

Appunti di Geometria II

Carmine Frascella

29 Giugno 2014

PRIME CONSIDERAZIONI SULLA GEOMETRIA PROIETTIVA

Consideriamo una retta euclidea. Fissiamo su di essa un sistema di riferimento, in modo da associare ad ogni punto della retta un'ascissa reale x.

Ora, per ogni x reale esistono infinite coppie del tipo:

$$(x_0, x_1) \quad , \quad x_0 \neq 0$$

tali che $x = \frac{x_1}{x_0}$.

È chiaro che $x = \frac{x_1}{x_0} = \frac{x_1'}{x_0'} \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ s.t. } x_1' = \lambda x_1,\ x_0' = \lambda x_0$

Consideriamo allora la relazione di equivalenza seguente:

$$\frac{x_1}{x_0} \sim \frac{x_1'}{x_0'} \iff x_0' x_1 = x_1' x_0$$

L'insieme delle coppie introdotte prima può quindi essere partizionato secondo questa relazione di equivalenza.

Chiameremo ogni classe di equivalenza $[x_0, x_1]$ COPPIA OMOGENEA. Più in generale, chiameremo "coppia omogenea" una coppia di numeri reali non entrambi nulli, definita a meno di una costante moltiplicativa.

Definiamo poi la RETTA PROIETTIVA come l'insieme delle coppie omogenee. Indicheremo la retta proiettiva con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Sia ora $E = \{ \text{coppie omogenee } [x_0, x_1] \mid x_0 \neq 0 \} \subseteq \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Se:

$$\varphi : x \longrightarrow \frac{x_1}{x_0} := [x_0, x_1],$$

φ è evidentemente biiettiva. Inoltre $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus \operatorname{Im}\varphi = \{[0,1]\}$.

Allora identifichiamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{[0,1]\}$ e chiamiamo il punto che aggiungiamo PUNTO ALL'INFINITO.

In modo del tutto identico, possiamo porre in corrispondenza biunivoca i punti del piano con terne omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, $x_0 \neq 0$, e definire, come prima, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{[0, x_1, x_2]\}$.

Dati tre reali non tutti nulli a, b, c, allora, chiamiamo RETTA PROIETTIVA in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ l'insieme delle terne omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ tali che $a x_0 + b x_1 + c x_2 = 0$ e, se $x_0 \neq 0$, tali che $a + b \frac{x_1}{x_0} + c \frac{x_2}{x_0} = 0$.

Sia ora r una retta euclidea:

$$r : ax + by + c = 0$$

Possiamo riscrivere l'equazione adoperando le terne omogenee $[x_0, x_1, x_2]$, $x_0 \neq 0$:

$$a \frac{x_1}{x_0} + b \frac{x_2}{x_0} + c = 0$$

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0$$

Aggiungiamo però un'altra soluzione: quella in cui $x_0 = 0$, dunque $b x_1 + b x_2 = 0 \Rightarrow [x_0, x_1, x_2] = [0, b, -a]$. Dunque, indicata con $\bar{r}$ la retta proiettiva:

$$\bar{r} = r \cup \{[0, b, -a]\}$$

Es. Consideriamo $3x + 2y - 1 = 0$. Si ha, usando la coppia omogenea:

$$3x_1 + 2x_2 - x_0 = 0$$

Ponendo $x_0 = 0$, si ottiene la coppia omogenea:

$$[0, 2, -3]$$

Notiamo che $\frac{x_2}{x_1} = m$, cioè il coefficiente angolare della retta. Il punto all'infinito fornisce dunque informazioni sulla direzione della retta considerata.

Possiamo subito notare che due rette proiettive si incontrano sempre in un punto. Infatti, se esse sono parallele (hanno quindi lo stesso coefficiente angolare), esse hanno lo stesso punto all'infinito.

PRIMI ESEMPI SULLA GEOMETRIA PROIETTIVA

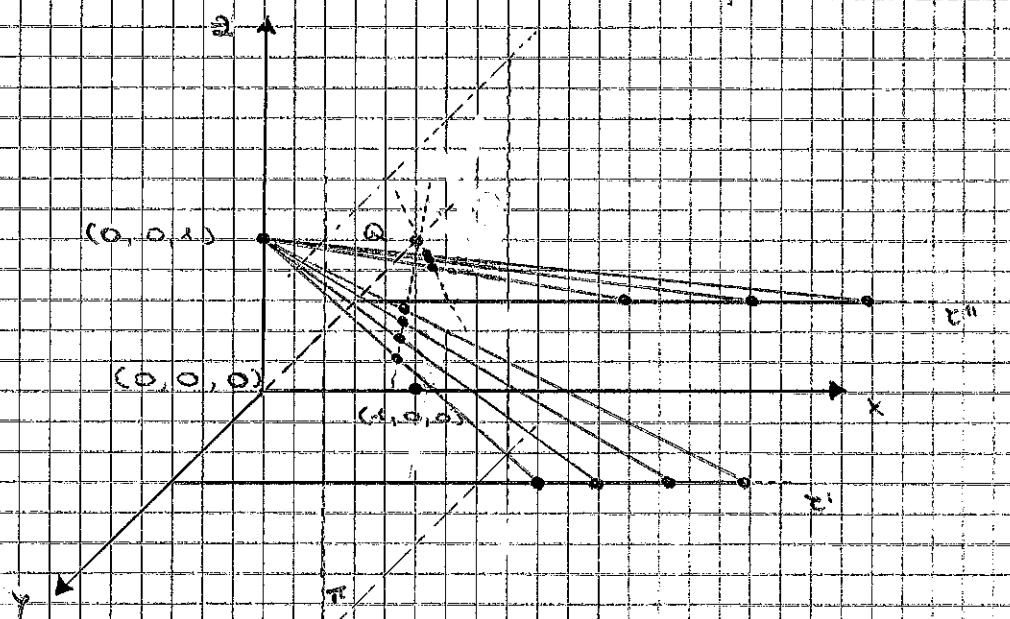
Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Consideriamo le rette

$$r' = \{(x, 1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$
$$r'' = \{(x, -1, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

il piano

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$

e il punto $P = (0, 0, 1)$.



Se variano di $X \in r'$, $X = (\bar{x}, 1, 0)$, si ha che la retta che congiunge P e X è:

$$R' = \begin{cases} x(t) = \bar{x}t \\ y(t) = t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$

Se variano di $X' \in r''$, $X' = (\bar{x}', -1, 0)$, si ha che la retta che congiunge P e X' è:

$$R'' = \begin{cases} x(t) = \bar{x}'t \\ y(t) = -t \\ z(t) = 1 - t \end{cases}$$

La proiezione dei punti su π è quindi:

$$Q' = \left(1, \frac{1}{\bar{x}}, \frac{\bar{x} - 1}{\bar{x}}\right), \qquad Q'' = \left(1, -\frac{1}{\bar{x}'}, \frac{\bar{x}' - 1}{\bar{x}'}\right)$$

Le due rette che si ottengono su π sono evidentemente incidenti, e si incontrano nel punto:

$$Q = (1, 0, 1),$$

che rappresenta quindi la proiezione su π del punto di incontro delle rette parallele r' e r'', cioè il punto all'infinito. Per dimostrarlo, consideriamo i seguenti punti:

$$A' = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in \pi \qquad B' = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \in r$$

$$A'' = \left(1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \pi \qquad B'' = \left(1, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \in \pi$$

Le rette che si ottengono sono, sul piano π:

$$s' = \begin{cases} y(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}t \\ z(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}t \end{cases} \qquad s'' = \begin{cases} y(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}t \\ z(t) = \frac{2}{3} + \frac{1}{6}t \end{cases}$$

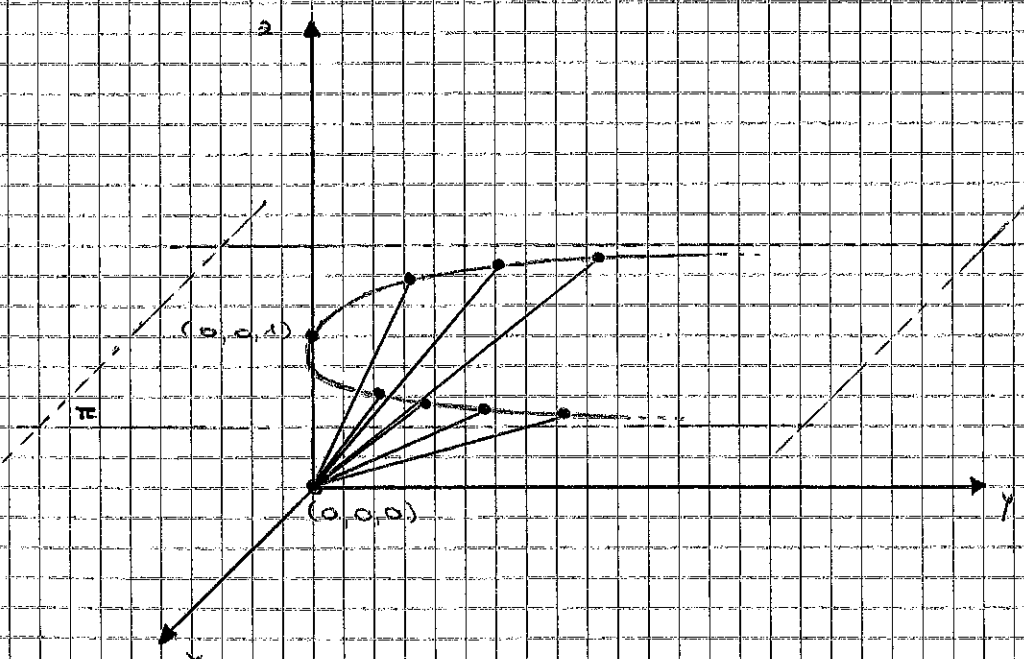
Queste due rette si incontrano per $t = 3$, nel punto:

$$Q = (1, 0, 1),$$

Ex. Consideriamo lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$. Consideriamo:

$$\pi = \{(x, y, z) \mid x, y \in \mathbb{R}\},$$

e su π la parabola di equazione $y = x^2$.



La retta che congiunge l'origine con il generico punto della parabola $X = (\bar{x}, \bar{x}^2, 1)$ è:

$$\mathrm{Span}(\bar{x}, \bar{x}^2, 1) \Rightarrow \begin{cases} y - \bar{x}z = 0 \\ x - \bar{x}z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{z}$$

La condizione da imporre è quindi:

$$2y - x^2 = 0$$

Allora:

$$E = \{ c \in \mathbb{R}^3 \mid 2y - x^2 = 0 \}$$

Allora anche l'asse y è incluso in E. Infatti:

$\forall t \in \mathbb{R}: (2y - x^2)(t) = 0 \Rightarrow$ asse $y \subseteq E$

Dato che tutti i punti della parabola hanno coordinata x uguale a t, sappiamo che l'asse y è quella retta che originiamo con il punto all'infinito. Si noti che questo vale da informazioni sulla direzione della parabola.

DEFINIZIONE DI SPAZIO PROIETTIVO

Consideriamo il piano euclideo. Siano $x, y \in \mathbb{R}^2$. Allora:

$$\exists\, x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_0 \neq 0 \ \text{ s.t. } \ x = \frac{x_1}{x_0},\ y = \frac{x_2}{x_0}$$

Una retta di equazione $ax + by + c = 0$ diventa allora:

$$a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0.$$

Consideriamo il seguente sistema omogeneo (supponiamo che le rette siano diverse):

$$\begin{cases} a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0 \\ a' x_1 + b' x_2 + c' x_0 = 0 \end{cases}$$

Se le rette sono incidenti, esse si intersecano in un unico punto del piano. Se invece sono parallele, cioè $a = a'$ e $b = b'$, si ha:

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ a x_1 + b x_2 = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni non nulle sono del tipo:

$$(0, -b\lambda, a\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Avendo dunque definito le TERNE OMOGENEE come l'insieme delle terne (x_0, x_1, x_2), con x_0, x_1, x_2 non tutti nulli, definite a meno di un fattore moltiplicativo, si ha:

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \{\text{terne di reali omogenee}\}$$

Le terne che abbiamo aggiunto sono del tipo:

$$(0, x_1, x_2),$$

con x_1, x_2 non entrambi nulli. Ogni terna di questo tipo individua univocamente la classe di parallele di una delle rette del tipo:

$$\{x_2 y_1 - x_1 y_2 + c = 0\}$$

Abbiamo dunque aggiunto una terna omogenea per ogni classe di parallelismo.

Le terne considerate come terne di $\mathbb{R}^3$ e coordinate non tutte nulle, dunque stiamo considerando $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. Inoltre stiamo considerando equivalenti due coppie tra loro

Proviamo che:

$$(a,b,c) \sim (\alpha,\beta,\gamma) \Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ s.t. } \alpha = \lambda a,\ \beta = \lambda b,\ \gamma = \lambda c$$

Stiamo cioè considerando equivalenti tutti i punti che appartengono alla stessa retta passante per l'origine.

Consideriamo dunque il quoziente:

$$\mathbb{R}^3 - \{0\} \Big/ \sim$$

Indichiamo dunque l'insieme delle classi di equivalenza con $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Consideriamo allora la proiezione canonica ad esso associata:

$$\pi : \mathbb{R}^3 - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$$
$$(a,b,c) \longrightarrow [a,b,c]$$

In generale, dato:

$$\mathbb{K}^{m+1} := \{ x = (x_0, \dots, x_m) \mid x_i \in \mathbb{K}\ \forall i = 0, \dots, m \},$$

consideriamo la seguente relazione di equivalenza:

$\forall\ v, w \in \mathbb{K}^{m+1}$: $v \sim w \Leftrightarrow w \in \mathrm{Span}(v),\ v \in \mathrm{Span}(w) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists\ \lambda \in \mathbb{K}^*$ s.t. $v = \lambda w \Leftrightarrow \exists\ W$ sotto spazio vettoriale di $\mathbb{K}^{m+1}$, $\dim W = 1$ s.t. $v, w \in W$

Definiamo allora lo SPAZIO PROIETTIVO NUMERICO di grado m sul campo $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{m+1} - \{0\} \Big/ \sim$$

Consideriamo ora $P \in \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$, $P = [x_0, x_1 \dots x_m]$. Senza perdere di generalità, sia $x_i \neq 0$. Allora:

$$P = \left[\frac{x_0}{x_i}, \frac{x_1}{x_i} \dots \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots \frac{x_m}{x_i} \right]$$

Consideriamo allora gli iperpiani affini H_i di equazione degli iperpiani $x_i = 1$, H_i intersecano tutte le rette passanti per l'origine, tranne quelle incluse negli iperpiani W_i di equazione degli iperpiani $x_i = 0$. Riassumendo:

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) = \pi(H_0) \cup \dots \cup \pi(H_m)$$

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) - \pi(H_i) = \{ [x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots x_m] \}$$

$$\cong \pi(\mathbb{K}^m - \{0\}) = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$$

Inoltre:

$$\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^m \cup \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K}),$$

dove ricordiamo che:

- $\mathbb{K}^m$ è insieme dei punti intersecanti H_i, $i = 0, \dots, m$;
- $\mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$ è insieme dei punti giacenti su $\bigcup_{i=0}^{m} H_i$. Infatti:
  - $\pi|_{H_i}$ è iniettiva;
  - $(x_0, \dots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \dots, x_m) \simeq (x_0, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m) \Rightarrow$
  - $\Rightarrow H_i \simeq \mathbb{K}^m$
  - $\mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \setminus \pi(H_i) = \pi(\bigcup_{i=0}^{m} H_i) \simeq \pi(\mathbb{K}^{m+1} \setminus \{0\}) = \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$.

Es. Consideriamo:

$$P \in \pi(H_0) \cap \pi(H_{m-1})$$

$$P = [x_0, \dots, x_{m-1}, 1]$$

$$P = [y_0, \dots, 1, y_m]$$

Allora è evidente che:

$$\exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ s.t.} \begin{cases} x_0 = \lambda y_0 \\ \dots \\ x_{m-2} = \lambda y_{m-2} \\ x_{m-1} = \lambda \\ x_m = \lambda y_m \end{cases} \Rightarrow x_{m-1} y_m = 1$$

Insomma:

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{y_0}{y_m} \\ \dots \\ x_{m-2} = \dfrac{y_{m-2}}{y_m} \\ x_{m-1} = \dfrac{1}{y_m} \\ x_m = 1 \end{cases}$$

Si può notare che questo sistema è completo da funzioni razionali, non lineari nei polinomi.

SPAZI PROIETTIVI

Cerchiamo ora di estendere la nozione di spazio proiettivo considerando uno spazio vettoriale V su $\mathbb{K}$ di dimensione finita n.

Definiamo dunque lo SPAZIO PROIETTIVO:

$$\mathbb{P}(V) = \frac{V - \{0\}}{\sim}, \quad v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ s.t. } v = \lambda w$$

Poniamo definire, ora, la nozione di INDIPENDENZA tra punti di $\mathbb{P}(V)$. Siano $P_0, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$. Sappiamo:

$$P_0 = [v_0], \dots, P_k = [v_k], \quad v_0, \dots, v_k \in V$$

Per definizione $P_0, \dots, P_k$ sono indipendenti in $\mathbb{P}(V)$ se e solo se $v_0, \dots, v_k$ sono indipendenti in V.

La questione è ben posta? Poniamo:

$$P'_0 = [\lambda_0 v_0], \dots, P'_k = [\lambda_k v_k]$$

È banale constatare che i vettori $\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_k v_k$ sono indipendenti. Infatti $\{v_0, \dots, v_k\}$ è una base, e la matrice seguente è invertibile, dunque $\{\lambda_0 v_0, \dots, \lambda_k v_k\}$ è una base:

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_k \end{bmatrix} \in GL(V) \quad (\lambda_i \neq 0 \ \forall i = 0, \dots, k)$$

A questo punto definiamo un SOTTOSPAZIO PROIETTIVO di $\mathbb{P}(V)$:

$\pi(W \setminus \{0\})$, W sottospazio vettoriale di V

$\mathrm{Span}(P_0, \dots, P_k)$, $P_i = [v_i] \Rightarrow$

$\Rightarrow \pi(\mathrm{Span}(P_0, \dots, P_k) - \{0\})$ sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$

Segue subito chiaro che il massimo numero di punti indipendenti è pari alla dimensione di V.

PASSAGGIO ALLE COORDINATE

Sia V uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $\dim V = n$.
Consideriamo un isomorfismo (non canonico) di passaggio alle coordinate:

$$V \xrightarrow{\sim} \mathbb{K}^n$$

Vogliamo ora individuare un isomorfismo di passaggio in coordinate da $\mathbb{P}(V)$ a $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$.
Fissiamo dunque $(n+1)$ punti $P_0, \dots P_n \in \mathbb{P}(V)$ indipendenti, e scegliamo un rappresentante per ogni classe di equivalenza:

$$P_i = [v_i]$$

Sia ora $P \in \mathbb{P}(V)$, $P = [v]$. Si ha:

$$v = x_0 v_0 + \dots + x_n v_n$$

Se $\{w_i\}_{i=0}^n$ e w sono scelti rappresentanti per i P_i e P, si ha per w:

$$w = y_0 w_0 + \dots + y_n w_n$$

Se $w_i = k_i v_i \ \forall i = 0, \dots n$, e se $v = kw$:

$$v = kw = k(y_0 w_0 + \dots + y_n w_n) = k(y_0 k_0 v_0 + \dots + y_n k_n v_n) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \forall i = 0, \dots, n : k y_i k_i = x_i \Rightarrow y_i = x_i (k_i k^{-1})$$

Perché la questione sia ben posta, è necessario che:

$$[x_0, \dots x_n] = [y_0, \dots y_n] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ t.c. } \forall i = 0, \dots n : x_i = \lambda w_i,$$

ma ciò non è detto. Dunque la questione non è ben posta.

Per ovviare a questo inconveniente, consideriamo un PUNTO UNITÀ $U \in \mathbb{P}(V)$ tale che $\{P_0, \dots, P_n, U\}$ sia un insieme di $(n+2)$ punti a $(n+1)$ a $(n+1)$ indipendenti.
Sia $U = [v] = \left[\sum_{i=0}^n d_i v_i\right]$, con $d_i \neq 0 \ \forall i$ (altrimenti U non apparterrebbe a un punto unità). Possiamo allora scegliere $\bar{v}_i = d_i v_i \ \forall i$, in modo che $v = \sum_{i=0}^n \bar{v}_i$, cioè U abbia tutte le coordinate uguali a 1.

Consideriamo sottospazi rappresentanti per P_i e U:

$$P_i = [\vec{v}_i = \lambda_i \vec{v}_i], \lambda_i \neq 0 \ \forall i \ ; \quad U = [\vec{v} = \lambda \vec{u}], \lambda \neq 0$$

$$\vec{v} = \sum_{i=0}^{m} \vec{v}_i = \sum_{i=0}^{m} \lambda_i \vec{v}_i$$

$$\vec{v} = \lambda \vec{u} = \sum_{i=0}^{m} \lambda \vec{v}_i \Rightarrow \forall i : \lambda_i = \lambda$$

Dunque, aggiungendo il fascio unità, ed questione diventa ben posta, poiché ad una (unica) scelta di coordinate omogenee ad uno stesso fascio corrispondono proporzionali. Allora è immediato:

$$\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{K})$$

è ben definita.

OSSERVAZIONE

Una base di V induce automaticamente un riferimento proiettivo, ponendo $P_i = [v_i]$ e $U = [v_0 + \dots + v_m]$.

PROPOSIZIONE

Due basi di V inducono lo stesso riferimento proiettivo se e solo se differiscono per una costante non nulla $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Dim.:

Se due basi inducono lo stesso riferimento proiettivo, allora: $U = \mathbb{P}(V)$, $U = [v_0 + \dots + v_m] = [\lambda(v_0 + \dots + v_m)] = [\lambda_0 v_0 + \dots + v_m] \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda_i = \lambda_j \ \forall i \neq j \Rightarrow \exists \lambda = \lambda_0 = \dots = \lambda_m$ s.t. $\forall i = 0, \dots, m : v_0 = \lambda v_0$.
Viceversa, se le due basi differiscono per una costante non nulla allora inducono banalmente lo stesso riferimento proiettivo, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Un riferimento proiettivo induce una classe di riferimenti in V, a meno di differenze dalle scelte per una costante moltiplicativa non nulla $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Infatti, sia $P_0, P_1, \dots P_m, U$ un riferimento di $\mathbb{P}(V)$. Allora:

$$P_0 = [v_0], \dots, P_m = [v_m], \quad U = \left[\sum_{i=0}^{m} a_i v_i\right],$$

per dei coefficienti $a_i \in \mathbb{K}^*$. Allora:

$$\mathcal{F} = \{\{\lambda a_0 v_0, \dots, \lambda a_m v_m\} \mid \lambda \in \mathbb{K}^*\}$$

è la famiglia di basi di V indotta dal riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_m, U$.

A ogni spazio vettoriale V, $\dim V = n$ è dunque associato uno spazio proiettivo.

Un modello numerico per uno spazio vettoriale V sul campo $\mathbb{K}$ è $\mathbb{K}^n$, ove $n = \dim V$.

Un modello numerico per uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$ sul campo $\mathbb{K}$ è invece $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$, ove $n = \dim V$.

Per lo spazio ambiente e rispettivamente una base qualsiasi: per lo secondo rispettivamente, abbiamo (n+1) punti $P_0 = [v_0]$, ..., $P_{n+1} = [v_{n+1}]$, $v = [v_0 + \dots + v_{n+1}]$ e (n+1) e (n+1) indipendenti.

In termini geometrici, ciò equivale a considerare un generico fissato (n+2)-dimensionale: i vari spigoli sono dati dai punti $P_0, \dots, P_{n+1}$, mentre v rappresenta nell'ambiente dei dati, ed è da disegnare.

RIEPILOGO GENERALE

Su $\mathbb{K}^{n+1}$ la relazione:

$$v \sim w \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^* \text{ s.t. } v = \lambda w$$

è una relazione di equivalenza.

Si definisce allora SPAZIO PROIETTIVO NUMERICO di grado n sul campo $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} \,/\sim$$

Le rette di $\mathbb{K}^{n+1}$ si chiamano dunque i PUNTI di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.
Dato $P = [x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, $[x_0, \dots, x_n]$ è una $(n+1)$-upla omogenea (definita cioè a meno di una costante moltiplicativa), e $x_0, \dots, x_n$ sono le sue coordinate omogenee.

Dato $i = 0, \dots, n$, si definiscono dunque le CARTE di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ e i PUNTI IMPROPRI (o PUNTI ALL'INFINITO) rispetto ad esse:

$$U_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i \neq 0\}$$
$$H_i = \{[x_0, \dots, x_n] \mid x_i = 0\}$$

Si ha:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = U_i \cup H_i,$$

e inoltre sono ben definite e chiaramente le applicazioni:

$$\varphi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$[x_0, \dots x_n] \to \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots \frac{\widehat{x_i}}{x_i} \dots \frac{x_n}{x_i}\right)$$

$$K_i : H_i \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$
$$[x_0, \dots, 0 \dots x_n] \to [x_0, \dots x_n],$$

dunque:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{K}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$$

È utile sottolineare che i punti all'infinito sono definiti solo rispetto ad una carta, e non in generale.

Consideriamo ad es. retta in $\mathbb{R}^2$ di equazione:

$$ax + by + c = 0$$

Consideriamo $x_0 \neq 0$, e x_1, x_2 tali che:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Si ha dunque:

$$\mathcal{C}_{\mathbb{P}^2} = \left\{ [x_0, x_1, x_2] \;,\; x_0 \neq 0 \;\middle|\; a\frac{x_1}{x_0} + b\frac{x_2}{x_0} + c = 0 \right\}$$

Possiamo definire allora la CHIUSURA PROIETTIVA di $\mathcal{C}$, che indicheremo con $\bar{\mathcal{C}}$, ottenuta considerando anche il caso $x_0 = 0$:

$$\bar{\mathcal{C}} = \left\{ [x_0, x_1, x_2] \;\middle|\; a x_1 + b x_2 + c x_0 = 0 \right\}$$

Il punto aggiunto, detto "punto all'infinito", individua univocamente il coefficiente angolare della retta, dunque la sua classe di parallelismo. Due rette parallele allora si incontrano in questo "punto all'infinito".

Un'altra osservazione è la seguente:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \bigcup_{i=0}^{n} U_i$$

In modo analogo, dato V $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $(n+1)$, si definisce (con ogni ovvia relazione di equivalenza) lo SPAZIO PROIETTIVO INDOTTO da V:

$$\mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} V \setminus \{0\} \,/\sim$$

Per definizione, $\dim \mathbb{P}(V) \overset{\text{def}}{=} n$.

Possiamo anche scrivere che $\mathbb{P}(\mathbb{K}^{n+1}) = \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

SOTTOSPAZI PROIETTIVI

Sia W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^{n+1}$. Sia $h+1 = \dim W$.

Si definisce SOTTOSPAZIO PROIETTIVO di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$\mathbb{P}(W) \overset{\text{def}}{=} (W - \{0\}) / \sim$$

Per definizione $\mathbb{P}(W) = h$.

In particolare:

- si parla di IPERPIANO PROIETTIVO se $\dim \mathbb{P}(W) = n-1$;
- si parla di PIANO PROIETTIVO se $\dim \mathbb{P}(W) = 2$;
- si parla di RETTA PROIETTIVA se $\dim \mathbb{P}(W) = 1$.

Se $H = \mathbb{P}(W)$ è un iperpiano proiettivo, allora:

$$W = \{(x_0, \dots x_n) \in \mathbb{K}^{n+1} \mid a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

allora:

$$\mathbb{P}(W) = \{[x_0, \dots x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid a_0 x_0 + \dots + a_n x_n = 0\}$$

Questa è detta EQUAZIONE DELL'IPERPIANO H.

In generale, se $\dim \mathbb{P}(W) = h$, ossia $\dim W = h+1$, W è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare di $(n-h)$ equazioni linearmente indipendenti.

Insomma:

$$\mathbb{P}(W) = \left\{ [x_0, \dots x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \;\middle|\; \begin{cases} a_{1,0} x_0 + \dots + a_{1,n} x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n-h,0} x_0 + \dots + a_{n-h,n} x_n = 0 \end{cases} \right\}$$

Le equazioni che compongono il sistema sono dette EQUAZIONI CARTESIANE di H.

W può essere però rappresentato anche in modo parametrico.

Se $\dim W = h+1$:

$\exists\, v_0, \dots v_h \in \mathbb{K}^{n+1}$ s.t. $W = \langle v_0, \dots, v_h \rangle \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall\, w \in W \;\exists\, \lambda_0, \dots \lambda_h \in \mathbb{K}$ s.t. $w = \lambda_0 w_0 + \dots + \lambda_h w_h$

Se $w = (x_0, \dots x_m)$, $v_i = (v_{i,0}, \dots v_{i,m})$, $\mathbb{P}(W)$ può essere parametrizzato da:

$\forall i = 0, \dots m \; : \; x_i = \lambda_0 v_{0,i} + \dots + \lambda_h v_{h,i}$

In questo modo:

$[w] = [x_0, \dots x_m] \in \mathbb{P}(W) \Leftrightarrow \exists \lambda_0, \dots \lambda_h$ per cui il sistema ha soluzione.

Le equazioni che compongono il sistema sono dette EQUAZIONI PARAMETRICHE di $H = \mathbb{P}(W)$.

Passiamo ora ad un'altra definizione.

Dati $P_0, \dots P_m \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, si definisce SPAZIO PROIETTIVO GENERATO (e si indica con $L(P_0, \dots P_m)$) il più piccolo sottospazio proiettivo contenente $P_0, \dots P_m$. Se $P_0 = [v_0], \dots, P_m = [v_m]$, allora:

$$L(P_0, \dots P_m) = \mathbb{P}(\langle v_0, \dots v_m \rangle),$$

da cui $\dim L(P_0, \dots P_m) \leq m$, i.e. è uguagliato se e solo se i punti sono indipendenti, cioè, per definizione, i vettori $v_0, \dots v_m$ sono linearmente indipendenti in $\mathbb{K}^{n+1}$. Notiamo che la definizione è ben posta, poiché non dipende dalla scelta dei rappresentanti.

In $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, allora, esistono al più $(n+1)$ punti indipendenti.

Sia ora V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale.

Si definisce, dato W sottospazio vettoriale di V con $\dim(W) = h$, il SOTTOSPAZIO PROIETTIVO di $\mathbb{P}(V)$:

$$\mathbb{P}(W) = W \setminus \{0\} / \sim \; , \; \dim \mathbb{P}(W) \overset{\text{def}}{=} h-1$$

I punti sono detti sottospazi proiettivi di dimensione 0; l'insieme vuoto è un sottospazio proiettivo la cui dimensione è, per definizione, -1.

Sempre da definizione, si dice che l'intersezione di una famiglia di sottospazi proiettivi è un sottospazio proiettivo:

$$\bigcap_{i \in I} \mathbb{P}(W_i) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} W_i\right)$$

OSSERVAZIONE

Due sottospazi proiettivi $\mathbb{P}(W_1)$ e $\mathbb{P}(W_2)$ si dicono:

- INCIDENTI se $W_1 \cap W_2 \neq \{0\} \Leftrightarrow \mathbb{P}(W_1) \cap \mathbb{P}(W_2) \neq \emptyset$;
- SGHEMBI se $W_1 \cap W_2 = \{0\}$.

Anche in questo caso, dato $S = \mathbb{P}(V)$, $S \neq \emptyset$, si definisce SOTTOSPAZIO PROIETTIVO GENERATO ($L(S)$) il più piccolo sottospazio proiettivo contenente S, cioè l'intersezione di tutti i sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ contenenti S.

Se $H_1 = \mathbb{P}(W_1)$ e $H_2 = \mathbb{P}(W_2)$, ad esempio:

$$L(H_1, H_2) = \mathbb{P}(W_1 + W_2)$$

Ad esempio, presi $P_1 = [v_1]$ e $P_2 = [v_2]$, è ovvio che congiunge P_1 e P_2 è $\mathbb{P}(\langle v_1, v_2 \rangle)$. La definizione, come si vede, non dipende dalla scelta dei rappresentanti. Più in generale, dati $P_1, \dots, P_k \in \mathbb{P}(V)$:

$$L(P_1, \dots, P_k) = \mathbb{P}(\langle v_1, \dots, v_k \rangle) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L(P_1, \dots, P_k) \leq k-1$$

Siano $P_1 = [v_1], \dots, P_k = [v_k]$ punti di $\mathbb{P}(V)$, con $\dim \mathbb{P}(V) = n$. Allora, per definizione:

- $P_1, \dots, P_k$ sono INDIPENDENTI se $v_1, \dots, v_k$ lo sono;
- $P_1, \dots, P_k$ sono IN POSIZIONE GENERALE se, nel caso in cui $k \leq n+1$, sono indipendenti, e nel caso in cui $k > n+1$, ogni minore di $(n+1)$ o $(n+1)$ indipendenti.

OSSERVAZIONE

Un riferimento proiettivo $P_0, \dots, P_n, U$ è un $(n+2)$-upla di punti in posizione generale.

OSSERVAZIONE

Siano H e K sottospazi disgiunti di $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, con $\dim H = h$, $\dim K = k$, $h+k = n-1$. Allora è definita una applicazione suriettiva (π_K indica la proiezione su K), la PROIEZIONE SGHEMBA:

$$\varphi: \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \setminus H \longrightarrow K$$

$$Q = [v] \longmapsto [\pi_K(v)]$$

FORMULA DI GRASSMANN PROIETTIVA

PROPOSIZIONE

Siano $H_1 = \mathbb{P}(W_1)$, $H_2 = \mathbb{P}(W_2)$ sottospazi proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora:

$$\dim L(H_1, H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2)$$

Dim.

Per la formula di Grassmann:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

Dato che, se W è sottospazio vettoriale di V, allora $\dim W - 1 = \dim \mathbb{P}(V)$:

$$(\dim(W_1 + W_2) - 1) = (\dim W_1 - 1) + (\dim W_2 - 1) - (\dim(W_1 \cap W_2) - 1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \dim L(H_1, H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim(H_1 \cap H_2),$$

c.v.d.

OSSERVAZIONE

Si ha allora, date due rette H_1 e H_2:

$$\dim L(H_1, H_2) = \begin{cases} 1 & \text{se sono coincidenti} \\ 2 & \text{se sono incidenti distinte} \\ 3 & \text{se sono sghembe} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Si ha:

$$\dim(H_1 \cap H_2) = \dim H_1 + \dim H_2 - \dim L(H_1, H_2) \geq$$
$$\geq \dim H_1 + \dim H_2 - n$$

Se dunque H_1 e H_2 sono tali che $\dim H_1 + \dim H_2 \geq n$, essi non possono essere sghembi, dal momento che $\dim(H_1 \cap H_2) \geq 0 \Rightarrow H_1 \cap H_2 \neq \emptyset$.

OSSERVAZIONE

Sia $P \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, e H un iperpiano non passante per P. Allora, dato $Q \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - \{P\}$ e r_Q è unica retta congiungente P e Q, è ben definita e suriettiva la seguente applicazione:

$$\varphi : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) - \{P\} \longrightarrow H$$
$$Q \longrightarrow \varphi(Q) \overset{\text{def}}{=} r_Q \cap H$$

PROIETTIVITÀ

Siano V_1, V_2 dei $\mathbb{K}$-spazi vettoriali, e $\varphi : V_1 \longrightarrow V_2$ un applicazione lineare iniettiva, in modo che $\forall\, v \neq 0 : \varphi(v) \neq 0$. Allora è ben definita la TRASFORMAZIONE PROIETTIVA INDOTTA:

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{P}(V_1) \longrightarrow \mathbb{P}(V_2)$$
$$[v] \longrightarrow [\varphi(v)]$$

In generale, $f : \mathbb{P}(V_1) \to \mathbb{P}(V_2)$ è detta TRASFORMAZIONE PROIETTIVA se:

$\exists\, \varphi : V_1 \to V_2$ lineare e iniettiva s.t. $f = \tilde{\varphi}$

Se f è indotta da un isomorfismo vettoriale, si parla di ISOMORFISMO PROIETTIVO. Un automorfismo proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ è detto PROIETTIVITÀ.

In base alla definizione, abbiamo due spazi proiettivi come insiemi se e solo se hanno la stessa dimensione.

PROPOSIZIONE

Ogni trasformazione proiettiva è iniettiva.

Dim.

$f([v]) = f([w]) \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ s.t. $\varphi(v) = \lambda\, \varphi(w) \Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(v - \lambda w) = 0 \Rightarrow v - \lambda w \Rightarrow v = \lambda w \Rightarrow [v] = [w]$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

L'insieme delle proiettività è un gruppo rispetto alla composizione, e si chiama GRUPPO LINEARE PROIETTIVO, e si indica con $PGL(\mathbb{P}(V))$.

PROPOSIZIONE

Sia $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$, e $\varphi \in GL(V)$ tale che $\tilde{\varphi} = f$. Allora le funzioni $\psi \in GL(V)$ che inducono f sono tutte e sole della forma $\lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

Dim.

Sia $\psi \in GL(V)$ un isomorfismo che induce f. Allora:

$\forall\, v \in V - \{0\} : [\psi(v)] = [\varphi(v)] \Rightarrow \exists\, \lambda \in \mathbb{K}^*$ s.t. $\psi(v) = \lambda_v\, \varphi(v)$

Dato che ψ e φ sono lineari, $\forall\, v \in V - \{0\} : \lambda_v = \lambda \in \mathbb{K}^*$.

Dunque $\psi = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Viceversa, se $\psi = \lambda\varphi$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$[\psi(v)] = [(\lambda\varphi)(v)] = [\lambda\,\varphi(v)] = [\varphi(v)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tilde{\psi} = \tilde{\varphi}, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Si ha immediatamente:

$$PGL(\mathbb{P}(V)) = GL(V)/\sim$$

Se $V = \mathbb{K}^{m+1}$, si ha:

$$PGL(\mathbb{P}^m(\mathbb{K})) = GL(\mathbb{K}^{m+1})/\sim$$

Se $\varphi : \mathbb{K}^{m+1} \to \mathbb{K}^{m+1}$, $\varphi \in GL(m, \mathbb{K})$, moltiplicando che:

$\exists\, \lambda \in GL(m+1, \mathbb{K})$ t.c. $\forall\, v \in \mathbb{K}^{m+1}$: $\varphi(v) = \lambda v$

Dunque:

$$GL(\mathbb{K}^{m+1})/\sim \;\cong\; GL(m+1, \mathbb{K})/\sim \;\cong\; PGL(m+1, \mathbb{K})$$

Le proiettività sono quindi identificate da matrici invertibili, considerate a meno di coefficiente moltiplicativo.

Se $f \in PGL(\mathbb{P}^m(\mathbb{K}))$ è indotta da $\varphi \in GL(\mathbb{K}^{m+1})$, e $\varphi(v) = \lambda v$:

$$X = [v] \Rightarrow fX = [\varphi(v)]$$

$$Y = [\varphi(v)] \Rightarrow \lambda Y = fX \quad , \lambda \in \mathbb{K}^*$$

TEOREMA FONDAMENTALE DELLE PROIETTIVITÀ

TEOREMA

Siano $\{P_0, \dots, P_{m+1}\}$ e $\{Q_0, \dots, Q_{m+1}\}$ due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$. Allora esiste un'unica proiettività $f: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$ tale che $f(P_i) = Q_i \ \forall i = 0, \dots, m+1$. In altre parole, $PGL(\mathbb{P}(V))$ è transitivo sui riferimenti proiettivi.

Dim.

ESISTENZA

Siano $P_i = [v_i]$, $Q_i = [w_i]$. Possiamo scegliere opportunamente i rappresentanti all'interno delle classi di equivalenza, in modo che $\{v_0', \dots, v_m'\}$ e $\{w_0', \dots, w_m'\}$ siano basi (una di V e una di W) e in più:

$$v_{m+1}' = v_{m+2} = v_0' + \dots + v_m' \qquad w_{m+1}' = w_{m+2} = w_0' + \dots + w_m'$$

Allora, facendo dei passi analoghi:

$\exists \varphi \in GL(V)$ t.c. $\varphi(v_0') = w_0', \dots, \varphi(v_m') = w_m' \Rightarrow \varphi(v_{m+1}') = w_{m+1}'$

Allora $\varphi = f$ soddisfa la tesi.

