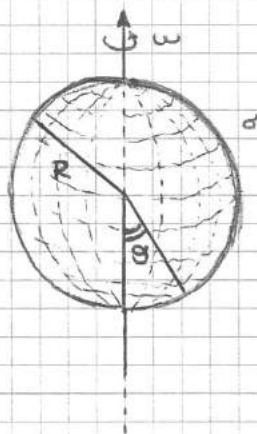
$$\vec{\mu} = g \frac{q}{2m} \vec{L},$$

con g che è detta COSTANTE GIROMAGNETICA, e vale:

- $g = 1$ per una carica puntiforme o una sfera uniformemente carica;
- $g = \frac{5}{3}$ per una sfera carica in superficie;
- $g_e = 2,002319304374$ per un elettrone.

Verifichiamo, ad esempio, che per una sfera uniformemente carica in superficie vale $g = \frac{5}{3}$.

Sia dunque σ la densità superficiale di carica, e sia R il suo raggio. Sia ω la sua velocità angolare:



Si ha, integrando in θ tra 0 e π il conto fatto prima:

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^\pi 2\pi R^2 \frac{R^2 \sin^2 \theta}{2} \omega \sigma \sin \theta d\theta = \\ &= \pi \omega \sigma R^4 \left[\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta \right] = \frac{4}{3} \pi R^4 \omega \sigma = \\ &= \frac{Q \omega R^2}{3} \end{aligned}$$

Si ottiene, in base a conoscenza di meccanica dei solidi, vale:

$$\vec{L} = \frac{2}{5} \pi R^2 \vec{\omega}$$

Adesso:

$$\mu = g \frac{\phi}{2\pi} L$$

$$\frac{\cancel{\phi} \cancel{\phi} \cancel{R^2}}{3} = g \frac{\cancel{\phi}}{\cancel{2\pi}} \frac{\cancel{\phi}}{5} \pi R^2 \cancel{\phi}$$

$$g = \frac{\omega}{n}$$

come si voleva.

INDUTTANZA E INDUTTORI

Un INDUTTORE è l'analogo "magnetico" di un condensatore, ossia un dispositivo che consente di accumulare un campo magnetico, e la sua energia.

Un circuito percorso da corrente elettrica genera un campo magnetico le cui linee di forza passano tutte intorno al filo: si genera dunque un flusso attraverso la superficie delimitata dal circuito: tale flusso è detto FLUSSO AUTOCONCATENATO.

Si dimostra sperimentalmente che vale:

$$\Phi_B = L I,$$

ove Φ_B è il flusso concatenato, I è l'intensità di corrente, e L è una costante che dipende dalla geometria del circuito, detta INDUTTANZA.

Ad esempio, nel caso di un solenoide, avremo calcolato:

$$\Phi_B = N B_z S = N \mu_0 I \frac{N}{h} S = \mu_0 \frac{N^2}{h} S I,$$

da cui:

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{h} S = \mu_0 h S n^2$$

Per quanto riguarda l'unità di misura:

$$[L] = \frac{T \cdot m^2}{A} = H,$$

ovvero l'induttanza si misura in HENRY H.

Un elemento del circuito con induttanza non trascurabile è detto induttore. Negli schemi esso è così rappresentato:



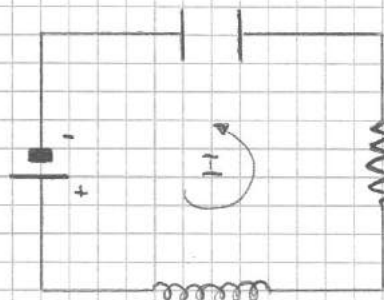
Le leggi di Lenz e di Faraday valgono ancora. Si tiene quindi che, ai capi di un induttore, vale:

$$\mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B = - L \dot{I}$$

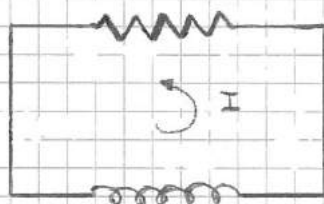
In un circuito RLC, contenente cioè un generatore di tensione, una resistenza, un condensatore e un'induttanza, si ha:

$$V + \mathcal{E}_{RLC} = 0$$

$$V = RI + \frac{Q}{C} + L \dot{I}$$



Un circuito RL (in evoluzione libera) è invece formato da una resistenza e un induttore:



Al tempo $t=0$ la corrente ai capi dell'induttore è $I(0) \neq 0$. Poi $I(t)$ obbedisce alla seguente equazione del circuito:

$$IR + L \dot{I} = 0$$

Si trova:

$$I(t) = I(0) e^{-\frac{R}{L}t} = I(0) e^{-\frac{t}{\tau}},$$

ove $\tau = \frac{L}{R}$ è detta COSTANTE DI TEMPO (di carica e scarica) del circuito.

Ciò implica che l'induttanza contiene una certa energia magnetica U_B .

ENERGIA MAGNETICA

L'energia magnetica può essere calcolata. Infatti:

$$\frac{dU_B}{dt} = W = VI = L \dot{I} I = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} LI^2 \right),$$

e integrando si ottiene:

$$U_B = \frac{1}{2} LI^2,$$

e meno di costanti additive.

Definiamo dunque la DENSITÀ DI ENERGIA MAGNETICA:

$$\begin{aligned} u_B &= \frac{U_B}{V} = \frac{\frac{1}{2} LI^2}{\frac{1}{\mu_0} Sh} = \frac{1}{2} \frac{LI^2}{Sh} = \\ &= \frac{\mu_0 n^2}{2} I^2 = \frac{B^2}{2\mu_0}, \end{aligned}$$

nel caso di un solenoide con N spire, di sezione S e lunghezza h , percorso da una intensità di corrente I .

In realtà questo è un risultato generale. In presenza di un campo elettrico E , la formula diventa:

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

OSSERVAZIONE

Una tipica induttanza reale $L \sim 10^{-6} \frac{\text{Tm}^2}{\text{A}}$, e immagazzina un'energia $U_B \sim 10^{-6} \text{ J}$, se $I \sim 1 \text{ A}$.

L'energia immagazzinata è in effetti poca, e per di più per ottenerla bisogna far circolare una corrente I , che viene dissipata dalla resistenza.

In conclusione, un condensatore è sicuramente uno strumento migliore, per immagazzinare energia.

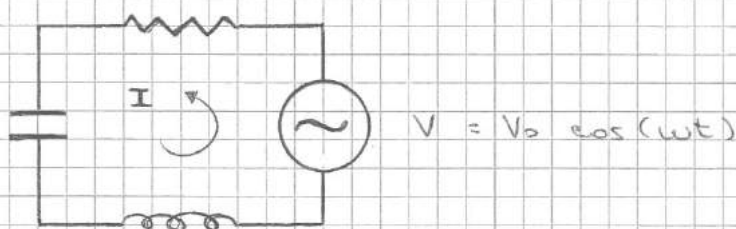
Tuttavia le induttanze si usano per altri scopi.

Tale valore è anche il valore della PRESSIONE MAGNETICA:

$$p_M = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

CIRCUITI RLC, IMPEDENZE

Consideriamo un circuito RLC alimentato da una forza elettromotrice alternata:



In particolare ω è detta FASE della corrente.

In questo caso, l'equazione del circuito è, per il Teorema della maglia:

$$\frac{Q}{C} + IR + L\dot{I} = V_0 \cos(\omega t)$$

Ma $I = \dot{Q}$ e quindi $\dot{I} = \ddot{Q}$. Si ottiene dunque un'equazione differenziale del secondo ordine in Q :

$$\frac{Q}{C} + \dot{Q}R + L\ddot{Q} = V_0 \cos(\omega t)$$

Cerchiamo una soluzione del tipo:

$$I(t) = I(0) e^{i(\omega t + \varphi)},$$

ove φ è l'angolo di SFASAMENTO tra tensione e corrente.

Si ha in particolare:

$$\dot{I}(t) = i\omega I(t), \quad Q(t) = \frac{I(t)}{i\omega},$$

da cui, si:

$$\frac{I(t)}{i\omega C} + I(t)R + i\omega L I(t) = V_0 e^{i\omega t}$$

$$I(0) \left(\frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L \right) = V_0,$$

e prendendo alle parti reali si ottiene:

$$I(t) = I(0) \cos(\omega t + \varphi),$$

con:

$$I(0) = \frac{V_0}{Z}, \quad Z = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L$$

Z è detto IMPEDENZA DEL CIRCUITO.

Si ottiene quindi, a livello di medie:

$$\langle W \rangle = \langle V I \rangle = \langle \operatorname{Re}(Z \hat{I}) \cdot \operatorname{Re} \hat{I} \rangle$$

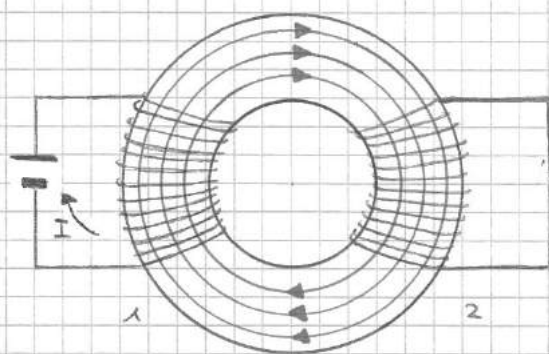
Ricordando che $\hat{I} = \hat{I}_0 e^{i\omega t}$:

$$\langle W \rangle = \langle \operatorname{Re}(Z \hat{I}) \cdot \operatorname{Re}(\hat{I}) \rangle = \frac{\operatorname{Re}(Z)}{2} |\hat{I}_0|^2 = \frac{R}{2} |\hat{I}_0|^2,$$

da cui, in assenza di resistenza, non vi è dissipazione di energia.

MUTUA INDUZIONE

Consideriamo un nucleo ferromagnetico toroidale, e due circuiti ad esso avvolti:



Il nucleo ferromagnetico fa sì che le linee di forza del campo magnetico attraversano le spire della seconda bobina (oltre che quelle della prima).

Se in generale anche il secondo circuito ha una corrente (nono dunque I_1 e I_2 le correnti), si ha, per la legge di Lenz:

$$\begin{aligned} -\mathcal{E}_1 &= \dot{\Phi}_B^1 = L_{11} \dot{I}_1 + L_{12} \dot{I}_2 \\ -\mathcal{E}_2 &= \dot{\Phi}_B^2 = L_{22} \dot{I}_2 + L_{21} \dot{I}_1 \end{aligned}$$

e i due circuiti, è evidente, interagiscono. Vale in effetti:

$$L_{12} = L_{21} = M,$$

e M è detto COEFFICIENTE di MUTUA INDUZIONE.

Per ciò illustrato sopra (della μ_r la COSTANTE di PERMEABILITÀ RELATIVA del ferro):

$$M = \mu_0 \mu_r \frac{N_1 N_2 S}{h},$$

ove S è la sezione e h l'altezza. In generale:

$$\begin{aligned} L_{12} &= \frac{\Phi_1(B_2)}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \vec{v}_1 \cdot \oint d\vec{S}_2 \times \frac{\vec{r}}{r^3} = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \vec{v}_1 \cdot \oint d\vec{S}_2 \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \\ &= - \frac{\mu_0}{4\pi} \int dS_1 \int d\vec{S}_2 \cdot \vec{v}_1 \times \left(\vec{\nabla} \frac{1}{r} \right) = \end{aligned}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d\vec{s}_1 \oint d\vec{s}_2 \cdot \nabla \times \frac{\vec{v}_1}{r},$$

e per il teorema di Stokes, tale integrale è uguale a:

$$\frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\vec{s}_1 d\vec{s}_2}{r}$$

Tale formula è simmetrica, dunque effettivamente:

$$L_{12} = L_{21} = M$$

Si ha:

- $|M| \leq L_1, |M| \leq L_2$;
- $M^2 \leq L_1 L_2$.

L'ideale si ottiene quando $M^2 = L_1 L_2$: nella pratica, per tali scopi si utilizzano i NUCLEI FERROMAGNETICI, che andrò a presentarvi più avanti.

Infine, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \omega = \vec{V} \cdot \vec{I} = \sum_i V_i I_i = \sum_{i,j} L_{ij} \dot{I}_i I_j = \\ &= \frac{d}{dt} \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j, \end{aligned}$$

da cui:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} L_{ij} I_i I_j$$

Nel caso di due circuiti:

$$U = \frac{L_1 I_1^2}{2} + \frac{L_2 I_2^2}{2} + M I_1 I_2$$

TRASFORMATORI

Vogliamo trasportare una certa potenza elettrica $W = VI$ costante da una centrale elettrica in una casa (ove $V \approx 220$ Volt). Lungo la linea di trasmissione, che supponiamo fissata, vi è una dissipazione di potenza per effetto Joule pari a RI^2 , con R fissata: risulta dunque evidente che, per minimizzare la dissipazione, conviene massimizzare V e minimizzare I .