UNICITÀ

Sia $g = \tilde{\varphi}$ tale che, come $f = \tilde{\varphi}$, sia $g(P_i) = Q_i \ \forall i = 0, \dots, m+1$. Allora:

$\forall i = 0 \dots m+1: \ f(P_i) = g(P_i) \Rightarrow [\varphi(v_i)] = [\psi(v_i)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \forall i = 0 \dots m+1: \ \varphi(v_i) = \lambda_i \psi(v_i)$.

Dato che φ e ψ sono lineari e $v_{m+1}' = v_0' + \dots + v_m'$, allora che $\{v_0', \dots, v_m'\}$ è una base:

$\forall i = 0, \dots, m: \ \lambda_i = \lambda_{m+1} \overset{\text{def}}{=} \bar{\lambda} \Rightarrow \varphi = \bar{\lambda}\psi \Rightarrow \tilde{\varphi} = \tilde{\psi}$, c.v.d.

PROIETTIVITÀ CHE FISSANO UNA CARTA

Sia $f : \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ una proiettività. Sia $A \in PGL(m+1, \mathbb{K})$ tale che $f(X) = AX$.

Quando accade che $f(U_0) = U_0$ (ovvia $f(H_0) = H_0$?

La matrice che rappresenta f sarà del tipo:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ \hline B & & C & \end{array}\right], \quad \lambda \in \mathbb{K}^*$$

Equivalentemente, prendo $\lambda = 1$:

$$A = \left[\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline B & & C & \end{array}\right], \quad C \in PGL(m, \mathbb{K})$$

Ciò è imposto dalla condizione $f(H_0) = H_0$.

Dunque, considerando $X = [x_0, \dots x_m]$, $x_0 = 1$ $(X \in U_0)$ si ha:

$$AX = A \begin{bmatrix} 1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \hline B + C \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

Dunque $f|_{U_0}$ è un AFFINITÀ. In conclusione, si ha che il sottogruppo di $PGL(\mathbb{P}^m(\mathbb{K}))$ che fissa U_0 (e H_0) è isomorfo al gruppo $Aff(\mathbb{K}^m)$.

Sia ora $f \in PGL(\mathbb{P}(V))$. $P \in \mathbb{P}(V)$ è detto PUNTO FISSO se $f(P) = P$.

Se $P = [v]$ è punto fisso per $f = \tilde{\varphi}$, allora v è autovettore per φ.

CAMBIAMENTI DI COORDINATE OMOGENEE

PROPOSIZIONE

Siano R_1 e R_2 riferimenti in $\mathbb{P}(V)$. Siano $\mathcal{B}_1$ e $\mathcal{B}_2$ le rispettive associate di V. Allora esiste una matrice $A \in GL(n+1, \mathbb{K})$ tale che se $[P]_{R_1} = X$, allora $[P]_{R_2} = AX$.

Dim.

Consideriamo $A \in GL(n+1, \mathbb{K})$ matrice di cambiamento di base da $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$:

$$\forall v \in V : [v]_{\mathcal{B}_2} = A [v]_{\mathcal{B}_1}$$

Allora, se $P = [v] \in \mathbb{P}(V)$ e $X = [P]_{R_1} = [v]_{\mathcal{B}_1}$:

$$[P]_{R_2} = [v]_{\mathcal{B}_2} = AX \text{ , c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Due matrici $A, B \in GL(n+1, \mathbb{K})$ individuano lo stesso cambiamento di riferimento se e solo se $A = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$. La matrice della proposizione precedente è ovviamente unica.

Dim.

Siano A e B tali che $\{P_0, \dots, P_{n+1}, U\}$ viene mandata in $\{Q_0, \dots, Q_{n+1}, U'\}$. Allora:

$$M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(B^{-1}) \, M^{\mathcal{B}_1}_{\mathcal{B}_2}(A) = \begin{bmatrix} \lambda_0 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_{n+1} \end{bmatrix}$$

Sfruttando le frasi unite:

$$\forall i = 0, \dots, n+1 : \lambda_i = \lambda_{n+1} \overset{\text{def}}{=} \lambda \Rightarrow A = \lambda B, \ \lambda \in \mathbb{K}^*.$$

Viceversa se $A = \lambda B$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$:

$$\forall i = 0, \dots, n+1 : A[R_i]_{\mathcal{B}_1} = [Q_i]_{R_2} \quad A[U]_{\mathcal{B}_1} [U']_{R_2} \Rightarrow B[P_i]_{R_2} = [\lambda^{-1} Q_i]_{R_2} = [Q_i]_{R_2},$$

$$\text{e } [U]_{R_1} = [\lambda^{-1} U']_{R_2} = [U']_{R_2}, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Se $X = [P]_{R_1}$, $Y = [P]_{R_2}$, e A è una matrice di cambiamento di base, allora:

$$\exists \lambda \in \mathbb{K}^* \ \exists' \ AY = \lambda X$$

OSSERVAZIONE

Fissare un riferimento proiettivo significa fissare un isomorfismo proiettivo $\varphi : \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$.

Consideriamo lo schema seguente:



Allora, a meno di moltiplicazione per un fattore comune, abbiamo subito il Teorema fondamentale della proiettività, considerando R_1, R_2 e:

$$\Psi = \Phi_{R_2} \circ \Phi_{R_1}^{-1} : \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

Abbiamo quindi un'azione di $PGL(n+1, \mathbb{K})$ su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$\Lambda : PGL(n+1, \mathbb{K}) \times \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \to \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$
$$(A, X) \longmapsto AX$$

Più in generale:

$$\Lambda : PGL(\mathbb{P}(V)) \times \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V)$$
$$(f, P) \longmapsto f(P)$$

La geometria proiettiva, dunque, è lo studio delle proprietà invarianti per il gruppo $PGL(\mathbb{P}(V))$.

TEOREMA SUGLI IPERPIANI

PROPOSIZIONE

Sia $(a_0, \dots, a_m) \neq (0, \dots, 0)$, e consideriamo:

$$a_0 x_0 + \dots + a_m x_m = 0$$

Il luogo di zeri di questa equazione omogenea è un iperpiano, mia $\mathrm{Span}(P_{i_0}, \dots, P_{i_{m-1}})$. Viceversa, ogni iperpiano è il luogo di zeri di un'equazione omogenea di questo tipo. In particolare, $\sum_{i=0}^{m} a_i x_i$ e $\sum_{i=0}^{m} b_i x_i$ danno lo stesso iperpiano luogo di zeri se e solo se $b_i = \lambda a_i \ \forall i$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

Dim.

Senza perdere di generalità, supponiamo che $a_0 \neq 0$. Poniamo le matrici seguenti:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_m \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}$$

induce un cambiamento di riferimento in cui $a_0 x_0 + \dots + a_m x_m = 0$ diviene $x_0 = 0$, ovvero l'iperpiano $H_0 = \{ x = (x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \mid x_0 = 0 \}$. Dunque il luogo di zeri dell'equazione di partenza è un iperpiano, dal momento che A è la matrice di un cambiamento di riferimento.

Consideriamo ora la natura che, se $\sum_{i=0}^{m} a_i x_i$ e $\sum_{i=0}^{m} b_i x_i$ danno lo stesso iperpiano, allora:

$\exists\, i = 0, \dots, m$ s.t. $a_i, b_i \in \mathbb{K}^*$

se così non fosse, $a_i \neq 0 \Rightarrow b_i = 0$ e $b_j \neq 0 \Rightarrow a_j = 0$.

Inoltre $(a_0, \dots, a_m) \neq (0 \dots 0)$, dunque $\exists\, a_k$ s.t. $a_k \neq 0$.

Allora $P_k = (0, \dots, 1, \dots 0)$ soddisfa $\sum_{i=0}^{m} b_i x_i = 0$, ma non $\sum_{i=0}^{m} a_i x_i = 0$, e ciò è assurdo.

Supponiamo allora, senza perdere di generalità, che $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$.

Allora:

$$x_0 = -\sum_{i=1}^{m} \frac{a_i}{a_0} x_i = -\sum_{i=1}^{m} \frac{b_i}{b_0} x_i$$

Allora

$$\forall i = 1 \dots m : \frac{a_i}{a_0} = \frac{b_i}{b_0} \Rightarrow \exists\, \lambda = \frac{a_0}{b_0} \in \mathbb{K}^* \text{ s.t. } \forall i = 1 \dots m : \frac{a_i}{b_i} = \lambda \quad \text{c.v.d.}$$

SPAZIO PROIETTIVO DUALE E PRINCIPIO DI DUALITÀ

Sia V un $\mathbb{K}$-spazio vettoriale di dimensione $n+1$, e sia V^* il suo duale. Lo spazio proiettivo $\mathbb{P}(V^*)$ è detto SPAZIO PROIETTIVO DUALE, e si indica con $\mathbb{P}^*(V)$.

Dato che V e V^* sono isomorfi, esiste un isomorfismo proiettivo tra $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}^*(V)$.

Se $\mathcal{B}$ è una base di V, e $\mathcal{B}^*$ è la base duale di $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$ induce un sistema di coordinate omogenee in $\mathbb{P}^*(V)$. Se $[L] \in \mathbb{P}^*(V)$, e $L = a_0 x_0 + \dots + a_n x_n \in V^*$, allora $[L] = [a_0, \dots, a_n]$.

OSSERVAZIONE

Un polinomio ha senso in $\mathbb{P}(V)$ solo se è omogeneo. In realtà, se il polinomio è omogeneo, esso acquista senso in $\mathbb{P}(V)$ solo in relazione ai suoi luoghi di zeri, che non varia se si moltiplica il polinomio per una costante non nulla, ed è quindi ben definito in $\mathbb{P}(V)$.

La seguente affermazione, allora, è ben definita, e istituisce una corrispondenza biunivoca (isomorfismo proiettivo) tra $\mathbb{P}^*(V)$ e i sottospazi di $\mathbb{P}(V)$, che indicheremo con $I(\mathbb{P}(V))$:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^*(V) &\longrightarrow I(\mathbb{P}(V)) \\ [L] &\longrightarrow [\operatorname{Ker} L] \end{aligned}$$

Sia dunque $L \in V^*$, $L = [a_0, \dots, a_n]$, e sia $H = [\operatorname{Ker} L]$. Allora diremo che H ha coordinate omogenee $[a_0, \dots, a_n]$.

Denotiamo con T_k e T_k^* gli insiemi dei sottospazi proiettivi di dimensione k di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}^*(V)$ rispettivamente.

Sia $S = \mathbb{P}(W) \in T_k$, $\dim S = k$. Allora $\dim W = k+1$, da cui $\dim \operatorname{Ann}(W) = n-k$, da cui $\dim \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(W)) = n-k-1$.

Allora è ben definita la CORRISPONDENZA BIUNIVOCA DI DUALITÀ:

$$\begin{aligned} f : T_k &\longrightarrow T^*_{n-k-1} \\ \mathbb{P}(W) &\longrightarrow \mathbb{P}(\operatorname{Ann}(W)) \end{aligned}$$

In particolare, abbiamo le seguenti corrispondenze primitive:

- $k=0$: $\mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{T}^*_{n-1}$ (iperpiani di $\mathbb{P}^*(V)$);
- $k=n-1$: $\mathbb{T}_{n-1}$ (iperpiani di $\mathbb{P}(V)$) $\longrightarrow \mathbb{P}^*(V)$.

L'insieme degli iperpiani di uno spazio proiettivo ha almeno, così come l'insieme dei punti, una struttura proiettiva. In generale, però, non è detto che l'insieme dei sottospazi proiettivi di dimensione fissata abbia una struttura proiettiva; questa si ha, però, per punti ed iperpiani.

Sia ora S un sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}(V)$ di dimensione k. Si chiama STELLA DI IPERPIANI di centro S la famiglia $\Lambda_1(S)$ di tutti gli iperpiani proiettivi che contengono S.

Dato che ogni iperpiano $H \in \Lambda_1(S)$ corrisponde ad un punto di $\mathbb{P}^*(V)$ appartenente a $\mathbb{P}(\operatorname{Ann}(W))$, di dimensione $(n-k-1)$, allora si dice che è stella di iperpiani di dimensione $(n-k-1)$. Nei particolari casi in cui $k=n-2$, dunque quando $\dim \Lambda_1(S) = 1$, si parla di FASCIO DI IPERPIANI di centro S.

Consideriamo ora $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$, $\dim \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = 1$, e $\Lambda_1(S)$, ed enunciamo un isomorfismo proiettivo. Se $H_1, H_2 \in \mathbb{P}(V)$, $H_1 = \{\varphi_1 = 0\}$, $H_2 = \{\varphi_2 = 0\}$, con $\varphi_1, \varphi_2 \in V^*$ sono due iperpiani distinti che contengono S ($\dim S = n-2$), si ha il seguente isomorfismo:

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{K}) &\longrightarrow \Lambda_1(S) \\ [\lambda, \mu] &\longrightarrow \{\lambda\varphi_1 + \mu\varphi_2 = 0\} \end{aligned}$$

La retta $(H_1, H_2) \in \mathbb{P}^*(V)$ che unisce due iperpiani H_1 e H_2 è il fascio di iperpiani $\lambda H_1 + \mu H_2$, con λ, μ non entrambi nulli.

Es. Se $n=2$ (vede come il piano) e $P \in \mathbb{P}(V)$, allora $\Lambda_1(P)$ è l'insieme delle rette passanti per P, e ha dimensione 1; se invece π è una retta, allora $\Lambda_1(\pi)$ contiene solo π, da cui $\dim \Lambda_1(\pi) = 0$.

Se $n=3$, e $P \in \mathbb{P}(V)$, e r una retta e π è un piano:

- $\dim \Lambda_1(P) = 2$ (stella di piani passanti per P);
- $\dim \Lambda_1(r) = 1$ (sfascio di piani di centro r);
- $\dim \Lambda_1(\pi) = 0$ (solo il piano stesso);

PROPOSIZIONE (PRINCIPIO DI DUALITÀ) (SOLO ENUNCIATO)

Sia $\mathcal{P}$ una proposizione che riguarda i sottospazi di uno spazio proiettivo $\mathbb{P}(V)$, le sue intersezioni, gli spazi congiungenti e le loro dimensioni. Allora $\mathcal{P}$ è vera se e solo se è vera la PROPOSIZIONE DUALE $\mathcal{P}^*$ ottenuta da $\mathcal{P}$ effettuando le seguenti sostituzioni:

- intersezione $\to$ spazio congiungente;
- spazio congiungente $\to$ intersezione;
- contenuto $\to$ contenente;
- contenente $\to$ contenuto;
- dimensione $\to$ dimensione duale (poi a $\dim \mathbb{P}(V) - 1 + \dim K$, ove $S \in \mathbb{P}(V)$, $S = \mathbb{P}(K)$.

Es. Se è vero che 3 punti indipendenti in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ generano un iperpiano, allora è anche vero che m iperpiani indipendenti si intersecano in un punto.

Es. Consideriamo la giacitura proiettiva di una retta in $\mathbb{R}^3$, espressa in coordinate omogenee:

$$\begin{cases} a x_0 + b x_1 + c x_2 + d x_3 = 0 \\ \alpha x_0 + \beta x_1 + \gamma x_2 + \delta x_3 = 0 \end{cases}$$

Consideriamo la giacitura proiettiva di un piano in $\mathbb{R}^3$, sempre in coordinate omogenee:

$$A x_0 + B x_1 + C x_2 + D x_3 = 0$$

Il piano passa per la retta se e solo se il rango del sistema totale è 2:

$$\text{rk}\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ A & B & C & D \end{bmatrix} = 2$$

In realtà, dato che la matrice delle incognite escludendo l'ultima riga ha certamente rango 2, il piano passa per la retta se e solo se:

$$(A, B, C, D) = \lambda_1 (a, b, c, d) + \lambda_2 (\alpha, \beta, \gamma, \delta)$$

$$\pi = \lambda_1 \pi_1 + \lambda_2 \pi_2$$

Usando il principio di dualità, è equivalente chiedere che il vettore $f(\pi) \in \mathbb{R}^{3*}$ appartenga allo spazio vettoriale $f(r) \in \mathbb{R}^{3**}$.

Ex. Consideriamo $\mathbb{R}^3$, due rette di $\mathbb{R}^3$ e un punto di $\mathbb{R}^3$, che supponiamo non appartenga a nessuna delle due rette.

Non è sempre possibile individuare una retta che interseca le altre due.

Noi vogliamo, però, ciò: è sempre possibile considerare i piani che contengono il punto e rispettivamente la prima e la seconda retta, poi si interseca in una retta che vogliamo complanare ad entrambe le rette e contenente P. Dato che due rette complanari si incontrano sempre in un punto, la retta individuata è valida ai fini del problema.

RELAZIONI VIGENTI TRA $GL(n,\mathbb{K})$, $PGL(n,\mathbb{K})$, $Aff(n,\mathbb{K})$

Consideriamo, dato lo spazio vettoriale numerico $\mathbb{K}^n$:

- il GRUPPO LINEARE GENERALE $GL(n,\mathbb{K})$;
- il GRUPPO LINEARE PROIETTIVO $PGL(n,\mathbb{K})$;
- il GRUPPO AFFINE $Aff(n,\mathbb{K})$.

Vogliamo determinare le relazioni tra questi tre gruppi. Riassumiamo dunque tutte le relazioni:

- $PGL(n,\mathbb{K}) \overset{def}{=} GL(n,\mathbb{K})/\sim$;
- $GL(n,\mathbb{K})/\sim \cong GL(\mathbb{K}^n)/\sim \Rightarrow PGL(n,\mathbb{K}) \cong GL(\mathbb{K}^n)/\sim$;
- $Aff(n,\mathbb{K}) = GL(n,\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^n$, ove il prodotto tra gruppi è un PRODOTTO SEMIDIRETTO;
- $Aff(n,\mathbb{K})$ è isomorfo al sottogruppo di $PGL(n,\mathbb{K})$ che fissano un dato punto, o alternativamente l'ipersiano di punti all'infinito.

CONICHE IN $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$

Una conica in $\mathbb{K}^2$ è un polinomio omogeneo di 2° grado, identificabile per mezzo di una matrice del tipo:

$$M = \left[\begin{array}{cc|c} a & b & d \\ b & c & e \\ \hline d & e & f \end{array}\right] \in S(3,\mathbb{K}), \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in S(2,\mathbb{K}) \setminus \{0\}$$

$$q(x_1, x_2) = X^t A X + 2B^t X + f =$$
$$= a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 + 2d x_1 + 2e x_2 + f$$

Moltiplicando per uno scalare, il luogo di zeri $\mathcal{Z}(q)$ non muta.

Consideriamo ora $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, e ci chiediamo proiettività della conica, detta anche OMOGENEIZZATO della conica:

$$\tilde{q}(x_0, x_1, x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2 + 2d x_1 x_0 + 2e x_2 x_0 + f x_0^2$$

Luogo di zeri è ben definito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{K})$,

$$\mathcal{Z}(\tilde{q}) = \{ [x_0, x_1, x_2] \mid q(x_0, x_1, x_2) = 0 \}$$

Ponendo $x_0 = 1$ si ritrova la conica descritta prima. Valutando però la conica in $x_0 = 0$ si ottengono i punti all'infinito della conica:

$$\tilde{q}(0, x_1, x_2) = a x_1^2 + 2b x_1 x_2 + c x_2^2$$

Dato che $(0,0,0) \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{K})$, si ha $x_1 \neq 0$, da cui:

$$a\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 + 2b\left(\frac{x_2}{x_1}\right) + c = 0$$

è un'equazione di secondo grado che quindi, in base al discriminante, può ammettere due soluzioni reali distinte, due soluzioni reali coincidenti (diremo una soluzione), due soluzioni complesse coniugate (diremo 0 soluzioni).

A seconda dei casi si ha:

- una IPERBOLE, se vi sono due soluzioni;
- una PARABOLA, se vi è una soluzione;
- un'ELLISSE, se non vi sono soluzioni.

È intuitivamente chiaro che le trasformazioni affini non aumentano i punti all'infinito delle coniche, dunque la classificazione delle coniche a meno di trasformazioni affini può essere effettuata anche in base al numero di punti all'infinito delle coniche. Ciò è dovuto al fatto che $\mathrm{Aff}(n, K)$ fissa l'iperpiano dei punti all'infinito.

Riepiloghiamo dunque le varie coniche. Nel caso che $K = \mathbb{C}$:

- ELLISSE IMMAGINARIA (caso non degenere);
- PARABOLA (caso non a centro);
- RETTE INCIDENTI;
- RETTE PARALLELE;
- RETTA DOPPIA.

Se invece $K = \mathbb{R}$:

- INSIEME VUOTO
- ELLISSE (caso non degenere);
- IPERBOLE (caso non degenere);
- PARABOLA (caso non a centro);
- PUNTO;
- RETTE INCIDENTI;
- RETTE PARALLELE;
- RETTA DOPPIA.

Notiamo subito che, nel piano proiettivo, le tre coniche non degeneri, cioè ellissi, iperboli e parabole, sono equivalenti. Basta infatti porre come iperpiano dei punti all'infinito una retta non intersecante la conica (e ciò è sempre possibile), per ricondursi al caso dell'ellisse.

Con considerazioni analoghe, le coppie di rette parallele sono equivalenti a quelle di rette incidenti. Punti e rette doppie invece, prese in sé e completate proiettivamente, sono equivalenti tra loro, infine, non è a priori una retta.

SPAZI TOPOLOGICI

Sia X un insieme. Una TOPOLOGIA su X è una famiglia $\mathcal{T}$ di sottoinsiemi di X, detti APERTI, che soddisfa le seguenti tre condizioni:

- $\emptyset$ e X sono aperti;
- un'unione arbitraria di aperti è un aperto;
- un'intersezione finita di aperti è un aperto.

Un insieme dotato di una topologia è detto SPAZIO TOPOLOGICO. Gli elementi di uno spazio topologico sono detti PUNTI.

Notiamo subito che, dato X:

- $\mathcal{T} = \mathcal{P}(X)$ è una topologia, detta TOPOLOGIA DISCRETA, in cui tutti gli insiemi sono aperti;
- $\mathcal{T} = \{\emptyset, X\}$ è anch'essa una topologia, detta TOPOLOGIA INDISCRETA o BANALE.

Introduciamo ora alcune topologie su $\mathbb{R}$:

- nella TOPOLOGIA EUCLIDEA, $U \subset \mathbb{R}$ è aperto se e solo se è unione (anche nulla) di intervalli aperti. Dunque:
  - $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$; $\emptyset$ è unione nulla di aperti;
  - un'unione di aperti è un'unione di unioni di intervalli aperti, dunque un'unione di intervalli aperti, dunque un aperto;
  - siano $A = \bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[$, $B = \bigcup_{i \in I}]c_i, d_i[$. Allora:

$$A \cap B = \left(\bigcup_{i \in I}]a_i, b_i[\right) \cap \left(\bigcup_{i \in I}]c_i, d_i[\right) = \bigcup_{i,j \in I}]a_i, b_i[\cap]c_i, d_i[,$$

  dunque $A \cap B$ è un aperto.

  Allora la topologia euclidea è una topologia su $\mathbb{R}$.

- nella TOPOLOGIA DELLA SEMICONTINUITÀ SUPERIORE, gli aperti non nulli sono tutti e soli della forma $]-\infty, a[$, al variare di $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Analogamente, nella TOPOLOGIA DELLA SEMICONTINUITÀ INFERIORE, essi sono della forma $]a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Verifichiamo che è una topologia su $\mathbb{R}$:

- $\emptyset$ è noto, dunque è aperto per definizione, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ è aperto;
- $\bigcup_{i \in I}]-\infty, a_i[=]-\infty, \sup_{i \in I} a_i[$ è aperto;
- $]-\infty, a[\cap]-\infty, b[=]-\infty, \min\{a, b\}[$ è aperto.

Definiamo che, in uno spazio topologico, $C \subseteq X$ si dice CHIUSO se e solo se $X \setminus C$ è aperto. Quindi, data la definizione si deduce che $\mathcal{C}$ è una topologia su X se:

- $\emptyset$ e X sono chiusi;
- intersezioni arbitrarie di chiusi sono chiusi;
- unioni finite di chiusi sono chiusi.

Introduciamo adesso un'altra topologia su X, la TOPOLOGIA COFINITA. In questa topologia i chiusi sono X e gli insiemi finiti. Si ha:

- $\emptyset$ e X sono chiusi;
- l'intersezione di una famiglia di chiusi è X se ogni chiuso è X, oppure ha cardinalità finita, minore o uguale di al massimo tra la cardinalità degli insiemi, dunque è un chiuso;
- $A \cup B \neq X$ se uno dei due è X, altrimenti $A \cup B$ è un chiuso perché ha cardinalità minore o uguale della somma delle cardinalità, dunque ha cardinalità finita.

Equivalentemente, gli aperti sono $\emptyset$ e i complementari degli insiemi finiti. Infatti:

- X e $\emptyset$ sono aperti;
- $\bigcup_{i \in I} A_i$, con gli A_i aperti, è aperto, perché $\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in I} A_i^c$ è un chiuso;
- $A_1 \cap A_2$ è aperto se A_1 e A_2 lo sono, perché $(A_1 \cap A_2)^c = A_1^c \cup A_2^c$ è un chiuso.

OSSERVAZIONE

Non è detto che un aperto non sia anche chiuso. Nella topologia già discreta, ad esempio, tutti gli elementi sono "CLOPEN".

BASE PER UNA TOPOLOGIA

Sia X un insieme, e $\mathcal{T}$ una topologia su X. Una sotto-famiglia di aperti $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ si dice BASE di $\mathcal{T}$ se ogni aperto $A \in \mathcal{T}$ può essere scritto come unione di elementi di $\mathcal{B}$.

Ad esempio, $\mathcal{T}$ è stata di se stessa. Gli intervalli aperti sono una base della topologia euclidea su $\mathbb{R}$ descritta precedentemente.

Una base, dalla definizione, determina univocamente la topologia.

TEOREMA

Sia X un insieme, e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ una famiglia di sottoinsiemi di X. Allora esiste una topologia su X di cui $\mathcal{B}$ è una base se e solo se:

- $X = \bigcup \{B \mid B \in \mathcal{B}\}$;
- $\forall A, B \in \mathcal{B}, \forall x \in A \cap B \ \exists C \in \mathcal{B} : x \in C \subseteq A \cap B$.

Dim.

La prima implicazione è, del tutto ovvia, derivando in fatti solamente $A \cap B \in \mathcal{B}$.

Poniamo la seconda implicazione. Diciamo che sono aperti tutte le unioni arbitrarie di elementi di X. Allora l'insieme vuoto ($\emptyset$) e l'insieme completo (X) sono aperti. Inoltre l'unione di aperti è un aperto. Per la seconda condizione, se $A = \bigcup_{i \in I} A_i$ e $B = \bigcup_{j \in J} B_j$, e $A \cap B = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{B}, C \subseteq A \cap B\}$, si ha:

$$A \cap B = \bigcup_{\substack{i \in I \\ j \in J}} (A_i \cap B_j) = \bigcup \{C \mid C \in \mathcal{B}, \exists i \in I, j \in J : C \subseteq A_i \cap B_j\},$$

dunque $A \cap B$ è un aperto, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Si consideri, dato $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ un sottoinsieme che rispetti le seconde condizioni, non si dirà che $\mathcal{B}$ sia una Base di $\mathcal{T}$.

RELAZIONE D'ORDINE TRA TOPOLOGIE

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su X, $\mathcal{T}$ è PIÙ FINE di $\mathcal{T}'$, ossia $\mathcal{T}'$ è MENO FINE di $\mathcal{T}$, se ogni aperto di $\mathcal{T}'$ è aperto anche in $\mathcal{T}$.

Notiamo che questa è una relazione d'ordine parziale.

Vediamo ora alcuni esempi.

La TOPOLOGIA DI SORGENFREY è una topologia su $\mathbb{R}$ i cui aperti sono gli intervalli del tipo $[a,b[$. Verifichiamo che questi intervalli formano una base della topologia:

- $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} [-n, n[$;
- $[a_1, b_1[\cap [a_2, b_2[\neq \emptyset \Rightarrow \exists\, [\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\}[$ $\exists' [\max\{a_1,a_2\}, \min\{b_1,b_2\}[\subseteq [a_1,b_1[\cap [a_2,b_2[$.

Notiamo che gli intervalli del tipo $[c,d[$ non sono aperti nella topologia euclidea; difatti, $]c,d[= \bigcup_{t>c} [t,d[$, dunque la topologia di Sorgenfrey è più fine di quella euclidea.

Notiamo che:

$([a,b[)^c =]-\infty, a[\cup [b, +\infty[\Rightarrow [a,b[$ è chiuso, dato che $]-\infty, a[$ e $[b, +\infty[$ sono aperti nella topologia di Sorgenfrey. Questa, dunque, è una topologia in cui tutti gli aperti sono anche chiusi. Sono eccezioni i singoletti: $\{x\}$ non è aperto, ma è chiuso perché $\{x\}^c =]-\infty, x[\cup]x, +\infty[$ è aperto nella topologia euclidea, quindi anche in quella di Sorgenfrey.

OSSERVAZIONE

Data una collezione $\{\mathcal{T}_i\}_{i\in I}$ di topologie, la loro intersezione $\mathcal{T}$ è una topologia. Le topologie dell'insieme sono tutte e sole quelle che contengono un insieme $S \subseteq \mathcal{P}(X)$, l'intersezione $\mathcal{T}$ è la topologia che include S, quella meno fine in assoluto.

TOPOLOGIA DI ZARISKI

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Sia $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ l'anello dei polinomi in m indeterminate a coefficienti in $\mathbb{K}$. Diciamo che $X \in \mathbb{K}^m$ è chiuso nella topologia di Zariski se X è il luogo di zeri di un insieme finito di polinomi:

$$X = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid q_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = q_s(x_1, \dots, x_m) = 0\}$$

Verifichiamo che questa è una topologia:

- $\mathbb{K}^m = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid 0 = 0\}$; $\emptyset = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid 1 = 0\}$;
- $\bigcap_{i \in \pi} X_i = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid q_{i,k(i)}(x_1, \dots, x_m) = 0, \ i \in \pi\} =$
$= \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid \bigcup_{i \in \pi} q_{i,k(i)}(x_1, \dots, x_m) = 0\}$,

dunque è un chiuso. Il passaggio ad un insieme finito di polinomi è garantito da un teorema che, data la complessità delle conoscenze richieste, enunciamo soltanto:

TEOREMA (DELLE BASI DI HILBERT) (SOLO ENUNCIATO)

Ogni ideale $\mu \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_m]$ è finitamente generato.

- $X_1 = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid p_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = p_k(x_1, \dots, x_m) = 0\}$,
$X_2 = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid q_1(x_1, \dots, x_m) = \dots = q_h(x_1, \dots, x_m) = 0\} \Rightarrow$
$\Rightarrow X_1 \cup X_2 = \{(x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{K}^m \mid p_i q_j(x_1, \dots, x_m) = 0 \ \forall i, \forall j\}$ è un chiuso.

Questa è una topologia su $\mathbb{K}^m$, ovvero, se vogliamo, su $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, ad esempio, come già vista con la topologia indotta. Notiamo che i punti sono chiusi:

$$\{\vec{x}\} = \{(x) \in \mathbb{R}^n \mid x - \vec{x} = 0\}$$

PARTE INTERNA, CHIUSURA, INTORNI

Sia X uno spazio topologico, $B \subseteq X$. Si dicono:

- PARTE INTERNA di B il più grande aperto contenuto in B, cioè l'unione di tutti gli aperti contenuti in B;
- CHIUSURA di B il più piccolo chiuso contenente B, cioè l'intersezione di tutti i chiusi contenenti B.

La parte interna e la chiusura di $B \subseteq X$ si denotano con B° e $\bar{B}$. È ovvio che $B^\circ \subseteq B \subseteq \bar{B}$.

Si definisce la FRONTIERA di B:

$$\partial B = \bar{B} - B^\circ = \bar{B} \cap X - B^\circ$$

I punti in B° si dicono INTERNI; i punti in $\bar{B}$ si dicono ADERENTI. È chiaro che se $x \in B^\circ$ è un punto interno, esso è un punto aderente. Se $B = B^\circ$, B è aperto; se $B = \bar{B}$, B è chiuso. Si noti che i punti frontiera sono aderenti a B e $X - B$.

Un sottoinsieme A di uno spazio topologico si dice DENSO se $\bar{A} = X$. Ad esempio, $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$.

Sia ora X uno spazio topologico, e $x \in X$. Un sottoinsieme $U \subseteq X$ è INTORNO di x se $x \in U$, cioè se esiste un aperto V tale che $x \in V$, $V \subseteq U$.

Sia $I(x)$ la famiglia di tutti gli intorni di x. Dato allora $A \subseteq X$, per definizione:

$$\mathring{A} = \{ x \in X \mid A \in I(x) \},$$

da cui deriviamo che un insieme è aperto se e solo se è intorno di ogni suo punto.

PROPOSIZIONE

Sia $x \in X$. Si ha:

- $U \in I(x),\ U \subseteq V \Rightarrow V \in I(x)$;
- $U, V \in I(x) \Rightarrow U \cap V \in I(x)$.

Dim.

Se $U \in I(x)$:

$\exists\, W$ aperto tale che $x \in W \subseteq U$

Ma allora:

$\exists\, U$ aperto tale che $x \in U$, $U \neq V$,

cioè $V \in I(x)$. Ed in questo:

$\exists\, A$ aperto tale che $x \in A$, $A \subseteq U$;

$\exists\, B$ aperto tale che $x \in B$, $B \subseteq V$.

Allora:

$\exists\, A \cap B$ aperto tale che $x \in A \cap B$, $A \cap B \subseteq U \cap V$, c.v.d.

Sia ora X uno spazio topologico, e $A \subseteq X$. Sia $x \in X$. Allora:

$$x \in \bar{A} \iff \forall\, U \in I(x) : U \cap A \neq \emptyset$$

Dim.:

$$x \notin \bar{A} \iff x \in (X - A)^{\circ} \iff \exists\, U \in I(x) \text{ t.c. } U \subseteq X - A \iff$$

$$\iff \exists\, U \in I(x) \text{ t.c. } U \cap A = \emptyset, \text{ c.v.d.}$$

Concludiamo con un'ultima definizione.

Sia $x \in X$, con X spazio topologico. Una sottofamiglia $J \subseteq I(x)$ è detta BASE LOCALE oppure SISTEMA FONDAMENTALE di intorni di x se e solo se:

$$\forall\, U \in I(x)\ \exists\, A \in J \text{ t.c. } A \subseteq U$$

OSSERVAZIONE

Nella topologia cofinita, ogni insieme non vuoto è denso in X. Infatti l'unico chiuso che lo contiene è proprio X.

Nella topologia di Zariski, ogni palla aperta è denso. Un chiuso diverso da X è un luogo di zeri di certi polinomi, e questo luogo di zeri non può includere una palla aperta.

OSSERVAZIONE

Sia $U \in I(x)$. Allora gli intorni di x contenuti in U formano un sistema fondamentale di intorni di x.

OSSERVAZIONE

Se B è una base della topologia, allora gli aperti di B che contengono x formano un sistema fondamentale di intorni di x.

SPAZI METRICI

Sia X un insieme (non vuoto per non creare banalità).
Una distanza d su X è un'applicazione $d: X \times X \to \mathbb{R}$ soddisfacente queste tre proprietà:

- $\forall\, x, y \in X: d(x,y) \geq 0 \quad (d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y)$;
- $\forall\, x, y \in X: d(x,y) = d(y,x)$;
- $\forall\, x, y, z \in X: d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

Una coppia (X,d) dove X è un insieme e d è una distanza su di esso si dice SPAZIO METRICO.

Es. Su X qualsiasi si può definire la DISTANZA DISCRETA:

$$d: X \times X \to \mathbb{R}, \quad d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases}$$

Es. $(\mathbb{R}, d)$, dove $d(x,y) = |x-y|$ è uno spazio metrico.

Es. Su $\mathbb{R}^m$ o $\mathbb{C}^m$ si può definire la DISTANZA EUCLIDEA:

$$d: \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \qquad d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|^2}$$

Altre distanze sono le seguenti:

- $\bar{d}(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$ (LIMITAZIONE STANDARD di d);
- $d_1(x,y) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|$;
- $d_\infty(x,y) = \max_{1 \leq i \leq m} \{|x_i - y_i|\}$.

Dimostriamo ad esempio che la limitazione standard di d è una nuova distanza. La terza proprietà è l'unica non banale: se $P, Q, R \in \mathbb{R}^m$, se $d(P,Q) + d(Q,R) \geq 1$ allora banalmente la disuguaglianza triangolare è soddisfatta; viceversa, se $d(P,Q) + d(Q,R) < 1$, allora $d(P,R) \leq d(P,Q) + d(Q,R) < 1 \Rightarrow$
$\Rightarrow \bar{d}(P,R) = d(P,R) \Rightarrow \bar{d}(P,R) \leq \bar{d}(P,Q) + \bar{d}(Q,R)$.

Si può dire che $\bar{d}$ è equivalente a d nel senso precedente.

Dimostriamo ora che d_1 è una distanza. Anche in questo caso è unica proprietà non banale è la terza. Procediamo nel seguente modo: d_1 coincide con la distanza euclidea su $\mathbb{R}$ ($d(x,y) = |x-y|$). Allora:

$\forall i = 1, \dots, n$: $|x_{i,P} - x_{i,R}| \le |x_{i,P} - x_{i,Q}| + |x_{i,Q} - x_{i,R}| \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} |x_{i,P} - x_{i,R}| \le \sum_{i=1}^{n} |x_{i,P} - x_{i,Q}| + \sum_{i=1}^{n} |x_{i,Q} - x_{i,R}| \Rightarrow$

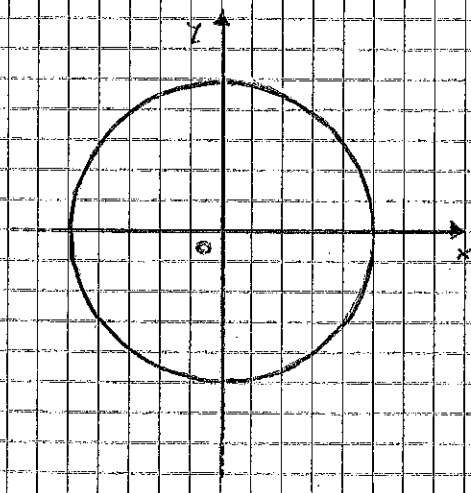
$\Rightarrow d_1(P,R) \le d_1(P,Q) + d_1(Q,R)$.

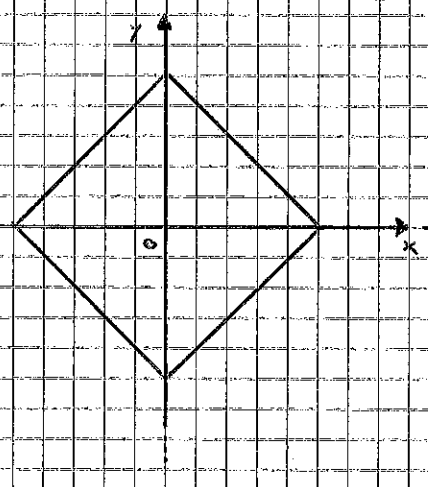
Per dimostrare la terza proprietà per d_∞ procediamo come prima, in generale, la somma dei moduli è maggiore o uguale del massimo di una somma.

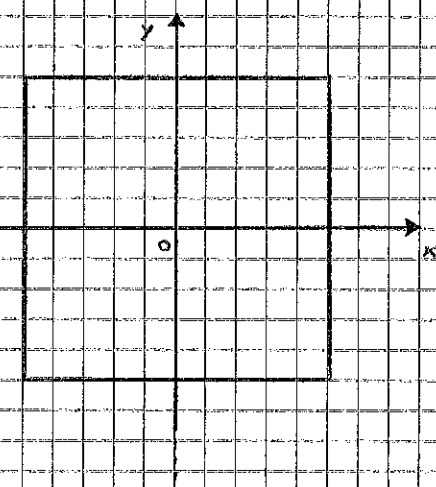
Sia ora (X,d) uno spazio metrico. Si dice PALLA APERTA di centro x_0 e raggio r (rispetto alla distanza d):

$$B_d(x_0, r) = \{ y \in X \mid d(x_0, y) < r \}$$

Rappresentiamo allora $B_d(0,1)$, $B_{d_1}(0,1)$, $B_{d_\infty}(0,1)$







Sia (X,d) spazio metrico. Nella TOPOLOGIA INDOTTA da d su X, $A \subseteq X$ è aperto se e solo se:

$\forall x \in A \ \exists B_d(x, r), r > 0$ s.t. $B_d(x, r) \subseteq A$

questa è una Topologia, infatti:

- $X = \bigcup_{x \in X} B_d(x, 1)$; una unione di aperti ($\emptyset$) è aperta;
- $A = \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$, A_i aperti; $x \in A \Rightarrow \exists j$ s.t. $x \in A_j \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists r > 0$ s.t. $B_d(x, r) \subseteq A_j \subseteq A \Rightarrow A$ è aperto;
- A, B aperti, $x \in A \cap B \Rightarrow \exists r', r'' > 0$ s.t. $B_d(x, r') \subseteq A$, $B_d(x, r'') \subseteq B \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists r = \min\{r', r''\} > 0$ s.t. $B_d(x, r) \in A \cap B \Rightarrow A \cap B$ è aperto.