Ad esempio, per trasportare 10 kW occorrono:

- 100 A, $\approx V = 100$ Volt;
- 1 A, $\approx V = 10000$ Volt,

e nel secondo caso la dissipazione è 10^4 volte minore rispetto al primo caso.

Come abbiamo anticipato, però, occorre trasformare l'energia elettrica, in modo da avere un voltaggio più basso ($V \approx 220$ Volt).

Per fare ciò si può usare l'induzione magnetica: essa necessita di CORRENTE ALTERNATA, e non di CORRENTE CONTINUA.

OSSERVAZIONE

I primi a porre questi problemi furono Edison e Westinghouse: il primo propose di usare corrente continua, e fellì nel suo progetto; il secondo propose invece l'uso della corrente alternata. Oggigiorno la tecnologia per le correnti alternate è molto più sviluppata di quella per le correnti continue.

Westinghouse, dunque, aveva proposto la soluzione migliore.

Vogliamo trasformare la differenza di potenziale da $V_1 = 15.000 \text{ V}$ a $V_2 = 220 \text{ V}$, volendo mantenere una potenza di 100 kW . Si ha dunque:

$$I_1 = 6,6 \text{ A}$$

$$I_2 \approx 450 \text{ A}$$

Dunque, per dissipare la potenza, l'utilizzatore si comporta come una resistenza:

$$R_2 = \frac{V_2}{I_2} \approx 0,5 \Omega$$

Supponiamo che sia:

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{L_1 \dot{I}_1 + M \dot{I}_2}{L_2 \dot{I}_2 + M \dot{I}_1} \approx \frac{L_1 \dot{I}_1}{M \dot{I}_1} \approx \frac{L_1}{M},$$

e imponiamo che tale valore sia $\neq 1$. Innanzitutto, per poter approssimare come abbiamo fatto, è necessario che sia $\dot{I}_1 \gg \dot{I}_2$.

Si vuole dunque che sia:

$$220 \text{ V} = E_2 \approx M \dot{I}_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \approx \frac{E_2}{\omega I_1} \approx \frac{220 \text{ V}}{50 \cdot 66 \text{ Hz} \cdot \text{A}} \approx 0,6 \text{ H},$$

ove $M \approx \frac{E_2}{\omega I_1}$ è giustificato se $\dot{I}_1 \approx I_1$ in $\text{sin}(\omega t)$, all'incirca.

Di solito $L \sim \mu_0 N^2 \cdot D$, ove D dipende dalle dimensioni dell'oggetto. In ogni caso, quel rapporto richiesto ($\neq 1$) pare irraggiungibile, per lo meno con quanto visto finora.

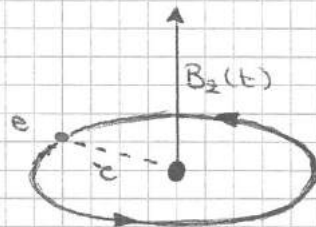
MAGNETISMO NELLA MATERIA

Parleremo ora di:

- DIAMAGNETISMO;
- PARAMAGNETISMO;
- FERROMAGNETISMO,

e forme di magnetismo nella materia.

Cominciamo con un'osservazione elementare: tutti i materiali contengono elettroni che, muovendosi, generano un campo magnetico: tale campo magnetico non accelera gli elettroni, ma induce un campo elettrico. Osserviamo la figura:



Dall'equazione di Maxwell:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

si ottiene che:

$$2\pi c E_\theta = -\pi c^2 \dot{B}_z$$
$$E_\theta = -\frac{c}{2} \dot{B}_z$$

A meno del segno, dunque, l'elettrone subisce un'accelerazione:

$$m_e \dot{v} = e E_\theta = \frac{e c}{2} \dot{B}_z$$

Supponiamo che il raggio sia costante:

$$a(t) \equiv a$$

Allora si ottiene:

$$v(t) = v_0 + \frac{e a}{2 m_e} B_z(t)$$

Da qui deduciamo la FREQUENZA:

$$\omega(t) = \frac{v(t)}{a} = \omega_0 + \frac{e}{2m_e} B_z(t) = \\ = \omega_0 + \omega_L(t),$$

ove:

$$\omega_L(t) = \frac{e}{2m_e} B_z(t)$$

è detta FREQUENZA DI LARMOUR.

Nel caso in cui $B_z(t) = 1 \text{ T}$, si ottiene:

$$\omega_L \approx \frac{10^{-18}}{2 \cdot 10^{-30}} \cdot 1 \approx 10^{12} \text{ Hz},$$

mentre:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{a} = \frac{c}{137 \cdot a} \approx \frac{10^{8-2}}{10^{-10}} \approx 10^{16} \text{ Hz},$$

da cui $\omega_L \ll \omega$, e l'approssimazione effettuata è accettabile.

La permeabilità magnetica, in questo caso, varia, e in particolare si ottiene:

$$\mu = \mu_0 (1 - 10^{-5}),$$

all'incirca.

Non discuteremo i fenomeni di paramagnetismo e ferromagnetismo. Ci limitiamo però a dire che:

- nel caso di fenomeni di paramagnetismo, si ottengono variazioni del tipo:

$$\mu = \mu_0 (1 + 10^{-3}),$$

o non minori;

- in presenza di nuclei ferromagnetici, si può avere anche:

$$\mu = 10^4 \mu_0$$

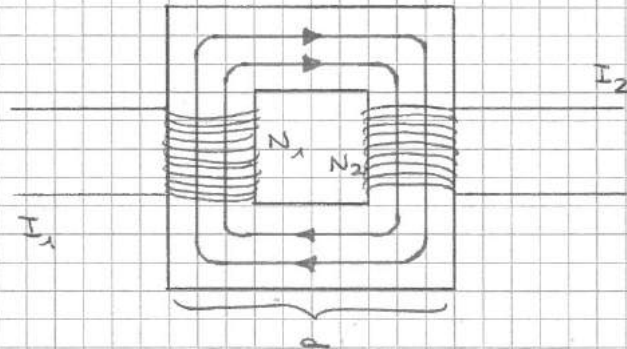
La proprietà più importante riguardo nuclei ferromagnetici riguarda le linee del campo all'interno del materiale, che restano all'interno e seguono la forma dell'oggetto.

In questi casi, la legge di Ampère afferma che:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu I_c$$

Cerchiamo ora di risolvere il problema della trasformazione dell'energia usando un nucleo ferro-magnetico.

Consideriamo il seguente schema:



Usando il Teorema della circolazione:

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu \oint \vec{B} = (N_1 I_1 + N_2 I_2) \mu \Rightarrow$$

$$\Rightarrow B = \frac{\sum_{i=1}^2 N_i I_i}{\mu l_c}$$

Si tengono allora i seguenti valori:

$$L_1 = \frac{\Phi_1}{I_1} = \frac{N_1 S}{l_c} \cdot \mu \frac{I_1 N_1}{\mu l_c} = \mu \frac{S}{l_c} N_1^2$$

$$L_2 = \frac{\Phi_2}{I_2} = \frac{N_2 S}{l_c} \cdot \mu \frac{I_2 N_2}{\mu l_c} = \mu \frac{S}{l_c} N_2^2$$

$$M = \frac{\Phi_1}{I_2} = \frac{\Phi_2}{I_1} = N_2 S \mu \frac{N_1 I_1}{\mu l_c} = \mu \frac{S}{l_c} N_1 N_2$$

Si ottiene allora l'accoppiamento massimo:

$$K^2 = L_1 L_2$$

Per risolvere il problema, allora, resta risolvere la seguente uguaglianza:

$$\frac{L_1}{K} = \frac{S}{l_c} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{S}{l_c}$$

Imponendo allora:

$$\mu \approx 10^{-3}, \quad S = 0,01 \text{ m}^2, \quad e = 0,1 \text{ m},$$

$$N_1 = 750, \quad N_2 = 10,$$

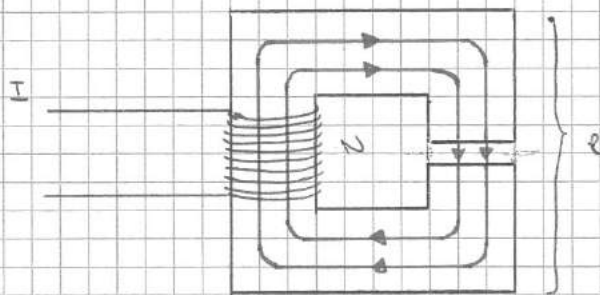
si ottengono:

$$\frac{L}{N^2} \approx 5$$

$$r_e = \mu \frac{S}{4e} N_1 N_2 \approx 10^{-6},$$

e il problema è risolto.

Vediamo ora un paio di applicazioni. Consideriamo il seguente sistema, utile a generare un campo magnetico elevato nella regione evidenziata:



In questo caso si ha:

$$\oint_{\mu_{\text{tot}}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = I_0$$

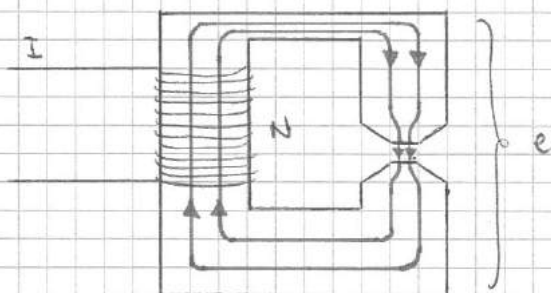
allora:

$$\left(\frac{4e-d}{\mu} + \frac{d}{\mu_0} \right) B = NI,$$

da cui il campo magnetico si indebolisce man mano che d aumenta, in quanto:

$$B = \frac{NI \mu \mu_0}{(4e-d)\mu_0 + d\mu} = \frac{I \mu \mu_0}{4e \mu_0 + d(\mu - \mu_0)}$$

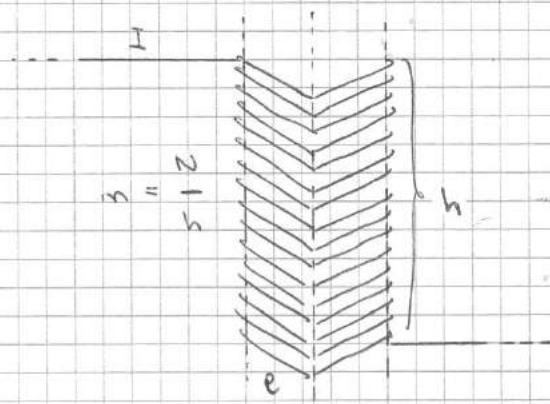
Consideriamo ora la seguente variante:



Dalla terza equazione di Maxwell si deduce che Φ_0 è costante, da cui il restringimento effettivo ρ_0 causato un aumento del campo magnetico nello stesso è evidenziato.

ESERCIZIO

Un solenoide quadrato è costituito da n spire per unità di lunghezza. Ciascuna spira ha lato e , e il solenoide ha altezza $h \gg e$. Le spire sono percorse da una corrente I . Siano $e = 0,1 \text{ m}$, $h = 1 \text{ m}$, $I = 10 \text{ A}$.



Calcolare n tale che il campo magnetico all'interno sia $B = 1 \text{ T}$. Calcolare quindi, per tale valore, la pressione magnetica p agente sulla superficie del solenoide, specificandone il verso.

Arrivare poi una notazione meccanica del supporto quadrato che regge le spire, che si espandono in tempo trascurabile fino ad assumere forma circolare.

Calcolare il raggio r del solenoide cilindrico e la corrente I' subito dopo tale processo.

Si ha, usando il teorema della circuizione:

$$B = \mu_0 n I \Rightarrow n = \frac{B}{\mu_0 I}$$

e a questo punto si sostituiscono i valori numerici; si ha $n \approx 0,8 \cdot 10^5$ spire per metro. Ora:

$$p = \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{1}{2(4\pi)10^{-7}} \approx 397 \text{ kPa} \approx 4 \text{ atm},$$

una pressione alquanto elevata. Il verso è chiaramente esterno.