OSSERVAZIONE

Per TOPOLOGIA CLASSICA su $\mathbb{R}^n$ o $\mathbb{C}^n$ si intende la topologia indotta dalla distanza euclidea.

PROPOSIZIONE

Nella topologia indotta da una distanza:

- le palle aperte sono aperti;
- le palle aperte sono una base della topologia;
- un sottoinsieme U è intorno di $x \in X$ se e solo se: $\exists\, r > 0$ tale che $B(x,r) \subseteq U$.

Dim.

- Sia $y \in B(x,r)$. Sia $s = r - d(x,y) > 0$. Allora, sfruttando la disuguaglianza triangolare: $\forall\, z \in B(y,s)$: $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \leq d(x,y) + s < r \Rightarrow B(y,s) \subseteq B(x,r)$;
- È equivalente dimostrare che un sottoinsieme aperto è unione di palle aperte e viceversa: per quanto detto, il viceversa è banale. Sia A aperto. Allora: $\forall\, x \in A\ \exists\, r(x) > 0$ s.t. $B(x, r(x)) \subseteq A \Rightarrow A = \bigcup_{x \in A} B(x, r(x))$.
- Sia $U \in \mathcal{T}(x)$. Allora esiste A aperto tale che $A \subseteq U$, $x \in A$. Dato che A è aperto: $\exists\, r > 0$ s.t. $B(x,r) \subseteq A \subseteq U$. Viceversa, se $B(x,r) \subseteq U$ per un $r > 0$, dato che $B(x,r)$ è aperto, $U \in \mathcal{T}(x)$, c.v.d.

TOPOLOGIE EQUIVALENTI

Siano $\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ due topologie su X.

$\mathcal{T}$ e $\mathcal{T}'$ si dicono EQUIVALENTI se ciascuna delle due è più fine dell'altra, cioè se gli aperti della prima lo sono per la seconda e viceversa.

Due topologie sono equivalenti se e solo se ogni palla aperta per $\mathcal{T}$ contiene una palla aperta per $\mathcal{T}'$, e ogni palla aperta per $\mathcal{T}'$ contiene una palla aperta per $\mathcal{T}$.

Infatti:

A è aperto in $\mathcal{T} \Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists B_{\mathcal{T}}(x, r(x)), r(x) > 0$ t.c. $B_{\mathcal{T}}(x, r(x)) \subseteq A \Leftrightarrow \forall x \in A \ \exists B'_{\mathcal{T}'}(x, r'(x)) \ r'(x) > 0$ t.c. $B'_{\mathcal{T}'}(x, r'(x)) \subseteq A \Leftrightarrow A$ è aperto in $\mathcal{T}'$.

Notiamo che la funzione $d_3 : X \to \mathbb{R}$ $d_3(x) = d(x,y)$ è continua: infatti, dalla disuguaglianza triangolare si ottiene la 1-Lipschitzianità:

$$\left.\begin{array}{l} d(z,x) \leq d(z,y) + d(x,y) \\ d(z,y) \leq d(z,x) + d(x,y) \end{array}\right\} \Rightarrow |d_z(x) - d_z(y)| \leq d(x,y)$$

PROPOSIZIONE

Siano h, d due distanze sull'insieme X. h induce una topologia più fine di d se e solo se:

$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall y \in X \quad h(x,y) < \varepsilon \Rightarrow d(x,y) < \delta$

Dim.

Discende dalla definizione di funzione continua, considerando la funzione identità $(X, h) \longrightarrow (X, d)$, c.v.d.

COROLLARIO

Condizione sufficiente affinché due distanze inducano la stessa topologia è che esistano due costanti positive a, b tali che:

$\forall x, y \in X : \ a\, d(x,y) \leq h(x,y) \leq b\, d(x,y)$

Dim.

Evidente, discende subito dalla proposizione precedente, c.v.d.

OSSERVAZIONE

In $\mathbb{R}^n$, le distanze d_∞, d_1, d_2 inducono la stessa topologia. In forte sintesi:

$$d_\infty \leq d_2 \leq d_1 \leq n \cdot d_\infty$$

PROPOSIZIONE

Siano d, h due distanze su X e c, c' numeri positivi. Condizione sufficiente affinché d induca una topologia più fine rispetto ad h è che valga:

$$\forall x, y \in X : d(x,y) \Rightarrow \min\{c, h(x,y)\}$$

Dim. $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \beta := \min\left\{\frac{\varepsilon}{c}, \frac{\varepsilon}{c'}\right\} : d(x,y) < \beta \Rightarrow$

$$\Rightarrow \min\{c, h(x,y)\} < \beta \Rightarrow \min\{c, h(x,y)\} = h(x,y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(x,y) < \min\{c, \varepsilon\} \Rightarrow h(x,y) < \varepsilon, \ c, c' > 0.$$

COROLLARIO:

Sia d una distanza su X. Allora:

- d induce la stessa topologia di $\bar{d} := \min(1, d)$;
- d induce la stessa topologia di $\frac{d}{1+d} = \delta$.

Dim.

La prima si ottiene dalla proposizione precedente, considerando che:

$$\bar{d}(x,y) := \min(1, d(x,y)), \quad d(x,y) \geq \frac{\min(1, d(x,y))}{1}$$

La seconda si ottiene mentre che:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} : d(x,y) < \delta \Rightarrow \delta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta := \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} : \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)} < \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} \Rightarrow (1+\varepsilon)\, d(x,y) < (1+d(x,y))\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d(x,y) < \varepsilon, \ c, c' > 0.$$

OSSERVAZIONE

Tutte le distanze finora trattate ($d, d_1, d_\infty, \bar{d}, \delta$) sono tra loro equivalenti.

CONTINUITÀ

Siano $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che x è ADERENTE ad A se è possibile trovare punti di A arbitrariamente vicini a x.

Dotando di $\mathbb{R}^n$ della distanza euclidea, x è aderente ad A se e solo se:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists p \in A \ | \ d(p, x) < \varepsilon$$

Siano ora $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $Y \subseteq \mathbb{R}^m$. Un'applicazione $f: X \to Y$ si dice CONTINUA se per ogni $A \subseteq X$ e $x \in X$ aderente ad A, $f(x)$ è aderente ad $f(A)$.

Siano ora X, Y spazi Topologici. Una funzione $f: X \to Y$ si dice CONTINUA se per ogni $A \subseteq Y$ aperto si ha $f^{-1}(A) = \{x \in X \mid f(x) \in A\}$ aperto in X.

Osservando ora che:

$$f^{-1}(Y - A) = X - f^{-1}(A), \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i),$$

si ha che f è continua se per ogni $C \subseteq Y$ chiuso si ha $f^{-1}(C)$ chiuso in X.

Diremo inoltre che $f: X \to Y$, con X, Y spazi topologici, è continua in $x \in X$ se per ogni intorno di $f(x)$, $U \subseteq Y$, esiste un intorno di x $V \subseteq X$ tale che $f(V) \subseteq U$.

PROPOSIZIONE

$f: X \to Y$, con X, Y spazi topologici, è continua se e solo se lo è per ogni $x \in X$.

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Sia U' un intorno di $f(x)$. Esiste allora $U \subseteq U'$ aperto. Dato che $U \ni f(x)$, allora $x \in f^{-1}(U)$, che è aperto per ipotesi. Allora $f^{-1}(U)$ è un intorno di x, tale che $f(f^{-1}(U)) \subseteq U'$.

Viceversa, sia A aperto in Y: allora A è intorno di ogni suo punto. Se $x \in f^{-1}(A)$, allora, esiste un intorno V di x tale che $f(V) \subseteq A$, allora $V \subseteq f^{-1}(A)$, cioè $f^{-1}(A)$ è intorno di ogni suo punto, cioè è aperto. c.v.d.

PROPOSIZIONE

Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ (X, Y, Z spazi Topologici) sono continue, allora $g \circ f: X \to Z$ è continua.

Dim.

Sia A aperto in Z. Allora $g^{-1}(A)$ è aperto in Y. Allora $f^{-1}(g^{-1}(A)) = (g \circ f)^{-1}(A)$ è aperto in X, da cui la tesi, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Siano (X, τ) e (Y, τ') due spazi Topologici. Sia $f: X \to Y$. Allora f è continua se e solo se:

$\forall \Omega \in \tau' : f^{-1}(\Omega) \in \tau$

Siano ora τ e τ' due topologie su $\mathbb{R}$. Sia τ meno fine di τ'. Sia $f: \mathbb{R}_\tau \to \mathbb{R}_{\tau'}$ continua

$\forall \Omega \in \tau : f^{-1}(\Omega) \in \tau$

Non è detto allora che $f: \mathbb{R}_\tau \to \mathbb{R}_{\tau'}$ sia continua, perché non è detto che le controimmagini degli aperti di τ' siano aperti in τ. Non è detto, cioè, che $f: \mathbb{R}_\tau \to \mathbb{R}_{\tau'}$ sia continua. È però certo, e lo sono è evidente, che $f: \mathbb{R}_{\tau'} \to \mathbb{R}_\tau$ è continua.

Un discorso del tutto simile si può effettuare considerando una $g: \mathbb{R}_\tau \to \mathbb{R}_{\tau'}$ continua. L'unica implicazione che ne deriva è che $g: \mathbb{R}_{\tau'} \to \mathbb{R}_\tau$ è continua.

In linea di principio, allora, per rendere continua una funzione occorre considerare una topologia il più fine possibile in partenza, e una il meno fine possibile in arrivo. Ad esempio, se $\mathbb{R}$ è dotato in partenza della topologia indotta dalla distanza discreta, ogni funzione risulta continua.

OMEOMORFISMI

Un OMEOMORFISMO è un applicazione continua e biiettiva con inversa continua. Per essere più precisi, un applicazione $f: X \to Y$ è un omeomorfismo se esiste $g: Y \to X$ continua tale che $g \circ f = Id_X$ e $f \circ g = Id_Y$.

Due spazi topologici sono omeomorfi se esiste un omeomorfismo tra essi (si noti che questa è una relazione di equivalenza).

Siano ora X, Y spazi topologici, $f: X \to Y$ si dice:

- APERTA se $\forall A$ aperto in X: $f(A)$ è aperto in Y;
- CHIUSA se $\forall C$ chiuso in X: $f(C)$ è chiuso in Y.

PROPOSIZIONE

Sia $f: X \to Y$ continua. Sono equivalenti i seguenti fatti:

- f è un omeomorfismo;
- f è chiusa e biiettiva;
- f è aperta e biiettiva.

Dim.

Se f è un omeomorfismo, so che esiste $g \overset{def}{=} f^{-1}$. Dunque: $\forall C$ chiuso in X: $g^{-1}(C) = f(C)$ è chiuso in Y, cioè f è chiusa e biiettiva.

Se dunque A è aperto e $f: X \to Y$ è chiusa e biiettiva, allora $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$ è chiuso, cioè $f(A)$ è aperto. Allora f è aperta e biiettiva.

Se infine $f: X \to Y$ è aperta e biiettiva, considerando $g \overset{def}{=} f^{-1}$, si ha:

$\forall A$ aperto in Y: $g(A) = f^{-1}(A)$ è aperto in X, cioè f è continua e biiettiva, c.v.d.

Due topologie, allora, omeomorfe sono equivalenti.

OSSERVAZIONE

Consideriamo $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Si definisce DISCO UNITARIO di dimensione n:

$$D^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \}$$

Si definisce SFERA UNITARIA di dimensione n:

$$S^n := \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$$

Si definisce PALLA APERTA di centro $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e raggio $r > 0$:

$$B(x_0, r) := \{ y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < r \}$$

A titolo di esempio, dimostriamo che, in Topologia, un quadrato e un cerchio sono equivalenti. Dati dunque in $\mathbb{R}^2$:

$$S^1 := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}, \quad P := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1 \},$$

due applicazioni:

$$f : S^1 \to P, \quad f(x,y) = \left(\frac{x}{|x| + |y|}, \frac{y}{|x| + |y|} \right)$$

$$g : P \to S^1, \quad g(y,x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

sono continue, e sono una l'inversa dell'altra.

Dunque S^1 e P sono omeomorfi, dunque equivalenti.

PROPOSIZIONE

Un chiuso e limitato $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ è omeomorfo a $[0,1]$.

Dim.

La funzione:

$$f : [a,b] \to [0,1], \quad x \to \frac{x-a}{b-a}$$

è palesemente continua e biiettiva, c.v.d.

COMPLEMENTI SULLA CONTINUITÀ

OSSERVAZIONE

Sia $\mathcal{B}$ una base della topologia di Y. Una funzione $f: X \to Y$, con X, Y spazi topologici, è continua se e solo se:

$\forall B \in \mathcal{B}$: $f^{-1}(B)$ è aperto in X,

dato che ogni aperto è unione di elementi di $\mathcal{B}$, e:

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcup_{i \in \Lambda} f^{-1}(A_i)$$

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione tra due spazi topologici. Allora f è continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ per ogni $A \subseteq X$.

Dim.

$f^{-1}(\overline{f(A)})$ è un chiuso che contiene A. Dunque $f^{-1}(\overline{f(A)}) \supseteq \overline{A} \Rightarrow \overline{f(A)} \supseteq f(\overline{A})$.

Viceversa, se per ogni $A \subseteq X$ vale $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, in particolare, per ogni chiuso $C \subseteq Y$, ponendo $A = f^{-1}(C)$, si ha:

$$f(\overline{f^{-1}(C)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(C))} = \overline{C} = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{(f^{-1}(C))} \subseteq f^{-1}(C) \Rightarrow f^{-1}(C) \text{ è chiuso, c.v.d.}$$

OSSERVAZIONI VARIE

PROPOSIZIONE

Siano A, B sottoinsiemi di uno spazio Topologico. Allora:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

$$\mathring{(A \cap B)} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$$

In generale, invece, non valgono:

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\mathring{(A \cup B)} = \mathring{A} \cup \mathring{B}$$

Dim.

$\overline{A} \cup \overline{B}$ è un chiuso contenente più di A che B, dunque contiene $\overline{A \cup B}$, dunque $\overline{A} \cup \overline{B} \supseteq \overline{A \cup B}$.

Viceversa, se $x \in \overline{A} \cup \overline{B}$ (supponiamo che $x \in \overline{A}$, il caso $x \in \overline{B}$ è analogo), allora:

$\forall$ U intorno di x: $U \cap A \neq \emptyset \Rightarrow U \cap (A \cup B) \neq \emptyset \Rightarrow$

$\Rightarrow x \in \overline{A \cup B}$.

Consideriamo gli insiemi $A =]1,2[$, $A' = [1,2]$, $B =]0,1[$, $B' = [0,1]$, tutti contenuti in $\mathbb{R}$. Allora

- $\mathring{(A' \cup B')} =]0,2[\neq]0,1[\cup]1,2[= \mathring{A} \cup \mathring{B}$;
- $\overline{A \cap B} = \emptyset = \{1\} = \overline{A} \cap \overline{B}$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia A denso in X, con X spazio Topologico. Allora:

$\forall$ aperto $U \neq X$: $U \subseteq \overline{U \cap A}$.

Dim.

Per ipotesi $U \cap A \neq \emptyset$. Preso $x \in U$ $\forall$ V intorno di x: $V \cap A \neq \emptyset$.

Per ogni intorno V di x, con $x \in U$: $V \cap (U \cap A) = (V \cap U) \cap A \neq \emptyset$. Allora $U \cap A \supseteq U$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $\mathcal{C}$ su $\mathbb{R}^2$ la topologia formata da $\mathbb{R}^2$, da Δ, e da tutti i dischi aperti centrati in 0. Dimostrare che si tratta di una topologia, e determinare la chiusura dell'insieme $\{xy = 1\}$.

Sia

- $\mathbb{R}^2$ e ϕ sono in $\mathcal{C}$ per ipotesi;
- $\Delta_{c_1} \cap \Delta_{c_2} = \Delta_{\min\{c_1, c_2\}} \in \mathcal{C}$;
- $\bigcup_{i \in A} \Delta_{c_i} = \Delta_{\sup_{i \in A} \{c_i\}} \in \mathcal{C}$.

Per dimostrare che la chiusura di $\{xy = 1\}$ è $\mathbb{R} - \Delta_{\sqrt{2}}$, poniamo che $(1,1)$ è il punto dell'iperbole più vicino a 0:

$$\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right)' = 2x - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x^3}(x^4 - 1) = 0 \iff x = \pm 1$$

Dato che $d((0,0),(1,1)) = \sqrt{2}$, allora la chiusura dell'iperbole è $\mathbb{R} - \Delta_{\sqrt{2}}$.

OSSERVAZIONE

Nella retta reale $\mathbb{R}$ dotata della topologia euclidea, gli intervalli $\left]-2^{-n}, 2^{-n}\right[_{n \in \mathbb{N}}$ sono un sistema fondamentale di intorni di 0.

PROPOSIZIONE

Dimostrare che in uno spazio topologico ogni sottoinsieme finito è chiuso se e solo se per ogni $x \in X$ si ha:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$$

Sia

Chiaramente $\{x\} \subseteq \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$. Sia $\{y\} \neq \{x\}$. Allora immediatamente $\{y\}$ è chiuso. Quindi $X - \{y\}$ è un aperto che contiene x. Quindi:

$$\{y\} \notin \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$$

Viceversa $\{x\}$ è chiuso perché $X - \{x\}$ è aperta, perché da $\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$ segue che in ogni coppia di punti distinti esiste un intorno esattamente aperto, che contiene esattamente uno dei

dice. Allora:

$\forall x \in X : \{x\}$ è aperto in τ $\Rightarrow$ U aperto intorno di x di $U \subseteq X - \{x\}$ $\Rightarrow$ $X - \{x\}$ è aperto $\Rightarrow$ $\{x\}$ è chiuso.

Di qui la tesi, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X un insieme e supponiamo dato, per ogni $x \in X$, una famiglia $\mathcal{I}(x)$ di sottoinsiemi di X in modo tale che le seguenti cinque condizioni siano soddisfatte:

- $\forall x \in X : X \in \mathcal{I}(x)$;
- $\forall U \in \mathcal{I}(x) : x \in U$;
- $U \in \mathcal{I}(x)$, $U \subseteq V \Rightarrow V \in \mathcal{I}(x)$;
- $U, V \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{I}(x)$;
- $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow \exists V \subseteq U$ s.t. $x \in V$ e $V \in \mathcal{I}(y)$ $\forall y \in V$.

Dimostrare che esiste una topologia su X, rispetto alla quale, per ogni $x \in X$, $\mathcal{I}(x)$ è la famiglia degli intorni di x.

Idea.

Definiamo gli aperti di $\mathcal{C}$ come l'insieme vuoto e tutti i sottoinsiemi di X che non contengono alcuni dei punti. Ci si aspetterà che per (1) X appartiene a ogni $\mathcal{I}(x)$. Sia ora $(A_i)_{i \in I}$ una famiglia di aperti tale $A = \bigcup A_i$. Preso $x \in A$, esiste A_i tale che $x \in A_i$. Allora A_i è intorno di x, e A lo è per la (3). Infine, sia $x \in A \cap B$, con A e B aperti. Allora $A \cap B \in \mathcal{I}(x)$ per (4), da cui $A \cap B$ è aperto.

Sia ora $\mathcal{J}(x)$ la famiglia degli intorni di x, vogliamo che $\mathcal{I}(x) = \mathcal{J}(x)$:

- $U \in \mathcal{I}(x) \Rightarrow \exists V \in \mathcal{C}$, $x \in V$, $V \subseteq U$ (per 3) $\Rightarrow U \in \mathcal{J}(x)$;
- $U \in \mathcal{J}(x) \Rightarrow \exists A$ aperto, $x \in A$, $A \subseteq U$. Allora $A \in \mathcal{I}(x)$, e per (3), $U \in \mathcal{I}(x)$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X un insieme finito. Chiamiamo OPERATORE DI CHIUSURA su X un'applicazione $C : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ che soddisfa le seguenti quattro proprietà:

- $A \subseteq C(A) \quad \forall A \subseteq X$;
- $C(A) = C(C(A)) \quad \forall A \subseteq X$;
- $C(\emptyset) = \emptyset$;
- $C(A \cup B) = C(A) \cup C(B) \quad \forall A, B \subseteq X$.

Dimostriamo che per ogni struttura topologica su X, l'applicazione $A \to \bar{A}$ è un operatore di chiusura e, viceversa, che per ogni operatore di chiusura C su X esiste una struttura topologica rispetto alla quale $C(A) = \bar{A}$.

Sia:

Per $A \subseteq X$, $\bar{A}$ è l'insieme dei chiusi contenenti A, dunque $A \subseteq \bar{A}$.

La chiusura di un chiuso è banalmente il chiuso stesso, l'insieme vuoto è chiuso, dunque $\overline{\emptyset} = \emptyset$.

Infine, è stato già dimostrato che $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

$A \to \bar{A}$ è dunque un operatore di chiusura.

Dato un operatore di chiusura C, definiamo i chiusi come quegli insiemi A tali che $A = C(A)$.

Dunque:

- $A \subseteq C(A) \subseteq X \Rightarrow X$ è chiuso; $\emptyset$ è chiuso per ipotesi;
- l'unione finita di chiusi è chiusa per ipotesi;
- siano $(A_i)_{i \in \Lambda}$ chiusi. Allora:

$$\bigcap_{i \in \Lambda} A_i = C\left(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right) = C\left(\left(A_i - \bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right) \cup \left(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right)\right) = C(A_i) = A_i$$

$$\forall i \in \Lambda \Rightarrow C\left(\bigcap_{i \in \Lambda} A_i\right) = \bigcap_{i \in \Lambda} A_i,$$

da cui l'intersezione arbitraria di chiusi è chiusa, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $\mathbb{R}_E$ la retta reale munita della topologia euclidea e $\mathbb{R}_S$ la retta reale munita della topologia di Sorgenfrey. Sia $f: \mathbb{R}_E \to \mathbb{R}_S$. Dimostrare che f è continua se e solo se è costante.

Dim.

L'insieme $[a, +\infty[$, con $a \in \mathbb{R}$, è sia aperto che chiuso nella topologia di Sorgenfrey. Abbiamo dunque individuato un insieme non vuoto e diverso da $\mathbb{R}$ sia aperto che chiuso. Insiemi di questo tipo non esistono in $\mathbb{R}_E$, dato che esso è CONNESSO (approfondiremo fra poco questo concetto).

Siano $x, y \in f(\mathbb{R})$, $x \neq y$. Supponiamo, senza perdere di generalità, $x < y$. Sia $z \in f^{-1}(y)$.

Siano:

$$S_y = \{ \omega \in \mathbb{R} \mid f([\omega, z]) \subseteq [y, +\infty[\}$$
$$S_y = \{ \omega \in \mathbb{R} \mid f([z, \omega]) \subseteq [y, +\infty[\}$$

Essendo $\mathbb{R}$ completo, S_y e S_y ammettono rispettivamente estremo superiore ed inferiore: siano σ e τ.

Dato che $[y, +\infty[$ è sia aperto che chiuso, se f è continua anche $f^{-1}([y, +\infty[)$ lo è. Allora σ e τ sono sia incluse che escluse dalla controimmagine, da cui necessariamente $\sigma = -\infty$ e $\tau = +\infty$. Allora $f(\mathbb{R}) \subseteq [y, +\infty[$, essendo perché $x \in f(\mathbb{R})$, $x < y$.

Allora se f è continua, è costante. Se viceversa è ovvio. Ci qui la tesi.

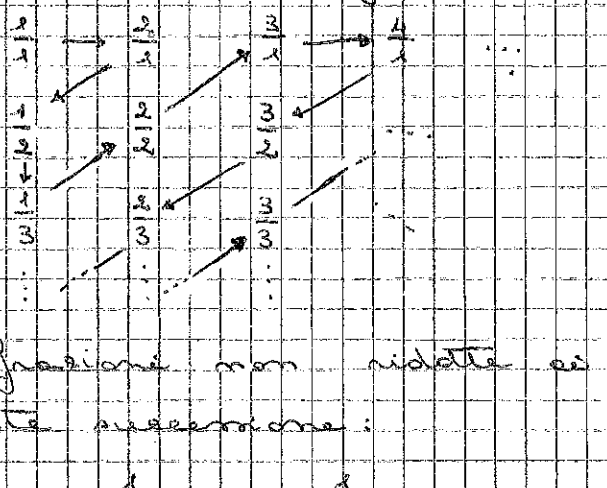
CARDINALITÀ DI $\mathbb{Q}$ E $\mathbb{R}$

PROPOSIZIONE

L'insieme dei razionali $\mathbb{Q}$ è numerabile. $\mathbb{R}$, invece, non lo è.

Dim.

Senza perdere di generalità, ci limitiamo ai razionali positivi. Ogni razionale positivo si può scrivere nella forma $\frac{a}{b}$, con a,b interi positivi. Costruiamo la seguente tabella:



Eliminando le frazioni non ridotte ai minimi termini, si ottiene la seguente successione:

$$a_1 = 1 \quad a_2 = 2 \quad a_3 = \frac{1}{2} \quad a_4 = \frac{1}{3} \quad a_5 = 3 \quad a_6 = 4 \quad a_7 = \frac{3}{2} \dots$$

L'ordine non è rispettato, ma comunque $\mathbb{Q}$ risulta ellenabile numerabile.

Se ora anche $\mathbb{R}$ fosse numerabile, allora lo sarebbe, ad esempio, anche $A = \mathbb{R} \cap]0,1[$. Potremmo allora contare i numeri di A:

$$x_1 = 0, a_{1,1}\, a_{1,2}\, a_{1,3} \dots$$
$$x_2 = 0, a_{2,1}\, a_{2,2}\, a_{2,3} \dots$$
$$\vdots$$

Ci basta allora fornire un numero $y \in]0,1[$ che però è diverso da tutti gli altri. Attuiamo allora il PROCESSO DIAGONALE DI CANTOR, ottenendo:

$$y = 0, b_1\, b_2\, b_3\, b_4 \dots,$$

con $b_i \neq a_{i,i}$ $\forall i \in \mathbb{N}$.

A non è dunque numerabile, dunque nemmeno $\mathbb{R}$, c.v.d.

ARCHIMEDEITÀ DI $\mathbb{R}$

Un campo ordinato $(\mathbb{K}, +, \cdot, \leq)$ si dice ARCHIMEDEO se:

$\forall\, x, y \in \mathbb{K},\ 0 < x < y : \exists\, n \in \mathbb{N}$ s.t. $nx > y$

Alcuni esempi archimedei sono $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Analizzeremo ora, però, un campo non archimedeo: il campo dei numeri IPERREALI.

Il campo degli iperreali ${}^*\mathbb{R}$ è un estensione di $\mathbb{R}$, che contiene:

- numeri INFINITESIMI, cioè non nulli e minori di $\frac{1}{n}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$;
- numeri INFINITI, cioè numeri maggiori di n per ogni $n \in \mathbb{N}$.

È immediato notare che, per definizione, ${}^*\mathbb{R}$ non è archimedeo. Infatti, preso ε infinitesimo e x reale:

$$n\varepsilon < x \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

ESERCIZI VARI

Es. Sia (X, d) uno spazio metrico. Sia $A \subseteq X$ dove:

$$\forall x \in X: \quad x \in \bar{A} \iff d(x, A) = 0$$

Dimostriamo innanzitutto che la funzione seguente è continua:

$$d: X \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow d(x, A)$$

Infatti:

$$\forall a \in A: \; d(x,a) \leq d(x,y) + d(y,a) \Rightarrow d(x,A) \leq$$
$$\leq d(x,y) + d(y,a) \Rightarrow d(x,A) - d(y,A) \leq d(x,y),$$

e similmente anche $d(y,A) - d(x,A) \leq d(x,y)$, dove:

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y)$$

Ora:

- $d(x,A) = \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ aperto $\ni x \in B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap A = \emptyset \Rightarrow x \notin \bar{A}$.
- $d(x,A) = 0 \Rightarrow \forall B(x,\delta)$, $\delta > 0$: $B(x,\delta) \cap A \neq 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall U$ intorno di x: $U \cap A = \emptyset \Rightarrow x \in \bar{A}$.

Es. Sia $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ il piano reale dotato della topologia euclidea. Innanzitutto un punto è chiuso, perché presi x e y in $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ esiste un intorno di x che non contiene y (ad esempio $d(x,y) = \delta$, si considera $B\left(x, \frac{\delta}{2}\right)$). Dunque $\{x\}' = \{x\}$, quindi $\{x\}$ è chiuso.

Inoltre poiché i polinomi in una o due variabili sono funzioni continue, una retta e un iperbole sono chiusi, perché entrambi immagini di $\{0\}$ secondo funzioni continue. Se ad esempio consideriamo $\mathbb{R}^2$ e l'iperbole di equazione $xy - 1 = 0$, questi due chiusi sono disgiunti, ma la loro distanza è 0. In $\mathbb{R}^2_\varepsilon$ è quindi impossibile inscrivere due chiusi disgiunti a distanza 0.

Es. È possibile trovare due chiusi disgiunti a distanza 0 in $\mathbb{R}$ dotato della topologia euclidea?

In base all'esercizio precedente, ciò è impossibile. Infatti, i due insiemi:

$$\mathbb{Z} \qquad \left\{ m + \frac{1}{m} \right\}_{m \geq 2}$$

sono chiusi e disgiunti, e:

$$d\left(\mathbb{Z}, \left\{ m + \frac{1}{m} \right\}_{m \geq 2}\right) = \inf_{m \geq 2} \frac{1}{m} = 0$$

Es. È noto che $\mathbb{R}^+$ non è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}$, se $\mathbb{R}$ è munito della struttura usuale. Tuttavia, è definibile una struttura di $\mathbb{R}$-spazio vettoriale per $\mathbb{R}^+$:

$$+ : (e^\alpha, e^\beta) = (e^{\alpha+\beta}) = e^\alpha e^\beta$$

$$\cdot : (\gamma, e^\alpha) = (e^\alpha)^\gamma = e^{\alpha\gamma}$$

SOTTOSPAZI TOPOLOGICI

Sia X uno spazio topologico, e $Y \subseteq X$. Allora Y eredita in modo naturale una struttura di spazio topologico.

Diciamo che $U \subseteq Y$ è APERTO in Y se $U = Y \cap V$ per un aperto $V \subseteq X$; similmente, $U' \subseteq Y$ è CHIUSO in Y se $U' = Y \cap V'$, per un chiuso $V' \subseteq X$.

Verifichiamo che questa è una topologia:

- $\emptyset = \emptyset \cap Y$, $\emptyset \subseteq X$; $Y = X \cap Y$, $X \subseteq X$;
- $(Y \cap A) \cap (Y \cap B)$, A e B aperti in $X \Rightarrow (Y \cap (A \cap B))$, aperto in Y perché $A \cap B$ lo è in X;
- $\bigcup_{i \in \Delta} (A_i \cap Y)$, A_i aperti in $X = Y \cap \left(\bigcup_{i \in \Delta} A_i \right)$, aperto perché $\bigcup_{i \in \Delta} A_i$ lo è in X.

La topologia appena definita è detta TOPOLOGIA DI SOTTOSPAZIO. Y si dice quindi detto SOTTOSPAZIO TOPOLOGICO.

Alcune osservazioni:

- Se $\mathcal{B}$ è una base della topologia di X, allora $\mathcal{B}' = \{B \cap Y \mid B \in \mathcal{B}\}$ è una base della topologia indotta di Y;
- questa topologia è tale che $i : Y \to X$ risulta continua, infatti, per ogni aperto $A \subseteq X$, $i^{-1}(A) = A \cap Y$ è per definizione un aperto. Più precisamente, è la topologia meno fine tra quelle che rendono $i : Y \to X$ continua.
- se (X, d) è uno spazio metrico, $(Y, d|_{Y \times Y})$ è uno sottospazio metrico.

Un sottospazio topologico $\mathcal{Z}$ di uno spazio topologico X si dice DISCRETO se la topologia di $\mathcal{Z}$ è quella discreta: equivalentemente, se e solo se per ogni $z \in \mathcal{Z}$ esiste $U \subseteq X$ aperto tale che $U \cap \mathcal{Z} = \{z\}$.

PROPOSIZIONE

Siano Z, X spazi topologici. Sia $Y \subseteq X$ un sottospazio topologico. Siano $f: Z \to Y$ e $if: Z \to X$, dove $i: Y \to X$ è l'inclusione. Allora f è continua se e solo se lo è if.

Dim.

Se f è continua, if lo è, essendo composizione di funzioni continue, è continua.

Viceversa, se if è continua e sia $A \subseteq Y$ aperto in Y. Allora $A = Y \cap U$ per $U \subseteq X$ aperto in X. Si ha allora:

$$f^{-1}(A) = (if)^{-1}(U) \text{ aperto in } Z,$$

onde f è continua, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia Y un sottospazio topologico di uno spazio topologico X, e $A \subseteq Y$. Allora la chiusura di A in Y è uguale alla chiusura di A in X intersecata con Y.

Dim.

$$A \text{ in } Y = \bigcap_{\substack{i \in A \\ C_i \text{ chiuso} \\ \text{in } Y}} C_i = \bigcap_{\substack{i \in A \\ C_i \text{ chiuso} \\ \text{in } X}} (C_i \cap Y) = Y \cap \left(\bigcap_{\substack{i \in A \\ C_i \text{ chiuso} \\ \text{in } X}} C_i \right), \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio topologico, $Y \subseteq X$ un suo sottospazio e $A \subseteq Y$ un sottoinsieme. Preso $x \in X$ tale che x è interno di Y, allora $A \in \mathcal{I}_x(Y)$ se e solo se $A \in \mathcal{I}_x(X)$.

Dim.

Sia U un aperto di X tale che $x \in U \subseteq Y$. Se A è intorno di x in X esiste V aperto in X che contiene x ed è contenuto in A. Allora $V' = V \cap Y$ è aperto in Y contenente x e contenuto in A, dunque A è intorno di x in Y.

Viceversa, se A è intorno di x in Y, esiste $V \subseteq A$ aperto in Y e contenente x. $U \cap V$ è allora aperto in U (dunque in X), è contenuto in A e contiene x, da cui A è intorno di x in X, c.v.d.

IMMERSIONI

Un'applicazione $f: X \to Y$ continua e iniettiva tra spazi topologici si dice IMMERSIONE TOPOLOGICA se gli aperti di X sono tutti e soli i sottoinsiemi del tipo $f^{-1}(A)$, con A aperto in Y; equivalentemente, $f: X \to Y$ è un'immersione se e solo se X è omeomorfo a $f(X)$.

Un'immersione si dice:

- CHIUSA se è anche un'applicazione chiusa;
- APERTA se è anche un'applicazione aperta.

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ continua. Se f è chiusa (aperta) e iniettiva, allora f è un'immersione chiusa (aperta).

Dim.

Sia f iniettiva, continua e chiusa (e così in cui è aperta è analoga). Per ogni chiuso $C \subseteq X$ si ha $f(C) = f(C)$ chiuso in Y, dunque chiuso anche nella topologia indotta di $f(X)$. Allora la restrizione $f|^{f(X)}: X \to f(X)$ è continua e chiusa, e inoltre biunivoca, dunque un omeomorfismo, c.v.d.

Ad esempio, la funzione:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to (t, t^2)$$

è un'immersione, poiché $\mathbb{R}$ è omeomorfo a $f(\mathbb{R})$ in maniera evidente.

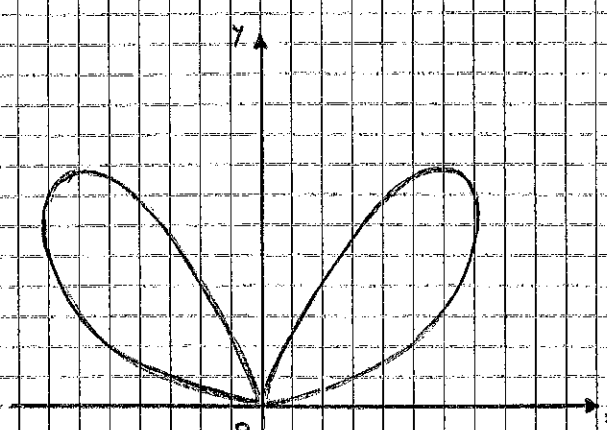
La funzione:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$$
$$t \to \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4}\right)$$

non è invece un'immersione, poiché $\mathbb{R}$ non è omeomorfo a $f(\mathbb{R})$. Ad esempio, notiamo che $f([10^3, +\infty[)$, dove $(0,0) \notin f([10^3, +\infty[)$, ma essendo $(0,0)$ il limite così:

$$\lim_{t \to +\infty} \left(\frac{t}{1+t^4}, \frac{t^2}{1+t^4}\right) = (0,0)$$

si ha $(0,0) \in \overline{f([10^3, +\infty[)}$, da cui $f([10^3, +\infty[)$ non è chiuso.



PRODOTTI TOPOLOGICI

Dati P, Q spazi topologici, definiamo il prodotto cartesiano come $P \times Q$:



dove $p : P \times Q \to P$ e $q : P \times Q \to Q$ le proiezioni canoniche sui fattori diretti.

Vogliamo dotare $P \times Q$ di una struttura topologica che renda p e q continue. Ovviamente l'insieme di tali topologie non è vuoto perché la topologia discreta è valida. L'intersezione di tutte, infatti, è la topologia meno fine in assoluto tra quelle che vogliamo contenere, p e q.

Chiameremo TOPOLOGIA PRODOTTO questa topologia.

È necessario che:

$$p^{-1}(U) = U \times Y$$

$$q^{-1}(V) = X \times V$$

siano aperti se U e V lo sono. Dunque:

$$U \times V = p^{-1}(U) \cap q^{-1}(V)$$

deve essere aperto.

L'insieme dei sottoinsiemi della forma $U \times V$, con U aperto in X e V aperto in Y, però, non è una base di una topologia:

- $X \times Y \in \bigcup_{U,V} U \times V$;
- $(U \times V) \cap (A \times B) = (U \cap A) \times (V \cap B) \in \mathcal{B}$.

Questo è effettivamente la topologia prodotto, che questa topologia sia la più fine delle topologie prodotto, è ovvio; d'altra parte, $U \times V = p^{-1}(U) \cap p^{-1}(V)$ è un aperto nella topologia prodotto, dunque le due topologie sono equivalenti.

OSSERVAZIONE

Se diciamo ovvio per un prodotto di un numero finito di spazi topologici.

PROPOSIZIONE

Le proiezioni p e q sono applicazioni aperte, ma non chiuse.

Dim.

Sia $y \in Q$. Allora, se $U \subseteq P$ e $V \subseteq Q$ sono aperti si ha:

$$(U \times V) \cap (P \times \{y\}) = \begin{cases} U \times \{y\} & \text{se } y \in V \\ \emptyset & \text{se } y \notin V \end{cases}$$

Gli aperti del sottospazio $P \times \{y\}$ sono tutti e soli della forma $U \times \{y\}$ al variare di U tra gli aperti di P. Allora $p : P \times \{y\} \to P$ è un omeomorfismo. Sia ora A aperto in $P \times Q$. Allora:

$$p(A) = \bigcup_{y \in Q} (A \cap P \times \{y\})$$

è unione di aperti, dunque è aperto.

Consideriamo ora in $\mathbb{R}^2$ l'iperbole $C = \{xy = 1\}$. Essa è chiusa ma la proiezione su entrambi gli assi è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, che non è un chiuso perché $\{0\}$ non è un aperto, poiché esso non contiene nessuna palla aperta, c.v.d.

OSSERVAZIONE

La topologia euclidea su $\mathbb{R}^n$ coincide con la topologia prodotto di n copie di $\mathbb{R}$. Ciò generalizza, però, ciò non è vero.

Ad esempio, su $\mathbb{R}_z$ lo spazio topologico $\mathbb{R}$ munito della topologia di Zariski. La determiniamo la topologia prodotto di $\mathbb{R}_z \times \mathbb{R}_z$ ha come chiusi:

- $\emptyset$ e $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$;
- le unioni finite di punti del piano e di rette parallele ad uno degli assi.

Allora ad esempio Δ non è chiusa in questa topologia, ma lo è della topologia di Zariski di $\mathbb{R}^2_z$, essendo:

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y = 0\}$$

La topologia di Zariski, dunque, non si ottiene come prodotto di spazi.

SPAZI DI HAUSDORFF

Uno spazio topologico è uno SPAZIO DI HAUSDORFF se punti distinti ammettono intorni disgiunti, cioè se, dati due punti $x, y \in X$:

$$\exists\, U \in \tau(x),\ V \in \tau(y) \text{ t.c. } U \cap V = \emptyset$$

Non tutti gli spazi topologici sono di Hausdorff: ad esempio, $\mathbb{R}$ dotato della topologia indiscreta non è di Hausdorff, in quanto evidente; $\mathbb{R}$ dotato della topologia cofinita non è di Hausdorff, perché in questa topologia due aperti hanno sempre intersezione non vuota.

Ogni spazio metrico, invece, è uno spazio di Hausdorff. Infatti $x \neq y$, $d(x,y) > 0$, da cui, ad esempio:

$$\exists\, B\left(x, \frac{d(x,y)}{3}\right), B\left(y, \frac{d(x,y)}{3}\right) \text{ t.c. } B\left(x, \frac{d(x,y)}{3}\right) \cap B\left(y, \frac{d(x,y)}{3}\right) = \emptyset$$

OSSERVAZIONE

Uno spazio di Hausdorff si dice anche T_2.

Uno spazio topologico si dice T_0 se dati due punti esiste un intorno del primo che non include il secondo; si dice T_1 se per entrambi i punti esiste un intorno che li include ed esclude l'altro; si dice T_2 se gli intorni hanno sempre aperti a intersezione vuota.

OSSERVAZIONE

In un T_1 i punti sono chiusi (già dimostrato).

Dunque in uno spazio T_2 i punti sono chiusi.

PROPOSIZIONE

Sottospazi e prodotti di spazi T_2 sono T_2.

DEM

Sia X uno spazio T_2, sia $Y \subseteq X$ sottospazio. Siano $x, y \in Y$, $x \neq y$, allora

$\exists\, U, V$ aperti in X t.c. $x \in U$, $y \in V$ e $U \cap V = \emptyset \Rightarrow$

$\exists\, U \cap Y, V \cap Y$ aperti in Y t.c. $x \in U \cap Y$, $y \in V \cap Y$ e $(U \cap Y) \cap (V \cap Y) =$
$= (U \cap V) \cap Y = \emptyset$.

Siano X, Y spazi T2. Siano (x,x') e (y,y') in $X \times Y$ con $(x,x') \neq (y,y')$. Supponiamo $x \neq x'$, se non $y \neq y'$ è del tutto analogo. Allora:

$\exists\, U, V$ aperti in X s.t. $x \in U$, $x' \in V$ $\wedge$ $U \cap V = \emptyset$ $\Rightarrow$

$\exists\, U \times Y$, $V \times Y$ aperti in $X \times Y$ s.t. $(x,x') \in U \times Y$, $(y,y') \in V \times Y$ $\wedge$

$\wedge (U \times Y) \cap (V \times Y) = (U \cap V) \times Y = \emptyset$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Uno spazio topologico è T2 se e solo se la diagonale è chiusa nel prodotto.

$$\Delta = \{(x,x) \mid x \in X\} \subseteq X \times X$$

Dim.

Sia X uno spazio T2. Sia $(x,y) \in X \times X - \Delta$, cioè $x \neq y$. Dato che X è T2:

$\exists\, U, V$ aperti in X s.t. $x \in U$, $y \in V$ $\wedge$ $U \cap V = \emptyset$

Allora:

$\exists\, U \times V$ aperto in $X \times X$ e contenuto in $X \times X - \Delta$ s.t.

$(x,y) \in U \times V$

Allora $X \times X - \Delta$ è aperto, cioè Δ è chiuso.

Viceversa, sia Δ chiuso e $(x,y) \in X \times X - \Delta$. Allora:

$\exists\, U \times V$ aperto in $X \times X$ e contenuto in $X \times X - \Delta$ s.t.

$(x,y) \in U, V \Rightarrow x \in U$, $y \in V$ $\wedge$ $U \cap V \neq \emptyset$, c.v.d.

COROLLARIO

Siano $f, g : X \to Y$ continue. Sia $Y \in T_2$. Allora è insieme dei punti in cui $f(x) = g(x)$, essendo la controimmagine di $\Delta \in Y \times Y$ (chiuso) secondo la funzione:

$$(f,g) : X \longrightarrow Y \times Y$$
$$x \longrightarrow (f(x), g(x)),$$

che è continua, è chiuso. Se dunque $f \neq g$ in un dominio, $f = g$ ovunque.

ESERCIZI VARI

1. Siano $f: X \to Y$ e $g: Z \to W$ due applicazioni tra spazi topologici. Sendiamo:

$$(f \times g): (X \times Z) \to (Y \times W), \quad (f \times g)(x, z) = (f(x), g(z))$$

Provare che se f e g sono continue (aperte), $f \times g$ è continua (aperta). Mostrare poi con un esempio che se f e g sono chiuse, non è detto che $f \times g$ sia chiusa.

Siano f, g continue. Basta provare che per ogni aperto della base della topologia prodotto di $(Z \times W)$, è immagine inversa di un aperto. Un aperto della base è $A \times B$, con A aperto in Z e B aperto in W. Allora:

$$(f \times g)^{-1}(A \times B) = \{(x, y) \in X \times Y \mid (f \times g)(x, y) \in A \times B\} =$$
$$= \{(x, y) \in X \times Y \mid f(x) \in A, \ g(x) \in B\} =$$
$$= f^{-1}(A) \times f^{-1}(B),$$

aperto perché prodotto di aperti (per continuità di f e g).

Siano f, g aperte. Basta provare che per ogni aperto $A \times B$ della base della topologia prodotto di $X \times Y$, $(f \times g)(A \times B)$ è aperto. Ma:

$$(f \times g)(A \times B) = \{(z, w) \in Z \times W \mid (z, w) \in (f \times g)(A \times B)\} =$$
$$= \{(z, w) \in Z \times W \mid \exists (x, y) \in A \times B \ : \ (f \times g)(x, y) = (z, w)\} =$$
$$= \{(z, w) \in Z \times W \mid z \in f(A) \wedge w \in g(B)\} =$$
$$= f(A) \times g(B),$$

aperto perché prodotto di aperti.

Consideriamo ora $X = Y = Z = W = \mathbb{R}$, $f(x) = x$, $g(x) = 0$. Entrambe le funzioni sono chiuse (i punti sono chiusi, perché $\mathbb{R}$ è uno T_1). Ma:

$$(f \times g)(x, y) = (x, 0) \Rightarrow (f \times g) = \pi_A,$$

che sappiamo non essere chiusa.

2. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ è omeomorfo a $\mathbb{R} \times S_1$ dove $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

Notiamo subito che:

$$\forall\, v \in \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} : \quad v = \|v\| \frac{v}{\|v\|} = \rho \cdot e_1$$

con $\rho = \|v\| \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$ e $\frac{v}{\|v\|} \in S_1$.

Inoltre:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \simeq & \mathbb{R}^+ \\ x & \longmapsto & e^x \\ \log y & \longleftarrow & y \end{array}$$

Allora, $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R} \times S_1$, otteniamo l'omeomorfismo:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \times S_1 \\ & v & \longmapsto & \left(\log \|v\|, \frac{v}{\|v\|} \right) \end{array}$$

In generale, in $\mathbb{R}^n$:

$$S_{n-1} = \left\{ v \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

$$v = \|v\| \frac{v}{\|v\|}, \quad \|v\| > 0, \quad \frac{v}{\|v\|} \in S_{n-1}$$

Allora:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^n & \simeq & \mathbb{R}^+ \times S_{n-1} & \simeq & \mathbb{R} \times S_{n-1} \\ v & \longmapsto & \left(\|v\|, \frac{v}{\|v\|} \right) & \longmapsto & \left(\log \|v\|, \frac{v}{\|v\|} \right) \end{array}$$

3. In un insieme finito ogni topologia ha un numero finito di elementi?

La affermazione è falsa, ad esempio $X = \{a,b\}$, e $\tau_X = \{\emptyset, \{a\}, \{a,b\}\}$. È evidente che τ_X sia una topologia ma $|\tau_X| = 3 \neq 2 = |X|$:

- $\emptyset, \{a,b\} = X \in \tau_X$;
- unioni arbitrarie di elementi di τ_X sono in τ_X;
- intersezioni finite di elementi di τ_X sono in τ_X.

4. Sia X un insieme, e sia $x_0 \in X$. Mostrare che:

$$\mathcal{C} := \{ A \in X \mid x_0 \notin A \text{ v } X \setminus A \text{ è finito} \}$$

è una topologia su X.

Effettuiamo la verifica:

- $X \setminus X = \emptyset$ è finito, dunque $X \in \mathcal{C}$; $x_0 \notin \emptyset$, da cui $\emptyset \in \mathcal{C}$;
- se $\forall i \in \Lambda : x_0 \notin A_i$, allora $x_0 \notin \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$, da cui l'unione di aperti è aperta; se $\exists j$ s.t. $x_0 \in A_j \Rightarrow X \setminus A_j$ è finito $\Rightarrow \left(\bigcup_{i \in \Lambda} A_i \right)^c = \bigcap_{i \in \Lambda} A_i^c$ è finito $\Rightarrow \bigcup_{i \in \Lambda} A_i$ è aperta;
- è ovvio come caso non banale il caso in cui $x_0 \in A \cap B$. Ma in questo caso $X \setminus A$ e $X \setminus B$ sono finiti, da cui $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$ è finito, da cui $(A \cap B)$ è aperto.

$\mathcal{C}$ è dunque una topologia su X

5. Sia data $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; per ogni $K \in \mathbb{R}$ denotiamo:

$$M(K) := \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) > K \} \qquad m(K) := \{ x \in \mathbb{R} \mid f(x) < K \}$$

Dimostrare che f è continua se e solo se $M(K)$ e $m(K)$ sono aperti per ogni K.

Infatti:

$$M(K) = f^{-1}(]K, +\infty[), \quad m(K) = f^{-1}(]-\infty, K[),$$

e dato che $]K, +\infty[$ e $]-\infty, K[$ sono semirette aperte, se f è continua gli insiemi sono aperti per ogni K.

Viceversa, dato $]a, b[$ aperto della base della topologia, si ha:

$$f^{-1}(]a, b[) = f^{-1}(]a, +\infty[) \cap f^{-1}(]-\infty, b[) = M_a \cap m_b,$$

aperta perché intersezione finita di aperti.

6. Due sottoinsiemi A, B di uno spazio topologico X si dicono ADERENTI se:

$$(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = \emptyset$$

Dimostrare che un'applicazione è continua se e solo se preserva la relazione di aderenza tra sottoinsiemi.

Sia f continua, e sia, per ipotesi, $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$: ciò vuol dire $B \cap \overline{A} \neq \emptyset$ e viceversa. Sia dunque $a \in A \cap \overline{B}$. Sia V un intorno aperto di $f(a)$: per continuità di f:

$$\exists\ U \text{ intorno aperto di } a \text{ s.t. } f(U) \subseteq V.$$

Dato che a è aderente a B:

$$U \cap B \neq \emptyset \Rightarrow \exists\ b \in U \cap B \Rightarrow f(b) \in V \cap f(B) \Rightarrow V \cap f(B) \neq \emptyset$$

Dunque $f(a)$ è aderente a $f(B)$.

Equivalentemente, supponiamo che f sia continua se e solo se $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}\ \forall A \subseteq X$. Se per ipotesi $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$, allora $f(A) \cap f(\overline{B}) \supseteq f(A) \cap f(\overline{B}) = f(A \cap \overline{B}) \neq \emptyset$.

Viceversa, sia $C \subseteq Y$ chiuso, e supponiamo per assurdo che $B = f^{-1}(C)$ non sia chiuso. Dunque:

$$\exists\ p \in \overline{f^{-1}(C)} \setminus f^{-1}(C)$$

Dato che f è continua, $f(p)$ è aderente a $f(f^{-1}(C)) = C$, da cui $f(p) \in \overline{C} = C$ perché C è chiuso. Dunque:

$$f(p) \in C \Rightarrow p \in f^{-1}(C),$$

e ciò è assurdo.

7. Due sottoinsiemi A, B di uno spazio topologico X si dicono SEPARATI se non sono adiacenti, cioè $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) = \emptyset$.

Dimostrare che se $F, G \subseteq X$ sono entrambi aperti o entrambi chiusi, $A = F \setminus G$ e $B = G \setminus F$ sono separati; inoltre, dimostrare che, se $A, B \subseteq X$ sono separati, $A \cup B$ non è mai aperto né chiuso in $A \cup B$.

Supponiamo che F e G siano chiusi: l'altro caso è analogo. Siano $A = F \setminus G$ e $B = G \setminus F$. È noto che A sia aperto in F e B sia aperto in G. Inoltre:

$$\begin{cases} A \cap \overline{B} = A \cap G = \emptyset \\ B \cap \overline{A} = B \cap F = \emptyset \end{cases}$$

Allora, dato che $\overline{B} = C = C$, $A = \overline{A} = A$:

$$A \cap B = \emptyset \quad , \quad A \cap B = \emptyset$$

Viceversa, se A e B sono separati, poiché $(A \cap \overline{B}) \cup (A \cap B) = \emptyset$, allora (ricordando che $A \cap B = \emptyset$):

- $(A \cup B) \cap \overline{B} = B \Rightarrow B = A \cup B$ è chiuso $\Rightarrow A = (A \cup B) \setminus B$ è aperto;
- $(A \cup B) \cap \overline{A} = A \Rightarrow A = A \cup B$ è chiuso $\Rightarrow B = (A \cup B) \setminus A$ è aperto.

8. Un sottoinsieme $Z \subseteq X$ di uno spazio topologico si dice LOCALMENTE CHIUSO se per ogni $z \in Z$ esiste un aperto $U \subseteq X$ tale che $z \in U$, $U \cap Z$ è chiuso in U. Dimostrare che sono fatti equivalenti:

- Z è localmente chiuso;
- Z è aperto in $\overline{Z}$, rispetto alla topologia di sottospazio;
- Z è intersezione di un chiuso e di un aperto di X.

Dim.

- Sia Z localmente chiuso. Dato U aperto in X, si ha che $Z \cap U$ è aperto in Z, e $Z \cap U$ è aperto in $\overline{Z}$. Inoltre, se Z è localmente chiuso $Z \cap U$ è chiuso in U, da cui $\overline{Z \cap U} = \overline{Z} \cap U = \overline{Z} \cap U = \overline{Z} \cap U$ (in U). Allora:

$$Z = \bigcup_{z \in Z} U_z \cap Z = \bigcup_{z \in Z} U_z \cap \overline{Z}$$ unione di aperti di $\overline{Z}$,

da cui Z è aperto in $\overline{Z}$.

- Sia ora Z aperto in $\overline{Z}$. Allora esiste $A \subseteq X$ aperto tale che $A \cap \overline{Z} = Z$, da cui Z è intersezione di un chiuso e di un aperto di X.

- Se $Z = A \cap C$, infine, ogni $z \in Z$ ha un intorno A tale che $Z \cap A = Z$ è chiuso in A, essendo C chiuso, c.v.d.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Consideriamo $\mathbb{R}^3 = \{(x,y,z) \mid x,y,z \in \mathbb{R}\}$, e:

$$S_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\}$$

Consideriamo poi $H_0 = \{(x,y,0) \mid x,y \in \mathbb{R}\}$ e $(0,0,1) \in S_2$. Se consideriamo $S_2 - \{(0,0,1)\}$, ogni punto effettivamente e questo insieme ha la terza coordinata in $]-1,1[$ (si noti che 1 è escluso).

Preso adesso $x_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S_2 - \{(0,0,1)\}$, è ben definita e unica la retta passante per x_0 e $(0,0,1)$, di equazioni:

$$\begin{cases} x = x_0 + t x_0 \\ y = y_0 + t y_0 \\ z = z_0 + t(z_0 - 1) \end{cases}$$

Determiniamo l'intersezione con H_0, imponendo $z = 0$. Si ha:

$$0 = z_0 + t z_0 - t \Rightarrow t = \frac{z_0}{1 - z_0},$$

che ha senso perché $z_0 \neq 1$. Allora il punto individuato ha coordinate:

$$\left(\left(x_0 + \frac{z_0 x_0}{1 - z_0} \right), \left(y_0 + \frac{z_0 y_0}{1 - z_0} \right), 0 \right) = \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0 \right)$$

La funzione:

$$f(x_0, y_0, z_0) = \left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0 \right) \in H_0,$$

composta da funzioni razionali il cui denominatore non si annulla mai, è dunque bigettiva e continua.

Sia ora $(u, v, 0) \in H_0$, cerchiamo $f^{-1}(u, v, 0)$. Dalle relazioni di sopra, e imponendo $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, si ha, ricordando che $u = \frac{x}{1 - z}$ e $v = \frac{y}{1 - z}$:

$$u^2 + v^2 = \frac{x^2 + y^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 - z^2}{(1 - z)^2} = \frac{1 + z}{1 - z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1 - z)(u^2 + v^2) = (1 + z) \Rightarrow z(u^2 + v^2 + 1) = u^2 + v^2 - 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}$$

Da qui si deduce:

$$x = (1-z)u = \frac{2u}{u^2+v^2+1} \qquad y = (1-z)v = \frac{2v}{u^2+v^2+1}$$

Il vettore $(x,y,z) \in S_2 - \{(0,0,1)\}$ è stato univocamente determinato.

Le funzioni seguenti, pertanto:

$$f^{-1}(u,v,0) = \left(\frac{2u}{u^2+v^2+1}, \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1} \right) \in S_2 - \{(0,0,1)\}$$

è biiettiva (è l'inversa di f) ed è continua perché costituita da funzioni razionali con denominatore mai nullo.

f, dunque, è un omeomorfismo.

ESERCIZIO

Ex. Dimostrare che uno spazio topologico è di Hausdorff se e solo se per ogni suo punto x vale:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} \overline{U}$$

Supponiamo che valga la relazione. Sia U un chiuso contenente x, ma non y. Allora $\lambda = X \setminus U$ e V sono due aperti disgiunti che contengono il primo y, il secondo x (U proviene dalla famiglia di chiusi citata nella relazione, dunque esiste un aperto $V \subseteq U$ che contiene x). Allora lo spazio è di Hausdorff.

Siano U_x e U_y due intorni disgiunti contenenti x e y rispettivamente. Allora $y \notin U_x$, da cui:

$$\{x\} = \bigcap_{U \in \mathcal{I}(x)} U$$

RICOPRIMENTI

Per definizione, un RICOPRIMENTO di un insieme X è una famiglia $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi tali che $X = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$.
Un ricoprimento si dice:

- FINITO, se la cardinalità di $\mathcal{A}$ è finita;
- NUMERABILE, se la cardinalità di $\mathcal{A}$ è numerabile;
- APERTO, se ogni $A \in \mathcal{A}$ è aperto;
- CHIUSO, se ogni $A \in \mathcal{A}$ è chiuso;
- LOCALMENTE FINITO, se $\forall x \in X \; \exists V \ni x$ aperto $: V \cap A \neq \emptyset$ solo per un numero finito (eventualmente pari a 1) di $A \in \mathcal{A}$.

Se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono ricoprimenti di X e $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, allora $\mathcal{A}$ si dice SOTTORICOPRIMENTO DI $\mathcal{B}$.

Sia ora X uno spazio topologico, e $\mathcal{A}$ un suo ricoprimento. Si vuole che un sottoinsieme $U \subseteq X$ è aperto in X se e solo se $U \cap A$ è aperto in A $\forall A \in \mathcal{A}$, allora $\mathcal{A}$ si dice FONDAMENTALE.

PROPOSIZIONE

Siano X, Y spazi topologici, e sia $f : X \to Y$. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento fondamentale. Allora f è continua se e solo se per ogni $A \in \mathcal{A}$ $f|_A : A \to Y$ è continua.

Dim.

Un'implicazione è ovvia. Sia ora $U \subseteq Y$ aperto. Allora: $\forall A \in \mathcal{A} : f|_A^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap A$ è aperto in A.
Dato che $\mathcal{A}$ è fondamentale, $f^{-1}(U)$ è aperto in X, c.v.d.

PROPOSIZIONE

I ricoprimenti aperti sono fondamentali.

Dim.

È chiaro che se $U \subseteq X$ è aperto in X, allora $A \cap U$ è intersezione di aperti, dunque aperto in A (per ogni $A \in \mathcal{A}$).
Viceversa sia $U \subseteq X$ tale che $U \cap A$ è aperto in A $\forall A \in \mathcal{A}$.

Allora:

$\forall \lambda \in \Omega \quad \exists X_\lambda$ aperto in X t.c. $X_\lambda \cap \Lambda = U \cap \Lambda$,

da cui $U \cap \Lambda$ è aperto in X, e per concludere $U = \bigcup_{\lambda \in \Omega} U \cap \lambda$ è aperto in X, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Un ricoprimento chiuso localmente finito è fondamentale.

Sia.

PREMESSA

Se $X = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$, con $C_i \in \mathcal{C}$ (ossia $\mathcal{C}$ è un ricoprimento chiuso finito), e sia $U \subseteq X$ tale che $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni $i = 1 \dots n$. & $B = U^c = X - U$, si ha che $B \cap C_i = C_i - (U \cap C_i)$ è chiuso in C_i per ogni i, dunque anche in X, e $B = \bigcup_{i=1}^{n} B \cap C_i$ è chiuso in X, ossia U è aperto in X.

Se ora $\mathcal{C}$ è un ricoprimento chiuso localmente finito, allora esiste un ricoprimento aperto di X (sia esso Ω) tale che $\{C_i \cap \lambda \mid i \in I\}$ sia per ogni $\lambda \in \Omega$, un ricoprimento chiuso finito.

Se dunque $U \subseteq X$ è tale che $U \cap C_i$ è aperto in C_i per ogni C_i, allora $U \cap C_i \cap \lambda$ è aperto in $C_i \cap \lambda$, da cui, effettuando la premessa, $U \cap \lambda$ è aperto in λ per ogni $\lambda \in \Omega$, e effettuando la proposizione precedente, U è aperto in X, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X un insieme, e $\mathcal{C}$ un ricoprimento chiuso localmente finito. Allora $C \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{j \in \Lambda} C_j$, $C_j \in \mathcal{C}$ è chiuso.

Sia.

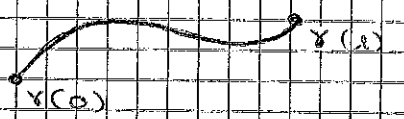
Sia $x \in C^c$. Allora:

$\exists U_x$ aperto in X t.c. $U_x \cap C_j \neq \emptyset$ solo per un numero finito di C_j. Allora $U'(x) = U(x) - \bigcup_{j} C_j$ è un aperto contenuto in C^c e contenente x. Allora C è aperto, ossia C è chiuso, c.v.d.

ARCHI

Sia (X, τ) uno spazio topologico. Un ARCO è una curva individuata da una funzione continua definita sull'intervallo unitario $[0,1]$ a valori in X:

$$\gamma : [0,1] \to X$$



Due punti x, y si dicono CONNESSI PER ARCHI se esiste un'applicazione continua $f : [0,1] \to X$ (che descrive intuitivamente un arco) tale che $f(0) = x$, $f(1) = y$. Se $x = y$, si parla di CAMMINO CHIUSO, CAPPIO o LACCIO.

Siano τ, σ archi: $\tau \cdot \sigma$ è definibile solamente se $\sigma(1) = \tau(0)$: in una composizione, dunque, ogni arco termina ove comincia il successivo. L'applicazione composta, che percorre prima σ e poi τ, è la seguente:

$$\Omega(t) = \begin{cases} \sigma(2t) & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ \tau(2t-1) & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

In effetti Ω è un arco, poiché l'applicazione è continua: si ha ovviamente che $\sigma(2t)$ e $\tau(2t-1)$ sono continue, negli intervalli di definizione. Se poi $U \subseteq X$ è aperto e contiene $\sigma(1) = \tau(0)$, si ha:

$$f^{-1}(U) = \left[0, \frac{1}{2}\right[\cup \left[\frac{1}{2}, b\right[= [0, b[,$$

aperto in $[0,1]$.

Sia ora $(U_i)_{i \in A} = \mathcal{U}$ un ricoprimento fondamentale di $U \subseteq X$. Sia Y uno spazio topologico, così come X. Sia, per ogni U_i, definita un'applicazione $g_i : U_i \to Y$ continua. Sia inoltre $g_i(t) = g_j(t)$ $\forall t \in U_i \cap U_j$.

Allora la seguente funzione:

$$g : U \to Y,$$

$$g|_{U_i} = g_i$$

è ben definita e continua, essendo $\mathcal{U}$ un ricoprimento fondamentale.

CONNESSIONE

Uno spazio topologico X si dice CONNESSO se gli unici sottoinsiemi che aperti che chiusi sono $\emptyset$ e X (che li sono a priori). Uno spazio topologico non connesso si dice SCONNESSO.

TEOREMA

Sono equivalenti i seguenti fatti:

- X è connesso;
- X è unione disgiunta di due aperti propri;
- X è unione disgiunta di due chiusi propri.

Dim:

Sia X connesso. Sia A aperto, chiuso e non vuoto. Allora $X - A = B$ è aperto chiuso e non vuoto, essendo $A \neq X$, e X è unione disgiunta di A e B, cioè due aperti propri o due chiusi propri.

Viceversa:

- se $A_1 \cup A_2 = X$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, con A_1, A_2 aperti non vuoti, allora $A_1 = X - A_2$ è anche chiuso;
- se $C_1 \cup C_2 = X$, $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, con C_1, C_2 chiusi non vuoti, allora $C_1 = X - C_2$ è anche aperto, c.v.d.

Un sottospazio topologico è connesso se lo è per la topologia indotta.

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ un sottoinsieme aperto e chiuso. Allora, per ogni sottospazio connesso $Y \subseteq X$, vale $Y \subseteq A$ o $Y \cap A = \emptyset$.

Dim:

$Y \cap A$ è aperto e chiuso in Y, da cui, essendo Y connesso, deve essere $Y \cap A = Y$ o $Y \cap A = \emptyset$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio topologico, $K \subseteq X$ un sottoinsieme chiuso e $U \subseteq X$ un aperto che contiene K. Se X è connesso e $U - K$ è anch'esso connesso, allora $X - K$ è connesso.

Dim.

Supponiamo per assurdo che $X - K$ sia sconnesso, cioè $X - K = A \cup B$, con A, B aperti non vuoti e disgiunti. Per la proposizione precedente, deve essere $X - K \subseteq A$ o $X - K \subseteq B$. Supponiamo, senza perdere di generalità, $X - K \subseteq A$.

Dato allora:

$$A \cup K = A \cup U,$$

con $U \cap B \neq \emptyset$, dunque:

$$X = (A \cup K) \cup B = (A \cup U) \cup B,$$

dunque X è unione di due aperti non vuoti disgiunti, cioè è sconnesso, e ciò è assurdo, q.v.d.

PROPOSIZIONE

L'intervallo $[0,1]$ è connesso per la topologia euclidea.

Dim.

Siano C, D chiusi e non vuoti, sottoinsiemi di $[0,1]$, tali che $C \cup D = [0,1]$; dimostriamo che $C \cap D \neq \emptyset$.

Supponiamo che $0 \in C$; consideriamo $\inf D \overset{\text{def}}{=} d \in [0,1]$; dimostriamo che $d \in C \cap D$. Innanzitutto $d \in D$ perché D è chiuso. Se $d = 0$ abbiamo finito, altrimenti se $d > 0$, consideriamo $E = C \cap [0,d]$: dato che E è chiuso e contiene $[0,d[$, necessariamente $d \in E$, da cui $d \in C$, da cui $C \cap D \neq \emptyset$, q.v.d.

PROPOSIZIONE

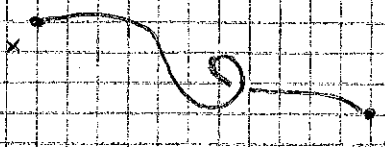
Sia $f: X \to Y$ continua. Se X è connesso, anche $f(X)$ è connesso.

Dim.

Sia $Z = f(X)$ un aperto e chiuso non vuoto. Siano A aperto e C chiuso insieme in Y tali che

$B = f(X) \cap A$ e $B = f(X) \cap C$. Allora, dato che f è continua, si ha $f^{-1}(A)$ aperto e $f^{-1}(C)$ chiuso, e dato che $f^{-1}(B) = f^{-1}(A) = f^{-1}(C)$ è aperto e chiuso, si ha $f^{-1}(B) = X \Rightarrow f(X) = B$, c.v.d.

Per definizione, uno spazio topologico si dice CONNESSO PER ARCHI se per ogni $x, y \in X$ esiste un'applicazione continua $\alpha: [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$.



Per definizione, un sottinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si dice CONVESSO se per ogni $x, y \in A$, per ogni $t \in [0,1]$, si ha:

$$tx + (1-t)y \in A$$

Ad esempio, ogni palla aperta $B(x,r) = \{z \in \mathbb{R}^n \mid \|x - z\| < r\}$ è convessa. Infatti:

$$\forall t \in [0,1]: \|p - (tx + (1-t)y)\| = \|t(p-x) + (1-t)(p-y)\| \leq$$
$$\leq |t| \|p - x\| + |1-t| \|p - y\| < (t + 1 - t)\, r = r$$

Allora, essendo il segmento congiungente due punti in esso nell'insieme, deduciamo che un sottinsieme di $\mathbb{R}^n$ convesso è connesso.

PROPOSIZIONE

Ogni spazio connesso per archi è connesso.

Sia X connesso per archi, e A, B due aperti non vuoti tali che $A \cup B = X$: dimostriamo che $A \cap B \neq \emptyset$. Siano $x \in A$, $y \in B$, $\alpha: [0,1] \to X$ tale che $\alpha(0) = x$ e $\alpha(1) = y$. Gli aperti $\alpha^{-1}(A)$ e $\alpha^{-1}(B)$ non sono vuoti, e la loro unione è $[0,1]$. Dato che $[0,1]$ è connesso, esiste $t \in \alpha^{-1}(A) \cap \alpha^{-1}(B)$. Allora $\alpha(t) \in A \cap B$, cioè $A \cap B \neq \emptyset$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $I \subseteq \mathbb{R}$. Sono equivalenti i seguenti fatti:

- I è connesso, cioè è un intervallo;
- I è connesso per archi;
- I è connesso.

Dim.

Abbiamo già dimostrato due implicazioni in contesti più generali: se $I \subseteq \mathbb{R}$ non è un intervallo, esistono $a < b < c$ tali che $a, c \in I$, $b \notin I$. Gli aperti disgiunti $I \cap]-\infty, b[$ e $I \cap]b, +\infty[$ sono non vuoti, dunque I è sconnesso, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Per ogni $n \geq 1$, $S_n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\}$ è connesso.

Dim.

Procediamo per induzione su n.

CASO BASE

$n = 1$

S^1 è connesso per archi, dunque connesso. Presi due suoi punti, è evidente che esiste un cammino che parte dal primo punto nel secondo.

PASSO INDUTTIVO

$n - 1 \Rightarrow n$

Siano $x, y \in S_n \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Sappiamo esiste un unico piano passante per x, y e l'origine. $V \cap S^n$ è allora omeomorfo a S^1, dunque esiste un cammino che congiunge x con y, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è connesso. Infatti esso è connesso per archi. Sia A un connesso, $x \in A$. Allora $U = \{y \in A \mid \exists \text{ arco tra } x \text{ e } y\}$ è aperto, perché la composizione di archi è un arco e perché ogni sfera in $\mathbb{R}^n$ sono connessi, dunque connessi per archi, e chiaro, perché se $y \in U \cap A$, esiste $B(y, \varepsilon) \subseteq A$, tale che $B(y, \varepsilon) \cap U \neq \emptyset$, dai cui $y \in U$. Allora $U = A$, è connesso per archi.

PROPOSIZIONE

Siano $n \geq 0$, e $f : S_n \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora:

$\exists\, x \in S_n$ t.c. $f(x) = f(-x)$

In particolare f non è iniettiva.

Dim

Definiamo $g : S_n \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) - f(-x)$.

Essendo $n \geq 0$, S_n è connesso, dunque $g(S_n)$ è connesso, dunque $g(S_n) \subseteq \mathbb{R}$ è connesso. Scelto allora $y \in S_n$, $g(y)$ e $g(-y)$ sono contenuti in $g(S_n)$, da cui anche:

$$\frac{1}{2} g(x) + \frac{1}{2} g(-x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x) + f(-x) - f(x)) = 0,$$

da cui $0 \in g(S_n)$, da cui esiste $x \in S_n$ tale che $f(x) = f(-x)$, e f non è iniettiva, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Gli aperti di $\mathbb{R}$ non sono omeomorfi agli aperti di $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$. Se infatti X è aperto in $\mathbb{R}^n$, e Y è aperto in $\mathbb{R}$, e $f : X \to Y$, in particolare esiste $Z \subseteq X$ omeomorfo a S_{n-1}, e $f|_Z : Z \to Y$ non è iniettiva per il lemma, da cui f non può essere un omeomorfismo.

OSSERVAZIONE

$[0,1[$ e $]0,1[$ non sono omeomorfi. Sia infatti:

$$f : [0,1[\to]0,1[$$

una funzione continua e biiettiva. Allora $f(0) \in]0,1[$, e si ha la seguente restrizione:

$$f|_{]0,1[} :]0,1[\to]0, f(0)[\cup]f(0), 1[$$

Ma $f(]0,1[)$, immagine di un aperto di $\mathbb{R}$ (dunque un connesso) secondo una funzione continua, è connesso; d'altra parte, $]0, f(0)[\cup]f(0), 1[$ non è connesso, da cui un assurdo.

COMPONENTI CONNESSE

Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $C \subseteq X$ si dice una COMPONENTE CONNESSA di X se:

- C è connesso;
- se $C \subseteq A \subseteq X$ e A è connesso allora $C = A$.

LEMMA

Sia Y un sottospazio connesso di uno spazio topologico X, e sia $Y \subseteq W \subseteq \overline{Y}$. Allora W è connesso. In particolare, la chiusura di un sottospazio topologico connesso è connessa.

Dim.

Sia $B \subseteq W$ un sottoinsieme non vuoto, aperto e chiuso in W. Allora $B \cap Y$ è aperto in Y, e analogamente chiuso in Y. Inoltre dato che Y è denso e B è aperto in W, $B \cap Y \neq \emptyset$. Allora, dato che B è connesso, $Y \subseteq B$. Ma Y è denso, i.e. B è chiuso in W, da cui $B = W$, c.v.d.

LEMMA

Sia x un punto di uno spazio topologico X, e sia $\{B_i : i \in I\}$ una famiglia di sottospazi connessi di X contenenti x. Allora

$$W = \bigcup_{i \in I} B_i$$

è connesso.

Dim.

Sia $A \subseteq W$ contemporaneamente aperto, chiuso e non vuoto. Si ha, per ogni $i \in I$, $A \cap B_i \neq \emptyset \Rightarrow B_i \subseteq A$. Dato che $A \neq \emptyset$, esiste B_j s.t. $B_j \subseteq A$. Allora $x \in A$, da cui:

$$\forall i \in I : x \in B_i \cap A \Rightarrow B_i \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B_i \subseteq A$$

Allora $W = \bigcup_{i \in I} B_i \subseteq A$, da cui $A = W$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Siano A, B sottospazi connessi di uno spazio topologico. Se $A \cap B \neq \emptyset$, allora esiste $x \in A \cap B$. A e B sono sottospazi

connessi contenenti x. Applicando il lemma, $A \cup B$ risulta essere connesso.

LEMMA

Sia $x \in X$, con X spazio topologico. Denotiamo con $C(x)$ l'unione di tutti i sottospazi connessi di X che contengono x:

$$C(x) = \bigcup_{\substack{x \in Y \subseteq X \\ Y \text{ conn.}}} Y$$

Allora $C(x)$ è una componente connessa di X che contiene x.

Dim.

Ovviamente $\{x\}$ è un sottospazio connesso, da cui $C(x) \neq \emptyset$. Applicando il lemma precedente, $C(x)$ è connesso. Sia ora $A \subseteq X$, $A \supseteq C(x)$ un sottospazio connesso: dato che contiene x, si ha ovviamente $C(x) \supseteq A$, da cui $C(x) = A$, ossia $C(x)$ è una componente connessa, c.v.d.

$C(x)$ è detta la COMPONENTE CONNESSA di x IN X.

PROPOSIZIONE

Ogni componente connessa di uno spazio topologico è chiusa. Inoltre ogni punto è contenuto in una sola componente connessa.

Dim.

La seconda affermazione discende immediatamente dal lemma precedente. Infatti ogni x è contenuto in almeno una componente connessa. Se poi A e B sono componenti connesse, allora, per l'osservazione, $A \cup B$ è connesso e include sia A che B, da cui, per definizione di componente connessa, $A = A \cup B = B \Rightarrow A = B$.

Sia ora C una componente connessa: allora, per un lemma precedente, $\overline{C}$ è connesso e contiene C, da cui discende, per definizione, $C = \overline{C}$, ossia C è chiuso, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Ogni spazio topologico è dunque unione delle sue componenti connesse.

PROPOSIZIONE

Le componenti connesse non sono in generale aperte. Esse sono aperte se e solo se ogni $x \in X$ possiede un intorno connesso.

Dim.

Consideriamo $\mathbb{R}$: ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ che comprende almeno due punti distinti è connesso. Infatti, considerato $\xi \in \mathbb{R}$, $\xi < b - a$ (si ha (supponiamo $b > a$):

$$X = X \cap]-\infty, a + \xi[\cup]b - \xi, +\infty[,$$

da cui X è sconnesso.

Ogni componente connessa di $\mathbb{R}$ è dunque formata da un solo punto: si dice che $\mathbb{R}$ è FORTEMENTE SCONNESSO.

Le componenti connesse, poiché, non sono in generale aperte.

Sia ora $C \subseteq X$ una componente connessa, e $x \in C$. Sia U un intorno connesso di x. Dato che $x \in U \cap C \Rightarrow$ $\Rightarrow U \cap C = \emptyset$, si ha che $U \cup C$ è connesso, da cui $U \cup C = C$, da cui $U \subseteq C$, da cui C è intorno di x, e dato l'arbitrarietà di x, C è intorno di ogni suo punto, ossia è aperto. Il viceversa è ovvio, essendo C un aperto connesso, dunque un intorno connesso per ogni suo punto, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Ogni insieme finito, aperto, ammette componenti connesse in componenti connesse. Dei spazi ameomorfi, aperti, chiusi, aventi lo stesso numero di componenti connesse. $\mathbb{R} - \{0\}$, ad esempio, non è quindi ameomorfo a $\mathbb{R} - \{0, 1\}$.

COMPLEMENTI ED ESEMPI

LEMMA

Siano Y uno spazio topologico connesso e $f: X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva tale che $f^{-1}(y)$ è connesso per ogni $y \in Y$. Se f è aperta oppure f è chiusa, allora anche X è connesso.

Dim.

Supponiamo che f sia aperta. Siano $A_1, A_2 \subseteq X$ aperti non vuoti tali che $X = A_1 \cup A_2$: vogliamo dimostrare che $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$. Dato che $Y = f(A_1) \cup f(A_2)$ e Y è connesso, $f(A_1) \cap f(A_2) \neq \emptyset$, da cui esiste $y \in f(A_1) \cap f(A_2)$. Allora $f^{-1}(y) \cap A_1 \neq \emptyset$, $f^{-1}(y) \cap A_2 \neq \emptyset$. Dato che $f^{-1}(y)$ è connesso in X, e $f^{-1}(y) = [f^{-1}(y) \cap A_1] \cup [f^{-1}(y) \cap A_2]$, si ha $[f^{-1}(y) \cap A_1] \cap [f^{-1}(y) \cap A_2] = f^{-1}(y) \cap [A_1 \cap A_2] \neq \emptyset$, e cioè in conclusione $[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset$.

Se f è invece chiusa, si procede in modo analogo supponendo A_1 e A_2 chiusi, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Il prodotto di due spazi topologici connessi è connesso.

Il prodotto di un numero finito di spazi topologici connessi è connesso.

Dim.