In seguito alla rotazione, e' invariante che lega la due spine e il perimetro. Dunque:

$$2\pi r = h e$$

$$r = \frac{h e}{2\pi} = \frac{h e}{\pi},$$

da cui, dato che il flusso rimane costante:

$$\Phi_B = B \cdot \pi r^2 = B' \cdot \pi r^2 = B' \cdot \pi \left(\frac{h e}{\pi}\right)^2$$

$$B = B' \frac{h e}{\pi}$$

$$B' = B \frac{\pi}{h e},$$

un valore leggermente più basso. Dalla formula:

$$B' = \mu_0 n I'$$

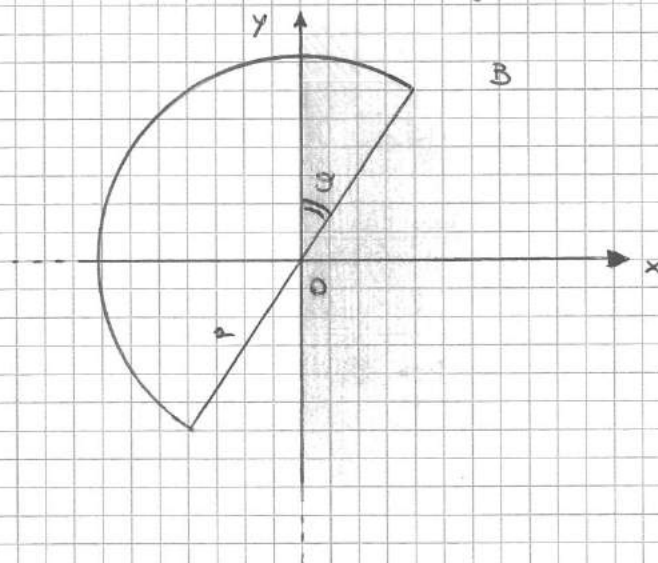
si ricava allora:

$$I' = \frac{B'}{\mu_0 n} = \frac{\pi B}{\mu_0 n h e},$$

anche questo leggermente più basso rispetto a I.

ESERCIZI VARI

1. Un sistema di spire parallele con densità di spire n viene collegato ad un generatore di differenza di potenziale V . Al tempo t^* la corrente che scorre nelle spire, inizialmente nulla, raggiunge il valore i e successivamente si mantiene costante. Per $t > t^*$ il sistema descritto è in grado di generare nella regione di spazio $x > 0$ un campo magnetico costante B orientato lungo z .



Descrivere la necessaria geometria del sistema di spire, calcolando la corrente I che genera B .

Supponendo che le resistenze siano trascurabili, detto L il coefficiente di autoinduzione del sistema di spire, calcolare t^* come funzione di B e V .

Per $t > t^*$ nel piano xy viene fatta una spirale semi-circolare di raggio a che ruota attorno al suo centro (l'origine) con velocità angolare ω . Supponiamo che la resistenza della spirale sia nulla, e che la sua autoinduttanza sia L .

Calcolare:

- la mutua induzione tra la spira circolare e il sistema di spire;
- la corrente $I(t)$ che circola nella spira.

Nel caso in cui, invece, la resistenza della spira sia R , e la sua autoinduttanza sia nulla, calcolare:

- la corrente $I(t)$ che circola nella spira;
- la potenza dissipata dalla resistenza per effetto Joule;
- la potenza meccanica necessaria per mantenere la spira in rotazione a velocità angolare costante.

Si può immaginare un solenoide di raggio "infinito".

Infatti, all'interno di un solenoide, il campo magnetico vale, per il teorema della circuitazione:

$$\oint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{l} = \mu_0 n \ell I$$

$$B = \mu_0 n I,$$

da cui occorre imporre:

$$I = \frac{B}{\mu_0 n}$$

(notiamo che I non dipende dal raggio della spira del solenoide).

Si ha ora:

$$I(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ ?, & t \in]0, t^*[\\ I, & t \geq t^* \end{cases}$$

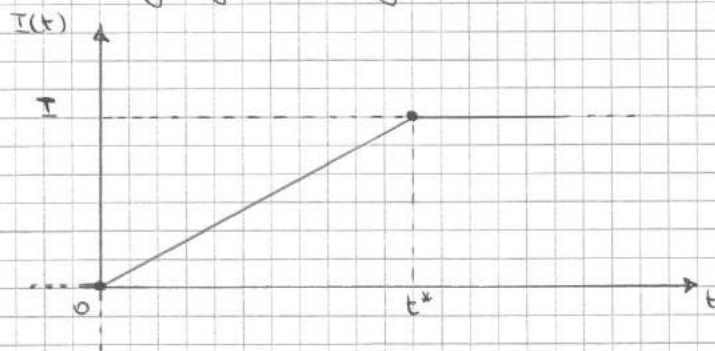
Bisogna dunque risolvere la seguente equazione del circuito:

$$V = \Lambda \dot{I}$$

$$\dot{I} = \frac{V}{\Lambda} \Rightarrow I(t) = \frac{V}{\Lambda} t,$$

avendo imposto $I(0) = 0$.

Si ha quindi il grafico seguente:



È facile allora calcolare t^* :

$$\frac{V}{L} t^* = I = \frac{B}{\mu_0 m}$$

$$t^* = \frac{B L}{V \mu_0 m}$$

Introduciamo ora la spirale. Si ha, per $t - t^* \in]0, \pi[$:

$$\kappa(t) = \frac{\Phi_B^s(B)}{I} = \frac{B \cdot \omega t \pi a^2}{\pi I \cdot L}$$

$$= \frac{\theta(t) \mu_0 m \cancel{I} a^2}{I \cdot L} = \frac{\theta(t) \mu_0 m a^2}{L}$$

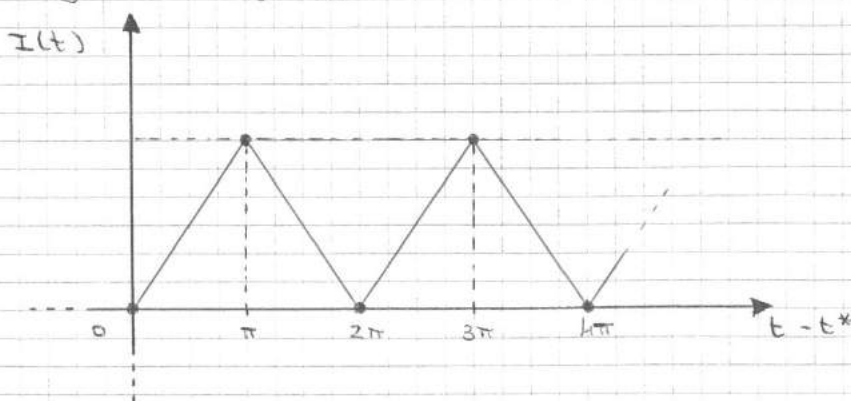
Pertanto, per la Legge di Lenz:

$$L \dot{I} = \mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B = \pm \frac{B \omega a^2}{L}$$

$$I(t) = \frac{\Phi_B}{L}(t) = \pm \frac{\theta(t) B a^2}{2L}$$

ove il doppio segno $\pm$ indica che il verso cambia a seconda che la spirale stia entrando o uscendo dalla regione $\{x > 0\}$.

Si ha il seguente grafico:

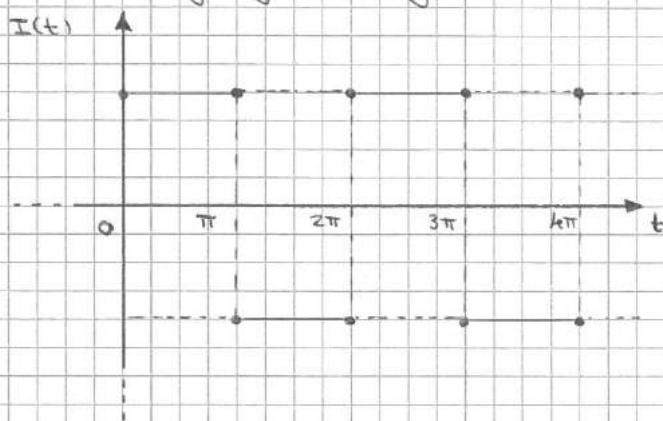


Se invece la resistenza della spira è R , e $L=0$,
l'equazione diventa:

$$RI = \mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B = \pm \frac{\omega B a^2}{2}$$

$$I = \pm \frac{\dot{\Phi}_B}{R},$$

da cui si ha il grafico seguente:



Per concludere, si ha:

$$W_J = RI^2 = \frac{\dot{\Phi}_B^2}{R} = \frac{\omega^2 B^2 a^4}{4R},$$

da cui la potenza meccanica richiesta è:

$$W_m = \int_{\Sigma} \vec{dF} \cdot \vec{v} = \int_{\Sigma} IB \, d\vec{e} \times \omega \vec{e} =$$

$$\int_0^{2\pi} IB \omega \, d\varphi = \pm IB \omega \frac{a^2}{2}$$

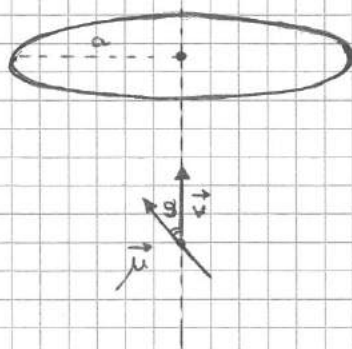
Alternativamente, in questo caso:

$$W_m = W_{el} = VI =$$

$$= \pm I \dot{\Phi}_B = \pm I \frac{B \omega a^2}{2}$$

(nell'integrale, Σ è la parte della spira dritta).

2. Consideriamo una spira circolare di raggio a , e un dipolo magnetico posto nell'asse della spira, con un angolo θ , che si muove a velocità costante v lungo l'asse della spira:



Studiare le reazioni della spira.

Supponiamo che la spira abbia autoinduttanza L e resistenza trascurabile. Allora si ha:

$$L \dot{I} = - \dot{\Phi}_B \Rightarrow I(t) = I_0 = \frac{\dot{\Phi}_B(t)}{L}$$

E invece la spira ha autoinduttanza trascurabile e resistenza R , allora:

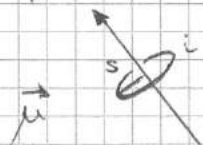
$$R I = - \dot{\Phi}_B \Rightarrow I(t) = - \frac{\dot{\Phi}_B(t)}{R}$$

In entrambi i casi, infatti, si è un'EMF indotta dal dipolo magnetico sulla spira, e quindi una forza elettromotrice che obbedisce alla legge di Lenz:

$$\mathcal{E} = - \dot{\Phi}_B$$

Per calcolare $\dot{\Phi}_B(t)$, possiamo usare un trucco.

Il dipolo magnetico può essere approssimato con una piccola spira di superficie s , percorsa da una corrente di intensità i , tale che sia $\mu = si$, disposta ortogonalmente rispetto al vettore $\vec{\mu}$:



La corrente della spira di raggio a dipende allora dalla variazione del flusso di mutua induzione della spira piccola su quella di raggio a .

Questo coefficiente di mutua induzione è difficile da calcolare: tuttavia, calcolare la mutua induzione della spira grande su quella piccola è decisamente più facile.

Si ha, ricordando la formula del campo magnetico sull'asse di una spira circolare, si ha:

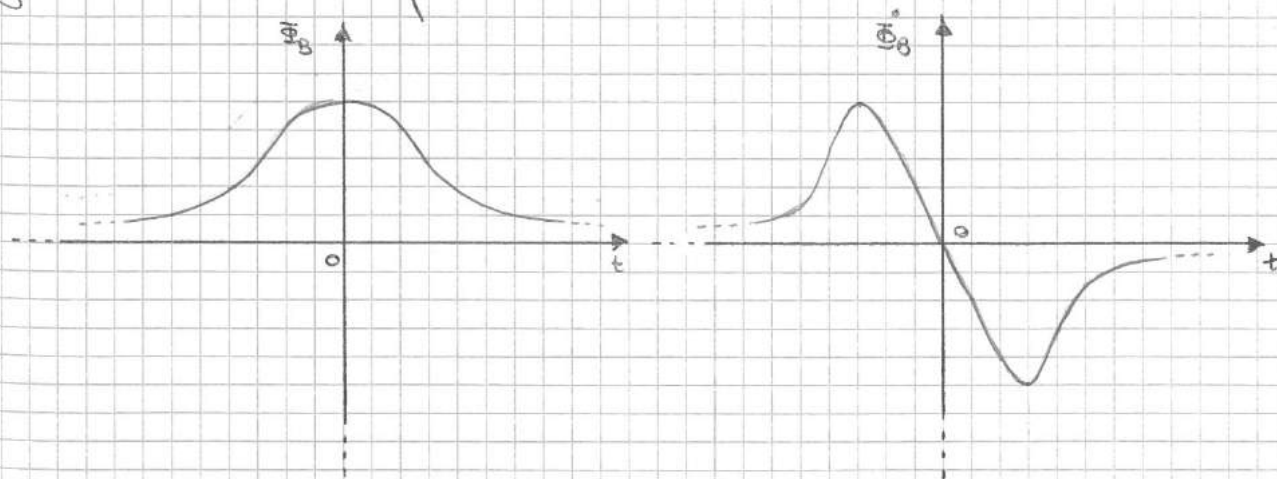
$$\begin{aligned} M(\theta) &= \frac{\Phi_1^M(B)}{i} = \frac{\cos \theta}{i} \cdot \frac{\mu_0 i a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \\ &= \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cos \theta \end{aligned}$$

Quindi:

$$\Phi_1^M(B) = M(\theta) i = \frac{\mu_0 a^2}{2(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \mu \cos \theta,$$

dato che $\mu = si$.

Se $z = vt$, si ottengono i grafici di Φ_B e Φ_B^* in funzione del tempo:



Un monopolo magnetico q_M produrrebbe un campo a simmetria sferica:

$$B_r = q_M \frac{k}{r^2},$$

ove k è arbitrario (possiamo perciò $k=1$).