Dimostriamo che siamo nelle ipotesi del lemma precedente. In effetti, si ha che:

$$\pi_Y : X \times Y \to Y$$

è continua, suriettiva, e tale che:

$$\forall\, y \in Y : \; \pi_Y^{-1}(y) = X \times \{y\} \approx X \Rightarrow \pi_Y^{-1}(y) \text{ è connesso.}$$

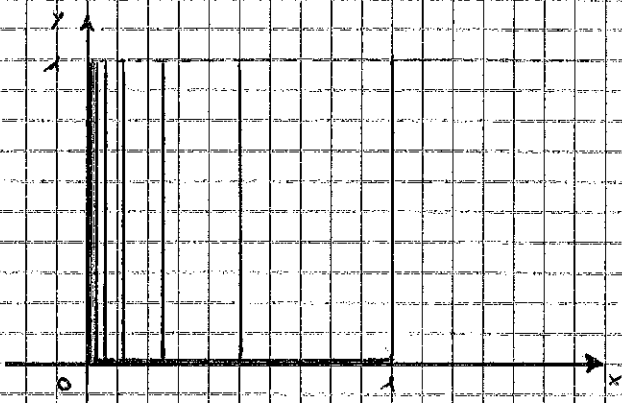
Applicando il lemma, dunque, $X \times Y$ è connesso. Una facile induzione estende poi il risultato ad un numero finito di spazi topologici connessi, c.v.d.

Consideriamo il seguente sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$:

$$X = X_1 \cup X_2$$

$$X_1 = \{(t, 0) \mid 0 \le t \le 1\}$$

$$X_2 = \left\{\left(\frac{1}{2^m}, t\right) \mid m \in \mathbb{N},\ 0 \le t \le 1\right\}$$



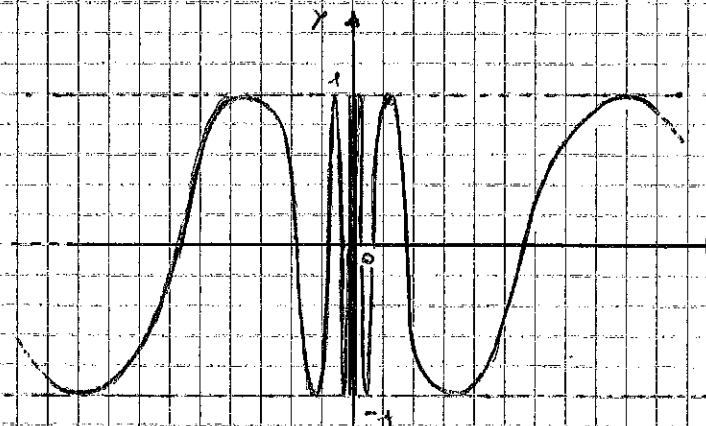
Quest'insieme è banalmente connesso (in particolare è connesso per archi). La sua chiusura comprende anche:

$$X_3 = \{(0, t) \mid 0 \le t \le 1\}$$

Anche quest'insieme è connesso, ma non è connesso per archi: infatti precisamente, un punto $P \in X_3 \setminus \{(0,0)\}$ è connesso a X (da cui $X \cup \{P\}$ è connesso), ma non per archi (da cui $X \cup \{P\}$ non è connesso per archi).

Infatti se $X = X \cup \{P\} = X_1 \cup X_2$, per un connesso precedente $X \cup \{P\}$ è connesso. Non è connesso per archi, perché la componente connessa di P in $X \cup \{P\}$ è proprio $\{P\}$, da cui non esistono archi congiungenti P con un qualsiasi punto di X, dato che un arco è sempre interamente contenuto in una sola componente connessa.

Analoghe considerazioni per $Y = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \mid x \in \mathbb{R}\}$ la cui chiusura include $Y_1 = \{(0, t) \mid 0 \le t \le 1\}$:



ESERCIZIO

Ex. Sia $\{A_n \mid n \in \mathbb{Z}\}$ una famiglia numerabile di sottospazi connessi di uno spazio topologico X tale che $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Dimostrare che $A = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_n$ è connesso.

Innanzitutto, definiamo, per $n \in \mathbb{N}^+$:

$$B_n \overset{\text{def}}{=} A_{-n}$$

Abbiamo dunque le seguenti due famiglie:

$$A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} A_i \cup A_0 \quad , \quad B = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^+} B_i$$

Questi due sottospazi sono a intersezione non nulla, dunque, per un esercizio precedente, è sufficiente dimostrare che se $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di sottospazi connessi con $A_n \cap A_{n+1} \neq \emptyset \ \forall n \in \mathbb{N}$, allora A è connesso.

Ora, però, è applicabile il principio del buon ordinamento. Sia $\mathcal{Z}$ aperto e chiuso in X: è sufficiente dimostrare che: $A \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: A_n \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$. Se così fosse, infatti, essendo A_n connesso per ogni $n \in \mathbb{N}$ si avrebbe $A_n \subseteq \mathcal{Z}$, da cui $A = \mathcal{Z}$, ossia A è connesso. Supponiamo, senza perdere di generalità, che $A_k \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset \Rightarrow A_{k_0} \subseteq \mathcal{Z}$.

Allora $A_{k_0+1} \cap A_{k_0} \neq \emptyset \Rightarrow A_{k_0+1} \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset \Rightarrow A_{k_0+1} \subseteq \mathcal{Z}$. Per induzione: $\forall h \geq k_0: A_h \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset \Rightarrow$. Se $k_0 = 0$ non c'è nulla da dimostrare, altrimenti $A_{k_0-1} \cap A_{k_0} \neq \emptyset \Rightarrow A_{k_0-1} \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$, e per induzione si ha che:

$\forall h \in \{0, \dots, k_0 - 1\}: A_h \cap \mathcal{Z} \neq \emptyset$,

e di qui la tesi.

COMPATTEZZA

Uno spazio topologico si dice COMPATTO se ogni suo ricoprimento aperto ammette un SOTTORICOPRIMENTO FINITO. In altre parole, $K \subseteq X$ è compatto se e solo se, per ogni famiglia $\mathcal{A}$ di aperti di X tale che $K \subseteq \bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$, si ha che esistono $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ tali che $K \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_n$.

Un sottospazio di uno spazio topologico è compatto se lo è per la topologia indotta.

OSSERVAZIONE

$\mathbb{R}^n$, $n > 0$, non è compatto: un suo ricoprimento numerabile è il seguente:

$$\mathcal{A} = \{ B(0, n) \mid n \in \mathbb{N}^+ \}$$

Se esistessero $B(0, n_1), \dots, B(0, n_k)$ tali che $\mathbb{R}^n = \bigcup_{i=1}^{k} B(0, n_i)$, si avrebbe $\mathbb{R}^n = B(0, \max_{1 \le i \le k}(n_i))$, ma ciò è palesemente assurdo.

OSSERVAZIONE

Un insieme finito è compatto. Preso $\mathcal{A}$ ricoprimento dell'insieme, per ogni punto dell'insieme posso scegliere un aperto di $\mathcal{A}$ per ogni punto. Alla fine del processo, ottengo un sottoricoprimento $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ di cardinalità minore o uguale alla cardinalità dell'insieme, cioè un sottoricoprimento finito.

OSSERVAZIONE

Un sottoinsieme discreto è compatto se e solo se è finito: un'implicazione è stata già dimostrata. Se invece lo spazio è infinito, allora $\mathcal{A} = \{ \{x\} \mid x \in Y \subseteq X \}$ (dove Y è sottospazio discreto di X) ammette un sottoricoprimento finito, è evidente, solo se Y è finito.

PROPOSIZIONE

Sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Se X è compatto, allora $f(X) = Y$ è compatto.

Sia

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti che ricopre $f(X)$, allora $f^{-1}(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \{ f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{A} \}$ è un ricoprimento aperto di X. Essendo X compatto, esistono $f^{-1}(A_1), \dots, f^{-1}(A_m)$ tali che $X = f^{-1}(A_1) \cup \dots \cup f^{-1}(A_m)$, da cui $f(X) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m$, da cui $f(X)$ è compatto.

TEOREMA

L'intervallo $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ è compatto.

Sia

Sia $\mathcal{A}$ una famiglia di aperti di $\mathbb{R}$ che ricopre $[0,1]$. Sia

$$T = \{ t \in \mathbb{R} \mid [0,t] \text{ ammette un sottoricoprimento finito di } \mathcal{A} \}$$

Si ha $0 \in A \in \mathcal{A}$, da cui $0 \in T$, da cui $T \neq \emptyset$. Sia allora $b = \sup T$. Se $b > 1$ non c'è nulla da dimostrare; altrimenti, noi ora in cui $b \leq 1$, sia $G \in \mathcal{A}$ tale che $G \ni b$. Esiste allora $\delta > 0$ tale che:

$$\forall x \in [b-\delta, b+\delta] : x \in G$$

Consideriamo $c = b - \frac{\delta}{2}$: dato che $c \in T$ (grande) e c non è l'estremo superiore:

$\exists A_0, A_1 \dots A_n \in \mathcal{A}$ t.c. $[0,c] \subseteq A_0 \cup \dots \cup A_n$

Allora, considerando $A_0 \cup \dots \cup A_n \cup G$, si ha $[0, b + \frac{\delta}{2}]$ in quanto in quest'unione di aperti, da cui $b + \frac{\delta}{2}$. Ma $b + \frac{\delta}{2} > b$, e ciò è assurdo.

Dunque necessariamente $b > 1$, e $[0,1]$ è compatto, c.v.d.

COROLLARIO

Tutti gli intervalli chiusi e limitati di $\mathbb{R}$ sono compatti.

OSSERVAZIONE

Dato che $\mathbb{R}$ non è compatto mentre $[0,1]$ lo è, $\mathbb{R} \not\cong [0,1]$ non sono omeomorfi.

PROPOSIZIONE

Ogni sottospazio chiuso di uno spazio completo è completo. L'unione finita di sottospazi completi è completa.

Dim.

Sia $Y \subseteq X$ un chiuso, con X completo. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di Y. Allora $\mathcal{A} \cup (X \setminus Y)$ è un ricoprimento aperto di X. Esistono allora $A_1, A_2, \dots, A_m, X \setminus Y$ tali che:

$$X \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m \cup X \setminus Y,$$

da cui $Y \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m$.

Siano ora $K_1, \dots, K_m$ compatti, e sia $K = K_1 \cup \dots \cup K_m$. Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di K. Allora:

$$\exists\, \mathcal{A}_i,\ i = 1 \dots m \ :\ K_i \subseteq \{A \mid A \in \mathcal{A}_i\},$$

con $\mathcal{A}_i$ famiglie finite di aperti. Allora:

$$K \subseteq \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \dots \cup \mathcal{A}_m,$$

e K è ancora una famiglia finita di aperti, c.v.d.

COROLLARIO

Un sottospazio di $\mathbb{R}$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato.

Dim.

Se X è un chiuso e limitato, $X \subseteq [a,b] \subseteq [0,r]$, da cui si ha che X è completo perché chiuso in un completo.

Viceversa, sia X completo. Allora X è limitato, perché altrimenti $X \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$, e dunque $X \subseteq]-N, N[$, $N \in \mathbb{N}$. Sia ora $p \notin X$: è ben definita in $X \subseteq \mathbb{R}$ la seguente applicazione:

$$f(x) = \frac{1}{x-p},$$

che risulta continua. Allora $f(X)$ è compatto, dunque limitato: deduciamo allora che $p \notin \overline{X}$, da cui X è chiuso, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Una funzione continua $f: X \to \mathbb{R}$, con X compatto, è tale che $f(X) \subseteq \mathbb{R}$ è compatto, dunque chiuso e limitato. Ne deduciamo che una funzione continua su un compatto è limitata, dunque ammette massimo e minimo.

TEOREMA

Sia $f: X \to Y$ una funzione chiusa. Se Y è compatto e se $f^{-1}(y)$ è compatto per ogni $y \in Y$, allora anche X è compatto.

Dim.

Sia $A \subseteq X$ aperto. Definiamo:

$$A' = \{y \in Y \mid f^{-1}(y) \subseteq A\}$$

Notiamo che $Y - A' = f(X - A)$, da cui, essendo $X - A$ chiuso ed f chiusa, $f(X - A)$ è chiuso, da cui necessariamente A' è aperto.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X; sia $\mathcal{B}$ la famiglia delle unioni finite di aperti di $\mathcal{A}$: $\mathcal{B}$ è ancora un ricoprimento di X, molto più ricco di aperti rispetto ad $\mathcal{A}$.

Sia:

$$\mathcal{B}' = \{B' \mid B \in \mathcal{B}\}$$

Questo è un ricoprimento aperto di Y. Se infatti $y \in Y$, allora $f^{-1}(y)$ è compatto, da cui esistono $A_1, \dots, A_m$ tali che $f^{-1}(y) \subseteq A_1 \cup \dots \cup A_m = B \in \mathcal{B}$, da cui $y \in B'$. Che ciascun B' sia aperto, è stato già dimostrato. Dato che Y è compatto, esistono $B'_1, \dots, B'_m$ tali che $Y \subseteq B'_1 \cup \dots \cup B'_m$: allora si ha che $X = B_1 \cup \dots \cup B_m = A_{1,1} \cup A_{1,2} \cup \dots \cup A_{1,m_1} \cup A_{2,1} \cup \dots \cup B_{m,m_m}$, da cui X è compatto, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $\mathcal{B}$ una base di uno spazio topologico X. Se ogni ricoprimento di X fatto con elementi di $\mathcal{B}$ ammette un sottoricoprimento finito, allora X è compatto.

Dim.

Per ogni $U \subseteq X$ aperto, sia:

$$\mathcal{B}_U = \{ B \in \mathcal{B} \mid B \subseteq U \}$$

Essendo $\mathcal{B}$ una base, si ha $U = \bigcup_{B \in \mathcal{B}_U} B$.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X, e sia:

$$\mathcal{C} = \bigcup_{A \in \mathcal{A}} \mathcal{B}_A$$

$\mathcal{C}$ è un ricoprimento aperto di X fatto con elementi di $\mathcal{B}$. Inoltre, per ipotesi, esiste un sottoricoprimento finito $\mathcal{D}$. Per ogni $V \in \mathcal{D}$, esiste $U_V \in \mathcal{A}$ tale che $V \subseteq U_V$, o equivalentemente, $V \in \mathcal{B}_{U_V}$. Allora la famiglia $\mathcal{A}_0 = \{ U_V \mid V \in \mathcal{D} \}$ è un sottoricoprimento finito di X della famiglia $\mathcal{A}$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Un sottospazio compatto di uno spazio di Hausdorff è chiuso.

Dim.

Sia $y_0 \in K$. Per ogni $x \in K$ esistono U_{x,y_0} e V_{x,y_0} disgiunti tali che $x \in U_{x,y_0}$, $y_0 \in V_{x,y_0}$. Inoltre:

$$K = \bigcup_{x \in K} U_{x,y_0} \Rightarrow \exists\, U_{x_1,y_0}, \dots, U_{x_m,y_0} \text{ tali che } K = \bigcup_{i=1}^{m} U_{x_i,y_0}$$

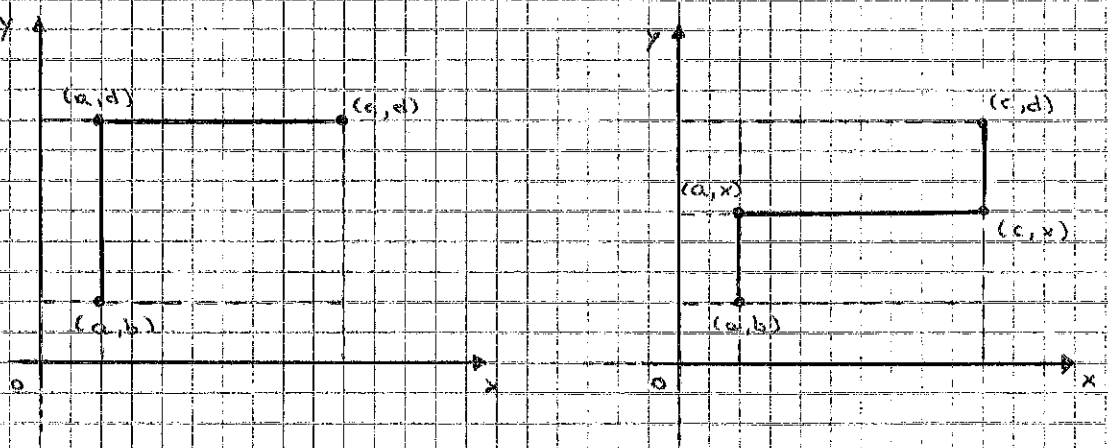
Allora $V \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{i=1}^{m} V_{x_i,y_0}$ contiene y_0 ed è un'intersezione finita di aperti, dunque un aperto disgiunto da K. Allora $X \setminus K$ è aperto, cioè K è chiuso, c.v.d.

ESERCIZI V+R1

1. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$ è connesso.

La dimostrazione è semplice: dati due punti (a,b) e (c,d) in $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$, almeno una coordinata per ciascun punto è non razionale. Si ci sono due:

- entrambe le ascisse e le ordinate non razionali: senza perdere di generalità, siano a e c in $\mathbb{R}-\mathbb{R}$. Allora, considerato $(a,d) \in \mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$, l'arco completo dei segmenti congiungenti (a,b) e (a,d), e (a,d) e (c,d) connette (a,b) e (c,d) ed è interamente contenuto in $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$;
- entrambe le ascisse, o entrambe le ordinate, e solo quelle, sono non razionali: allora, supponiamo che a e c siano non razionali. Dato che $\mathbb{R}-\mathbb{R} \neq \emptyset$ in $\mathbb{R}$, sia $x \in \mathbb{R}-\mathbb{R}$ compreso tra b e d. Allora l'arco completo dei segmenti che connettono (a,b) e (a,x), (a,x) e (c,x), (c,x) e (c,d) è interamente contenuto in $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$ e connette (a,b) e (c,d).

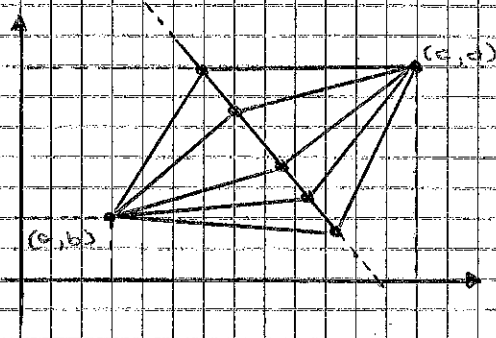


Allora $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}^2$ è connesso per archi, dunque connesso.

2. Sia $A \subseteq \mathbb{R}^2$ un insieme numerabile. Dimostrare che $\mathbb{R}^2 - A^2$ è connesso.

Siano (a,b) e (c,d) in $\mathbb{R}^2 - A^2$, e sia t una retta incidente il segmento congiungente (a,b) e (c,d). Consideriamo allora il seguente sottoinsieme di archi

da (a,b) a (c,d), in bigezione con i punti di $\mathbb{R}$:



La cardinalità di questo insieme è quella del continuo. Non può dunque avvenire che per ogni coppia di questi insieme ci sia un punto di $\mathbb{N}$ inclusa, perché $\mathbb{N}$ è numerabile. Pertanto $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{N}^2$ è connesso per archi, dunque connesso.

3. Sia $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua. Allora esiste almeno un punto x_i di $\mathbb{R}$, x_i, tale che:

$$f^{-1}(x_i) \neq \emptyset, \quad |f^{-1}(x_i)| = \aleph_0$$

$\mathbb{R}^2$ è un connesso, la cui immagine secondo f sono compatti, cioè chiusi. Allora ci sono tre casi:

- $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$, cioè f è suriettiva;
- $f(\mathbb{R}^2)$ è una semiretta chiusa;
- $f(\mathbb{R}^2)$ è un segmento.

Ogni punto interno a $f(\mathbb{R}^2)$ deve avere una controimmagine che deve "racchiudere" $\mathbb{R}^2$, i.e. $\mathbb{R}^2 \setminus f^{-1}(y)$ deve connesso, rimuovendo $f(\mathbb{R}^2)$ y connesso, ma ciò è assurdo. Allora $f^{-1}(y)$ deve avere cardinalità più che numerabile.

Gli unici punti di $f(\mathbb{R})$ (che è chiuso) che hanno avere cardinalità numerabile sono dunque gli estremi reali di $f(\mathbb{R})$, la cui cardinalità può essere al massimo $\mathbb{N}$, nel caso di $f(\mathbb{R})$ segmento.

APPLICAZIONI PROPRIE

Un'applicazione $f: X \to Y$ tra spazi topologici si dice PROPRIA se per ogni $K \subseteq Y$ compatto, $f^{-1}(K)$ risulta compatto.

Equivalentemente un'applicazione $f: X \to Y$ tra spazi topologici viene detta propria se è chiusa, e per ogni $x \in Y$, $f^{-1}(x)$ è compatto. Ogni applicazione propria è continua.

Le due definizioni non sono a priori equivalenti: vedremo con che ipotesi aggiuntive esse diventano.

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione chiusa. Per ogni $y \in Y$ e per ogni U intorno di $f^{-1}(y)$ in X esiste V intorno di y in Y tale che $f^{-1}(V) \subseteq U$.

Le immagini inverse degli intorni di y costituiscono quindi un sistema fondamentale di intorni per la fibra di y secondo f.

Dim.

Dato che f è chiusa, dato U intorno aperto di $f^{-1}(y)$ di modo che U^c è chiuso, dunque $f(U^c)$ è chiuso. Se poi $y \notin f(U^c)$, dunque esiste $V_y \subseteq Y$ intorno aperto in $f(U^c)^c$ e contenente y. Allora:

$$V_y \subseteq f(U^c)^c \Rightarrow f^{-1}(V_y) \subseteq f^{-1}(f(U^c)^c) = f^{-1}(Y \setminus f(U^c)) =$$
$$= X \setminus f^{-1}(f(U^c)) \subseteq X \setminus U^c = U, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Se $f^{-1}(x)$ è compatta per ogni $x \in Y$, per ogni $K \subseteq Y$ compatto risulta $f^{-1}(K)$ compatta (si suppone $f: X \to Y$ chiusa).

Dim.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di $f^{-1}(K)$. Per ogni $y \in K$, dato che f è chiusa e $f^{-1}(y)$ è compatto, dunque esiste un sotto ricoprimento finito di $f^{-1}(y)$:

$$f^{-1}(y) \subseteq A_{y,1} \cup A_{y,2} \cup \dots \cup A_{y,m_y},$$

di modo che (per il lemma precedente) esiste V_y intorno di y in Y tale che $f^{-1}(V_y) \subseteq A_{y,1} \cup \dots \cup A_{y,m_y}$, dove ovviamente

Se cio, $f^{-1}(V_y) = U$, con U in questa cosa uguale a $A_{y,1} \cup \dots \cup A_{y,n}$. Ora:

$$K \subseteq \bigcup_{y \in K} V_y ,$$

e dato che K è compatto, si ha $K \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_j$, dal momento che, senza perdita di generalità, possiamo considerare intorni aperti per ogni punto. Allora:

$$f^{-1}(K) \subseteq f^{-1}(V_1) \cup f^{-1}(V_2) \cup \dots \cup f^{-1}(V_j) =$$
$$= A_{y_1,1} \cup \dots \cup A_{y_1,n_1} \cup \dots \cup A_{y_j,n_j} ,$$

da cui $f^{-1}(K)$ è compatto, c.v.d.

Adesso vogliamo dimostrato che, in generale, la nostra definizione è più stringente della prima, ovvero la implica. Tutti quei fattori aggiuntivi è veramente l'implicazione opposta?

TEOREMA

Se Y è uno spazio di Hausdorff ed è anche localmente compatto, ovvero:

$\forall y \in Y \; \exists V_y$ compatto tale che $y \in V_y$,

allora, $f: X \to Y$ è proprio implica che $f: X \to Y$ sia chiusa, e la fibra di ogni $y \in Y$ sia compatta.

Dim.

Se Y è di Hausdorff (dunque è T_1, T_2) e localmente compatto, dato $y \in Y$ si ha che $\{y\}$ è chiuso in un compatto V_y, da cui $\{y\}$ è compatto, e $f^{-1}(y) \subseteq X$ è compatto.

Sia ora C un chiuso, consideriamo $f(C) \subseteq Y$. Ogni $y \in Y$ ha un intorno compatto $V_y \subseteq Y$; si ha:

$$f(C) \cap V_y = f(C \cap f^{-1}(V_y)) ,$$

con $C \cap f^{-1}(V_y)$ che è chiuso in un compatto (perché intersezione di C con $f^{-1}(y)$ che è compatto), dunque è compatto. Allora $[f(C) \cap V_y]$ è compatto in uno spazio di Hausdorff (perché $f: X \to Y$ è in particolare continua, dunque manda compatti in compatti), dunque è chiuso.

Considerando ora, per ogni V_γ considerato, $\mathring{V}_\gamma$ (la parte interna), si ha:

$$[f(C) \cap V_\gamma] \cap \mathring{V}_\gamma = f(C) \cap \mathring{V}_\gamma \text{ chiuso in } \mathring{V}_\gamma$$

Ma un ricoprimento aperto è fondamentale: allora $f(C)$ è chiuso in Y, c.v.d.

COMPLEMENTI VARI

Consideriamo $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_s$, ove $\mathbb{R}_s$ è $\mathbb{R}$ munita della topologia di Sorgenfrey. Vogliamo ridimostrare, usando la nozione di convergenza, che una funzione del genere è continua e non lo è costante. Lasciamo perdere la seconda implicazione, concentrandoci sulla prima.

Innanzitutto, $\mathbb{R}_c$ è connesso, dunque l'immagine secondo f di $\mathbb{R}_c$ deve essere un insieme connesso. Notiamo poi che $\mathbb{R}_s$ è totalmente sconnesso: infatti, presi due punti a, b in $\mathbb{R}$, con $a < b$, esiste $c \in]a,b[$, e si ha che, presi $a < c$ e $c < b$, gli aperti disgiunti $[a, c[$ e $[c, e[$ provano che i due punti non sono connessi. Dunque una funzione $f : \mathbb{R}_c \to \mathbb{R}_s$ è continua non se è costante, e lo è viceversa se è banale.

PROPOSIZIONE

Sia $K_1 \supseteq K_2 \supseteq \dots \supseteq K_n \supseteq \dots$ una catena discendente numerabile di chiusi non vuoti e compatti di uno spazio topologico. Allora:

$$\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i \neq \emptyset$$

Dim.

Consideriamo la famiglia di aperti $\{K_1 \setminus K_i \mid i \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\}$. Se $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} K_i = \emptyset$, allora $K_1 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_1 \setminus K_i$, ossia $\{K_1 \setminus K_i\}_{i \geq 2}$ è un ricoprimento aperto di K_1. Ma K_1 è compatto: allora $K_1 \subseteq \bigcup_{i=2}^{j} K_1 \setminus K_i$, da cui si ha che l'intersezione finita $K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_j = \emptyset$, da cui si ha, dato che gli insiemi sono ognuno contenuto nel precedente, che $K_j = \emptyset$, ma ciò è assurdo, c.v.d.

PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA

Dato un insieme X, una famiglia di sottoinsiemi $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ ha la PROPRIETÀ DELL'INTERSEZIONE FINITA se per ogni sotto-famiglia finita e non vuota $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F}$, l'intersezione degli elementi di $\mathcal{G}$ è non vuota.

PROPOSIZIONE

Uno spazio topologico X è compatto se e solo se ogni famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita ha intersezione non vuota.

Dim.

Sia X compatto, sia $\{C_i\}_{i \in \Lambda}$ una famiglia di chiusi con la proprietà dell'intersezione finita. Supponiamo per assurdo che sia $\bigcap_{i \in \Lambda} C_i = \emptyset$. Allora si avrebbe $\bigcup_{i \in \Lambda} (X - C_i) = X$. $\{X - C_i\}_{i \in \Lambda}$ sarebbe dunque un ricoprimento aperto di X. Potremmo allora estrarre un sottoricoprimento finito:

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i^c = X \Rightarrow \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset,$$

ma ciò è assurdo.

Sia ora $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ un ricoprimento aperto di X. Si ha allora:

$$\bigcup_{i \in \Lambda} A_i = X \Rightarrow \bigcap_{i \in \Lambda} C_i = \bigcap_{i \in \Lambda} X - A_i = \emptyset$$

Allora $\{C_i\}_{i \in \Lambda}$ non ha la proprietà dell'intersezione finita:

$$\exists\, C_1, \dots, C_n \ni \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \emptyset \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i = X,$$

cioè X è compatto c.v.d.

COMPLEMENTI SULLA COMPATTEZZA

PROPOSIZIONE

Siano X, Y spazi topologici, e sia $X \times Y$ il prodotto topologico. Allora X e Y sono compatti se e solo se $X \times Y$ è compatto.

Dim.

Se $X \times Y$ è compatto, considerando le proiezioni sul primo e sul secondo fattore (continue nella topologia prodotto) si ha che $\pi_X(X \times Y) = X$, $\pi_Y(X \times Y) = Y$, da cui X e Y sono compatti.

Viceversa, sia $\{A_i\}_{i \in \Lambda}$ un ricoprimento aperto di $X \times Y$. Non è restrittivo supporre $\{A_i\}_{i \in \Lambda} = \{U_i \times V_i\}_{i \in \Lambda}$, con U_i aperto in X, V_i aperto in Y.

Se scelgo $y \in Y$, la fibra $\pi_Y^{-1}(y) = X \times \{y\}$ è compatta perché omeomorfa a X, compatto per ipotesi.

Esistono allora degli aperti $U_i \times V_i$ (in numero finito) che ricoprono $X \times \{y\}$:

$$\pi_Y^{-1}(y) \subseteq (U_1 \times V_{i_1}) \cup \dots \cup (U_n \times V_{i_n})$$

Ora, si ha che $V_y \overset{\text{def}}{=} V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_n}$ è un aperto che contiene y. Si ha allora $Y = \bigcup_{y \in Y} V_y$, ma essendo Y compatto, esistono $y_1 \dots y_k$ tali che

$$Y = \bigcup_{i=1}^{k} V_{y_i}$$

Allora è: $\bigcup_{i=1}^{k} \pi_2^{-1}(V_{y_i}) = X \times Y$, da cui $X \times Y$ è compatto, perché il sottoricoprimento scelto è finito, c.v.d.

COROLLARIO

Un sottoinsieme $A \subseteq \mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato (cioè esiste $M \in \mathbb{R}^+$ tale che $A \subseteq [-M, M]^n$).

Dim.

Se A è chiuso in $[-M, M]^n$, dato che $[-M, M]$ è omeomorfo a $[0, 1]$ (compatto), per il teorema precedente $[0, 1]^n$, e dunque $[-M, M]^n$, è compatto. Un chiuso in un compatto, allora, è compatto.

Viceversa, A è chiuso perché compatto in uno spazio $\mathbb{R}^n$;

insieme è limitato, perché considerando le varie proiezioni su $\mathbb{R}$ (continue) ogni proiezione risulta compatta, dunque è limitata. Considerando allora il massimo modulo degli estremi di chiusi che includono ogni proiezione (sia essi M_i), si ha che $K \subseteq [-M, M]^n$, anch'esso è limitato, c.v.d.

OSSERVAZIONE

$\mathbb{R}^n$ è uno spazio T_2 perché prodotto topologico di n copie di $\mathbb{R}$ che è uno spazio T_2.

PROPOSIZIONE

Siano X uno spazio topologico compatto e Y uno spazio di Hausdorff; sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua. Allora f è chiusa; in particolare, f è propria.

Dim.

Sia $C \subseteq X$ un chiuso. Allora è anche un compatto. Essendo f continua, $f(C)$ è compatto ma Y è T_2, da cui si ha che $f(C)$ è chiuso. Essendo Y un T_2, ogni $y \in Y$ è tale che $\{y\}$ è chiuso, da cui $f^{-1}(\{y\})$, per la continuità di f, è chiuso in X compatto, dunque compatto. Allora f è propria, c.v.d.

ESAUSTIONI IN COMPATTI

Sia X uno spazio topologico. Una ESAUSTIONE IN COMPATTI di X è una famiglia numerabile di sottospazi compatti: $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:

- $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} K_n = X$;
- $\forall n\in\mathbb{N}: K_n \subseteq K_{n+1}^\circ$

OSSERVAZIONE

Se $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'esaustione in compatti di X, allora $\{K_n^\circ\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto e numerabile di X, per di più costituito da aperti ognuno contenuto nel successivo. Siccome $H = X$ compatto è necessariamente tale che:

$\exists K_j^\circ \in \{K_n^\circ\}_{n\in\mathbb{N}} : H = K_j \subseteq K_j^\circ$

OSSERVAZIONE

Consideriamo $\forall n\in\mathbb{N}$ $K_n = \{(x_1,\dots,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 \le n^3\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Questa famiglia numerabile di compatti prova che $\mathbb{R}^3$ $\forall n\in\mathbb{N}$ ha un'esaustione in compatti.

Con le esaustioni in compatti possiamo dimostrare che due spazi non sono omeomorfi, ad esempio. In un certo senso, esaustiscono il "completamento all'infinito" degli spazi topologici.

PROPOSIZIONE

$\mathbb{R}^3$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^3 - \{0\}$.

Dim.

Per assurdo, sia $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 - \{0\}$ un omeomorfismo. $\mathbb{R}^3$ ha un'esaustione in compatti, sia essa $\{K_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Allora $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{f(K_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ è un'esaustione in compatti di $\mathbb{R}^3 - \{0\}$. In particolare, considerando il compatto:

$S_1 = \{(x_1,\dots,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3 - \{0\}$

si ha che:

$\exists n_0\in\mathbb{N} : S_1 \subseteq D_{n_0}$

Se $\mathbb{R}^n \setminus K_{x_0}$ è connesso: Teorema vale contraddizione

supponendo che $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0}$ non è connesso.

Sia quindi:

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$
$$x \to \|x\| = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

Si ha:

- $M = \max_{x \in D_{x_0}} \|x\| > r$;
- $m = \min_{x \in D_{x_0}} \|x\| < r$.

essendo $S^1 := D_{x_0}$.

Ora:

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \|x\| < m\} \subsetneq \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0} \mid \|x\| < r\}$$
$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mid \|x\| > M\} \subsetneq \{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0} \mid \|x\| > r\},$$

da cui degli insiemi:

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0} \mid \|x\| < r\} \quad \text{e}$$
$$\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0} \mid \|x\| > r\}$$

sono aperti non vuoti e disgiunti la cui unione è $(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \setminus D_{x_0}$, che quindi è sconnesso: ciò è assurdo, dunque la tesi.

COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF

Sia X uno spazio topologico, e sia ∞ un punto, $\infty \notin X$. Si definisce COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF $\hat{X}$ di X:

$$\hat{X} \stackrel{\text{def}}{=} X \cup \{\infty\}$$

La topologia su $\hat{X}$ prevede che gli aperti di $\hat{X}$ siano gli aperti di X e i complementari dei chiusi e compatti in X (X a priori non è T_2, né compatto).

È immediato notare che questa è una topologia su $\hat{X}$. Inoltre l'inclusione naturale $X \hookrightarrow \hat{X}$ è un immersione aperta.

Notiamo anche che $\hat{X}$ è compatto. Sia $\{U_i\}_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $\hat{X}$: allora esiste $U_0 \in \{U_i\}_{i \in I}$ tale che $\infty \in U_0$. Il suo insieme complementare $K = \hat{X} - U_0$ è un compatto in X rispetto da $\bigcup_{i \in I} U_i$: allora esiste un sotto-ricoprimento finito di K:

$$K \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_m \Rightarrow \hat{X} = U_0 \cup U_1 \cup \dots \cup U_m,$$

da cui $\hat{X}$ è compatto.

OSSERVAZIONE.

Se X è compatto, $\hat{X}$ non è connesso. Infatti X e $\{\infty\}$ sono due aperti non vuoti e disgiunti, la cui unione è $\hat{X}$. Infatti X è aperto in $\hat{X}$, e $X = \hat{X} - \{\infty\}$ è chiuso in X e compatto.

Un esempio abbastanza familiare di compattificazioni di Alexandroff è quello degli spazi proiettivi:

- $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \{[0,1]\}$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{[0,1]\}$ è la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$.

PROPOSIZIONE

Nelle notazioni di prima, $\hat{X}$ è T_2 se e solo se X è T_2 e ogni punto di X possiede un intorno completo.

Dim.

Sia $\hat{X}$ uno spazio T_2: allora anche X è T_2. Siano ora $x \in \hat{X}$, $x \neq \infty$. x e ∞ hanno intorni aperti disgiunti A e B:

- $\infty \in A = \hat{X} \setminus C$, con C chiuso e compatto di X;
- $x \in B \subseteq C$ (dato che $A \cap B = \emptyset$).

Allora C è un intorno compatto di x.

Viceversa sia X uno spazio T_2, tale che ogni $x \in X$ ha un intorno compatto: sia $x \in X$, $x \neq \infty$. Allora $x \in C$, con C compatto in X (dunque chiuso). In particolare, esiste $B \subseteq C$ intorno aperto di x, essendo C un intorno di x. Detta poi $A = \hat{X} \setminus C$ è un intorno aperto di ∞ disgiunto da B: allora $\hat{X}$ è T_2, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $f: X \to Y$ una funzione continua, più precisamente un'immersione aperta di spazi topologici T_2. Allora:

$$g: Y \to \hat{X}, \quad g(y) = \begin{cases} x, & y \in f(X) \\ \infty, & y \notin f(X) \end{cases}$$

è continua.

Dim.

Sia $U \subseteq \hat{X}$ un aperto. Se $U \subseteq X$, allora $g^{-1}(U) = f(U)$ è un aperto di Y. Se invece $U = \hat{X} \setminus K$, con $K \subseteq X$ compatto, allora $g^{-1}(U) = Y - f(K)$ è aperto perché $f(K)$ è compatto in un T_2, dunque chiuso. c.v.d.

COROLLARIO

Se Y è T_2 ed è compatto, allora Y coincide con la compattificazione di Alexandroff di $Y \setminus \{y\}$ per ogni $y \in Y$

Dim.:

Se Y è T2 e compatto, considerando $X = Y \setminus \{p\}$ e f l'inclusione naturale:

$$f : Y \setminus \{p\} \hookrightarrow Y,$$

si ha che:

$$g : Y \longrightarrow Y \quad , \quad g(z) = \begin{cases} x & \text{se } z = f(x) \\ p & \text{se } z = y \end{cases}$$

è continua e biiettiva. Tra spazi T2 e compatti, dunque un omeomorfismo, c.v.d.

COROLLARIO

Se $f : X \longrightarrow Y$ è propria, allora f si estende ad un applicazione continua $\hat{f} : \hat{X} \longrightarrow \hat{Y}$.

Dim.:

Definiamo:

$$\hat{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \\ \infty_Y & x = \infty_X \end{cases}$$

è sufficiente dimostrare che le controimmagini degli aperti contenenti ∞_Y sono aperti di $\hat{X}$.

In effetti $A = \hat{Y} \setminus C$, con C compatto e chiuso di Y, allora $\hat{f}^{-1}(A) = \hat{X} \setminus \hat{f}^{-1}(C) = X \setminus f^{-1}(C)$ è aperto perché dato che f è propria, $f^{-1}(C)$ risulta chiuso e compatto in X, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Una mappa propria manda successioni divergenti in successioni divergenti.

PROIEZIONE STEREOGRAFICA

Sia p la proiezione stereografica seguente:

$$p : S_m \setminus \{(0,\dots,0,1)\} \to \mathbb{R}^m$$

Per $q \in S_m \setminus \{(0,\dots,0,1)\}$ si ha una unica retta:

$$r : tq + (1-t)(0,\dots,0,1)$$

che interseca l'iperpiano di $\mathbb{R}^{m+1}$ (omeomorfo a $\mathbb{R}^m$):

$$H_{m+1} = \{ e_{m+1} = 0 \}$$

in un unico punto: $p(q)$.

Si dimostra che p e p^{-1} sono continue perché esprimibili mediante funzioni razionali a denominatore costantemente non nullo.

Si definisce, la funzione inversa:

$$p^{-1} : \mathbb{R}^m \cong H_{m+1} \to S_m$$

è una rappresentazione aperta.

S_m, con la sua topologia, risulta dunque la compattificazione di Alexandroff $\mathbb{R}^m$ di $\mathbb{R}^m \cong H_{m+1}$. La funzione seguente:

$$f : S_m \to \mathbb{R}^m$$

$$f(x) = \begin{cases} p(x) \in \mathbb{R}^m & , x \neq (0,\dots,0,1) \\ \infty & , x = (0,\dots,0,1) \end{cases}$$

è infatti un omeomorfismo.