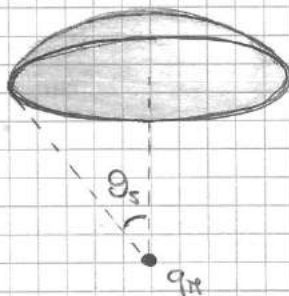
Il flusso, in questo caso, sarebbe:

$$\Phi_M = 2\pi q_M \left(1 - \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right),$$

ovvero:

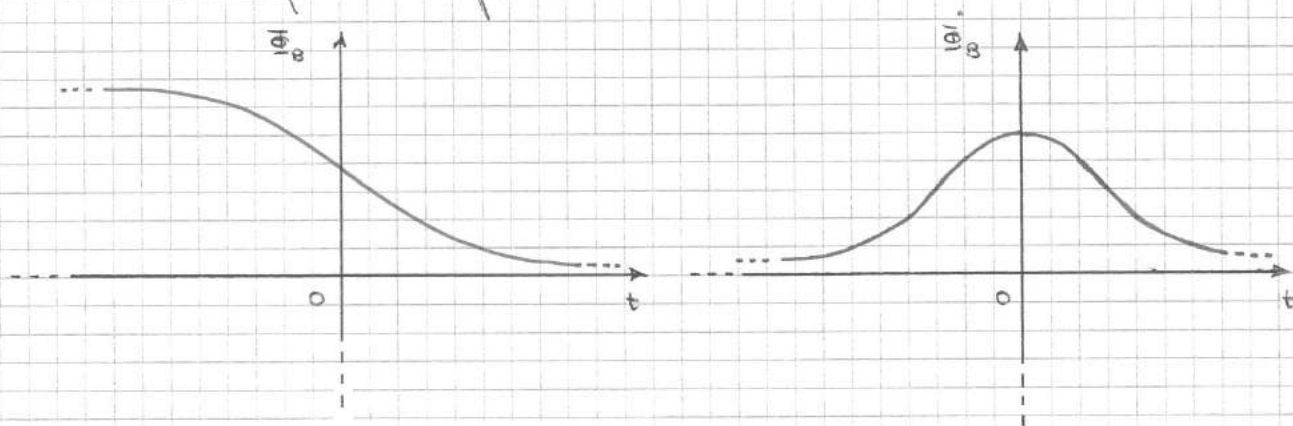
$$\Phi_M = 2\pi q_M (1 - \cos \theta_s),$$

ove θ_s è l'angolo solido. Il conto diretto immediatamente se, come superficie, consideriamo una calotta sferica.



Si considera infatti una calotta per sfruttare la simmetria sferica del campo magnetico.

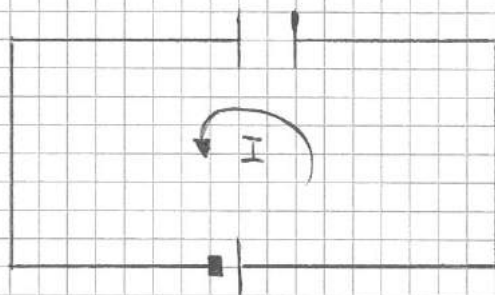
Si ottengono allora i seguenti grafici, del tutto diversi da quelli precedenti:



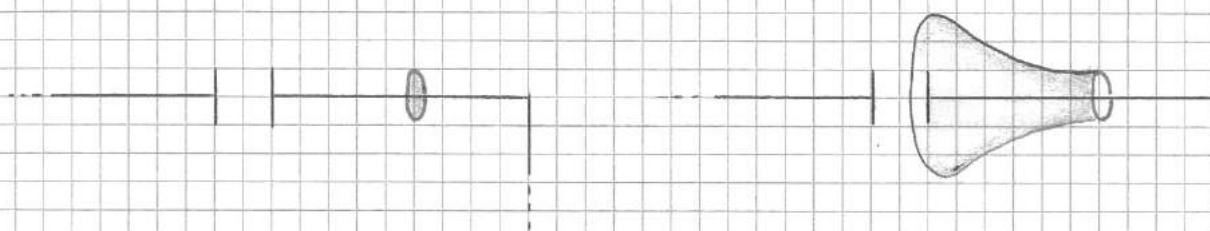
Nessuno ha mai osservato segnali di questo tipo: pertanto si è convinti che, in natura, non esistono monopoli magnetici.

INCONSISTENZA DELLE EQUAZIONI DI MAXWELL

Consideriamo un semplice circuito elettrico, come quello in figura:



Calcoliamo il campo magnetico in prossimità del filo, usando la seguente due superfici e usando il teorema della circuitazione:



Nel primo caso:

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} \, ds = 2\pi r B_\theta = \mu_0 I_0,$$

da cui:

$$B_\theta = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}$$

Nel secondo caso, palesemente $B_\theta \equiv 0$.

Le equazioni di Maxwell appaiono dunque inconsistenti. In particolare:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = - \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

da cui dovrebbe essere $\frac{\partial \rho}{\partial t} \equiv 0$: è evidente che c'è qualche correzione da fare.

CORRENTE DI SPOSTAMENTO

Ricordiamo le principali equazioni note finora:

- $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$;
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\dot{\rho}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

Abbiamo visto, nel precedente paragrafo, che esse sono incongruenti. Infatti:

$$0 = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\dot{\rho}$$

$$\dot{\rho} = 0,$$

e ciò è falso, e falso.

Nel 1863, allora, Maxwell modificò la quarta equazione, che divenne:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_s),$$

ove $\vec{J}_s$ è detta CORRENTE DI SPOSTAMENTO.

Dato che $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, ponendo $\vec{J}_s = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ si ottiene:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J}_s = \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \dot{\rho},$$

da cui automaticamente, essendo $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = 0$, si ha la legge di conservazione della carica, che diventa quindi superflua:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\dot{\rho}$$

Riconsideriamo l'esempio visto nel paragrafo precedente. Abbiamo visto che, apparentemente, la quantità:

$$\oint_{\tau} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_0$$

varia a seconda della superficie (delimitata da τ) considerata.

Riprendendo in esame le due superfici considerate nel paragrafo precedente, nel secondo caso si ha:

$$I_c = 0$$

Dato che però $\vec{E} \neq 0$, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{S\epsilon_0} \Rightarrow \\ \Rightarrow \vec{E} &= \frac{\dot{Q}}{S\epsilon_0} = \frac{I}{S\epsilon_0}, \end{aligned}$$

da cui:

$$\vec{J}_s = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{I}{S}$$

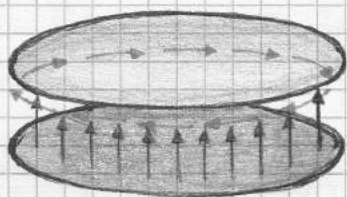
dunque si ottiene:

$$I_s = S J_s = S \frac{I}{S} = I,$$

da cui la formula seguente, adesso, è valida per ogni superficie:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c$$

Analizziamo ora un nuovo effetto fisico: cerchiamo di calcolare il campo magnetico in un condensatore (a facce piane e parallele, raffianamento circolare):



Si ha dunque:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_c,$$

da cui:

$$2\pi r B_{\varphi}(r) = \mu_0 \pi r^2 J_s = \mu_0 \left(\frac{r}{R}\right)^2 I,$$

da cui si ottiene:

$$B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0 \cdot r}{2\pi R^2} I$$

Fonte equivalente a:

$$B_{\varphi}(r) = \frac{\mu_0 r}{2} J_s = \frac{\mu_0 r}{2} E_0 \dot{E}_2$$

A livello numerico, tale campo magnetico è rilevante?
Facciamo qualche stima energetica. Si ha:

$$\bullet U_E = \int \frac{\epsilon_0}{2} E^2 dV = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \pi R^2 h;$$

$$\begin{aligned} \bullet U_B &= \int \frac{1}{2\mu_0} B^2 dV = 2\pi h \int_0^R r \frac{r^2}{8} \mu_0 J^2 dr = \\ &= \pi h \frac{\mu_0}{4} \int_0^R J^2 r^3 dr = \frac{\pi h \mu_0}{4} \int_0^R \frac{E^2 \epsilon_0^2}{\tau^2} r^3 dr = \\ &= \frac{\pi h \mu_0}{4} \cdot \frac{E^2 \epsilon_0^2}{\tau^2} \cdot \frac{R^4}{4} = \frac{\epsilon_0^2 \mu_0}{16\tau^2} E^2 \pi R^4 h. \end{aligned}$$

Dunque:

$$\frac{U_E}{U_B} = \frac{\frac{\epsilon_0}{2} E^2 \pi R^2 h}{\frac{\epsilon_0^2 \mu_0}{16\tau^2} E^2 \pi R^4 h} = \frac{8\tau^2}{\epsilon_0 \mu_0 R^2} = 8 \frac{\tau^2 c^2}{R^2} = 8 \left(\frac{\tau c}{R} \right)^2,$$

da cui (dato che tipicamente $\tau c \gg R$) si ha $U_E \gg U_B$.

ONDE PIANE NEL VUOTO

In generale vale:

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z, t)$$

$$\vec{B} = \vec{B}(x, y, z, t)$$

Supponiamo però che $\vec{E}, \vec{B}$ dipendano, per semplicità, solo da x, t . Nel vuoto, le quattro equazioni di Maxwell diventano:

- $\partial_x E_x = 0$, ma E_x costante (ma $E_x = 0$);

- $-\partial_x E_z = -\dot{B}_y$, $\partial_x E_y = -\dot{B}_z$, $\dot{B}_x = 0$;

- $\partial_x B_x = 0$, ma B_x costante (ma $B_x = 0$);

- $-\partial_x B_z = \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_y$, $\partial_x B_y = \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_z$, $\dot{E}_x = 0$.

Si ottiene allora:

- $\partial_x \partial_x E_y = \partial_x \epsilon_0 \mu_0 \dot{B}_z = \partial_t \epsilon_0 \mu_0 \partial_x B_z = \epsilon_0 \mu_0 \partial_{tt} E_y$;

- $\partial_x \partial_x E_z = \partial_x \epsilon_0 \mu_0 \dot{B}_y = \partial_t \epsilon_0 \mu_0 \partial_x B_y = \epsilon_0 \mu_0 \partial_{tt} E_z$;

- $\partial_x \partial_x B_y = \partial_x \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_z = \partial_t \epsilon_0 \mu_0 \partial_x E_z = \epsilon_0 \mu_0 \partial_{tt} B_y$;

- $\partial_x \partial_x B_z = \partial_x \epsilon_0 \mu_0 \dot{E}_y = \partial_t \epsilon_0 \mu_0 \partial_x E_y = \epsilon_0 \mu_0 \partial_{tt} B_z$.

Dunque, in forma compatta:

$$\left(\partial_{xx} - \frac{1}{c^2} \partial_{tt} \right) E(x, t) = 0, \quad c = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0}$$

e questa è detta EQUAZIONE DELLE ONDE.

Le soluzioni sono della forma:

$$\begin{aligned} E_y &= f_{E_y}(x - ct) + g_{E_y}(x + ct) \\ E_z &= f_{E_z}(x - ct) + g_{E_z}(x + ct), \end{aligned}$$

ad esempio. Esse sono correlate dalla seguente relazione:

- $\dot{B}_z = -\partial_x E_y \Rightarrow B_z = \frac{1}{c} f_{E_y}(x - ct) - \frac{1}{c} g_{E_y}(x + ct)$

- $\dot{B}_y = -\partial_x E_z \Rightarrow B_y = -\frac{1}{c} f_{E_z}(x - ct) + \frac{1}{c} g_{E_z}(x + ct)$

Considerando solo l'onda in avanti si ottiene:

$$E_1 = f_{E_1}(x - ct)$$

$$B_1 = -\frac{1}{c} E_2$$

$$E_2 = f_{E_2}(x - ct)$$

$$B_2 = \frac{1}{c} E_1$$

quindi $\vec{E} \cdot \vec{B} = 0$.

Per una generica onda piana, dunque, $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono tra loro ortogonali, e ortogonali alla direzione di propagazione.

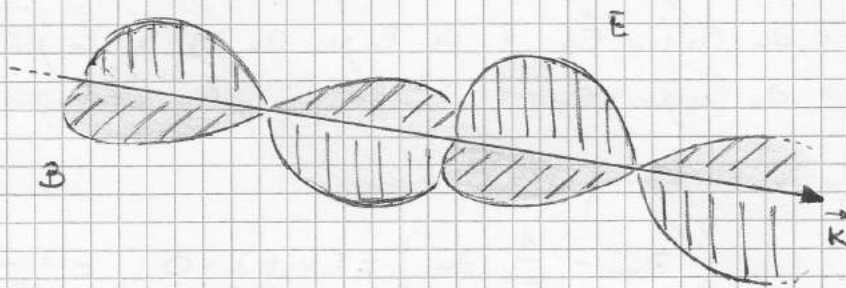
Si dice allora che la luce è un'onda con POLARIZZAZIONE TRASVERSA.

Inoltre i moduli di E , B sono tra loro direttamente proporzionali:

$$E_1 \propto B_2$$

$$E_2 \propto B_1$$

Si ottiene quindi la seguente rappresentazione:



Dato un'onda piana, si definiscono:

- LUNGHEZZA D'ONDA:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k};$$

- PULSAZIONE:

$$\omega = 2\pi\nu$$

La luce visibile si ha per $\lambda \in [400 \text{ nm}, 700 \text{ nm}]$ circa.

Volendo usare la Teoria delle serie di Fourier, consideriamo onde piane della forma:

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \\ \vec{B} = \vec{B}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega t) \end{cases}$$

con:

$$\omega^2 = c^2 \|\vec{k}\|^2,$$

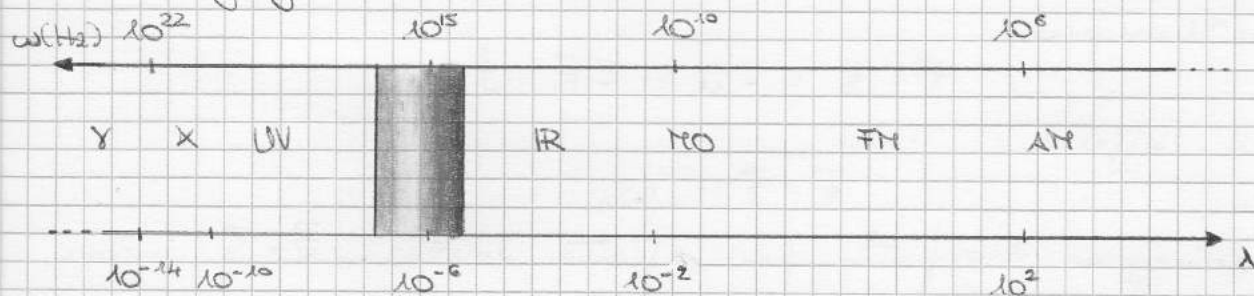
e:

$$\begin{cases} \vec{k} \cdot \vec{E} = \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \\ \vec{E} = c \vec{B} \times \vec{k} \\ \vec{B} = \frac{1}{c} \vec{k} \times \vec{E} \end{cases}$$

Ecco una rappresentazione delle varie onde, in ordine per frequenza o lunghezza d'onda. Incontriamo, nell'ordine:

- i raggi gamma;
- i raggi X;
- i raggi ultravioletti;
- la luce visibile;
- i raggi infrarossi;
- le microonde;
- le frequenze radio.

Ecco il grafico:



TEOREMA DI POYNTING

Valutiamo ora la densità di energia u . Si ha:

$$u = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0} = \epsilon_0 E^2,$$

perché le due forze danno lo stesso contributo energetico. Se mediamo nel tempo:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2,$$

e tale densità di energia si muove (trasportando energia) alla velocità della luce.

Se definiamo ora il VETTORE DI POYNTING:

$$\vec{S} = \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \epsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B},$$

si ha il cosiddetto TEOREMA DI POYNTING:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{S} &= \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) = \\ &= \frac{1}{\mu_0} \left(-\vec{B} \cdot \vec{B} - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B}) \right) = \\ &= -\frac{1}{\mu_0} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{2} \epsilon_0 \mu_0 E^2 \right) = -\vec{E} \cdot \vec{J} \end{aligned}$$

Si ha dunque:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} = -\dot{u} = -\vec{E} \cdot \vec{J},$$

ove in effetti:

$$\vec{E} \cdot \vec{J} = w_d$$

è l'energia dissipata per effetto Joule. $\vec{\nabla} \cdot \vec{S}$, infine, misura la variazione di energia.

In particolare, per un'onda piana reale:

$$\vec{S} = c \epsilon_0 E^2 \hat{k} = c u \hat{k},$$

quindi l'energia è trasportata alla velocità della luce.

ESERCIZI VARI

1. In qualche vecchio modello di televisione può ancora capitare di osservare due tipi di antenne: una lineare, una circolare.

Quali sono i vantaggi di ciascuna delle due? Commentare brevemente.

Qual è la risposta dei due tipi di antenne ad un'onda elettromagnetica piana polarizzata linearmente, che si propaga nel vuoto? Il rapporto dei segnali riceve dipende dalla frequenza?

Supponiamo che l'antenna lineare sia lunga 50 cm, e quella circolare abbia diametro 50 cm. Se il rapporto dei segnali riceve dipende dalla frequenza, a quale frequenza tale rapporto vale 1?

In che direzione dovrebbe essere orientata ciascuna delle due antenne per ottimizzare la ricezione?

Perché non esistono radio con antenne circolari?

Supponiamo che $\lambda \gg l, a$, ove λ è la lunghezza d'onda. Allora l'onda, in via d'approssimazione, è un campo elettrico costante nello spazio.

Si ha pertanto:

- per l'antenna lineare $\Delta V_L = El$;
- per l'antenna circolare $\Delta V_C = \dot{\Phi}_B = \pi a^2 \dot{B} = \omega^2 \pi B$.

Dunque l'antenna lineare sfrutta il campo elettrico, quella circolare sfrutta il campo magnetico.

Il rapporto $\frac{\Delta V_L}{\Delta V_C}$ è inversamente proporzionale alla frequenza ω . Si può osservare che l'antenna circolare funziona meglio ad alte frequenze.

Nella formula:

$$\frac{\Delta V_L}{\Delta V_C} = \frac{E\ell}{\omega \pi a^2 B} = 1 \Rightarrow \omega = \frac{E\ell}{\pi a^2 B} \approx \frac{\ell}{\pi a^2} c,$$

da cui si ottiene

$$\omega \approx \frac{0,5}{3,14 \cdot 0,01} c \approx 16 \cdot c \approx 4,8 \cdot 10^9 \frac{\text{rad}}{\text{s}},$$

ovvero circa 760 MHz.

Notiamo che, per $\lambda \gg \ell, a$, l'antenna lineare minimizza la sua efficienza (direttamente proporzionale alla lunghezza).

In effetti, per $\lambda \ll \ell$, si avrebbe:

$$\Delta V = \int_a E \cdot d\ell \approx 0,$$

da cui l'antenna lineare sarebbe del tutto inutile.

Tuttavia non è così, infatti oggi sono usate le antenne lineari nella maggior parte dei casi. In particolare, nel caso delle radio, si hanno frequenze molto minori di 760 MHz, da cui l'antenna lineare è di gran lunga la più efficiente tra le due.

Per massimizzare i segnali, ovviamente disporremo l'antenna lineare lungo la direzione del campo elettrico, quella circolare in posizione ortogonale rispetto al campo magnetico.

2. Un'onda elettromagnetica sinusoidale piana di lunghezza d'onda λ si propaga nel vuoto lungo l'asse x . Il campo elettrico è polarizzato linearmente lungo l'asse y , e assume il valore massimo E_0 nel punto $(0,0,0)$ a $t=0$.

Dire quanto vale il campo magnetico in un punto ad un istante generico.

Una spirale quadrata di lato $\ell \ll \lambda$ e autoinduttanza L è situata nell'origine.

In quale direzione occorre orientare la spirale in maniera che l'onda elettromagnetica vi faccia circolare la massima corrente I ?

Per tale orientazione, calcolare la corrente $I(t)$, assumendo $I(0) = 0$.

Mantenendo la stessa orientazione, poi, viene inserita una resistenza R . Per quale valore di R la potenza media $\langle W \rangle$ dissipata a regime è massima? Quanto vale tale potenza media?

Inanzitutto $\vec{B}(x, y, z, t) = B_z(x, y, z, t)$.

In base alle condizioni iniziali, si ottiene:

$$B_z(x, y, z, t) = \frac{E_0}{c} \cos(kx - \omega t),$$

ove:

- $k = \frac{2\pi}{\lambda}$;
- $\omega = ck$.

Dato che ora la corrente è proporzionale al flusso del campo magnetico, tramite la relazione:

$$I(t) = -\frac{\dot{\Phi}_B(t)}{L},$$

si ha che per massimizzare $I(t)$ conviene disporre la spirale ortogonalmente rispetto al campo magne-

Tico: nella fattispecie, nel piano $\{z=0\}$.

Per tale orientazione, vale:

$$\begin{aligned} I(t) &= \left[-\frac{\Phi_B(s)}{L} \right]_0^t = -\frac{e^2}{L} [B_z(t) - B_z(0)] = \\ &= \frac{e^2}{L} \left[\frac{E_0}{c} - B_z(t) \right], \end{aligned}$$

$$\text{e } I(0) = 0.$$

Quando il sistema con la resistenza è a regime, si ha:

$$RI + L\dot{I} = -e^2 \dot{B}_z$$

In ogni caso:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{2} R |\hat{I}|^2,$$

ove:

$$\begin{aligned} (R + i\omega L) \hat{I} &= \hat{E} \\ \hat{I} &= -\frac{e^2 \dot{B}_z}{R + i\omega L} \end{aligned}$$

Da qui si ottiene:

$$\begin{aligned} |\hat{I}|^2 &= \frac{e^4 \dot{B}_z^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)} \\ \langle W \rangle &= \frac{1}{2} R \frac{e^4 \dot{B}_z^2}{(R^2 + \omega^2 L^2)}, \end{aligned}$$

da cui si tratta di massimizzare la funzione:

$$H(R) = \frac{R}{(R^2 + T^2)}, \quad T = \omega L$$

Si ottiene che il massimo verifica:

$$R^{*2} + T^2 - 2R^{*2} = 0 \Rightarrow R^* = T = \omega L,$$

e per tale valore:

$$\langle W \rangle = \frac{1}{4} \frac{e^4 \dot{B}_z^2}{\omega L}$$

ONDE NELLA MATERIA

Ricordiamo le quattro equazioni di Maxwell:

- $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$
- $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$
- $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{J} + \epsilon_0 \dot{\vec{E}})$

Nella materia si hanno i seguenti cambiamenti:

- μ_0 diventa μ ;
- ϵ_0 diventa ϵ ;
- la velocità dell'onda diminuisce:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} < v_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = c.$$

In più esiste una CONDUCTIBILITÀ σ , tale che:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

La quarta equazione di Maxwell diventa allora:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu (\sigma \vec{E} + \epsilon \dot{\vec{E}}) = \\ &= \mu \left(\frac{\sigma}{i\omega} + \epsilon \right) \vec{E} \end{aligned}$$

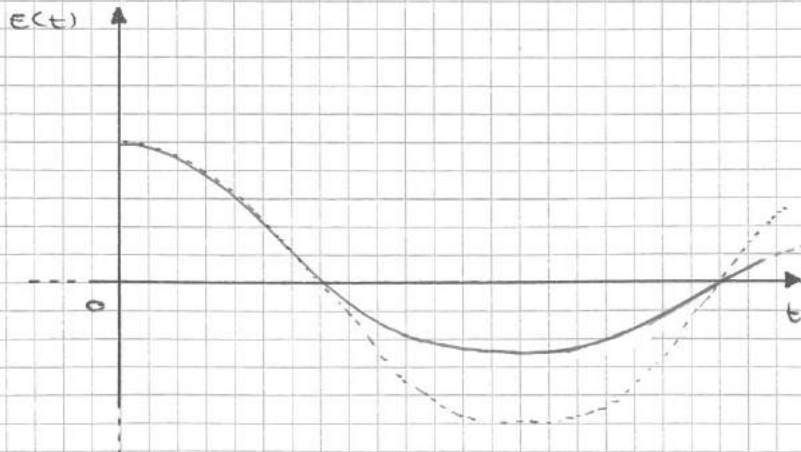
Se dunque, in notazione complessa:

$$\vec{E} = e^{ikx}, \quad k = k_R + ik_I,$$

si ha:

$$\vec{E} = e^{-k_I x} e^{ik_R x},$$

da cui l'onda si attenua nel tempo:



POTENZIALE VETTORE, POTENZIALE SCALARE, INVARIANZA DI GAUGE

Solo le "modificare" applicate alle equazioni di Maxwell, la prima resta invariata, mentre le altre due diventano:

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} &= -\vec{\nabla}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t},\end{aligned}$$

con:

- $\vec{A}$ detto POTENZIALE VETTORE;
- φ detto POTENZIALE SCALARE.

Inserendo nella 1^a e nella 2^a equazione si ottiene:

- $\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} - \nabla \cdot \vec{A}$
- $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{J} - \mu_0 \epsilon_0 (\vec{\nabla} \dot{\varphi} + \dot{\vec{A}})$, con:
$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = -\nabla^2 \vec{A} + \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}).$$

Si ottengono allora le due relazioni seguenti:

$$\begin{cases} \square \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial G}{\partial t} \\ \square \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} + \vec{\nabla} G \end{cases},$$

dove:

- $G = \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$;
- $\square = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ è detto OPERATORE DI D'ALEMBERT.