GRUPPI TOPOLOGICI

Un GRUPPO TOPOLOGICO è un insieme G che ha sia una struttura di gruppo che una struttura topologica.
Ciò vuol dire che il prodotto e l'inversione sono funzioni continue:

$$\mathbb{P} : G \times G \to G \qquad \mathbb{I} : G \to G$$
$$(g, h) \to gh \qquad g \to g^{-1}$$

Le operazioni di MOLTIPLICAZIONE DESTRA e MOLTIPLICAZIONE SINISTRA sono continue:

$$R_h : G \to G \qquad L_h : G \to G$$
$$g \to gh \qquad g \to hg$$
$$R_h = \mathbb{P} \circ i_{dx,h} \qquad L_h = \mathbb{P} \circ i_{sx,h},$$

con $i_{dx,h}(g) : (g, h)$ e $i_{sx,h}(g) = (h, g)$.

Inoltre $(R_h)^{-1} = R_{h^{-1}}$ e $(L_h)^{-1} = L_{h^{-1}}$, da cui R_h e L_h sono degli omeomorfismi per ogni $h \in G$.

Notiamo che:

$$\forall\, g, h \in G \quad \exists\, R_{g^{-1}h} : R_{g^{-1}h}\, g = g g^{-1} h = h$$

OSSERVAZIONE

Il gruppo $GL(n, \mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$ è un aperto ($GL(n, \mathbb{R}) = \det^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$) è un gruppo topologico, infatti i coefficienti di AB e A^{-1} dipendono da quelli di A e B, da cui le operazioni di prodotto e inversione sono continue.

LEMMA

Sia G un gruppo topologico con elemento neutro e. Allora G è T_2 se e solo se l'insieme $\{e\}$ è chiuso.

Dim.

Un'implicazione è banale. Viceversa, sia $\{e\}$ chiuso. Dati x, y in G distinti, è sufficiente dimostrare che l'applicazione:

$$\Phi : G \times G \to G$$
$$(g, h) \to gh^{-1}$$

è continua, da cui $\Phi(x, y) = xy^{-1} \in G - \{e\}$ implica che

esistono $U \ni x$, $V \ni y$ tali che:

$\forall g \in U$, $\forall h \in V$: $\phi(g,h) = gh^{-1} \in G - \{e\}$,

da cui $U \cap V = \phi$, i.c.v.d.

Analizzeremo ora alcune proprietà di alcuni gruppi classici: essi sono tutti di Hausdorff perché matriciali, essendo sottospazi topologici di $\mathbb{R}^{n^2}$ o $\mathbb{C}^{n^2}$.

PROPOSIZIONE

$O(n,\mathbb{R})$ è chiuso e limitato in $M(n,\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$. Il sottoinsieme $O^+(n,\mathbb{R})$ è $O^-(n,\mathbb{R})$, distinti in base al determinante, sono connessi, da cui si ottiene che $O(n,\mathbb{R})$ ha due componenti connesse.

Dimo.

Dimostriamo un lemma preliminare.

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva di spazi topologici, con X compatto e Y connesso di Hausdorff. Se per ogni $y \in Y$ la fibra $f^{-1}(y)$ è connessa, allora X è connesso.

Dimo.

Sia C un chiuso di X. Allora C è compatto in X, e dunque $f(X)$ è compatto in un T_2, cioè un chiuso: f dunque è chiusa. Siano ora C_1, C_2 chiusi tali che $X = C_1 \cup C_2$. Allora $Y = f(C_1) \cup f(C_2)$, e dato che Y è connesso:

$$f(C_1) \cap f(C_2) \neq \phi \Rightarrow \exists\, y \in f(C_1) \cap f(C_2).$$

Allora:

$$f^{-1}(y) \cap C_1 \neq \phi, \qquad f^{-1}(y) \cap C_2 \neq \phi$$

In particolare:

$$f^{-1}(y) = [f^{-1}(y) \cap C_1] \cup [f^{-1}(y) \cap C_2],$$

e dato che $f^{-1}(y)$ è connesso:

$$[f^{-1}(y) \cap C_1] \cap [f^{-1}(y) \cap C_2] = f^{-1}(y) \cap [C_1 \cap C_2] \neq \phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C_1 \cap C_2 \neq \phi,$$

da cui X è connesso, c.v.d.

Consideriamo la seguente funzione continua:

$$\varphi : M(n, \mathbb{R}) \longrightarrow M(n, \mathbb{R})$$
$$A \longrightarrow AA^t,$$

che è continua perché la trasposizione e il prodotto lo sono. Essendo $M(n, \mathbb{R})$ T_2, ed essendo:

$$O(n, \mathbb{R}) = \varphi^{-1}(I_n),$$

$O(n, \mathbb{R})$ risulta chiuso.

Inoltre $O(n, \mathbb{R})$ è chiuso nella ipersfera di $\mathbb{R}^{n^2}$ di centro 0, perché, posto $P \in O(n, \mathbb{R})$:

$$\forall i = 1 \dots n : x_{i1}^2 + \dots + x_{in}^2 = 1 \Rightarrow \|P\| = \sum_{i,j} |x_{ij}|^2 = n;$$

dunque è limitato. Infine $O(n, \mathbb{R})$ è compatto.

Consideriamo ora $P, Q \in O(n, \mathbb{R})$. Siano $e_1, \dots, e_n$ le colonne di P, $b_1, \dots, b_n$ le colonne di Q. Infine $\{e_1, \dots e_n\}$ e $\{b_1, \dots b_n\}$ sono basi ortonormali di $\mathbb{R}^n$.

Consideriamo il piano $\mathrm{Span}(e_1, b_1)$: la rotazione dell'angolo α data tra e_1 in b_1 è l'arco definito sommato nella famiglia di rotazioni degli angoli $t\alpha$, $t \in [0, 1]$. Sia ρ_α la rotazione che manda e_1 in b_1. Ogni arco applicato ρ_α, di fatto che $\rho_\alpha(e_1) = b_1$, e:

$$\rho_\alpha(e_2), \dots, \rho_\alpha(e_n) \in \mathrm{Span}(b_1)^\perp,$$

perché la rotazione è un'applicazione ortogonale. Da qui, procedendo per induzione, si ha che $O^+(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi. Essendo $O^+(n, \mathbb{R})$ omeomorfo a $O^-(n, \mathbb{R})$ (la matrice ad opera dell'identità generica è omeomorfismo), anche $O^-(n, \mathbb{R})$ è connesso per archi.

Ora:

$$O(n, \mathbb{R}) = O^+(n, \mathbb{R}) \cup O^-(n, \mathbb{R}),$$

da cui $O(n, \mathbb{R})$ ha una o due componenti connesse. Ma $O(n, \mathbb{R})$ è perlomeno connesso: se fosse connesso, $\det$, l'immagine essendo la funzione determinante dovrebbe essere connessa. Ma $\det(O(n, \mathbb{R})) = \{1, -1\}$ è sconnesso, da cui $O(n, \mathbb{R})$ ha esattamente due componenti connesse, c.v.d.

PROPOSIZIONE

$GL(n, \mathbb{R})$ è completo da esattamente due componenti connesse fra loro.

Che le componenti connesse siano almeno due, è chiaro: $GL(n, \mathbb{R})$ non è connesso, in quanto $\det(GL(n, \mathbb{R})) = \mathbb{R} - \{0\}$, ma quest'insieme è sconnesso.

Per concludere dimostriamo che $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso: seguirà la connessione di $GL^-(n, \mathbb{R})$ (tramite l'omeomorfismo dato da $-Id$), e dunque la tesi, notando che:

$$GL(n, \mathbb{R}) = GL^+(n, \mathbb{R}) \cup GL^-(n, \mathbb{R})$$

È sufficiente dimostrare che posto comunque $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ con $U_A \in O^+(n, \mathbb{R})$, considerando l'algoritmo di Gram-Schmidt, si ha che:

- Considerato v_i, l'operazione di normalizzazione $v_i \to \frac{v_i}{\|v_i\|}$ si può esprimere mediante l'arco:

$$\gamma(t) = v_i \cdot \frac{t}{\|v_i\|} + (1-t)\, v_i = \left(1 - t + \frac{t}{\|v_i\|}\right) v_i = \frac{(1-t)\|v_i\| + t}{\|v_i\|}\, v_i \quad , \quad t \in [0,1]$$

- Considerato v_i e i vettori già normalizzati $e_1, \dots, e_{i-1}$ (supponiamo $i \geq 2$), l'operazione $v_i \to v_i - p_{\mathcal{L}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}}(v_i)$ è esprimibile mediante l'arco:

$$\Theta(t) = (1-t)\, v_i + t\,(v_i - p_{\mathcal{L}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}}(v_i)) = v_i - t\, p_{\mathcal{L}\{e_1, \dots, e_{i-1}\}}(v_i) \quad , \quad t \in [0,1]$$

Ogni passo dell'algoritmo di Gram-Schmidt è esprimibile con un arco, e la composizione di archi è un arco, da cui $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$ è connessa ad una matrice $U_A \in O^+(n, \mathbb{R})$ ($U_A \notin O^-(n, \mathbb{R})$ perché altrimenti sarebbe $U_A \in GL^-(n, \mathbb{R})$, assurdo).

$GL(n, \mathbb{R})$ presenta dunque due componenti connesse, c.v.d.

IDENTIFICAZIONI

Un'applicazione suriettiva e continua $f: X \to Y$ si dice un'IDENTIFICAZIONE o SURIEZIONE TOPOLOGICA se gli aperti di Y sono tutti e soli i sottoinsiemi $A \subseteq Y$ tali che $f^{-1}(A)$ è aperto in X (o, equivalentemente, $C \subseteq Y$ è chiuso se e solo se $f^{-1}(C)$ è chiuso in X).

Le immersioni e le identificazioni sono duali di quella di immersione.

Notiamo che:

- nel caso di un'immersione $i: X \to Y$, X è dotato della topologia meno fine che rende i continua;
- nel caso di un'identificazione $f: X \to Y$, Y è dotato della topologia più fine che rende f continua.

Diamo ora un'altra definizione.

Sia $f: X \to Y$ continua: $A \subseteq X$ si dice SATURO rispetto a f, o f-SATURO, se $A = f^{-1}(B)$ per qualche $B \subseteq Y$, cioè se contiene tutte le classi di equivalenza dei suoi elementi, secondo la relazione che afferma che:

$$x \sim y \iff f(x) = f(y)$$

f è allora un'identificazione se, per ogni aperto saturo $A \subseteq X$, $f(A)$ è aperto in Y, e gli aperti di Y sono solo questi. Non tutti gli aperti di X sono saturi: ciò significa che le identificazioni sono applicazioni aperte.

Una IDENTIFICAZIONE APERTA è sia un'identificazione che un'applicazione aperta; una IDENTIFICAZIONE CHIUSA è sia un'identificazione che un'applicazione chiusa.

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e surgettiva:

- se f è chiusa, allora f è un'identificazione chiusa;
- se f è aperta, allora f è un'identificazione aperta.

Dim.

Sia $A \subseteq Y$. Per suriettività di f:

$$\forall A \subseteq Y : A = f(f^{-1}(A))$$

Se dunque f è aperta e $A \subseteq Y$ è tale che $f^{-1}(A)$ è aperto, allora $A = f(f^{-1}(A))$ è aperto, dato che f è un'identificazione aperta.

Discorso analogo per le identificazioni chiuse, c.v.d.

VERSIONE (PROPRIETÀ UNIVERSALE DELLE IDENTIFICAZIONI)

Siano $f: X \to Y$ una identificazione e $g: X \to Z$ un'applicazione continua. Allora esiste $h: Y \to Z$ tale che $g = h \circ f$ se e solo se g è costante sulle fibre di f.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Z \\ & \searrow^{f} & \nearrow_{h} \\ & Y & \end{array}$$

Inoltre, h è continua.

Dim.

La condizione di g che è costante sulle fibre di f, si legge così:

$$\forall x, x' \in X \text{ s.t. } f(x) = f(x') : g(x) = g(x')$$

Definiamo, in primo istanza:

$$h: Y \to Z$$
$$h(y) = g(x),$$

ove $x \in X$ è tale che $f(x) = y$. Perché h sia ben definita, è evidente che basta g costante sulle fibre di f e nessuna più è sufficiente.

E g è costante sulle fibre, h è ben definita e tale che:

$$g = h \circ f$$

Dimostriamo che h è continua. Sia $U \subseteq Z$ aperto: allora $g^{-1}(U) = f^{-1}(h^{-1}(U))$ è aperto perché g è continua, e quindi di $h^{-1}(U)$ è aperto perché f è un'identificazione. Allora h è continua, c.v.d.

TOPOLOGIA QUOZIENTE

Sia X uno spazio topologico, Y un insieme e $f: X \to Y$ un'applicazione suriettiva. La famiglia dei sottoinsiemi $A \subseteq Y$ tali che $f^{-1}(A) \subseteq X$ è aperto forma una topologia, detta TOPOLOGIA QUOZIENTE, che è l'unica che rende f un'identificazione, ovvero la più fine che renda f continua.

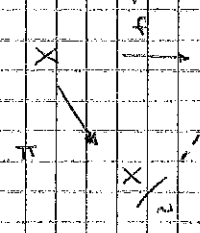
Supponiamo di avere uno spazio topologico X una relazione $\sim$ di equivalenza su X. Identifichiamo l'insieme delle classi di equivalenza con $X/\sim$. Consideriamo la seguente applicazione suriettiva:

$$\pi : X \to X/\sim$$
$$x \to [x]$$

Lo spazio topologico $X/\sim$, munito della topologia quoziente rispetto a π, è detto SPAZIO QUOZIENTE.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Sia $f: X \to Y$ un'applicazione continua e $\pi: X \to X/\sim$ la proiezione sul quoziente, con $\sim$ relazione di equivalenza su X. Allora esiste $g: X/\sim \to Y$ continua tale che $f = g \circ \pi$ se e solo se f è costante sulle fibre di π, cioè sulle classi di equivalenza:



Una classe di quozienti topologici è quella detta CONTRAZIONI. Dato X spazio topologico e $A \subseteq X$ sottoinsieme, definiamo la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x = y \ \vee \ x, y \in A$$

Lo spazio quoziente $X/\sim$ si indica di solito con X/A: si dice quindi che $\pi: X \to X/A$ contrae A ad un punto.

ESEMPI DI SPAZI QUOZIENTE

OSSERVAZIONE

Ogni quoziente di un compatto (connesso) è compatto (connesso).

Consideriamo ora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} / \sim$. Esso è uno spazio quoziente ottenuto a partire da $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ considerando la relazione:

$$x \sim y \iff \exists\, \lambda \neq 0 \text{ t.c. } x = \lambda y$$

Sempre $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è connesso per archi. $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è però sempre compatto, mentre $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ non lo è. Infatti, consideriamo il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \end{array}$$

$\varphi = \pi \circ i$ è continua perché composizione di funzioni continue, e anche suriettiva, perché ogni punto di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ corrisponde ad una retta in $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$, che contiene esattamente due vettori di norma 1 ($v \in (-v)$). Allora $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, immagine continua di un compatto, è un compatto.

Consideriamo $\mathbb{R}$, e la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

Sia Q lo spazio quoziente. Q è connesso e compatto, e inoltre è omeomorfo a S^1:

$$\begin{array}{ccccc} [0,1] & \xhookrightarrow{i} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \{(\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)\} = S^1 \\ & \searrow^{\varphi} & \downarrow \pi & \nearrow_{g} & \\ & & Q & & \end{array}$$

In particolare:

- φ è suriettiva: $\forall\, q \in Q\ \exists\, x \in [0,1]$ t.c. $\varphi(x) = q = \text{frac}(x)$;
- g è biiettiva (evidente) e inoltre è chiusa, dunque è un omeomorfismo. Infatti si ha:

X chiuso in Q (compatto) $\Rightarrow$ X compatto $\Rightarrow$ $f(X)$ compatto (perché f continua per ipotesi) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $f(X)$ è chiuso (perché compatto in uno T_2).

Una osservazione importante da fare, è la seguente: non è detto che un quoziente di uno spazio T_2 sia T_2.

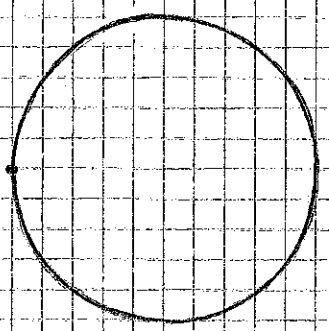
Facciamo alcuni esempi.

Consideriamo, su $\mathbb{R}$, la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff x = y \ \vee \ |x|, |y| \geq 1$$



Nel quoziente, l'insieme $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ è stato contratto in un punto. Infatti, i punti precedenti a -1 e quelli successivi a 1 sono "vicini" nello spazio quoziente, proprio perché c'è la continuazione densità sopra. Quindi il quoziente si rappresenta pressappoco così:



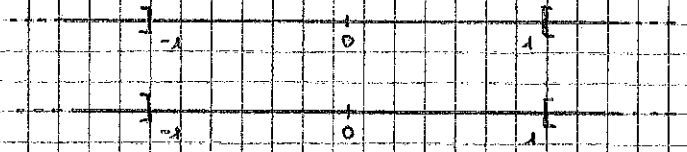
Il punto evidenziato, immagine dell'aperto $]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$, è aperto, proprio perché la sua controimmagine è aperta in $\mathbb{R}$. Quindi il quoziente è uno spazio che non è T_1, diversamente da quanto richiesto T_2.

Il quoziente è comunque connesso, perché immagine continua di un connesso, e cioè $\mathbb{R}$ compatto, perché immagine continua, ad esempio, del compatto $[-2, 2]$.

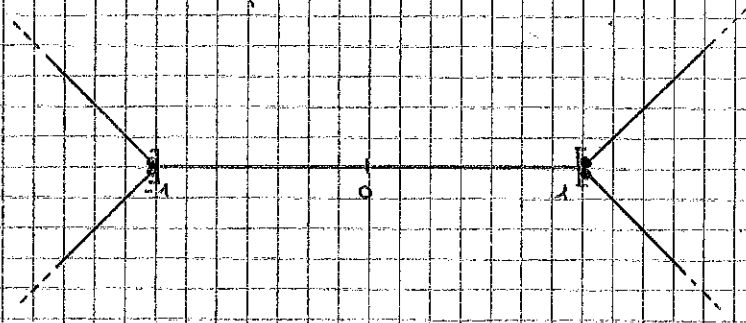
Consideriamo ora due rette di $\mathbb{R}^2$, di ordinata 0 e 1, e impostiamo la seguente relazione di equivalenza:

$A = (x_1, y_1)$
$B = (x_2, y_2)$

$$A \sim B \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv B \\ x_1 = x_2 \wedge |x_1| < 1 \end{cases}$$



Il quoziente secondo questa relazione non è T2:



Innanzitutto esso è connesso, perché unione di due connessi a intersezione non nulla.

I punti $(0,1)$ e $(1,1)$ non sono equivalenti, ma:

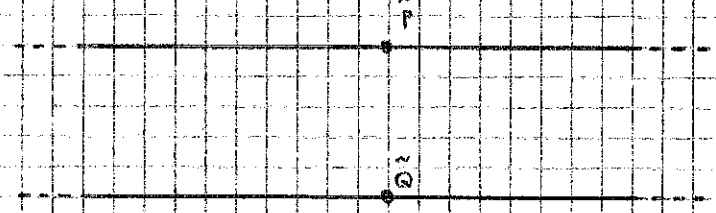
$\forall$ U intorno di $(0,1)$ in Q $\exists \delta > 0$: $]1-\varepsilon, 1[\subseteq U$ $\Rightarrow$

$\forall$ V intorno di $(1,1)$ in Q $\exists \varepsilon > 0$: $]1-\varepsilon, 1[\subseteq V$

$\Rightarrow \forall U, V$ intorni di $(0,1)$ e $(1,1)$ in Q : $U \cap V \neq \emptyset$,

da cui Q non è T2.

Consideriamo ancora una retta due volte in $\mathbb{R}^2$, di ordinata 0 e 1, e consideriamo $\tilde{P} = (\tilde{x}, 0)$ e $\tilde{Q} = (\tilde{x}, 1)$:

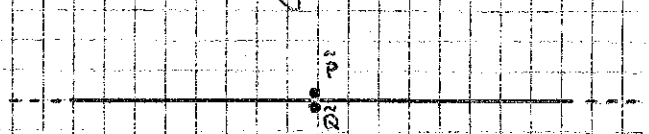


Impostiamo la seguente relazione di equivalenza:

$A = (x_1, y_1)$
$B = (x_2, y_2)$

$$A \sim B \Leftrightarrow \begin{cases} A \equiv B \\ x_1 = x_2 \wedge x_1 \neq \tilde{x} \end{cases}$$

Il quoziente è la seguente ($\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ non risultano equivalenti):



Se $\pi(\tilde{P}) = p$ e $\pi(\tilde{Q}) = q$, $\pi^{-1}(p)$ contiene dei punti equivalenti a dei punti contenuti in $\pi^{-1}(q)$, da cui:

$\forall\, U, V$ intorni di $\tilde{P}$ e $\tilde{Q}$ in Ω $\exists\, I_p, I_q \subseteq \Omega$:

$I_p \cap I_q \neq \emptyset$, $I_p \subseteq U$, $I_q \subseteq V$,

da cui Ω non è T2.

Consideriamo ora $\mathbb{R}$, con la seguente relazione di equivalenza:

$$x \sim y \iff \begin{cases} x \neq y \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Il quoziente $\mathbb{R}/\sim$ collassa ogni $\mathbb{Z}$ ad un punto:

$$\pi(\mathbb{Z}) = \omega,$$

e consta di un'infinità numerabile di cerchietti.

Vogliamo dimostrare che ω, non orientata, non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Supponiamo per assurdo che ω abbia un sistema fondamentale di intorni numerabili. Un intorno di ω in Ω è un aperto di $\mathbb{R}$ contenente $\mathbb{Z}$. Sia dunque $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ il sistema fondamentale di intorni numerabili di $\omega \in \Omega$.

Allora:

$$\forall\, m \in \mathbb{Z} : \quad \pi^{-1}(U_m) = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} I_n^m$$

Sempre allora il seguente intorno I^*:

$$I^* = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}} J_n \quad , \text{ con } \quad J_n \subseteq I_n^n \ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$$

I^* è un intorno aperto di $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{R}$ (e meglio, un intorno di ω in Ω) non contenente alcun intorno U_m della famiglia numerabile considerata, da cui la tesi.



COMPLEMENTI SUI GRUPPI TOPOLOGICI

OSSERVAZIONE

Il fatto che $O(n, \mathbb{R})$ sia compatto si può dimostrare in maniera differente.

Ad esempio, si può sfruttare il fatto che ogni matrice $A \in O(n, \mathbb{R})$ può essere scritta come prodotto di n riflessioni, ed essendo S_{n-1} compatta $(S_{n-1})^n$ è compatto.

OSSERVAZIONE

Consideriamo il quoziente $\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})$. Esso ha due soli punti:

$$\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R}) = [0] \cup [v]_{v \neq 0}$$

In particolare:

- $\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})$ munito della topologia quoziente, $[v]_{v \neq 0}$ è aperto perché immagine proiettata di $\mathbb{R}^n - \{0\}$, aperto in $\mathbb{R}^n$;
- $[0]$ è chiuso perché 0 è chiuso in $\mathbb{R}^n$, e equivalentemente perché è complementare di un aperto.

Allora è evidente che $\mathbb{R}^n / GL(n, \mathbb{R})$ non è T_0, dato che non esiste un aperto contenente $[0]$ ma non $[v]$.

OSSERVAZIONE

$U(n, \mathbb{C})$ è connesso (per archi). Sia $U \in U(n, \mathbb{C})$, allora esiste una trasformazione unitaria che manda U nell'identità, e questa trasformazione è composizione di archi. Tutte le matrici di $U(n, \mathbb{C})$ sono dunque connesse per archi alla matrice identica.

OSSERVAZIONE

Segue immediatamente che $GL(n, \mathbb{C})$ è connesso.

PARAMETRIZZAZIONI DI SFERA, TORO, NASTRO DI MOEBIUS, BOTTIGLIA DI KLEIN

Vogliamo ora classificare alcune superfici in base alla loro parametrizzazione.

La SFERA si ottiene partendo da un quadrato:

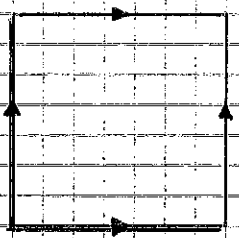
$$Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2,$$

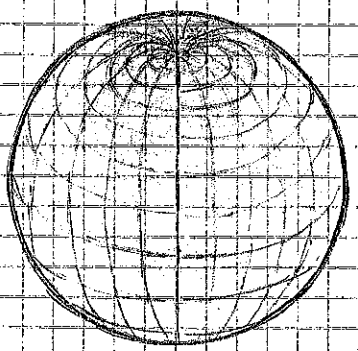
identificando i punti seguenti:

$$(0,x) \sim (x,0) \qquad (1,x) \sim (x,1)$$

La sua parametrizzazione è la seguente (se la sfera è centrata in $(0,0,0)$):

$$\begin{cases} x = r\cos\alpha \sin\varphi \\ y = r \sin\alpha \sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \qquad (\alpha,\varphi) \in [0,2\pi]^2$$





Il TORO si ottiene partendo da un quadrato:

$$Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2,$$

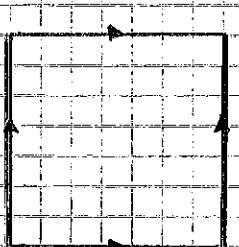
identificando i seguenti punti:

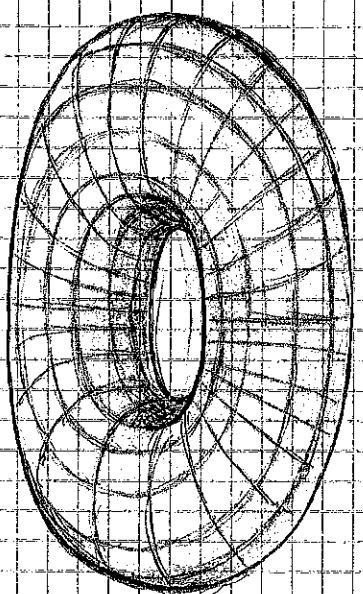
$$(0,x) \sim (1,x) \qquad (x,0) \sim (x,1)$$

La sua parametrizzazione è la seguente:

$$\begin{cases} x = (R - r\cos(\varphi))\cos\alpha \\ y = (R - r\cos(\varphi))\sin\alpha \\ z = r\sin\varphi \end{cases}$$

$$(\alpha,\varphi) \in [0,2\pi]^2$$





Il NASTRO DI MOEBIUS si ottiene quozientando il quadrato:

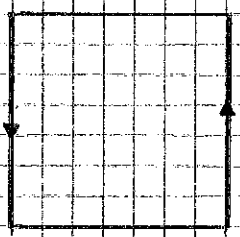
$$Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

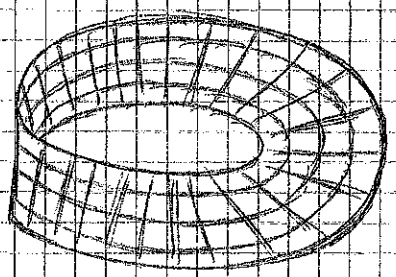
secondo la relazione che identifica:

$$(0, y) \sim (1, 1-y)$$

La parametrizzazione è la seguente:

$$\begin{cases} x = \left(r + v \sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\theta \\ y = \left(r + v \sin\frac{\theta}{2}\right)\sin\theta \\ z = v \cos\frac{\theta}{2} \end{cases} \quad (v, \theta) \in [-1,1] \times [0, 2\pi]$$





Infine, la BOTTIGLIA DI KLEIN si ottiene partendo dal quadrato:

$$Q = [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$$

e identificando i seguenti punti:

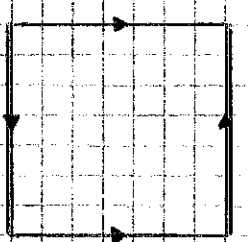
$$(x, 0) \sim (x, 1) \qquad (0, y) \sim (1, 1-y)$$

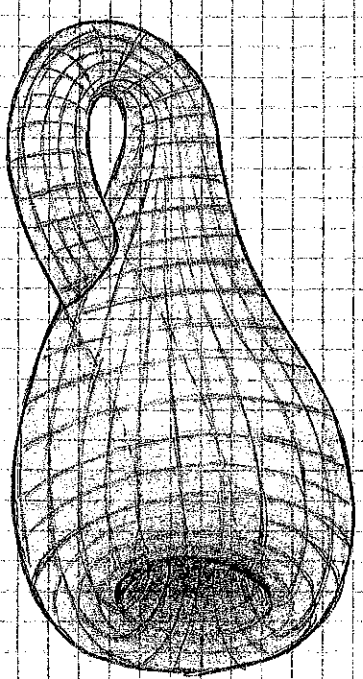
La parametrizzazione è la seguente:

$$\begin{cases} x = \begin{cases} 6\cos\varphi(1+\sin\varphi) + r\cos\theta\cos\varphi & , 0 \le \varphi < \pi \\ 6\cos\varphi(1+\sin\varphi) - r\cos\theta & , \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \\ y = \begin{cases} 16\sin\varphi + r\sin\varphi\cos\theta & , 0 \le \varphi < \pi \\ 16\sin\varphi & , \pi \le \varphi \le 2\pi \end{cases} \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

con:

- $\theta \in [0, 2\pi]$;
- $\varphi \in [0, 2\pi]$;
- $r = 4\left(1 - \frac{\cos\varphi}{2}\right)$.





QUOZIENTI PER GRUPPI DI OMEOMORFISMI

Sia X uno spazio topologico, e denotiamo con $\mathrm{Omeo}(X)$ l'insieme di tutti gli omeomorfismi di X in sé. $\mathrm{Omeo}(X)$ ha una naturale struttura di gruppo, munita della composizione. In particolare $\mathrm{Id} \in \mathrm{Omeo}(X)$ è l'elemento neutro.

Sia $G < \mathrm{Omeo}(X)$ un sottogruppo. Definiamo:

$$\forall x, y \in X: \quad x \sim y \iff \exists\, g \in G \text{ t.c. } g(x) = y$$

Questa è una relazione di equivalenza su X. Le classi di equivalenza vengono dette ORBITE di G, e il relativo spazio quoziente viene denotato con X/G.

Possiamo considerare X/G con la topologia quoziente: le proprietà di X/G dipendono da X e da G. Ad esempio, essendo X/G un quoziente di X, esso è connesso (completo) se X è connesso (completo), dato che la proiezione $\pi: X \to X/G$ è continua (dato che X/G ha la topologia quoziente).

PROPOSIZIONE

Sia $G < \mathrm{Omeo}(X)$ un gruppo di omeomorfismi di uno spazio topologico X, e sia $\pi: X \to X/G$ la proiezione al quoziente. Allora:

- π è aperta;
- se G è finito, allora π è chiusa.

Dim.

Sia $A \subseteq X$: allora $\pi^{-1}(\pi(A)) = \bigcup \{g(A) \mid g \in G\}$. Dato allora A aperto, $g(A)$ è aperto per ogni $g \in G$, dunque $\pi^{-1}(\pi(A))$ è aperto perché unione di aperti. Allora, per definizione di topologia quoziente, $\pi(A)$ è aperto.

Se G è finito, si può ripetere il ragionamento con i chiusi, facendo leva sul fatto che un'unione finita di chiusi è un chiuso, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia G un gruppo di omeomorfismi di uno spazio di Hausdorff X, e sia $\pi : X \to X/G$ la proiezione ed assumiamo che G soddisfi la seguente proprietà: per ogni aperto $A \subseteq X$ tale che:

- A interseca ogni orbita di G, cioè $\pi : A \to X/G$ è suriettiva;
- l'insieme $\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}$ è finito.

Allora X/G è di Hausdorff.

Dimostrazione:

Siano $g_1, \dots, g_n$ gli elementi di G tali che accade:

$$g(A) \cap A \neq \emptyset$$

Se $g(A) \cap A \neq \emptyset$, allora, esiste $i \in \{1, \dots, n\}$ tale che $g = g_i$.

Siano $p, q \in X/G$ due punti distinti, siano x, y due loro rappresentanti:

$$\pi(x) = p, \quad \pi(y) = q, \quad x, y \in A$$

Dato che X è T2:

$\forall i = 1, \dots, n \; \exists U_i, V_i$ aperti di X s.t. $x \in U_i$, $g_i(y) \in V_i$, $U_i \cap V_i = \emptyset$

Consideriamo:

$$U = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} U_i \qquad V = A \cap \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}(V_i),$$

e dimostriamo che $U \cap g(V) = \emptyset \;\; \forall g \in G$.

Se $A \cap g(A) = \emptyset$, allora:

$$U, V \subseteq A \Rightarrow U \cap g(V) \subseteq A \cap g(A) = \emptyset \Rightarrow U \cap g(V) = \emptyset$$

Se invece $A \cap g(A) \neq \emptyset$, cioè $g = g_i$ per un $i \in \{1, \dots, n\}$, si ha:

$$U = U_i, \quad V \subseteq g_i^{-1}(V_i) \Rightarrow U \cap g(V) \subseteq U_i \cap V_i = \emptyset$$

Consideriamo allora i seguenti aperti saturi:

$$x \in \bigcup_{g \in G} g(U) \qquad y \in \bigcup_{g \in G} g(V)$$

Dimostriamo che sono disgiunti per assurdo:

$$\exists g, h \in G \text{ s.t. } g(U) \cap h(V) \neq \emptyset \Rightarrow g^{-1}(g(U) \cap h(V)) = U \cap g^{-1}h(V) = U \cap k(V) \neq \emptyset, \; k \in G$$

Assurdo in quanto dimostrato prima. c.v.d.

COROLLARIO

Sia G un gruppo finito di omeomorfismi di uno spazio T2 X. Allora X/G è di Hausdorff.

Dim.

Basta applicare la proposizione precedente con $\Delta = X$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $G < \mathrm{Omeo}(X)$, con X spazio topologico. Allora X/G è T2 se e solo se $K \subseteq X \times X$ è chiuso nel prodotto:

$$K = \{(x, g(x)) \in X \times X \mid x \in X, g \in G\}$$

Dim.

La proiezione $\pi : X \to X/G$ è aperta e surgettiva. Allora l'applicazione seguente:

$$p : X \times X \to X/G \times X/G \qquad p(x,y) = (\pi(x), \pi(y))$$

è aperta, continua, surgettiva, dunque un'identificazione aperta.

Notiamo che $p(x,y) \in \Delta \subseteq X/G \times X/G \Leftrightarrow (x,y) \in K$.

Abbiamo dunque dimostrato che $p^{-1}(\Delta) = K$, da cui, visto che p è un'identificazione, Δ è chiuso se e solo se K è K, c.v.d.

Ex. Consideriamo:

$$G = \{\tau_{kv} \mid v \in \mathbb{R}^n - \{0\},\ k \in \mathbb{Z}\}$$

$$H = \{\tau_{hv_1 + kv_2} \mid v_1, v_2 \text{ lin. ind.},\ h, k \in \mathbb{Z}\}$$

Si ha:

- $\mathbb{R}/G \cong S_1$. Infatti, se $\sim$ è la relazione di equivalenza che identifica gli estremi degli intervalli:

$$\mathbb{R}/G \cong [0,1]/\sim \cong [0,1]/\sim \cong S_1 \Rightarrow \mathbb{R}/G \cong S_1;$$

- $\mathbb{R}^2/H \cong S_1 \times S_1$. Infatti, se P è il parallelogrammo orientato v_1 e v_2 per lati:

$$\mathbb{R}^2/H \cong P/H \cong [0,1] \times [0,1]/\sim \cong S_1 \times S_1,$$

ove $\sim$ è tale che $(1,y) \sim (0,y)$ e $(x,0) \sim (x,1)$.

SPAZI PROIETTIVI

Per definizione:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \Big/ \sim,$$

con:

$$x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{R} - \{0\} \text{ s.t. } x = \lambda y$$

Si ha anche:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \Big/ G,$$

dove $G \leq \mathrm{Omeo}(*)$ è il gruppo delle omotetie.

Ricordiamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ delle Topologie quoziente. Infine ci ricordiamo di un'identificazione

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

Considerando $i : S^n \to \mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ è l'inclusione canonica, e:

$$r : \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} \to S^n$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Tutte queste applicazioni sono continue, e in particolare $\pi \circ i$ è suriettiva, tale che induce $f : S^n/\sim \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, dove $x \sim y \iff x = \pm y$. f, in particolare, è continua e biiettiva. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccccc} S^n & \xrightarrow{i} & \mathbb{R}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{r} & S^n \\ \downarrow{\scriptstyle \pi'} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \downarrow{\scriptstyle \pi'} \\ S^n/\sim & \xrightarrow{f} & \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) & \xrightarrow{f^{-1}} & S^n/\sim \end{array}$$

Per la proprietà universale delle identificazioni, si dimostra che f e f^{-1} sono continue.

Infine $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $S^n/\pm \mathrm{Id}$, e per la proposizione precedente, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è T_2.

La definizione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ è del tutto analoga a quella di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \sim$$
$$x \sim y \iff \exists\, \lambda \in \mathbb{C} - \{0\} \text{ s.t. } x = \lambda y$$

PROPOSIZIONE

Gli spazi proiettivi reali e complessi sono T2, connessi e compatti.

Dim:

Per gli spazi proiettivi reali tutto è stato dimostrato.

Ricordiamo la definizione di proiettivo:

$$S^{2m+1} = \{ z \in \mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \mid \|z\| = 1 \} \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$$

è continua e suriettiva, dunque $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ è connesso e compatto perché $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\}$ lo è.

Dimostriamo ora che $\mathbb{C}^{m+1} - \{0\} / \sim = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ è T2.

Sia $\pi : \mathbb{C}^{m+1} - \{0\} \to \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ la proiezione naturale.

In generale, dato un iperpiano affine $H_j \overset{\text{def}}{=} \{ x_j = 1 \}$ in $\mathbb{C}^{m+1}$, la proiezione:

$$\pi|_{H_j} : H_j \to \pi(H_j) = A_j$$
$$(x_0, \dots, 1, \dots x_m) \to [x_0, \dots, 1, \dots x_m]$$

è continua, biiettiva, aperta:

- è continua, perché $*$ lo è;
- è biiettiva, perché:
  $\forall [x_0, \dots, 1, \dots x_m] \in A_j \ \exists! (x_0, \dots, 1, \dots, x_m) \in H_j$ t.c.
  $\pi|_{H_j}(x_0, \dots, 1, \dots x_m) = [x_0, \dots, 1, \dots x_m]$;
- è aperta, perché $\pi|_{H_j} : H_j \to H_j / G$, con $G \in \mathrm{Omeo}(H_j)$ è il gruppo delle omotetie con nucleo.

Siccome $A_j \cong \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ è un aperto omeomorfo a H_j.

Siano ora $p, q \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. $\exists$ K iperpiano di $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ che non contiene nessuno dei due. Siccome:

$$p, q \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) - K \cong \mathbb{C}^m,$$

e lì tali segue dall'affine che $\mathbb{C}^m$ è T2, c.v.d.

VARIETÀ TOPOLOGICA

Uno spazio topologico X connesso e tale si dice una VARIETÀ TOPOLOGICA se esso ammette un ATLANTE, cioè un ricoprimento aperto e numerabile (di CARTE):

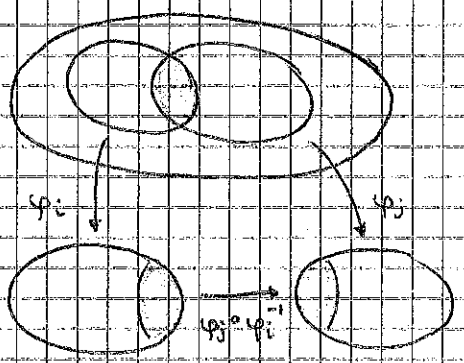
$$X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} U_i,$$

tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$ un omeomorfismo:

$$\varphi_i : U_i \to V_i,$$

con V_i aperto di $\mathbb{R}^n$.

Inoltre, si richiede che l'intersezione di due carte dia luogo ad una FUNZIONE DI TRANSIZIONE. Si chiede, cioè, che le due carte "siano compatibili".