È in effetti possibile scegliere $G=0$, in quanto $\vec{A}, \varphi$ sono invarianti per TRASFORMAZIONI DI GAUGE:

$$\begin{cases} \vec{A} \rightarrow \vec{A} + \vec{\nabla} \Theta \\ \varphi \rightarrow \varphi + \frac{\partial \Theta}{\partial t} \end{cases},$$

con $\Theta = \Theta(x, y, z, t)$ una generica funzione.

È dunque rispettata la cosiddetta INVARIANZA DI GAUGE.

L'elettromagnetismo è in effetti definito da un vettore e da uno scalare, $\vec{A}$ e φ , e non da due vettori, $\vec{E}$ e $\vec{B}$, definiti a meno di una funzione arbitraria, per cui vale $G \equiv 0$.

Le equazioni diventano dunque:

$$\begin{cases} \square^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \end{cases}$$

INVARIANZA RELATIVISTICA

Partiamo da una domanda molto semplice: rispetto a quale sistema di riferimento la velocità della luce è:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}} ?$$

Sembra infatti che ci sia un'incompatibilità con l'invarianza galileiana.

Cominceremo definendo i seguenti QUADRIVETTORI:

$$\vec{\square} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial(ct)} \right)$$

$$x_\mu = (x, y, z, ct)$$

$$A_\mu = (A_x, A_y, A_z, \frac{\phi}{c})$$

$$J_\mu = (J_x, J_y, J_z, cp)$$

Con questa notazione, si ottiene un'unica equazione:

$$\vec{\square}^2 A_\mu = -\mu_0 J_\mu + \vec{\square} G,$$

con $G = \vec{\square} \cdot \vec{A}$, e:

$$\vec{\square}^2 = -\vec{\square} \cdot \vec{\square},$$

con la presenza di un segno negativo, che discuteremo tra poco.

Da qui segue $\vec{\square} \cdot J_\mu = 0$, ossia la conservazione della carica.

L'invarianza di gauge permette di scegliere ω in modo che sia $G = 0$, in questo modo:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \vec{\square}_\mu \omega$$

La particolarità di questi quadrivettori è che essi appartengono non a $SO(4, \mathbb{R})$, ma a $SO(3, 1, \mathbb{R})$, lo SPAZIOTEMPO DI MINKOWSKI "3+1". Ecco spiegata la relazione $\vec{\square}^2 = -\vec{\square} \cdot \vec{\square}$.

Si ha infatti:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z - A_t B_t$$

$SO(3,1, \mathbb{R})$ è detto anche GRUPPO DELLE TRASFORMAZIONI DI LORENTZ.

Supponiamo di tuotare solo due coordinate x, t .

Si ha, in tale contesto:

$$\begin{bmatrix} x' \\ (ct)' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \varphi & -\sinh \varphi \\ -\sinh \varphi & \cosh \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ ct \end{bmatrix}$$

Con tale trasformazione, in effetti vale:

$$x'^2 - (ct')^2 = x^2 - (ct)^2$$

In effetti vale la seguente relazione fondamentale:

$$\cosh^2 \varphi - \sinh^2 \varphi = 1$$

Definendo ora il seguente parametro:

$$\frac{v}{c} \stackrel{\text{def}}{=} \tanh \varphi,$$

la trasformazione diventa:

$$\begin{cases} x' = \frac{(x - vt)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \\ t' = \frac{t - v \frac{x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{cases},$$

in base alla relazione seguente:

$$\cosh \varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \tanh^2 \varphi}}$$

Il termine $\frac{v^2}{c^2}$ contraddice l'invarianza galileiana: tuttavia, se $v \ll c$, come accade in meccanica, il termine è trascurabile, e il principio di relatività galileiana non resta valido. Questa è detta INVARIANZA RELATIVISTICA, e resta valida anche se $v \sim c$.

ESERCIZI VARI

1. Due spire conduttrici circolari coplanari disposte nel piano xy hanno raggi diversi in modo trascurabile, sezione del filo trascurabile, resistenza R e coefficiente di autoinduzione L .

La spira interna è libera di ruotare attorno all'asse x , e inizialmente è percorsa da una corrente i_0 , mentre la spira esterna è fissa e collegata ad un generatore ideale di corrente che eroga una corrente I . Le correnti scorrono nello stesso verso.

All'istante $t=0$, la spira interna viene ruotata di 90° e fermata.

Si calcoli la relazione tra il coefficiente di autoinduzione L delle spire e quello di mutua induzione M sia al tempo $t < 0$ che al tempo $t > 0$.

Supponendo trascurabile la caduta ohmica nella spira interna durante la rotazione, si calcoli la corrente che circola in essa all'istante dell'evento.

Si calcoli il lavoro fornito dal generatore di corrente durante la rotazione.

Supponendo che l'energia dissipata nella spira interna per effetto Joule durante il tempo transitorio di scarica successivo alla rotazione della spira è L_1 , si calcoli L .

Si calcoli il lavoro meccanico L_m speso per far ruotare la spira.

Per $t < 0$ si ha:

$$M = \frac{\Phi_1(B_2)}{I_2} = \frac{\Phi_2(B_1)}{I_1} = L$$

Per $t > 0$ invece vale banalmente $M = 0$.

si ha ora, durante la rotazione:

$$\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = RI \approx 0,$$

da cui Φ_B è pressoché costante. Allora:

$$LI_1 = LI_0 + MI = L(I + i_0)$$

$$I_1 = I + i_0$$

Il lavoro compiuto dal generatore di corrente, ora, si può ottenere integrando la potenza dissipata sia per la resistenza R , sia per la forza elettromotrice indotta:

$$\begin{aligned} L_{\text{gen}} &= \int_0^{\Delta t} (RI^2 - \mathcal{E}I) dt = RI^2 \Delta t - \Delta\Phi \cdot I = \\ &= RI^2 \Delta t + I \Delta(Mi), \end{aligned}$$

e per $\Delta t \rightarrow 0^+$, si ha $L_{\text{gen}} \rightarrow I \Delta(Mi) = -I M_0 = -ILi_0$.
Dunque:

$$L_{\text{gen}} = -ILi_0$$

Dopo la rotazione l'energia immagazzinata si dimezza per effetto Joule, da cui:

$$L_J = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} L (i_0 + I)^2$$

Per concludere, mediante la formula del lavoro totale:

$$\begin{aligned} L &= U_1 - U_0 \\ L &= L_m + L_{\text{gen}}, \end{aligned}$$

si ha:

$$\begin{aligned} L_m &= U_1 - U_0 - L_{\text{gen}} = \\ &= \frac{L}{2} (i_0 + I)^2 + \frac{L}{2} I^2 - \frac{L}{2} i_0^2 - \frac{L}{2} I^2 - Li_0 I + ILi_0 = \\ &= \frac{L}{2} I(I + 2i_0) \end{aligned}$$

2. Una molla di lunghezza (a riposo) d , lunghezza iniziale $\frac{d}{2} = e$, e costante elastica k è costituita da $N \gg 1$ spire di sezione $S \ll d^2$ e resistenza trascurabile, percorsa da una corrente iniziale I_0 .

Determinare come varia I e viene variata.

Determinare il valore di I_0 tale che e sia la posizione di equilibrio.

La corrente viene mantenuta costante al valore I_0 da un generatore esterno, e la molla viene lentamente allungata, fino a raggiungere la lunghezza d .

Calcolare il lavoro delle forze esterne.

Calcolare la variazione di energia magnetica e il lavoro compiuto dal generatore.

Il flusso del campo magnetico rimane costante.

Si ha dunque:

$$\begin{aligned}\Phi_B^0 &= \mu_0 \frac{N^2 S}{\frac{d}{2}} I_0 \\ \Phi_B^g &= \mu_0 \frac{N^2 S}{e} I_g\end{aligned}$$

quindi:

$$I_g = \frac{2e}{d} I_0$$

La spira ha lunghezza e , che risente di:

- una forza elastica $k(d - e) = k \frac{d}{2}$ repulsiva;
- una forza magnetica attrattiva:

$$\begin{aligned}\bar{F}_m &= \frac{dU}{de} = \frac{d}{de} \left(\frac{1}{2} L I^2 \right) = \frac{d}{de} \left(\frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{e} I_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{d^2} \cdot 4 I_0^2 = \frac{2 \mu_0 N^2 S}{d^2} I_0^2\end{aligned}$$

Uguagliando si ha:

$$I_0 = \left(\frac{\sqrt{k} d^{\frac{3}{2}}}{2 N \sqrt{\mu_0 S}} \right)$$

Nole ora:

$$\begin{aligned}
 L &= -\Delta U = -\frac{K}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \frac{2\mu_0 N^2 S}{d^2} I_0^2 \frac{d}{2} + \\
 &\quad - \frac{1}{2} \frac{\mu_0 N^2 S I_0^2}{d^2} d = \\
 &= -\frac{K}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^2 + \left(\frac{\mu_0 N^2 S}{2d} I_0^2 \right) = \\
 &= -\frac{Kd^2}{8} + \frac{Kd^2}{8} \cdot \frac{\mu_0 N^2 S}{2d} = -\frac{Kd^2}{8} + \frac{Kd^2}{8} = 0
 \end{aligned}$$

Valutiamo ora la variazione di energia magnetica.

Si ha:

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{d} I_0^2 - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{\frac{d}{2}} I_0^2 = \\
 &= -\frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{d} I_0^2
 \end{aligned}$$

Bilanciando dal punto di vista energetico, allora, si ottiene:

$$\begin{aligned}
 L_{gen} + L_m &= \Delta U_{mecc} + \Delta U_{mag} \\
 L_{gen} &= -\frac{K}{2} \left(\frac{d}{2} \right)^2 - \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2 S}{d} I_0^2 = -\frac{\mu_0 N^2 S}{d} I_0^2
 \end{aligned}$$

In modo alternativo:

$$\begin{aligned}
 L_{gen} &= \int VI \, dt = I_0 \Delta \Phi = I_0^2 \Delta = \\
 &= -\frac{\mu_0 N^2 S}{d} I_0^2
 \end{aligned}$$

3. Una ruota metallica cilindrica di raggio R , spessore d , conducibilità σ , gira attorno al suo asse con velocità angolare ω in una zona contenente un campo magnetico B parallelo all'asse di rotazione.

Calcolare la densità di corrente J presente nella ruota, trascurando i campi elettromagnetici indotti da tale corrente.

Calcolare la potenza W dissipata per effetto Joule.

Calcolare il momento delle forze $\vec{M}$ che agisce sulla ruota.

Calcolare il campo magnetico B necessario affinché la ruota venga frenata con una costante di tempo τ , definita da:

$$\omega(t) = \omega(0) e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Si dia il valore numerico di B anche in forma numerica, nel caso di una ruota di acciaio, per cui:

$$d = 0,7 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

$$\rho = 8000 \text{ kg/m}^3$$

affinché sia $\tau = 1 \text{ s}$.

In condizioni di equilibrio, vale:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) = 0$$

Dato che $v = \omega \cdot r$, si ha dunque:

$$\vec{E} = E_r \hat{r}, \quad E_r = \omega r B,$$

da cui:

$$J_r = \sigma E_r = \sigma \omega r B$$

Si ha ora:

$$\begin{aligned} W &= \int dV \vec{E} \cdot \vec{J} = \int dV \sigma E^2 = \\ &= 2\pi d \int_0^R \sigma \omega^2 r^2 B^2 r dr = \\ &= \frac{1}{2} \pi d \sigma \omega^2 R^4 B^2 \end{aligned}$$

Per quanto riguarda il momento delle forze:

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \int dV \vec{r} \times \vec{J} \times \vec{B} = \int dV \frac{E}{\omega} J_r = \\ &= 2\pi d \omega B \sigma \omega B \frac{1}{2} \frac{R^4}{4} = \pi d \sigma \omega B^2 \frac{R^4}{2} = \frac{W}{\omega} \end{aligned}$$

Vale infatti, in generale:

$$\vec{M} \cdot \vec{\omega} = U$$

Per l'ultima parentesi, si ha $\omega(0) = \omega$, e:

$$I \dot{\omega} = -M = -\frac{U}{\omega},$$

ove I è il momento di inerzia:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 = \frac{1}{2} \pi d \sigma \omega B^2 \frac{R^6}{2}$$

Quindi:

$$I \dot{\omega} = -I \omega S, \quad S = \frac{1}{\tau} = \frac{2}{R^2 \omega},$$

da cui:

$$\tau = \frac{R^2 \omega}{2} = \frac{\rho}{B^2 \sigma}$$

Nel caso particolare considerato, si ha:

$$B^2 = \frac{\rho^2}{\sigma} \Rightarrow B = \sqrt{\frac{\rho}{\sigma}} = \sqrt{\rho \cdot \sigma^{-1}} =$$

$$= 75 \cdot 10^{-3} = 0,075 \text{ T}$$

ESERCIZI VARI

1. Un cavo coassiale è costituito da due cilindri concentrici di raggi a_1 e a_2 , con $a_2 > a_1$, sulle cui superfici scorrono correnti totali $I(t)$ e $-I(t)$, distribuite con simmetria cilindrica. Il cavo ha lunghezza $l \gg a_2$ ed è disposto parallelamente all'asse z .

- Calcolare il campo magnetico generato;
- Calcolare l'energia magnetica e l'induttanza;
- Calcolare la pressione magnetica sulle correnti superficiali a $r = a_1$ e $r = a_2$, specificandone il verso;
- Calcolare la forza elettromotrice esterna necessaria a produrre tali correnti.

Considerando un'opportuna curva circolare chiusa α , si ottiene che $B_z(t) \neq 0$ solo se $r \in [a_1, a_2]$, e per $r \in [a_1, a_2]$ si ha:

$$2\pi r \cdot B_z(t) = \mu_0 I(t) \Rightarrow B_z(t) = \frac{\mu_0}{2\pi r} I(t)$$

Dalla formula:

$$U_B = \int_V u_B dV = \frac{1}{2} L I^2$$

si ottiene

$$u_B(r, t) = \frac{B_z^2(t)}{2\mu_0} = \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2(t)$$

$$\begin{aligned} U_B &= \int_V u_B dV = l \cdot 2\pi \int_{a_1}^{a_2} \frac{\mu_0}{8\pi^2 r^2} I^2(t) dr = \\ &= \frac{\mu_0 l}{4\pi} I^2(t) \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right], \end{aligned}$$

da cui:

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left[\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right]$$

La pressione magnetica, dato che le correnti opposte si respingono, è diretta verso l'esterno, ed è uguale in modulo a u_B , calcolata per $r = a_1$ e $r = a_2$.

Per la legge di Lenz, allora, è necessaria una forza elettromotrice:

$$\mathcal{E}(t) = L I(t)$$

(In effetti $L(t) \equiv L$ non dipende dal tempo, come si è dimostrato).

2. Un solenoide quadrato è costituito da n spire per unità di lunghezza. Ciascuna spira ha lato $e = 0,1 \text{ m}$ e il solenoide ha altezza $h = 1 \text{ m} \gg e$, per semplicità. Le spire sono percorse da una corrente di intensità $I = 10 \text{ A}$.

- Calcolare n tale che il campo magnetico all'interno sia $B = 1 \text{ T}$. Per tale valore calcolare la pressione magnetica p agente sulla superficie del solenoide, specificandone il verso.

Arrivare una rotura meccanica del supporto quadrato che regge le spire, che si espandono in tempo trascorso fino ad assumere forma circolare.

- Calcolare il raggio r del solenoide cilindrico, e la corrente I' subito dopo tale processo;
- Calcolare la pressione magnetica p' agente sulla superficie, e la tensione τ sopportata da ciascuna spira per via di tale pressione;
- Quantificare l'energia liberata nella rotura.

In base al Teorema della circuitazione, con un percorso chiuso opportuno, si ha:

$$\oint B_2 = n h I \mu_0$$
$$B_2 = n I \mu_0,$$

da cui, per avere $B_2 = 1 \text{ T}$, bisogna far:

$$n = \frac{B_2}{I \mu_0} = \frac{10^3}{10 \cdot 4\pi} = \frac{10^6}{4\pi} \approx 79577,$$

se l'unità di lunghezza è il metro. Si hanno dunque circa 80 spine per millimetro.

Per tale valore di B_z , si ha una pressione:

$$|p_B| = \frac{B_z^2}{2\mu_0} = \frac{n^2 I^2 \mu_0^2}{2\mu_0} = \frac{n^2 I^2 \mu_0}{2},$$

diretta verso l'esterno. A livello di modulo, si ha:

$$|p_B| \approx 397 \text{ kPa} \approx 3,9 \text{ atm}$$

Dopo la rottura del supporto, nuovamente le nuove spine sono isoperimetriche rispetto a quelle iniziali. Si ha:

$$\beta = \frac{2}{\lambda e} = 2\pi r$$

$$r = \frac{2e}{\pi} \approx 0,063 \text{ m}$$

Altra cosa che si conserva è il flusso del campo magnetico Φ_B . Dunque:

$$\Phi_B = N B_z h e^2 = N B_z' h \pi r^2 = N n \mu_0 h I' \pi r^2$$

$$N n \mu_0 I e^2 = N n \mu_0 h I' \pi r^2$$

$$I e^2 = I' \pi r^2$$

$$I' = \frac{I e^2}{\pi r^2} \approx I \cdot 0,787,$$

da cui:

$$I' \approx 7,87 \text{ A}$$

Da qui si ha:

$$B_z' = n \mu_0 I'$$

$$|p_B'| = \frac{B_z'^2}{2\mu_0} = \frac{n^2 I'^2 \mu_0}{2} \approx 246 \text{ kPa}$$

Nei allora, per ogni spine:

$$\tau = p_B' \cdot \frac{2\pi r h}{N} = p_B' \cdot \frac{2\pi r h}{n h} = p_B' \cdot \frac{2\pi r}{n}$$

$$\tau = p_B' \cdot \frac{2\pi r}{n} \approx 1,2 \text{ N}$$

L'energia liberata dalla rottura, infine, è pari alla differenza tra le energie magnetiche iniziale e finale.
Dunque:

$$\bullet U_i = \frac{1}{2} L_i I^2;$$

$$\bullet U_f = \frac{1}{2} L_f I'^2.$$

Si ha:

$$\Phi_B = \mu_0 I N^2 \pi r^2 = \mu_0 I' N'^2 \pi r^2,$$

da cui:

$$L_f = \mu_0 N'^2 \pi r^2$$

$$L_i = \mu_0 N^2 \pi r^2$$

Dunque:

$$\frac{L_i I^2}{L_f I'^2} \approx (0,787)^{-2} \frac{\pi}{4} \approx 1,268$$

Dunque:

$$\begin{aligned} U^* &= U_i - U_f = \frac{1}{2} L_i I^2 (1 - 0,788) = \\ &= \frac{1}{2} L_i I^2 \cdot 0,212 = U_i \cdot 0,212 \end{aligned}$$

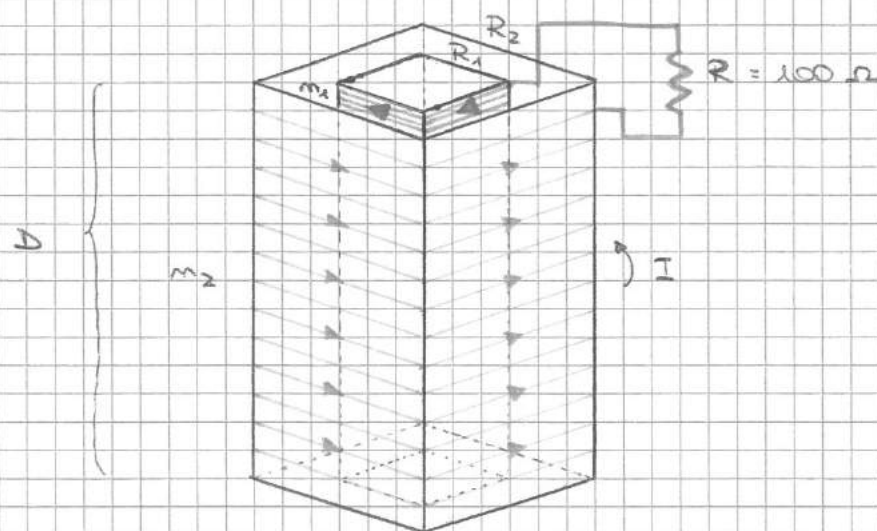
Dato che all'inizio si ha:

$$U_i = \frac{1}{2} L_i I^2 = \frac{V B^2}{2 \mu_0} \approx 3970 \text{ J},$$

da cui:

$$U^* \approx 838 \text{ J}$$

3. Sono dati due solenoidi prismatici, a sezione quadrata, di lati rispettivamente R_1, R_2 , con $R_1 < R_2$, di uguale lunghezza totale $D \gg R_1, R_2$. I due solenoidi sono coaxiali, uno contenuto nell'altro completamente, come in figura. Sul nodo esterno vi sono n_2 avvolgimenti per unità di lunghezza (metro), su quello interno ce ne sono n_1 . I due solenoidi sono posti all'interno di uno stesso circuito, nel quale fluisce una corrente I , in modo che la corrente fluisca in senso antiorario nel solenoide esterno, orario su quello interno. Nel circuito è presente una resistenza $R = 100 \Omega$.



Calcolare:

- il campo magnetico presente in tutti i punti dentro, fuori e in mezzo ai due solenoidi;
- l'energia associata a tale campo;
- supponendo ora che l'alimentazione del circuito venga interrotta all'improvviso, dire come varia la corrente nel circuito e determinare l'energia totale dissipata dopo l'interruzione dell'alimentazione;
- tornando ora alla situazione iniziale, si supponga che il solenoide più interno venga tirato fuori per un certo tratto. Si dica che forza

bisogna esercitare per mantenere il sistema in equilibrio.

Usando il Teorema della circuitazione, si ha:

- $B_2 = 0$ se fuori il solenoide più grande;
- $B_2 = m_2 \mu_0 I$ tra i due solenoidi, nella zona intermedia;
- $B_2 = (m_2 - m_1) \mu_0 I$, dentro il solenoide più piccolo.

Il campo magnetico, in ogni caso, presenta direzione e verso dell'asse z .

L'energia del sistema è:

$$\begin{aligned} U_B &= \frac{V B_2^2}{2\mu_0} = \\ &= \frac{\mu_0 D I^2}{2\mu_0} \left(R_1^2 (m_2 - m_1)^2 + (R_2^2 - R_1^2) m_2^2 \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{2} D I^2 \left(R_1^2 m_2^2 + R_1^2 m_1^2 - 2R_1^2 m_1 m_2 + R_2^2 m_2^2 - R_1^2 m_2^2 \right) = \\ &= \frac{\mu_0}{2} D I^2 \left(R_1^2 m_1^2 + R_2^2 m_2^2 - 2R_1^2 m_1 m_2 \right) = \frac{1}{2} L I^2, \end{aligned}$$

ove L è autoinduzione è:

$$L = \mu_0 D \left(R_1^2 m_1^2 + R_2^2 m_2^2 - 2R_1^2 m_1 m_2 \right)$$

Il circuito è composto da una resistenza e un'induttanza, ed è in evoluzione libera. L'equazione è dunque:

$$\begin{aligned} L \dot{I} + RI &= 0 \\ \dot{I} &= -\frac{R}{L} I, \end{aligned}$$

da cui:

$$I(t) = I e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad \tau = \frac{L}{R}$$

Dunque:

$$U_d = \int_0^{+\infty} R I(t)^2 dt = \int_0^{+\infty} R I^2 e^{-2\frac{t}{\tau}} dt = R I^2 \frac{\tau}{2} = \frac{1}{2} L I^2 = U_B,$$

come ci aspettavamo.

Detta ora x l'altezza fino al quale è stato sollevato il solenoide interno, si ha:

$$U_B(x) = U_B \cdot \frac{(D-x)}{D} + x \left[R_2^2 \frac{m_2^2 \mu_0 I^2}{2} + R_1^2 \frac{m_1^2 \mu_0 I^2}{2} \right]$$

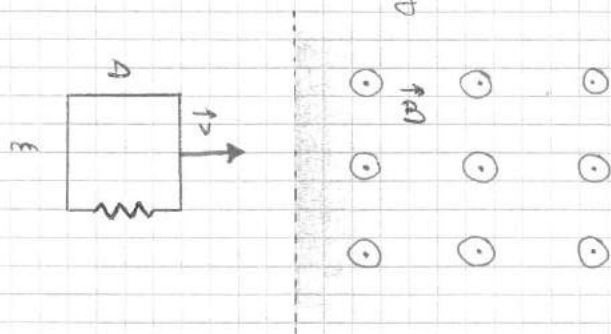
e si ha:

$$\begin{aligned} \Delta U_B(x) &= U_B(x) - U_B(0) = \\ &= -x \frac{\mu_0}{2} I^2 (-2 R_1^2 m_1 m_2) = \\ &= x \mu_0 I^2 R_1^2 m_1 m_2, \end{aligned}$$

da cui la forza da applicare è verso l'esterno, perché il sistema tende a ritornare nella posizione originale. In modulo si ha:

$$F = \frac{\partial U_B(x)}{\partial x} = \mu_0 I^2 R_1^2 m_1 m_2$$

4. Una spirale quadrata di lato D , massa m , recante una resistenza R , si muove su un piano liscio senza attrito e senza ruotare, lungo una direzione parallela ad uno dei due lati, con velocità v . Il piano è diviso in due semipiani, in uno dei quali è presente un campo magnetico costante e uniforme, di modulo B , ortogonale al piano:



Al tempo $t=0$, la spirale comincia ad entrare nell'altro semipiano:

- assumendo che la velocità della spirale rimanga invariata durante l'attraversamento della frontiera, e assumendo che l'autoinduzione della

spira sia trascurabile, descrivere la corrente che per-
corre la spira in funzione del tempo ed il momento
di dipolo magnetico ad essa associato;

- rimanendo nelle approssimazioni del punto precedente, si
calcoli l'energia totale dissipata nella resistenza;
- ponendo ad $v = 1 \text{ m/s}$, $m = 10 \text{ g}$, $D = 10 \text{ cm}$, $B = 0,1 \text{ T}$,
 $R = 1 \Omega$, si dica se l'approssimazione del punto 1 è giu-
stificata, e si determini in particolare la variazione
relativa della velocità iniziale;
- si ricalecoli la corrente in funzione del tempo, nel
caso di un'autoinduttanza non trascurabile.