Ad esempio, S_n è una varietà topologica. Infatti, considerati x e $(-x)$ ottenuti da S_n si ha:

$$S_n = (S_n - \{x\}) \cup (S_n - \{-x\}),$$

e ogni aperto è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$, mediante la proiezione stereografica.

Ora, consideriamo $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$. Detti:

$$\forall i = 1, \dots, n : H_i \overset{\text{def}}{=} \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \mid x_i \neq 0\}$$

$$\forall i = 1, \dots, n : K_i = \{[z_0, \dots, z_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) \mid z_i \neq 0\}$$

si ha:

$$\forall i = 1, \dots, n : H_i \cong \mathbb{R}^n, \quad K_i \cong \mathbb{C}^n$$

Inoltre:

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - H_i, \quad \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) = \bigcup_{i=0}^{n} \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) - K_i,$$

da cui $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sono varietà topologiche.

ESERCIZI VARI

1. Consideriamo $X \subseteq M(n, \mathbb{R})$:

$$X = \{ A \in M(n, \mathbb{R}) \mid A^2 = Id \}$$

Si dica se:

- X è chiuso;
- X è compatto;
- X è connesso (si studi il caso $\mathbb{R}^2$).

Consideriamo la funzione:

$$\rho : A \longrightarrow A^2$$

Essa è continua perché il prodotto tra matrici lo è.

Inoltre:

$$X = \rho^{-1}(Id),$$

e dato che $M(n, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$ è T2, X risulta controimmagine di un chiuso secondo una funzione continua, dunque è chiuso.

Le matrici di X sono invertibili ($A = A^{-1}$), e inoltre:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n : \quad x = \frac{x + Ax}{2} + \frac{x - Ax}{2},$$

ove:

- $A\left(\frac{x + Ax}{2}\right) = \frac{Ax + x}{2}$,
- $A\left(\frac{x - Ax}{2}\right) = \frac{Ax - x}{2} = -\frac{x - Ax}{2}$.

Allora:

$$\mathbb{R}^n = V_{-1}(A) \oplus V_1(A)$$

Allora:

$$\det(X) = \{-1, 1\},$$

da cui X non è connesso perché l'immagine secondo la funzione determinante (che è continua) è sconnessa.

In $\mathbb{R}^2$, si hanno tre possibilità:

- $A = Id$;
- $\dim V_{-1}(A) = \dim V_1(A) = 1$;
- $A = -Id$.

È allora chiaro che X è compatto se e solo se è il sottoinsieme delle matrici di X tali che gli autospazi hanno dimensione 1.

Notiamo ora che:

- per ogni coppia di vettori indipendenti, definiti a meno dei fattori di proporzionalità, esiste una matrice che manda il primo in sé e il secondo nell'opposto di sé;
- per ogni matrice di X esiste una coppia di autovettori, definiti a meno di fattori di proporzionalità non nulli, tali che ognuno è una base di un autospazio pari a ± 1.

In particolare, la funzione:

$$\Phi : SL(2,\mathbb{R})/_{\sim} \longrightarrow X$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow T \in X \ : \ T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}, \ T\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$$

è continua, poiché i coefficienti dipendono in modo continuo dai vettori $[a\ b]^t$ e $[c\ d]^t$. La funzione inversa è continua, poiché gli assi di una funzione continua dipendono da essa in modo continuo. Allora

$$SL(2,\mathbb{R})/_{\sim} \ \cong \ X$$

Il insieme comunque non è completo: se ad esempio, la matrice ha una immagine secondo la funzione continua $\| \ \|_\infty$:

$$\| A \|_\infty \overset{\text{def}}{=} \max_{i,j=1\dots n} |a_{ij}|$$

Ma notiamo che, nel caso $n=2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \in X$$

Allora:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} \ \exists T_\varepsilon \in X \ : \ \| T_\varepsilon \|_\infty = \max(1, |\varepsilon|)$$

da cui:

$$\| \cdot \|_\infty (X) = [1, +\infty[,$$

da cui X non è completo.

2. Dimostrare che $\mathbb{R}$ non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile in $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo il primo caso. Sia $\mathbb{R}$, in questo caso, rappresentato dall'asse delle ascisse.

Sia $(U_m)_{m\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$, per assurdo.

Allora definiamo:

$$\forall m \in \mathbb{N} : A_m = U_m \cap \mathbb{R}^+ \quad , B_m = U_m \cap \mathbb{R}^-$$

Vi sono dunque due famiglie numerabili di aperti:

$$(A_m)_{m\in\mathbb{N}} \qquad (B_m)_{m\in\mathbb{N}}$$

Consideriamo ora:

$$\forall m \in \mathbb{N} : \{(x, x') \mid x > 0\} \cap A_m$$

Esso è un aperto di $\mathbb{R}$, poiché è dato in comprensione come insieme aperto: esso possiamo renderlo ordinato: prendiamo ad esempio ordinarlo in base alla distanza dal punto $(m, 0)$. Considerata la prima componente connessa, A_m è un aperto effettivamente ed esso.

Consideriamo ora la funzione Δ che interpreta i nomi A_m con degli archi tali che essi contengano ξ_0 e siano tutti di $(0,0)$.

La funzione così definita genera un intorno aperto di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}^2$ non contenente nessun intorno di $(A_m)_{m\in\mathbb{N}}$.

Un discorso identico si applica a $(B_m)_{m\in\mathbb{N}}$: $\mathbb{R}$, dunque, non ha un sistema fondamentale di intorni numerabile in $\mathbb{R}^2$.

3. Sia $K \subseteq \mathbb{R}^3$ un compatto. Definiamo:

$$U_\delta = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, K) < \tfrac{1}{3^\delta} \}$$

Sia $U \supseteq K$ un aperto di $\mathbb{R}^3$. Dimostrare che esiste U_{δ_0} tale che $U_{\delta_0} \subseteq U$.

Consideriamo il chiuso $\mathbb{R}^3 \setminus U$. Dato che $\mathbb{R}^3 \setminus U$ e K sono chiusi e intersezione nulla, K è limitato:

$$d(K, \mathbb{R}^3 \setminus U) = m > 0,$$

da cui, considerando $\delta_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\frac{1}{3^{\delta_0}} < m \Leftrightarrow \frac{1}{3^{\delta_0}} < m,$$

si ha $U_{\delta_0} \cap \mathbb{R}^3 \setminus U = \emptyset \Rightarrow U_{\delta_0} \subseteq U$.

4. Consideriamo S_2, e ρ la rotazione di $\frac{2\pi}{3}$ attorno all'asse z. Si ha:

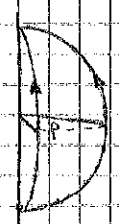
$$\langle \rho \rangle = G < \mathrm{Iso}(\mathbb{R}^3), \quad o(G) = 4$$

È vero o no che $S_2 / G \cong S_2$? Se $S_2 / G \cong \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, descrivere S_2 / G.

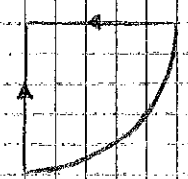
Il quoziente è ottenuto da quello di sfera modulo la relazione che identifica i due poli.

La seguente ambientazione:

$$\begin{cases} r \cos\varphi \sin\alpha \\ r \cos\varphi \cos\alpha \\ r \sin\varphi \end{cases}, \quad \begin{matrix} \alpha \in [0, \pi] \\ \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} r \cos\varphi \sin 2\alpha \\ r \cos\varphi \cos 2\alpha \\ r \sin\varphi \end{cases}$$



Dimostrare che $S^2 / G \cong S^2$. L'azione di G sulla sfera è quella di equivalenza modulo rotazione attorno all'asse z. Studiamo quindi $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) / G$: il quoziente $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è un disco, dove gli estremi opposti sono identificati. Il quoziente $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) / G$ è un quarto di disco, dove i lati radiali sono identificati. Un ambientazione della stessa simile, ma che descrive $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) / G$ è:



Il disco.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE PROIETTIVE IN $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$: INTRODUZIONE

Consideriamo lo spazio dei polinomi in $n+1$ variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$$

Sia $P(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_n]$. P non è una funzione su $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$: ad esempio P è omogeneo di grado d, ovvero:

$$P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$$

Anche in questo P non è una funzione, però il suo luogo di zeri è ben definito in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$:

$$X = \{[x_0, \dots, x_n] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{K}) \mid P(x_0, \dots, x_n) = 0\}$$

X è ben definito, se P è omogeneo. Il luogo di zeri è chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$, anche se P non è una funzione. Se P è omogeneo, infatti, $P^{-1}(0)$ è chiuso in $\mathbb{K}^{n+1}$ perché contiene immagine di un punto in un $T_0(0)$ secondo una funzione continua; inoltre, essendo un cono (cioè un luogo di punti che, ogniqualvolta contiene un punto, contiene tutta la sua retta passante per il punto e l'origine), è saturo in $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$, da cui, detto che:

$$\pi : \mathbb{K}^{n+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{K})$$

è un'identificazione, il proiettato è un chiuso. Essendo un chiuso in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ (compatto), è compatto.

Si definisce INSIEME ALGEBRICO in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ il luogo di zeri di un numero finito di polinomi omogenei.

Ad esempio, i sottospazi proiettivi di dimensione k in $\mathbb{P}^n(\mathbb{K})$ sono definiti da $(n-k)$ polinomi omogenei di grado 1.

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA DELLE QUADRICHE COMPLESSE

Sia $\mathbb{P}^n$ lo spazio proiettivo complesso di dimensione n.

Consideriamo un polinomio omogeneo di grado 2:

$$\sum_{\substack{i \le j \\ i,j=0}}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = X^t A X,$$

con:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = (b_{ij})_{i,j=0\dots n} \in S(n+1, \mathbb{C})$$

$$\forall\, i \neq j : \; b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij}}{2}$$

Esiste ovviamente un cambiamento lineare di coordinate in $\mathbb{C}^{n+1}$ che rende A in FORMA NORMALE:

$$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ s.t. } M^t A M = B,$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

con $r = \operatorname{rk} A$.

Distinguiamo allora i casi, in $\mathbb{C}$, la classificazione è relativamente semplice, perché il campo è sufficiente per la classificazione. Supponiamo $n = 2$. Si ha:

- $r = 1$. A meno di cambiamenti di coordinate, si ha:
$$x_0^2 = 0,$$
dunque una RETTA DOPPIA;
- $r = 2$. A meno di cambiamenti di coordinate, si ha:
$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1) = 0,$$
dunque una COPPIA DI RETTE INCIDENTI (nella classificazione affine figurano anche le rette parallele, ma in questa classificazione esse non figurano);
- $r = 3$. In questo caso la conica è NON DEGENERE:
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$
Se la conica risulta tangente all'iperpiano $\{x_0 = 0\}$, si tratta di una PARABOLA; altrimenti si parla di ELLISSIPERBOLE, ossia di coniche non tangenti a tale iperpiano.

CLASSIFICAZIONE DELLE QUADRICHE PROIETTIVE IN $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ e $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$: INTRODUZIONE

Consideriamo lo spazio dei polinomi in $m+1$ variabili a coefficienti in $\mathbb{K}$:

$$\mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$$

Sia $P(x_0, \dots, x_m) \in \mathbb{K}[x_0, \dots, x_m]$. P non è una funzione su $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$: se ad esempio P è omogeneo di grado d, si ha:

$$P(\lambda x) = \lambda^d P(x)$$

Anche in questo P non è una funzione, però il suo luogo di zeri è ben definito in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$:

$$X = \{[x_0, \dots, x_m] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{K}) \mid P(x_0, \dots, x_m) = 0\}$$

X è ben definito, se P è omogeneo. Se luogo di zeri è chiuso in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$, anche se P non è una funzione. Se P è omogeneo, infatti, $P^{-1}(0)$ è chiuso in $\mathbb{K}^{m+1}$ perché contro immagine di un punto in un T_2 (0) secondo una funzione continua; inoltre, essendo un cono (cioè un luogo di punti che, ogni qualvolta contiene un punto, contiene tutta la retta passante per il punto e l'origine), è tolto in $\mathbb{K}^{m+1} - \{0\}$, dove ricordo che:

$$\pi : \mathbb{K}^{m+1} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{K})$$

è un'identificazione, il proiettato è un chiuso. Essendo un chiuso in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ (compatto), è compatto.

Si definisce INSIEME ALGEBRICO in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ il luogo di zeri di un numero finito di polinomi omogenei.

Ad esempio, i cosiddetti proiettivi di dimensione k in $\mathbb{P}^m(\mathbb{K})$ sono definiti da $(m-k)$ polinomi omogenei di grado 1.

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA DELLE QUADRICHE COMPLESSE

Sia, d'ora in poi, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Consideriamo un polinomio omogeneo di grado 2:

$$\sum_{\substack{i \le j \\ i,j=0}}^{n} a_{ij}\, x_i\, x_j = X^t A X,$$

con:

$$X = \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$A = (b_{ij})_{i,j=0\dots n} \in S(n+1, \mathbb{C})$$

$$\forall\, i \neq j : b_{ij} = b_{ji} = \frac{a_{ij}}{2}$$

Esiste ovviamente un cambiamento lineare di coordinate in $\mathbb{C}^{n+1}$ che rende A in FORMA NORMALE:

$$\exists\, M \in GL(n, \mathbb{C}) \text{ s.t. } M^t A M = B,$$

$$B = \left[\begin{array}{c|c} H_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right],$$

con $r = \operatorname{rk} A$.

Distinguiamo allora i casi. In $\mathbb{C}$ la classificazione è relativamente semplice, perché il rango è sufficiente per la classificazione. Supponiamo $n = 2$. Si ha:

- $r = 1$. A meno di cambiamenti di coordinate, si ha:
$$x_0^2 = 0,$$
dunque una RETTA DOPPIA;
- $r = 2$. A meno di cambiamenti di coordinate, si ha:
$$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1) = 0,$$
dunque una COPPIA DI RETTE INCIDENTI (nella classificazione affine figurano anche le rette parallele, ma in questa classificazione esse non figurano);
- $r = 3$. In questo caso la conica è NON DEGENERE:
$$x_0^2 + x_1^2 \pm x_2^2 = 0$$
se la conica risulta tangente all'iperpiano $\{x_0 = 0\}$, si tratta di una PARABOLA; altrimenti si parla di ELLISSIPERBOLE, ossia di coniche non tangenti a tale iperpiano.

Se $n = 3$, i casi sono 4:

- $r = 1$: si ha $x_0^2 = 0$, cioè un PIANO DOPPIO;
- $r = 2$: si ha $x_0^2 + x_1^2 = 0 = (x_0 + i x_1)(x_0 - i x_1)$, cioè una COPPIA DI PIANI (incidenti in una retta);
- $r = 3$: si ha $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$, cioè un CONO su una conica non degenere;
- $r = 4$: si ha una unica QUADRICA NON DEGENERE:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

CLASSIFICAZIONE PROIETTIVA DELLE QUADRICHE REALI

Sia, d'ora in poi, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

Nel caso reale, le quadriche sono classificate per mezzo del rango e della segnatura, senza tenere di conto della molteplicità, cioè $s \neq 0$.

Supponiamo $n = 2$. Si hanno i seguenti casi:

- $c = 1$. Si ha una RETTA DOPPIA:
$$x_0^2 = 0$$
- $c = 2$. Si hanno due casi, in base alla segnatura:
  - $s = 2$. Si ha:
  $$x_0^2 + x_1^2 = 0,$$
  cioè un PUNTO ISOLATO;
  - $s = 0$. Si ha una COPPIA DI RETTE:
  $$x_0^2 + x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1) = 0;$$
- $c = 3$. Si hanno due casi:
  - $s = 3$. Si ha l'INSIEME VUOTO:
  $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0;$$
  - $s = 1$. Si ha l'unica CONICA NON DEGENERE:
  $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0.$$
  (Nella classificazione affine, cioè dimenticando tra ellissi, parabole, iperboli: questa distinzione non c'è nella classificazione proiettiva).

Se $n = 3$, invece, la casistica è più complessa:

- $c = 1$. Si ha un PIANO DOPPIO:
$$x_0^2 = 0;$$
- $c = 2$. Si hanno due casi:
  - $s = 2$. Si ha una RETTA DOPPIA:
  $$x_0^2 + x_1^2 = 0;$$
  - $s = 0$. Si ha una COPPIA DI PIANI:
  $$x_0^2 - x_1^2 = (x_0 + x_1)(x_0 - x_1);$$

- $r = 3$. Si hanno diversi casi:
  - $s = 3$. Si ha un PUNTO ISOLATO:
    $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0;$$
  - $s = 1$. Si ha un CONO su una conica non degenere:
    $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$
    In altre parole, se si pone sul piano $x_3 = 1$, si individua la conica intersezione della quadrica con questo piano, per poi congiungere ogni punto con l'origine mediante una retta, generando così la quadrica;
- $r = 4$. Si hanno tre casi:
  - $s = 4$. Si ha, in questo caso, l'INSIEME VUOTO:
    $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0;$$
  - $s = 2$. In questo caso si ha la SFERA:
    $$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0;$$
  - $s = 0$. In questo caso si ha quella che si dice QUADRICA CA RIGATA:
    $$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

Analizziamo quest'ultima quadrica. Partendo da:
$$x_0^2 - x_2^2 = x_3^2 - x_1^2,$$
si ottiene:
$$(x_0 + x_2)(x_0 - x_2) = (x_3 + x_1)(x_3 - x_1),$$
da cui si hanno i seguenti sistemi:
$$\begin{cases} (x_0 - x_2) = \lambda (x_3 + x_1) \\ (x_0 + x_2) = \lambda^{-1} (x_3 + x_1) \end{cases} \qquad \begin{cases} (x_0 - x_2) = \lambda (x_3 + x_1) \\ (x_0 + x_2) = \lambda^{-1} (x_3 - x_1) \end{cases}$$

Questi due sistemi individuano due famiglie di rette, generate al variare di λ. In particolare, per ogni punto della quadrica c'è una coppia di rette, ognuna di una famiglia diversa, che ci interessano. Due rette della stessa famiglia, invece, sono sghembe.

Ci sono 4 rette che rimangono sull'ellisse:
$$\begin{cases} (x_0 - x_2) = 0 \\ (x_3 + x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x_3 - x_1) = 0 \\ (x_0 + x_2) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x_0 - x_2) = 0 \\ (x_3 - x_1) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (x_0 + x_2) = 0 \\ (x_3 - x_1) = 0 \end{cases}$$

CLASSIFICAZIONE AFFINE DELLE QUADRICHE REALI E COMPLESSE

Una quadrica in $\mathbb{K}^n$ ammette un'equazione matriciale del tipo:

$$q(X) = X^t A X + 2B^t X + C,$$

ove $A \in S(n-1, \mathbb{K})$ e:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{K}^n,$$

e $B \in \mathbb{K}^n$, $C \in \mathbb{K}$.

Sia ora $\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$ il GRUPPO AFFINE di $\mathbb{K}^n$:

$\forall\, \alpha \in \mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n)$, $\alpha = (A, b)$,

con $A \in GL(n, \mathbb{K})$, $b \in \mathbb{K}^n$. Si ha, in particolare, la seguente struttura di PRODOTTO SEMIDIRETTO di $\mathbb{K}^n$ e $GL(n, \mathbb{K})$:

$$\mathrm{Aff}(\mathbb{K}^n) = \mathbb{K}^n \times_\varphi GL(n, \mathbb{K}),$$

ove $\varphi(A)(X) = AX$. In altre parole:

$$(b, A)(b', A') = (b + Ab', AA'),$$

ossia:

$$X \to A'X + b' \to A(A'X + b') + b = AA'X + Ab' + b$$

Si definisce CENTRO della quadrica q un vettore $N \in \mathbb{K}^n$ tale che q risulti simmetrica rispetto a N.

LEMMA

Se q è simmetrica rispetto a O, q ha parte lineare nulla.

Dim.

Si ha $q(X) = q(-X)$, cioè:

$$X^t A X + 2B^t X + C = X^t A X - 2B^t X + C = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4B^t X = 0 \Rightarrow B = 0,$$

avendo supposto $2 \neq 0$ in $\mathbb{K}$, c.v.d.

LEMMA

Sia q una quadrica con centro $N \in \mathbb{K}^n$. Allora la matrice A e $(A \mid B)$ hanno lo stesso rango:

$$rk(A) = rk(A \mid B)$$

Dim.

Effettuando la sostituzione:

$$Y = X - N \quad , \quad X = Y + N,$$

l'equazione della quadrica diventa $q(Y) = q(-Y)$. Allora:

$$(Y+N)^t A (Y+N) + 2 B^t (Y+N) + C =$$
$$= Y^t A Y + 2(N^t A + B^t) Y + N^t A N + 2 B^t N + C,$$

da cui, prendendo la parte lineare nulla, e ricordando che A è simmetrica:

$$N^t A = -B^t \Rightarrow AN = -B$$

da cui B dipende linearmente dalle colonne di A, come la tesi. c.v.d.

OSSERVAZIONE

Se il sistema $AX = -B$ ha soluzioni, X rispetta il centro della quadrica.

Corrispondentemente ad ogni quadrica a centro (una retta effettuata la traslazione appartiene ad entrambi) si ha:

$$q(X) = X^t A X + C$$

Cambiando per un opportuno matrice $P \in GL(3, \mathbb{K})$, si ottiene:

$$q(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} y_j^2 + C',$$

ove $p = i_+(A)$ e $q = i_-(A)$. Sappiamo che:

$$p + q = rk\, A,$$

essendo $A \in GL(n, \mathbb{K})$.

Sia, d'ora in poi, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $n = 3$.

Se $C = 0$, possiamo classificare la quadrica in base al rango di A, che rispetta supporta diverso da 0.

Se $rk\, A = 1$, la forma canonica è del tipo:

$$x_0^2 = 0,$$

da cui si ha un PIANO DOPPIO.

Se $r+s=2$, i casi sono due:

- $p \neq 0$, $q=2$ (o $p=0$, $q=2$): si ha una RETTA DOPPIA:
$$x_0^2 + x_1^2 = 0$$
- $p=q=1$: si ha una COPPIA DI PIANI:
$$x_0^2 - x_1^2 = (x_0+x_1)(x_0-x_1) = 0$$

Se $r+s=3$, si hanno due casi:

- $p=0$, $q=3$ (o $p=3$, $q=0$): la quadrica è completamente reale, dunque in $\mathbb{R}^3$ essa si riduce ad un punto isolato, il vertice. La forma normale è:
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$$
- $p=2$, $q=1$ (o $p=1$, $q=2$). La forma normale vale:
$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0$$
In ogni caso, la quadrica è un CONO di una conica non degenere situata nel piano $x_2=1$: nel primo caso, la conica è un'ELLISSE, nel secondo è un'IPERBOLE. In ogni caso, una retta determinata dalla scelta di un punto $\neq V$ per ogni punto della conica individua una proiettività fra quel punto e l'origine: l'insieme di tutte queste rette forma il cono della conica non degenere.

Se $c \neq 0$, invece $c = \pm d^2$, a seconda del suo segno. Tutte le coniche di luoghi di rango 2, invece, possono supporre $c<0$. Infatti esiste una trasformazione affine tale che la quadrica assuma forma normale:
$$q(X) = \sum_{i=1}^{p} x_i^2 - \sum_{j=1}^{q} x_j^2 = 1,$$
ove, per scelta, $p = i_+(A)$ e $q = i_-(A)$.

Se $r+s \neq 1$, si hanno forme del tipo:
$$x_0^2 = -1$$
$$x_0^2 = +1$$
Nel primo caso, si ha l'INSIEME VUOTO; nel secondo, si ha una COPPIA DI PIANI.

Se $rk\, A = 2$, si hanno due possibilità:

- $p = 2 \quad q = 0$: la forma normale è:
$$x_0^2 + x_1^2 = 1,$$
da cui si ottiene un CILINDRO ELLITTICO, dato che l'appartenenza di un punto alla quadrica non dipende da x_2, che può quindi variare arbitrariamente;
- $p = 1 \quad q = 1$: la forma normale è:
$$x_0^2 - x_1^2 = 1,$$
da cui si ottiene un CILINDRO IPERBOLICO;
- $p = 0 \quad q = 2$: in questo caso, si ottiene di nuovo l'INSIEME VUOTO:
$$-x_0^2 - x_1^2 = 1.$$

Veniamo dunque al caso non degenere, ma quando $rk\, A = 3$. Ci sono quattro quadriche differenti:

- $p = 0 \quad q = 3$: si ha l'INSIEME VUOTO:
$$-x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1;$$
- $p = 1 \quad q = 2$: si ha:
$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 = 1,$$
e la quadrica è un IPERBOLOIDE A DUE FALDE. Infatti si ha:
$$x_0^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2 \Rightarrow |x_0| \geq 1,$$
da cui è addirittura $S = \{(x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{R}^3 \mid -1 < x_0 < 1\}$ separa le due falde dell'iperboloide;
- $p = 2 \quad q = 1$: si ha la seguente forma normale:
$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 1,$$
da cui si ottiene la QUADRICA RIGATA, detta IPERBOLOIDE IPERBOLICO A UNA FALDA. Infatti, si ha:
$$x_0^2 - x_2^2 = 1 - x_1^2 \Rightarrow (x_0 - x_2)(x_0 + x_2) = (1 - x_1)(1 + x_1),$$
da cui si hanno le due famiglie di rette sghembe;
- $p = 3 \quad q = 0$: in questo caso si ha la SFERA:
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, la classificazione è più semplice.

Se $c = 0$:

- $x_0^2 = 0$: PIANI COINCIDENTI;
- $x_0^2 + x_1^2 = 0$: PIANI COMPLESSI INCIDENTI;
- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0$: CONO COMPLESSO.

L'intersezione con $\mathbb{R}$ delle seconde e delle terze quadriche corrisponde rispettivamente ad una RETTA DOPPIA e ad un PUNTO.

Se invece $c \neq 0$, i casi differenti sono i seguenti:

- $x_0^2 = -1$: PIANI COMPLESSI PARALLELI;
- $x_0^2 + x_1^2 = -1$: CILINDRO COMPLESSO;
- $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = -1$: ELLISSE IMMAGINARIO.

L'intersezione di queste quadriche con $\mathbb{R}$ restituisce sempre l'INSIEME VUOTO.

Passiamo ad una discussione delle quadriche non a centro. In questo caso, si ha, $\forall\, n = 3$:

$$\forall\, K \wedge < 3,$$

dato che il sistema $AX = -B$ non ha soluzione. Siano $K = \ker A$, $H = \operatorname{Im} A$, si ha, dato che $A \in S(3, \mathbb{R})$,

$$\forall\, x \in K,\ \forall\, y \in \mathbb{R}^n : \langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle = 0 \Rightarrow K \perp H.$$

Dato che il prodotto scalare è definito positivo:

$$\mathbb{R}^n = K \oplus H$$

Si ottiene:

$$X = \begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix},$$

con U unica e combinazione in H, V qualche in K.

Mediante una trasformazione affine, scrivo:

$$A = \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$q(X) = U^t A' U + 2 B_1^t U + 2 B_2^t V + c = 0$$

Nel caso specifico $\dim \ker A$, la quadrica $U^t A' U + 2 B_1^t U$ è non degenere: mediante un cambiamento di coordinate possiamo

sono diverse:

$$q'(x) = U^t \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} U + 2B_2'^t V + c = 0,$$

ove il termine lineare $2B_2'^t U$ è "scomparso", perché il rango di A' come applicazione da $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ ha rango massimo, dunque la quadrica non ha alcun piano di centri.

Esistono matrici M con coefficienti di $\ker A$ tale che il funzionale $2B_2'^t V + c = 0$ diventi $z = 0$ per un opportuno z appartenente a $\mathbb{R}$. Allora:

$$z + U^t \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} U = 0 \quad \Rightarrow \quad z = -U^t \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix} U,$$

cioè:

$$z = -\sum_{i=1}^{p} u_i^2 + \sum_{j=1}^{q} u_j^2$$

Per $n = 3$, si hanno i seguenti casi:

- se $\operatorname{rk} A = 2$:
  - $z = x^2 + y^2$: PARABOLOIDE;
  - $z = x^2 - y^2$: PARABOLOIDE A SELLA;
  - $z = -x^2 - y^2$: PARABOLOIDE.
- se $\operatorname{rk} A = 1$, si ha il CILINDRO sulla parabola $z = x^2$ nell'iperpiano $y = 0$.

ESERCIZIO

Ex. Considerati i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$X = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \geq 1 \}$$

$$Y = \{ x \in X \mid \|x\| \geq 2 \}$$

Sia X/Y il quoziente ottenuto identificando Y ad un punto. Si dimostri che X/Y è T_2, quindi che $X/Y \simeq \mathbb{R}^2$.

Sia $\alpha \in Y$. Allora $\|\alpha\| \geq 2$, da cui, posto $\varepsilon = \frac{\|\alpha\| - 2}{4}$, i seguenti sono aperti saturi disgiunti:

$$U = \{ x \in X \mid \|x\| < 2 + \varepsilon \}$$

$$V = \{ x \in X \mid \|x\| > \|\alpha\| - \varepsilon \}$$

Allora X/Y è T_2.

Poi, la seguente è un omeomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^2 \\ & \searrow^{\pi} & \uparrow \varphi \\ & & X/Y \end{array}$$

$$f(x) = \max\left(0, (\|x\| - 2)\, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

Questa funzione è continua e costante sulla fibra, allora è ben definita:

$$\varphi : X/Y \to \mathbb{R}^2,$$

che è continua perché $\varphi \circ \pi = f$, e π è un'identificazione, e bigettiva, con inversa continua:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^2 \to X/Y$$

$$\rho e^{i\theta} \neq 0 \to (\rho - 2) e^{i\theta}$$

$$0 \to Y,$$

da cui $X/Y \simeq \mathbb{R}^2$.

VARIETÀ DI HOPF

In $\mathbb{R}^m - \{0\}$ consideriamo la seguente relazione di equivalenza:

$$(x_1, \dots, x_m) \sim (x_1', \dots, x_m') \iff \exists\, m \in \mathbb{Z} \text{ s.t. } (x_1, \dots, x_m) = 2^m (x_1', \dots, x_m')$$

Analizziamo il quoziente $\mathbb{R}^m - \{0\} / \sim$ per $m \neq 2$:

- esso è connesso, perché $\mathbb{R}^m - \{0\}$ è connesso;
- esso è compatto, perché il seguente insieme:

$$C = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m - \{0\} \;\middle|\; 1 \leq \sum_{i=1}^m x_i^2 \leq 2 \right\}$$

è chiuso e si mappa suriettivamente nel quoziente. Infatti:

$\forall\, (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m - \{0\}$ $\exists\, k_0 \in \mathbb{Z}$ s.t. $2^k \leq \sum_{j=1}^m y_j^2 \leq 2^{k+1}$

(non è richiesta l'unicità), da cui:

$$1 \leq 2^{-k} \sum_{j=1}^m y_j^2 \leq 2,$$

e $2^{-k} (y_1, \dots, y_m) \sim (y_1, \dots, y_m)$. C è allora un dominio fondamentale, ed è limitato (ovvio) e chiuso (perché contiene la sua frontiera). Allora esso è compatto, quindi $\mathbb{R}^m - \{0\}$ non è Hausdorff;

- esso è T_2. Sia infatti $\tilde{C}$ il seguente insieme (con $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, per comodità):

$$\tilde{C} = \left\{ (x_1, \dots, x_m) \in \mathbb{R}^m \;\middle|\; 1 - \varepsilon < \sum_{i=1}^m x_i^2 < 2 + \varepsilon \right\}$$

$\tilde{C}$ è aperto e $C \subseteq \tilde{C}$, dove $\tilde{C}$ interseca ogni orbita. Inoltre, considerato il gruppo che agisce su $\mathbb{R}^m - \{0\}$:

$$G = \{ 2^k \cdot \mathrm{Id} \mid k \in \mathbb{Z} \},$$

si ha, per come è stato definito ε, che $g(A) \cap A \neq \emptyset$ solo in un numero finito di casi (3). Allora il quoziente è T_2.

Consideriamo ora il seguente schema, e la seguente funzione:

$$f : \mathbb{R}^{m-1} - \{0\} \longrightarrow (S_1 \times S_{m-1})$$

$$f(\omega) = \left((\cos 2\pi \log_2 \|\omega\|, \sin 2\pi \log_2 \|\omega\|), \frac{\omega}{\|\omega\|} \right)$$

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{m-1} - \{0\} & \xrightarrow{\;f\;} & S_1 \times S_{m-1} \\ & \searrow^{F} & \downarrow \pi \\ & & \mathbb{R}^m - \{0\} / \sim \end{array}$$

Se poi che invece:

$$f(x) = f(y) \iff \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}, \quad \log_2 \frac{\|x\|}{\|y\|} = k \in \mathbb{Z} \iff \frac{\|x\|}{\|y\|} = 2^k, k \in \mathbb{Z} \iff$$

$$\iff x = \|x\| \frac{x}{\|x\|} = 2^k \|y\| \frac{y}{\|y\|} = 2^k y \iff$$

$$\iff x \sim y,$$

da cui $\varphi : \mathbb{R}^m - \{0\} / \sim \to S_1 \times S_{m-1}$ è:

- continua, perché f è continua e π è un'identificazione;
- iniettiva (appena dimostrato);
- suriettiva, perché f lo è (e la realizza esplicitamente);
- chiusa, perché $\mathbb{R}^m - \{0\} / \sim$ è compatto e $S_1 \times S_{m-1}$ è T2.

Infatti:

$C \subseteq \mathbb{R}^m - \{0\} / \sim$ chiuso $\Rightarrow C$ compatto $\Rightarrow \varphi(C)$ compatto $\Rightarrow$

$\Rightarrow \varphi(C)$ chiuso, perché $S_1 \times S_{m-1}$ è T2.

Allora φ è un omeomorfismo:

$$\mathbb{R}^m - \{0\} / \sim \;\cong\; S_1 \times S_{m-1}.$$

ESERCIZI VARI

1. Dimostrare che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ e omeomorfo a S_1.

Consideriamo:

$$f: \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \to S_1$$
$$[x, y] \to \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right)$$

f è ben definita, infatti, dato $\lambda \neq 0$:

$$f(\lambda x, \lambda y) = \left(\frac{2\lambda^2 xy}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}, \frac{\lambda^2 x^2 - \lambda^2 y^2}{\lambda x^2 + \lambda^2 y^2} \right) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right) =$$
$$= f(x, y)$$

Inoltre f è a valori in S_1:

$$\left(\frac{2xy}{x^2+y^2} \right)^2 + \left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right)^2 = \frac{4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4}{(x^2+y^2)^2} = \frac{(x^2+y^2)^2}{(x^2+y^2)^2} = 1$$

Inoltre:

$$\left(\frac{2x_0y_0}{x_0^2+y_0^2}, \frac{x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2} \right) = \left(\frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \right),$$

a meno perdere di generalità possiamo supporre $x_0^2 + y_0^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 1$. Allora:

$$\begin{cases} 2x_0y_0 = 2xy \\ x_0^2 - y_0^2 = x^2 - y^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0y_0 = xy \\ 2x_0^2 = 2x^2 \end{cases} \quad \begin{cases} x_0y_0 = xy \\ x_0^2 = x^2 \end{cases}$$

- se $x_0 = 0$, $y_0 \neq 0$, allora $x = 0$, $y \neq 0$, da cui $[x, y] = [x_0, y_0]$;
- se $x_0 \neq 0$, $y_0 = 0$, allora $x \neq 0$, $y = 0$, da cui $[x, y] = [x_0, y_0]$;
- tutti gli elementi sono non nulli, allora:

$$\begin{cases} \frac{x_0}{x} \cdot \frac{y_0}{y} = 1 \\ \frac{x_0^2}{x^2} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} xy \neq 1 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow |x| = |y| = \pm 1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow [x, y] = [x_0, y_0].$$

Ora:

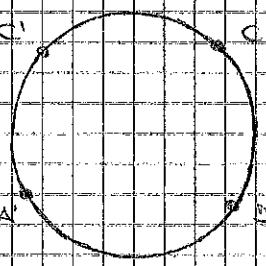
$$f(a, b) = (\sin 2t, \cos 2t) \quad f(x, y) = (\cos t, \sin t) =$$
$$f(x, y) = \left(\frac{2\cos t \sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}, \frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \right) =$$
$$= (\sin 2t, \cos 2t) = (a, b)$$

La funzione inversa è continua perché le funzioni razionali con cui è definita hanno denominatore mai nullo.

Per concludere, dato che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è compatto e S_1 è T2, è quindi chiuso. Allora è un omeomorfismo:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S_1$$

2. Consideriamo S_1, con i seguenti punti:



Esiste un omeomorfismo che manda (A, B, C, D) in (A', B', C', D')

Un tale omeomorfismo non può esistere. Infatti un omeomorfismo manda connessi in connessi e sconnessi in sconnessi: in questo caso, $[A, B] \cup [C, D]$ è per costruzione sconnesso, mentre $[A', B'] \cup [C', D']$, unione di due connessi a intersezione non vuota, è connesso.

3. Esiste un'applicazione (omeomorfismo) $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ tale che, dati gli eguenti immersioni:

$$\varphi: S_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad \varphi(S_1) = \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$$

$$\psi: S_1 \hookrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \qquad \psi(S_1) = Q(\varphi),$$

con $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ retta proiettiva e $Q = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$, si ha:

$$f(\varphi(S_1)) = \psi(S_1) \; ?$$

Un ragionamento di connessione ci evita di dimostrare che una tale f non può esistere.

In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, e nelle $(\mathbb{P}^1(\mathbb{R}))$ sono tutte equivalenti rispetto all'azione del gruppo delle proiettività. In particolare, data una retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, esiste una proiettività che la fa diventare la retta all'infinito. Il complementare di questa retta in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$, dunque connesso.

Il complementare di un $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, dunque, è sconnesso.

D'altra parte, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - S^2$ non è connesso. Per dimostrarlo, consideriamo:

$$\Phi : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$[x, y, z] \longrightarrow \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ora è ben definita:

$$\Phi(x,y,z) = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2 - z^2)}{\lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2)} =$$

$$= \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2}{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2 + \lambda^2 z^2} = f(\lambda x, \lambda y, \lambda z) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^*$$

Inoltre è espressa da una funzione razionale a denominatore mai nullo (perché $[0,0,0] \notin \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ per definizione) dunque è continua.

L'immagine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - S^2$ è connessa, perché:

- $1 \in \operatorname{Imm} \Phi$: $\Phi([1,0,0]) = 1$;
- $-1 \in \operatorname{Imm} \Phi$: $\Phi([0,0,1]) = -1$;
- $0 \notin \operatorname{Imm} \Phi$ perché altrimenti mapperebbe $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - S^1$.

Allora $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - S^1$ è sconnesso.

Dato che un omeomorfismo conserva le relazioni di connessione, f non può esistere: dovrebbe infatti essere:

$$f(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^1(\mathbb{R})) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) - S^1,$$

ma ciò è assurdo.

Questo problema offre degli spunti di riflessione per un teorema che enunceremo solamente. Se può enunciato può sembrare banale; tuttavia, la dimostrazione non è affatto.

TEOREMA (DELLA CURVA DI JORDAN) (SOLO ENUNCIATO)

Sia C una curva CHIUSA e SEMPLICE in $\mathbb{R}^2$. Allora $\mathbb{R}^2 - C$ è sconnesso, e consta di due componenti connesse che hanno entrambe C come frontiera (una curva è CHIUSA se i suoi estremi coincidono, e SEMPLICE se non si intersecano mai, cioè $f(x) = f(y)$ solo negli estremi).

QUADRICHE IN $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ e $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$

La classificazione delle quadriche può essere effettuata secondo criteri differenti, e in vari spazi: $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{C}^3$, $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$, $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$...

Fondamentalmente, classificare le quadriche vuol dire dividerle in classi di equivalenza dove l'azione di un gruppo sullo spazio preso in considerazione.

Ad esempio, quando classifichiamo le quadriche secondo l'equivalenza affine, classifichiamo i polinomi di secondo grado (a meno di una costante) sotto l'azione del gruppo affine. In realtà stiamo solo studiando l'azione di $Aff(\mathbb{K}^n)$ su $\mathbb{K}[x_1 \dots x_n]_2$, ove due polinomi sono equivalenti se uno si ottiene dall'altro mediante la moltiplicazione per uno scalare non nullo.

Consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Vogliamo determinare quelle quadriche effettivamente distinte, cioè proiettivamente equivalenti.

Restringiamo lo studio alle quadriche non singolari.