Si ha:

$$R I(t) = \mathcal{E}(t) = - \dot{\Phi}_B(t) = \\ = - B D v I]_{0, \frac{D}{v}}(t),$$

da cui, per $t \in]0, \frac{D}{v}[$:

$$I(t) = - \frac{B D v}{R},$$

e $I(t) = 0$ altrimenti. Per quanto riguarda il momento
di dipolo magnetico, si ha:

$$\mu(t) = I(t) D^2,$$

oppure il campo magnetico (dato che $I(t) = - \frac{B D v}{R}$),
per $t \in]0, \frac{D}{v}[$.

L'energia totale dissipata nella resistenza è:

$$\int_0^{+\infty} R I(t)^2 dt = \int_0^{\frac{D}{v}} R \left(- \frac{B D v}{R} \right)^2 dt = \\ = \int_0^{\frac{D}{v}} \frac{B^2 D^2 v^2}{R} dt = \frac{B^2 D^3 v}{R}$$

Con i dati a disposizione, si ha innanzitutto un
rallentamento della spira, nel periodo di tempo in cui
essa non è completamente immersa nel campo magne-
tico.

Infatti si ha:

$$F = B l v = - \frac{B^2 l^2 v}{R},$$

da cui la forza è frenante.

Con i dati forniti l'energia dissipata per effetto Joule, pari alla differenza di energia cinetica tra gli istanti iniziale e finale, è:

$$U_d = \frac{B^2 l^2 v}{R} \approx \frac{1}{10^2 \cdot 10^3} = \frac{1}{10^5} \text{ J},$$

da cui:

$$\frac{1}{2} m (v_i^2 - v_f^2) \approx 10^{-5}$$

$$v_i^2 - v_f^2 \approx 10^{-3} \cdot 2$$

da cui deduciamo che:

$$(v_i + v_f)(v_i - v_f) \approx 2(v_i - v_f) \approx 10^{-3} \cdot 2$$

$$v_i - v_f \approx 10^{-3},$$

da cui l'ipotesi è giustificata. In particolare, essendo $v_i \approx 1 \cdot 10^{-3}$ è la variazione relativa della velocità iniziale.

Se ora l'induttanza non è trascurabile, si ha:

- per $t \in]0, \frac{D}{v}[$: $RI + L\dot{I} = -BDv$;
- per $t \in]0, \frac{D}{v}[$: $RI + L\dot{I} = 0$.

Si ha dunque:

- per $t \in]0, \frac{D}{v}[$:

$$\dot{I} = - \left(\frac{R}{L} I + \frac{BDv}{L} \right),$$

da cui:

$$I(t) = K e^{-\frac{R}{L}t} - \frac{BDv}{R},$$

con

$$I(0) = K - \frac{BDv}{R} = 0 \Rightarrow K = \frac{BDv}{R},$$

da cui:

$$I(t) = \frac{BDv}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$$

Notiamo che :

$$I\left(\frac{D}{V}\right) = \frac{BDV}{R} \left(e^{-\frac{RD}{LV}} - 1 \right)$$

Si Ros allora, per $t > \frac{D}{V}$:

$$RI + L\dot{I} = 0$$

$$\dot{I} = -\frac{R}{L}I$$

$$I(t) = h e^{-\frac{R}{L}t}, \quad h \in \mathbb{R},$$

con $h = I\left(\frac{D}{V}\right) e^{\frac{RD}{LV}}$. Dunque :

$$I(t) = \frac{BDV}{R} \left(e^{-\frac{RD}{LV}} - 1 \right) e^{\frac{RD}{LV}} e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$I(t) = \frac{BDV}{R} \left(1 - e^{-\frac{RD}{LV}} \right) e^{-\frac{R}{L}t},$$

per $t > \frac{D}{V}$.

5. In un campo magnetico $\vec{B}$ viene posto un cilindro conduttore di raggio R e lunghezza $L \gg R$ con l'asse parallelo al campo magnetico. Il cilindro viene mantenuto in rotazione intorno al proprio asse, a velocità finita ω (angolare). Si trascurino gli effetti al bordo e la forza centrifuga, e si esaminano condizioni stazionarie.

- Calcolare il campo elettrico generato nel cilindro per mantenere l'equilibrio;
- Si determini la densità di carica all'interno del cilindro, e quella superficiale;
- Si determini la densità di corrente J all'interno del cilindro e la densità di corrente superficiale T ;
- Si determini il campo magnetico indotto dalle correnti.

Un elettrone a distanza r dall'asse risente di due forze, se trascuriamo quella centrifuga: la forza elettrica, e quella di Lorentz. Si ha:

$$\vec{T}_L = e \vec{v} \times \vec{B} = e (\vec{\omega} \times \vec{r}) \times \vec{B},$$

ed è diretta verso il centro del cilindro, dato che $e < 0$. Dunque imponiamo, per l'equilibrio:

$$F_E = -e \omega r B,$$

per un singolo elettrone, diretta radialmente verso l'esterno. Dunque sarà:

$$- \omega r B$$

Notiamo ora che, usando il Teorema di Gauss su un cilindro coassiale al nostro e di altezza h :

$$-2\pi e h \omega r B = h 2\pi \int_0^r J(r) r dr \cdot \frac{1}{\epsilon_0},$$

supponendo la densità di carica radiale.

In effetti $J(r)$ può essere supposta costante:

$$\begin{aligned} -2\pi e^2 h \omega B &= h 2\pi \frac{r^2}{2} \frac{1}{\epsilon_0} \\ &= -2\omega B \epsilon_0 \end{aligned}$$

A questo punto, dato che la carica totale è nulla:

$$\sigma = - \frac{-2\omega B \epsilon_0 \cdot \pi r^2}{2\pi r} = \omega B \epsilon_0 r$$

All'interno del cilindro si ha:

$$J(r) = \rho v = \rho \vec{\omega} \times \vec{r} = \rho \omega r \hat{\theta},$$

mentre in superficie:

$$J_s = \sigma v = \sigma \vec{\omega} \times \vec{R} = \sigma \omega R \hat{\theta}.$$

Chiaramente B_{ind} sarà orientato lungo l'asse z . Sull'asse x ho $B_{ind} = 0$, da cui, usando il Teorema della circolazione con un percorso chiuso opportuno, si ha:

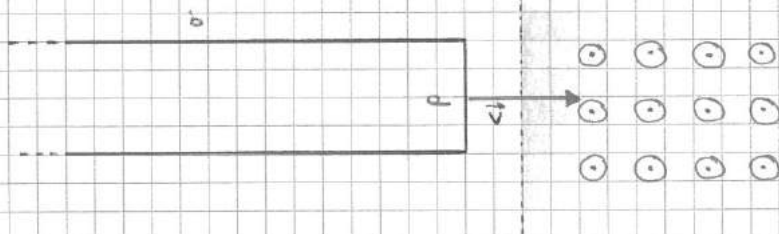
$$\begin{aligned} h B_{ind}(z) &= \mu_0 h \int_0^z J(z) dz = \\ &= \mu_0 h \rho w \frac{z^2}{2} = -h \frac{1}{2} w B \epsilon_0 \mu_0 w \frac{z^2}{2} = \\ &= -h B \left(\frac{wz}{c} \right)^2, \end{aligned}$$

da cui:

$$B_{ind} = -B \left(\frac{wz}{c} \right)^2 \ll B,$$

ove c è la velocità della luce.

6. Una spira conduttrice rettangolare, di lati a e $b \gg a$, di resistenza R e autoinduzione L , si muove lungo l'asse x a velocità costante v . All'istante $t=0$ il lato di lunghezza a , parallelo all'asse y , entra nella regione $x > 0$, in cui è presente un campo magnetico $\vec{B}$ orientato lungo l'asse z :



Si calcoli:

- La forza elettromotrice $\mathcal{E}$ agente sulla spira e la corrente $I(t)$ che circola nella spira;
- La potenza $\mathcal{W}_J$ dissipata per effetto Joule;
- La forza meccanica necessaria per mantenere la spira a velocità $\vec{v}$ costante, e la potenza $\mathcal{W}_m$ sviluppata da tale forza;
- si discuta il bilancio energetico che descrive la conservazione dell'energia.

La forza elettromotrice $\mathcal{E}$ agente nella spira è pari, per la legge di Lenz, a:

$$\mathcal{E}(t) = -\dot{\Phi}_B(t) = -B a v(t)$$

Essendo poi:

$$R I(t) + L \dot{I}(t) = \mathcal{E}(t)$$

$$\dot{I}(t) = -\frac{R}{L} I(t) - \frac{B a}{L} v(t)$$

Supponendo $v(t) \equiv v$ costante, si ha:

$$I(t) = e^{-\frac{R}{L}t} \cdot K - \frac{B a v}{R},$$

con:

$$I(0) = K - \frac{B a v}{R} = 0 \Rightarrow K = \frac{B a v}{R}$$

Allora:

$$I(t) = \frac{B a v}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$$

Si ha dunque:

$$W_J(t) = R I^2(t) = \frac{B^2 a^2 v^2}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$$

La forza frenante, all'istante t , è:

$$F(t) = B I(t) a,$$

da cui la forza meccanica dev'essere pari a questa in modulo, in verso opposto. La potenza meccanica è allora:

$$W_m(t) = F(t) \cdot v = \frac{B^2 a^2 v^2}{R} \left(e^{-\frac{R}{L}t} - 1 \right)$$

L'energia meccanica fornita dall'esterno si trasforma in energia magnetica, ma una parte viene dissipata per effetto Joule. Per la conservazione dell'energia:

$$W_m = U_B + W_J,$$

con:

$$U_B = \frac{1}{2} L I^2$$

7. Un circuito rettangolare di autoinduzione trascurabile è costituito da due lati paralleli all'asse x , fini e infiniti, e da due lati di lunghezza l e massa m paralleli all'asse y e liberi di muoversi lungo l'asse x , con coordinate $x_1(t)$ e $x_2(t) > x_1(t)$.

È presente un campo magnetico costante $\vec{B}$ orientato lungo l'asse z ; i fili che compongono il circuito hanno sezione S e resistività ρ .

Un motore esterno muove il lato 1 secondo la legge $x_1(t) = S \cos(\omega t)$, con $S \ll l$. Il lato 2 è tenuto fermo a $x_2 = l$.

Calcolare:

- la corrente I che circola nel circuito;
- la forza magnetica agente sul lato 2;
- la media temporale della potenza esercitata dal motore, specificando il segno.



All'istante t si ha:

$$\rho \frac{4e - 2S \cos(\omega t)}{S} I(t) = \mathcal{E}(t) = -\dot{\Phi}_B(t)$$

Con le dovute approssimazioni si ottiene:

$$\rho \frac{4e}{S} I(t) = B S \omega \sin(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{B S \omega S}{4\rho} \sin(\omega t)$$

Per quanto calcolato, allora, la forza magnetica agente sul lato 2 è:

$$F_2(t) = B e I(t) = \frac{B^2 e s \omega S}{4\pi} \sin(\omega t)$$

La forza 1 ha un moto periodico di periodo $\frac{2\pi}{\omega}$.

Quindi:

$$\langle \omega \rangle = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(t) dt$$

Si ha:

$$m \ddot{x}_1(t) = F_m + F_B \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} F_m(t) &= m \ddot{x}_1(t) - F_B(t) = \\ &= -m s \omega^2 \cos(\omega t) - \frac{B^2 e s \omega S}{4\pi} \sin(\omega t), \end{aligned}$$

quindi:

$$\frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} \omega(t) dt = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_m(t) \cdot \dot{x}_1(t) dt =$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{2\pi} m s^2 \omega^3 \cos(\omega t) \sin(\omega t) + \frac{B^2 e s^2 \omega^2 S}{4\pi} \sin^2(\omega t) dt =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\omega}{2\pi} \cdot \frac{1}{\omega} \cdot \frac{B^2 e s^2 \omega^2 S}{4\pi} \pi = \\ &= \frac{B^2 e s^2 \omega^2 S}{8\pi} \end{aligned}$$

da cui si ha che il motore compie lavoro, per compensare la forza magnetica.