Sappiamo già che le quadriche non degeneri in $\mathbb{R}$, secondo l'equivalenza affine, sono le seguenti:

- ELLISSOIDE;
- PARABOLOIDE ELLITTICO;
- PARABOLOIDE A SELLA;
- IPERBOLOIDE A UNA FALDA;
- IPERBOLOIDE A DUE FALDE.

L'equazione dell'ellissoide, in coordinate omogenee, è:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0,$$

da cui, detta Q la quadrica, si ha:

$$\{x_3 = 0\} \cap Q = \emptyset \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Q \subset \mathbb{R}^3 = \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

ove $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{x_3 = 0\}$. Q è una quadrica affine non degenere complessa: ne deduciamo che Q è la sfera stessa.

Il paraboloide ellittico è omeomorfo ad un piano, mediante la proiezione sul piano ortogonale al vertice della parabola, dunque omeomorfo ad una sfera meno un punto, per la proiezione stereografica. Il punto mancante è il punto di tangenza della quadrica con il piano all'infinito. Aggiungere questo punto, cioè aggiungere il punto all'infinito, equivale a compattificare secondo Alexandroff il piano, che quindi diventa completo. Il paraboloide è allora equivalente alla sfera.

Il iperboloide a 2 falde è anch'esso topologicamente alla sfera: basta considerare come piano all'infinito un piano non intersecante la quadrica (e sappiamo che esiste, perché se il polinomio è $x^2 - y^2 - z^2 = 1$, allora $\{x = 0\}$ è uno di questi piani); la quadrica è allora un chiuso contenuto in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^3$, da cui anche è equivalente ad una sfera.

Enunciamo ora un teorema, che ci aiuterà a completare la discussione.

TEOREMA

Le quadriche non vuote e non degeneri di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ sono topologicamente equivalenti a una sfera o a un toro.

Dim.:

Possiamo scrivere la quadrica mediante una matrice $A \in S(4, \mathbb{R})$ di rango 4:

$$X^t A X = 0 \,, \quad X \in \mathbb{R}^4 - \{0\}$$

Dovendo considerare quadriche non vuote, la segnatura di A può avere origine o le coni:

- $p = 2$, $q = 3$ (o $p = 3$, $q = 1$). Si ha:
$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0 \,,$$
da cui:
$$Q \cap \{x_3 = 0\} = \emptyset \Rightarrow$$
$$\Rightarrow Q \subseteq \mathbb{R}^3 = \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) - \{x_3 = 0\},$$
e la quadrica è equivalente alla sfera;

- $r = 2$, $q = 2$. Abbiamo, in questo caso, la conica:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$x_0^2 - x_2^2 = x_3^2 - x_1^2$$

$$(x_0 + x_2)(x_0 - x_2) = (x_3 + x_1)(x_3 - x_1),$$

da cui si ricava la due famiglie di rette ghembe, espresse in coordinate omogenee:

$$R = \begin{cases} a_0(x_0 - x_2) = a_1(x_3 - x_1) \\ a_1(x_0 + x_2) = a_0(x_3 + x_1) \end{cases} ; \quad S = \begin{cases} b_0(x_0 - x_2) = b_1(x_3 + x_1) \\ b_1(x_0 + x_2) = b_0(x_3 - x_1) \end{cases}$$

Definiamo allora, al variare di $[a_0, a_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ e $[b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$, le rette $r_{a_0 a_1}$ e $s_{b_0 b_1}$.

Effettuiamo ora alcune verifiche:

- $\forall [a_0, a_1], [b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: $r_{a_0 a_1} \cap s_{b_0 b_1} = P_{ab} \in Q$.

È equivalente dimostrare che questa matrice:

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & -a_0 & -a_1 \\ a_1 & -a_0 & a_1 & +a_0 \\ b_0 & -b_1 & -b_0 & -a_1 \\ b_1 & b_0 & b_1 & -b_0 \end{bmatrix},$$

avrà la seguente matrice della sistema lineare data, facendo tutte le equazioni, ha rango 3.

Si ha:

$$\det A = a_0 \left[-a_0 (b_0^2 + b_1^2) - a_1 (-2 b_0 b_1) + a_0 (-b_1^2 + b_0^2) \right] +$$
$$- a_1 \left[a_1 (b_0^2 + b_1^2) - a_1 (-b_0^2 + b_1^2) - a_0 (2 b_0 b_1) \right] +$$
$$+ a_0 \left[a_1 (2 b_0 b_1) + a_0 (-b_0^2 + b_1^2) - a_0 (b_0^2 + b_1^2) \right] +$$
$$+ a_1 \left[a_1 (-b_1^2 + b_0^2) + a_0 (2 b_0 b_1) + a_1 (b_0^2 + b_1^2) \right] =$$
$$= -a_0^2 b_0^2 + a_1^2 b_0^2 - a_1^2 b_0^2 + a_0^2 b_0^2 = 0$$

D'altra parte è evidente che il sistema abbia almeno rango 3, per come sono definite le rette;

- $\forall [a_0, a_1] \neq [a_0', a_1'] \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$: $r_{a_0 a_1} \cap r_{a_0' a_1'} = \emptyset$

Anche una retta calcoleremo il determinante della matrice estesa del sistema, e dimostreremo che ha rango 4:

$$A' = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & -a_0 & -a_1 \\ a_1 & -a_0 & a_1 & -a_0 \\ a_0' & a_1' & -a_0' & -a_1' \\ a_1' & -a_0' & a_1' & a_0' \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\begin{aligned} \det A' &= a_0 \left[-a_0 \left[a_0'^2 + a_1'^2 \right] - a_1 \left[-2 a_1' a_0' \right] - a_0 \left[a_1'^2 - a_0'^2 \right] \right] + \\ &- a_1 \left[a_1 \left[a_0'^2 + a_1'^2 \right] - a_1 \left[-a_0'^2 + a_1'^2 \right] + a_0 \left[2 a_0' a_1' \right] \right] + \\ &- a_0 \left[a_1 \left[-2 a_0' a_1' \right] + a_0 \left[-a_0'^2 + a_1'^2 \right] - a_0 \left[-a_0'^2 - a_1'^2 \right] \right] + \\ &+ a_1 \left[a_1 \left[a_0'^2 - a_1'^2 \right] + a_0 \left[2 a_0 a_1' \right] + a_1 \left[-a_0'^2 - a_1'^2 \right] \right] = \\ &= 8 a_0 a_1 a_0' a_1' - 4 a_0^2 a_1'^2 + 4 a_1^2 a_0'^2 = \\ &= 4 \left((a_0 a_1') + (a_1 a_0') \right)^2, \end{aligned}$$

questo determinante non può essere nullo, perché $[a_0, a_1]$ e $[a_0', a_1']$ sono punti in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ distinti:

- $a_0 = 0 \Rightarrow a_1 \neq 0 \Rightarrow a_0' = 0 \Rightarrow [a_0, a_1] = [a_0', a_1']$;
- $a_1' = 0 \Rightarrow a_0' \neq 0 \Rightarrow a_1 = 0 \Rightarrow [a_0, a_1] = [a_0', a_1']$,

assurdo.

- Per ogni $P \in Q$ esistono $r_{a_0 a_1}$ e $s_{b_0 b_1}$ tali che:

$$r_{a_0 a_1} \cap s_{b_0 b_1} = P.$$

In effetti, data $P = [x_0, x_1, x_2, x_3]$, esistono $[a_0, a_1]$ e $[b_0, b_1]$ tali che:

$$\begin{cases} a_0 (x_0 - x_2) = a_1 (x_3 - x_1) \\ a_1 (x_0 + x_2) = a_0 (x_3 + x_1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_0 (x_0 - x_2) = b_1 (x_3 + x_1) \\ b_1 (x_0 + x_2) = b_0 (x_3 - x_1), \end{cases}$$

da cui ogni terna di coefficienti si ottiene tramite un rapporto di numeri diversi da zero.

Per questa ragione, è ben definita (continua), ed è data da:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \times \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) &\longrightarrow Q \\ ([a_0, a_1], [b_0, b_1]) &\longrightarrow P_{ab} \in Q \end{aligned}$$

Dato che lo spazio di partenza è un compatto e quello d'arrivo è uno spazio di Hausdorff, l'applicazione Φ è chiusa.

Allora Φ è un omeomorfismo: Q è allora equivalente a un toro, visto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S_1$ per un esercizio precedente, c.v.d.

Possiamo ora completare la classificazione.

Le forme normali delle iperquadriche a una falda e delle paraboloidi a sella, scritte con i coefficienti proiettivizzati, sono le seguenti:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 = 0$$

$$(x_0 + x_2)(x_0 + x_2) = (x_3 - x_1)(x_3 + x_1)$$

$$x_0^2 - x_1^2 + x_0 x_3 = 0$$

$$(x_0 - x_1)(x_0 + x_1) = (x_0)(x_3)$$

Entrambe sono quadriche rigate: concludiamo allora, che in entrambi i casi il completamento proiettivo è il toro.

OSSERVAZIONE

In $\mathbb{C}^n$ una quadrica affine completa non è compatta. È chiaro che se la quadrica è espressa da un polinomio con termini noti nulli, la quadrica non è compatta (si noti che in $\mathbb{C}^n$ non esistono quadriche rigate: la causa è legata al fatto che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso). Se la quadrica è degenere, allora è una quadrica rigata da cui non si fuoriesce, e che resta quindi rigata anche esternamente. Consideriamo ora delle quadriche del tipo:

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1 = 0,$$

e ragioniamo per induzione:

PASSO BASE

$n = 2$

L'equazione $x_1^2 + x_2^2 = -1$, fissato $x_2 = k$, ha soluzioni per ogni k, da cui la quadrica non è limitata.

PASSO INDUTTIVO

$n \Rightarrow n+1$

Data la quadrica di equazione:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 = 1$$

Diciamo $x_n^2 = k$. La quadrica:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots x_{n-1}^2 = 1 - k$$

è la una traslata della quadrica:

$$x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 = 1,$$

dunque ammette soluzione per ogni k.

Allora la quadrica è chiusa (limitata) ma non limitata, dunque non è compatta.

OSSERVAZIONE

Nello spazio complesso le coniche sono sempre isolate la ragione è dovuta alle minori restrizioni dovute ai segni del polinomio della quadrica.

ESERCIZIO

Ex. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$I_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a,\ y > b\}$$

- Dimostrare che $\mathcal{B} = \{I_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ è base di una topologia τ su $\mathbb{R}^2$ meno fine di quella euclidea;
- Lo spazio $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è connesso? È completo? È T_2?
- Dimostrare che le traslazioni in $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfismi di $(\mathbb{R}^2, \tau)$.
- Determinare la chiusura $\overline{\{(x,y)\}}$ di un singoletto $\{(x,y)\}$ in $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Effettuiamo le verifiche:

- $\mathbb{R}^2 = \bigcup_{a \in \mathbb{N}} I_{-a,-a}$
- $\forall\ I_{a,b}, I_{a',b'} \in \mathcal{B}$, $\forall\ x \in I_{a,b} \cap I_{a',b'}$:

$$\exists\ I_{\max\{a,a'\},\max\{b,b'\}} \ni x \in I_{\max\{a,a'\},\max\{b,b'\}} \subseteq I_{a,b} \cap I_{a',b'}$$

Inoltre notiamo che:

$$\forall\ I_{a,b} \in \mathcal{B}: \quad I_{a,b} = \left]a, +\infty\right[\times \left]b, +\infty\right[\in \tau_\varepsilon,$$

da cui la topologia generata da $\mathcal{B}$ è meno fine di quella euclidea.

Lo spazio non è completo. Consideriamo ad esempio la successione seguente:

$$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}, \quad U_n \overset{\text{def}}{=} I_{-n,-n}$$

Se esistesse un sottoricoprimento finito, esisterebbe $N \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\mathbb{R}^2 \subseteq I_{-N,-N},$$

ma ciò è assurdo.

Lo spazio non è nemmeno T_2: considerati due punti (x,y) e (x',y'), con $y < y'$, un qualsiasi intorno di (x,y) contiene un aperto della forma $I_{a,b}$, con $a < x < x'$ e $b < y < y'$. Dunque $(x',y') \in I_{a,b}$, da cui lo spazio non è di Hausdorff.

Lo spazio è infine connesso: dati due aperti dello spazio, siano essi con U e V, esistono $I_{x,y}$ e $I_{x',y'}$ elementi di $\mathcal{B}$ tali che $I_{x,y} \in U$ e $I_{x',y'} \in V$, da cui:

$$\forall (\bar{x}, \bar{y}) \in \mathbb{R}^2, \quad \bar{x} > \max(x, x'), \quad \bar{y} > \max(y, y') : (\bar{x}, \bar{y}) \in I_{x,y} \cap I_{x',y'},$$

da cui $U \cap V \neq \emptyset$.

Dimostriamo ora che una traslazione è un omeomorfismo di $(\mathbb{R}^2, \tau)$. Innanzitutto, notiamo che $\tau_v^{-1} = \tau_{-v}$. Infatti:

$$\forall (v, w) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \xrightarrow{\tau_v} (x + v, y + w) \xrightarrow{\tau_{-v}} (x, y)$$

$$(x + v, y + w) \xrightarrow{\tau_{-v}} (x, y) \xrightarrow{\tau_v} (x + v, y + w)$$

Basta dunque dimostrare che una generica traslazione è continua. Per ogni aperto U, allora, dobbiamo trovare un aperto V tale che:

$$\tau_v(V) \subseteq U$$

Senza perdere di generalità, proviamo dimostrare la proprietà per un aperto di $\mathcal{B}$. Si deve allora avere che:

$$\forall I_{a,b} \in \mathcal{B}, \forall \tau_{(v,w)}: \exists I_{a-v,b-w} \in \mathcal{B} \ni \tau_{(v,w)}(I_{a-v,b-w}) \subseteq I_{a,b},$$

e ciò conclude la dimostrazione.

PROPRIETÀ DI NUMERABILITÀ

Uno spazio Topologico si dice A BASE NUMERABILE se esiste una base della Topologia formata da una quantità numerabile di aperti.

Uno spazio Topologico si dice inoltre:

- N_1, se ogni punto dello spazio ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile;
- N_2, se è a base numerabile.

La proprietà della sopra viene pertanto detta SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ.

Ex. $\mathbb{R}^m$ è numerabile per ogni $m \in \mathbb{N}$: la base numerabile è formata da tutte le palle con centro in punto razionale.

OSSERVAZIONE

Un sottospazio di uno spazio a base numerabile è a base numerabile: se $Y \subseteq X$ e $\mathcal{B}$ è una base numerabile di X, $\{A \cap Y \mid A \in \mathcal{B}\}$ è una base numerabile di Y.

OSSERVAZIONE

Il prodotto di spazi a base numerabile (in numero finito) è a base numerabile. Se $\mathcal{A}$ è una base numerabile di X e $\mathcal{B}$ è una base numerabile di Y, allora:

$$\mathcal{C} = \{A \times B \mid A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$$

è una base numerabile di $X \times Y$.

OSSERVAZIONE

Il quoziente di uno spazio a base numerabile può non essere a numerabile, ciò sarà visto più avanti.

OSSERVAZIONE

Uno spazio N_2 è uno spazio N_1, il viceversa è in genere falso. Anche questo verrà visualizzato più avanti, e dimostrato.

Uno spazio topologico si dice SEPARABILE se contiene un sottoinsieme denso e numerabile.

Es. Essendo $\mathbb{Q}$ numerabile e denso in $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ è separabile.
In generale, $\mathbb{R}^n$ è separabile.

LEMMA
Ogni spazio topologico X a base numerabile è separabile.

Dim.
Consideriamo una base numerabile $\mathcal{B} = \{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ della topologia di X. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, sia $p_n \in X$ tale che:

$$p_n \in B_n$$

L'insieme $E = \{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ è:

- denso, perché ogni aperto di X contiene almeno un aperto di $\mathcal{B}$ + dunque un punto di E in esso contenuto. Dunque l'intersezione di E con ogni aperto di X è non vuota, cioè, per definizione E è denso;
- numerabile, perché in biezione con la base $\mathcal{B}$ che è numerabile.

Quindi, per definizione, X è separabile, c.v.d.

LEMMA
Uno spazio metrico separabile è a base numerabile.

Dim.
Sia (X, d) uno spazio metrico separabile, cioè esiste $E \subseteq X$ denso e numerabile. È sufficiente dimostrare che l'insieme (numerabile) degli aperti della forma:

$$B(x_0, q), \quad x_0 \in E, q \in \mathbb{Q}$$

è una base della topologia.
Sia $U \subseteq X$, $x \in U$. Quindi esiste $\varepsilon \in \mathbb{Q}$ tale che

$$B(x, \varepsilon) \subseteq U$$

Per densità di E, $B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap E \neq \emptyset$, cioè:

$$\exists e \in E \cap B\left(x, \frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow x \in B\left(e, \frac{\varepsilon}{2}\right) \subseteq B(x, \varepsilon) \subseteq U,$$

e ciò conclude la dimostrazione, c.v.d.

INSIEME DELLE SUCCESSIONI A QUADRATO SOMMABILE

Indichiamo con $\ell^2(\mathbb{R})$ il seguente insieme:

$$\ell^2(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty \right\}$$

Per ogni $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R})$, definiamo la NORMA di a in questo modo:

$$\|a\| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}$$

$\ell^2(\mathbb{R})$ è un $\mathbb{R}$-spazio vettoriale:

- $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in \ell^2(\mathbb{R}) : \sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda a_n)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^2 a_n^2 = \lambda^2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$;
- $\forall a, b \in \ell^2(\mathbb{R}) : (a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$. Infatti:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - b_n)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + 2a_n b_n + b_n^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 - 2a_n b_n + b_n^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} 2(a_n^2 + b_n^2) = 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2\right)$$

Deduciamo che

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n)^2 \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 < +\infty \Rightarrow (a+b) \in \ell^2(\mathbb{R}).$$

Equivalentemente, usando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz e facendo tendere il limite per $N \to +\infty$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n + b_n)^2 = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 + \sum_{n=0}^{N} b_n^2 + 2\sum_{n=0}^{N} a_n b_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2 + 2\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n^2\right) < +\infty.$$

Notiamo che, per ogni $N \in \mathbb{N}$, vale

$$\sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n)^2 + 2\left[\left(\sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right)^2 - \left(\sum_{n=0}^{N} a_n b_n\right)\right] \Rightarrow \sqrt{\sum_{n=0}^{N} (a_n - b_n)^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2} + \sqrt{\sum_{n=0}^{N} b_n^2},$$

e facendo il limite:

$$\|a - b\| \leq \|a\| + \|b\|,$$

cioè $\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico se dotato della distanza $d(a,b) = \|a - b\|$.

Consideriamo ora il sottoinsieme numerabile $E \subseteq \ell^2(\mathbb{R})$ formato dai polinomi a coefficienti razionali, dove le successioni associate sono definitivamente nulle.

Vogliamo dimostrare che $E = \ell^2(\mathbb{R})$, cioè E è denso in $\ell^2(\mathbb{R})$.

Sia $a \in \ell^2(\mathbb{R})$, $\varepsilon > 0$: dimostreremo che esiste $q \in E$ tale che $\|a - q\|^2 < 2\varepsilon$.

Dato che $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$:

$\exists\, N \in \mathbb{N}$ $\sum_{n=N}^{+\infty} a_n^2 < \varepsilon$;

Per densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, inoltre:

$\forall\, n \in \{0, \dots, N-1\}$ $\exists\, q_n \in \mathbb{Q}$ s.t. $(a_n - q_n)^2 < \frac{\varepsilon}{N}$

Definendo allora $q_n = 0$ per ogni $n \geq N$, si ha che:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n - q_n)^2 = \sum_{n=0}^{N-1} (a_n - q_n)^2 + \sum_{n=N}^{+\infty} a_n^2 < 2\varepsilon,$$

da cui $\|a - q\|^2 < 2\varepsilon$, dove E è denso in $\ell^2(\mathbb{R})$.

Siccome, in conclusione, $\ell^2(\mathbb{R})$ è uno spazio metrico separabile, pertanto, per un teorema precedente, è a base numerabile.

ANCORA SULLE PROPRIETÀ DI NUMERABILITÀ

PROPOSIZIONE

Se uno spazio topologico è a base numerabile, ogni ricoprimento aperto ammette un sotto ricoprimento numerabile.

Dim.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X, e sia $x \in X$. Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile della topologia di X. Allora esistono un aperto A_x di $\mathcal{A}$ e un elemento B_x di $\mathcal{B}$ tali che:

$$x \in B_x \subseteq A_x .$$

La famiglia $\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in X\}$ è un sottoinsieme di $\mathcal{B}$, che è quindi numerabile. Possiamo allora creare un sottoinsieme numerabile $E \subseteq X$ tale che sia:

$$\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in E\}.$$

Allora la famiglia $\{U_x \mid x \in E\}$ è numerabile, ed è un sottoricoprimento di X poiché:

$$\bigcup_{x \in E} B_x = X \Rightarrow \bigcup_{x \in E} A_x = X, \text{ c.v.d.}$$

Ricordiamo che uno spazio topologico X soddisfa:

- il PRIMO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ, se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni numerabile;
- il SECONDO ASSIOMA DI NUMERABILITÀ, se è a base numerabile.

Uno spazio che soddisfi solo il primo assioma di numerabilità si dice PRIMO-NUMERABILE.

LEMMA

Se uno spazio è a base numerabile, allora è primo-numerabile.

Dim.

Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X: dato $x \in X$, allora gli elementi di $\mathcal{B}$ che contengono x formano un sistema fondamentale di intorni (numerabile) di x, c.v.d.

LEMMA

Gli spazi metrici sono primo-numerabili.

Dim.

Sia $x \in X$. Sappiamo che l'insieme degli aperti della forma $B(x, \frac{1}{n})$ è un sistema fondamentale di intorni numerabile di x, cioè:

Ex. La retta di Sorgenfrey $\mathbb{R}_S$ è:

- separabile, perché $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}_S$ è denso e numerabile;
- primo numerabile, perché, dato $a \in \mathbb{R}_S$, il seguente insieme è un sistema fondamentale di intorni numerabile:

$$\left\{ \left[a, a + \frac{1}{n}\right[\;\middle|\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

Ciò non ci dice che è non numerabile, dunque per un esempio precedente non è in particolare metrizzabile. Sia infatti $\mathcal{B}$ una base di $\mathbb{R}_S$. Vogliamo far vedere che $\mathcal{B}$ non è numerabile. Per ogni $x \in \mathbb{R}$, consideriamo:

$$\left[x, +\infty\right[$$

Questo aperto contiene x, da cui esiste $U(x) \in \mathcal{B}$ tale che $x \in U(x) \subseteq [x, +\infty[$. Se ora $y > x$, $y \notin U(x)$, da cui $U(x) \neq U(y)$. Consideriamo quindi la seguente funzione:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}_S &\longrightarrow \mathcal{B} \\ x &\longmapsto U(x) \end{aligned}$$

è iniettiva, per quanto appena detto, da cui $\mathcal{B}$ non può essere numerabile.

Una spazio N_1, dunque, non è necessariamente uno spazio N_2.

Ex. Abbiamo già dimostrato che $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, cioè il quoziente di $\mathbb{R}$ (spazio N_2) ottenuto collassando $\mathbb{Z}$ a un punto, non soddisfa il primo assioma di numerabilità. Sappiamo non è detto che, se lo spazio di partenza è N_2, un suo quoziente sia in generale N_1 o N_2.

COMPLEMENTI SULLE ESAUSTIONI IN COMPATTI

Un'ESAUSTIONE IN COMPATTI di uno spazio topologico X è una successione di sottospazi compatti $(K_m)_{m\in\mathbb{N}}$ tale che:

- $\bigcup_{m\in\mathbb{N}} K_m = X$;
- $K_m \subseteq K_{m+1}^{\circ}$.

OSSERVAZIONE

$\mathbb{R}^n$ ammette un'esaustione in compatti:

$$\{B(0,n)\}_{n\in\mathbb{N}}.$$

OSSERVAZIONE

Un aperto V di $\mathbb{R}^n$ ammette un'esaustione in compatti.

Scelto $x \in V$, la seguente è un'esaustione in compatti di V:

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad B_n \overset{\text{def}}{=} B(x,n) \cap \left\{ x \in V \mid d(x, \partial V) \geq \frac{1}{n+1} \right\},$$

ove con ∂V indichiamo la frontiera di V.

PROPOSIZIONE

Se X è uno spazio di Hausdorff localmente compatto e a base numerabile, X ammette un'esaustione in compatti.

Dim.

Sia $\mathcal{B}$ una base numerabile di X: denotiamo con $\mathcal{B}_c$ il sottoinsieme di $\mathcal{B}$ degli aperti a chiusura compatta. Poiché X è localmente compatto e di Hausdorff, $\mathcal{B}_c$ è un ricoprimento di X:

$\forall\, x \in X$, $\exists$ intorno compatto di x $\Rightarrow$ $\exists\, U \in \mathcal{B}_c$ t.c. $x \in U \subseteq$ ...,

da cui:

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}_c} B = X$$

Sia $\mathcal{A}$ la famiglia delle unioni finite di elementi di $\mathcal{B}_c$: $\mathcal{A}$ è numerabile, per costruzione. Inoltre, $\forall\, A \in \mathcal{A}$, si ha $\bar{A}$ compatto. Inoltre, essendo $\mathcal{B}_c$ naturalmente inclusa in $\mathcal{A}$, si ha che, per ogni compatto $K \subseteq X$, esiste $A \in \mathcal{A}$ tale che $K \subseteq A$.

Scriviamo allora un'applicazione surgettiva:

$$g : \mathbb{N} \to \mathcal{P}_c$$

Definiamo dunque:

$$(K_m)_{m \in \mathbb{N}}$$

Poniamo dunque:

$$K_1 \stackrel{\text{def}}{=} g(1),$$

e supponiamo di aver scelto $K_1, \dots, K_{m-1}$, dato che:

$$\exists\, A_m \in \mathcal{S} \text{ t.c. } K_1 \subseteq \dots \subseteq K_{m-1} \subseteq A_m,$$

definiamo:

$$K_m \stackrel{\text{def}}{=} A_m \cup g(m)$$

La famiglia K_m è una successione in compatti di X, c.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Sia $\mathcal{B}$ una base qualsiasi di uno spazio topologico X. Dimostrare che esiste una sottofamiglia $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ numerabile che è ancora una base della topologia. Condizione necessaria e sufficiente affinché X sia una base è che per ogni $U \subseteq X$ aperto e per ogni $x \in U$, esista $C \in \mathcal{C}$ tale che $x \in C \subseteq U$. Sia dunque $U \subseteq X$, $x \in U$. Allora:

$\exists\, A_x \in \mathcal{A}$ ($\mathcal{A}$ base numerabile di X) s.t. $x \in A_x \subseteq U \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, B_x \in \mathcal{B}$ s.t. $x \in B_x \subseteq A_x \subseteq U$. Dato che $(A_x)_{x \in X} \subseteq \mathcal{B}$, $(A_x)_{x \in X}$ è numerabile. Sia $\mathcal{A} = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
Allora $(B_x)_{x \in X}$ è numerabile, ed è una base numerabile di X, sottofamiglia di $\mathcal{B}$, perché, se $(B_x)_{x \in \mathbb{N}} = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è $\forall\, U \subseteq X$, $\forall\, x \in U$, $\exists\, B_n \in \mathcal{C}$ s.t. $x \in B_n \subseteq A_n \subseteq U$, $A_n \in \mathcal{A}$.

2. Sia $f : X \to Y$ continua e surgettiva. Provare che se X è separabile, anche Y è separabile. Se in aggiunta f è aperta e X ha una base numerabile, allora anche Y ha una base numerabile.

Sia $E \subseteq X$ un sottoinsieme denso e numerabile. Allora $f(E)$ è ovviamente numerabile: mostriamo che è denso in Y. Consideriamo, a tale fine, $C \overset{\text{def}}{=} \overline{f(E)}$.
Si ha:
$f^{-1}(C)$ chiuso (perché f è continua), $f^{-1}(C) \supseteq E \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1}(C) = X$
Per surgettività, allora, $f(f^{-1}(C)) = C = Y$, da cui:
$\overline{f(E)} = Y$. Allora $f(E)$ è denso in Y, cioè Y è separabile.
Se in più f è aperta e X è a base numerabile, allora, presa $\mathcal{B}$ base numerabile di X, $f(\mathcal{B})$ è una famiglia di aperti che ricopre Y. Sia ora $U \subseteq Y$, allora $f^{-1}(U)$ è unione di aperti di $\mathcal{B}$, da cui U è unione delle immagini secondo f di quegli aperti. Dunque $f(\mathcal{B})$ è una base numerabile di Y, che quindi è a base numerabile.

SUCCESSIONI

Una SUCCESSIONE in uno spazio topologico X è un'applicazione $a: \mathbb{N} \to X$; si considerano indicare $a(i)$ con a_i:

$$a: \mathbb{N} \to X$$
$$i \mapsto a_i$$

Sia dunque $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione in X. Diciamo che:

- la successione CONVERGE a $p \in X$, detto PUNTO LIMITE, se, per ogni intorno U di p, esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $a_n \in U$ per ogni $n \geq n_0$. In questo caso, si dice che la successione è DEFINITIVAMENTE a valori in U;
- un punto $p \in X$ è di ACCUMULAZIONE per $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se la successione è FREQUENTEMENTE a valori in U, intorno di p. In altre parole, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $k \geq n$ tale che $a_k \in U$.

È chiaro che un punto limite è anche punto di accumulazione, ed è chiaro che il viceversa, in genere, non è vero. È inoltre chiaro che, se X è T_2, il limite è unico, quando esiste: infatti, prendo due distinti, considerando due intorni disgiunti si giungerebbe ad un assurdo.

Se una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $p \in X$, si dice che:

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = p$$

Una SOTTOSUCCESSIONE di una successione $a: \mathbb{N} \to X$ è una composizione di a con un'applicazione strettamente crescente $k: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$:

$$\mathbb{N} \xrightarrow{k} \mathbb{N} \xrightarrow{a} X$$
$$k \mapsto n_k \mapsto a_{n_k}$$

OSSERVAZIONE

Sia $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile. Allora, ponendo:

$$V_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigcap_{j=1}^{i} U_j,$$

si dirà un sistema fondamentale di intorni numerabile adiacente per inclusione.

LEMMA

Sia $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione in uno spazio topologico X, e sia $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ una sottosuccessione convergente a $p \in X$. Allora p è un punto di accumulazione di $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dim.

Sia U un intorno di p. Allora, per definizione:

$$\exists\, N \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, k \geq N : a_{n_k} \in U$$

Dato allora $m \in \mathbb{N}$, esiste sicuramente $n \in \mathbb{N}$ tale che $a_{n_k} \in U$ e $k(n) \geq m$, da cui p è di accumulazione per $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio di Hausdorff e sia $A \subseteq X$ un sottoinsieme. Per $x \in X$, le seguenti proposizioni sono equivalenti:

- esiste una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ convergente a x;
- x è punto di accumulazione di una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$;
- $x \in \bar{A}$.

Dim.

Che la prima implichi la seconda è ovvio.

Sia, per ipotesi, x di accumulazione per $a : \mathbb{N} \to A$. Allora, per ogni intorno U di X, detto $A' = a(\mathbb{N})$, si ha $A' \cap U \neq \emptyset$, da cui $x \in \bar{A} \setminus A$.

Sia ora $x \in \bar{A}$, e sia $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni numerabile per x adiacente per inclusione. Scegliamo, per ogni U_n, $a_n \in U_n$. La successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a x. Infatti, per ogni U intorno di x esiste $U_N = U$, e la successione è definitivamente a valori in U_N, c.v.d.

LEMMA

In uno spazio Topologico completo, ogni successione ammette punti di accumulazione.

Dim.

Sia X uno spazio completo e $a : \mathbb{N} \to X$ una successione. Per ogni $m \in \mathbb{N}$, definiamo:

$$C_m = \overline{\{a_n \mid n \geq m\}}$$

Per definizione, $x \in X$ è di accumulazione se e solo se:

$$x \in \bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m$$

Notiamo che C_m è una catena discendente numerabile di chiusi non nulli. Se $\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m = \emptyset$, allora $\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X - C_m = X$, e dato che X è completo:

$$X - C_m \neq X \Rightarrow \bigcup_{m=1}^{n} C_m \neq \emptyset,$$

e ciò è assurdo. Allora:

$$\bigcap_{m \in \mathbb{N}} C_m \neq \emptyset,$$

ossia esistono punti di accumulazione, c.v.d.

Uno spazio Topologico si dice COMPATTO PER SUCCESSIONI se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergenti.

LEMMA

Uno spazio Topologico N è completo per successioni se e solo se ogni successione ammette punti di accumulazione.

Dim.

Se lo spazio è N è completo per successioni, fissa una successione $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e una sua sottosuccessione $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente a $p \in X$, si ha che p è punto di accumulazione per $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Viceversa, sia p un punto di accumulazione per $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Sia $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un sistema fondamentale di intorni aperti ordinato per inclusione:

$$U_{m+1} \subseteq U_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Se p è di accumulazione per $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, è definibile per ricorrenza una successione di interi k_m tale che risulti:

$$k_{m+1} > k_m \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

$$a_{k_m} \in U_{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

Allora $(a_{k_m})_{m\in\mathbb{N}}$ converge a p, c.v.d.

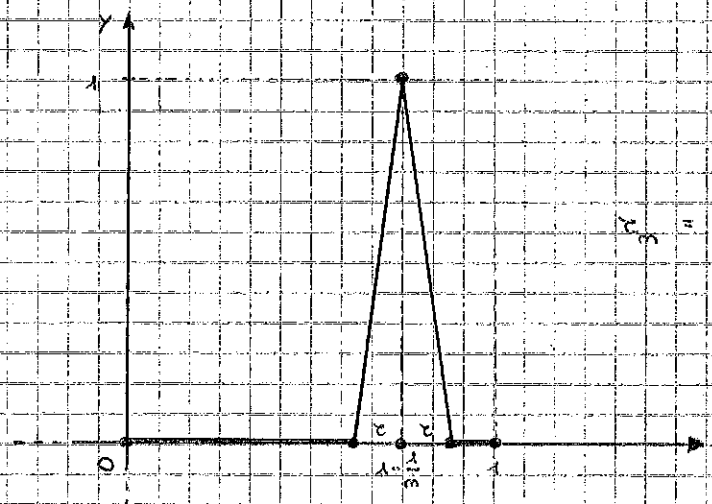
COROLLARIO

Ogni spazio topologico completo e NU è compatto per successioni.

OSSERVAZIONE

Dato $I \subseteq \mathbb{R}$ intervallo chiuso, lo spazio delle funzioni $\mathcal{F}(I, I)$ è uno spazio metrico, dunque NU, se dotato della norma infinito $\|\cdot\|_\infty$, che però non è compatto. Per dimostrare ciò, proviamo a mostrare che esiste una successione che non ammette sottosuccessioni convergenti.

Consideriamo infatti $(f_m)_{m\in\mathbb{N}}$ così definita:



Si ha:

$\forall n, m \in \mathbb{N}: d(f_n, f_m) = \|f_n - f_m\| = 1$,

da cui la successione non ammette sottosuccessioni convergenti.

ESERCIZIO SUI SISTEMI FONDAMENTALI DI INTORNI

Sia $S \subseteq \mathbb{R}^3$ un insieme chiuso. Dimostrare che S ha un sistema fondamentale di intorni numerabile se e solo se ∂S è compatto.

Definiamo, supponendo che ∂S sia compatto, la famiglia seguente di intorni di S:

$$U_n(S) = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \mid d(x, S) < \frac{1}{n} \right\}$$

Sia ora V un intorno di S. Consideriamo $\mathbb{R}^3 - V$. Sia:

$$\delta = d(S, \mathbb{R}^3 - V) \Big|_{\partial S}$$

δ è una funzione continua definita in un compatto, quindi ammette un minimo: sia esso ε. Ovviamente $\varepsilon \geq 0$, per definizione di distanza. Inoltre $(\mathbb{R}^3 - V) \cap \partial S = \emptyset$, da cui abbiamo $\varepsilon > 0$. Esiste dunque $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che:

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Consideriamo U_{n_0}. Si ha $U_{n_0} \subseteq S$, poiché:

$$\forall x \in S : d(x, S) = 0 < \frac{1}{n_0} \Rightarrow x \in U_{n_0}.$$

Inoltre $U_{n_0} \cap (\mathbb{R}^3 - V) = \emptyset \Rightarrow U_{n_0} \subseteq V$.

Per dimostrarlo, sia $x \in U_{n_0} - S$. Allora:

$$0 < d(x, S) < \frac{1}{n_0},$$

da cui:

$$\exists\, y \in S \text{ s.t. } d(x, y) < \frac{1}{n_0}.$$

Congiungiamo con un segmento x e y. Sia z il punto a distanza minima da y tra quelli appartenenti a $U_{n_0} - S$: essendo $\mathbb{R}^3$ compatto, questo estremo inferiore esiste; z, in particolare, appartiene a ∂S. Allora:

$$d(x, z) = \delta(x, z) < \frac{1}{n_0} \Rightarrow \delta(x, \partial) < \frac{1}{n_0},$$

da cui:

$$x \notin \mathbb{R}^3 - V.$$

Supponiamo ora che la frontiera non sia compatta. Allora, in particolare, essa non è limitata, essendo chiusa per definizione. Esiste allora un insieme discreto e numerabile $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ contenuto in ∂S. Sia, per ogni x_k, V_k un intorno in $\mathbb{R}^3$ di x_k non contenente nessun altro punto dell'insieme discreto.

Ora, per ogni $k\in\mathbb{N}$, esiste $z_k \in (O_{x_k} \cap V_k) \setminus S$: un tale punto esiste perché x_k appartiene alla frontiera, dunque $V_k \not\subset S$.

Considerando allora $\mathbb{R}^3 \setminus (z_k)_{k\in\mathbb{N}}$, esso è un intorno di S non contenente nessun intorno della forma V_k, $k\in\mathbb{N}$: il sistema fondamentale di intorni di S, dunque, non può essere numerabile.

Ciò conclude l'esercizio.

TEOREMI DI BAIRE (PRIMO TEOREMA)

Un sotto insieme di uno spazio topologico si dice RARO se la sua chiusura non ha punti interni; si dice MAGRO se è contenuto in un'unione numerabile di insiemi rari.

Notiamo che la proprietà di $C \subseteq X$ di essere raro o magro dipende da X. Ad esempio $\{0\}$ è raro come sottoinsieme di $\mathbb{R}$, ma non è magro come sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Uno spazio si dice LOCALMENTE COMPATTO se ogni suo punto possiede un intorno compatto.

LEMMA

Se X è localmente compatto e T_2, allora ogni punto ha una base di intorni compatti.

Dim.

Sia $x \in X$. Sia K un intorno compatto di x.

Vogliamo dimostrare che tutti gli intorni di x contenuti in K, la cui chiusura è un intorno compatto di x, sono una base di intorni di x. Sia U aperto contenente x. Allora $K - U = A$ è un chiuso in un compatto, dunque un compatto, tale che $x \notin A$.

Poiché X è T_2, ci sono aperti disgiunti $x \in V$ e $\omega \supseteq A$.

Allora $\overline{V}$ è un intorno compatto di x contenuto in $K \cap U$, infatti:

$$\overline{V} \subseteq K - \omega \subseteq K - A = K \cap U, \text{ c.v.d.}$$

Uno spazio topologico X si dice SPAZIO DI BAIRE se ogni suo sottoinsieme magro ha parte interna vuota.

TEOREMA (PRIMO, DI BAIRE)

Gli spazi topologici localmente compatti e T_2 sono spazi di Baire.

Dim.

Sia $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di chiusi rari

Sia X e $U_0 \subseteq X$ un aperto non vuoto. Vogliamo dimostrare che $U_0 \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n$.

Costruiamo per ricorrenza una successione di aperti di X:

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \dots \supseteq U_n \supseteq \dots$$

Tale che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

- $U_n \neq \emptyset$;
- $\overline{U_n}$ è compatto e contenuto in $U_{n-1} - C_n$.

Procediamo per induzione.

CASO BASE

$n = 1$

C_1 è un chiuso raro; dunque $U_0 - C_1$ è aperto non vuoto. $x_0 \in U_0$ ha un intorno compatto incluso in $U_0 - C_1$, sia esso U_1, tale che $\overline{U_1}$ è compatto, e $U_1 \subseteq U_0 - C_1$: ricordiamo che lo spazio è localmente compatto e T_2, dunque x_0 ha una base di intorni compatti.

PASSO INDUTTIVO

$n \Rightarrow n+1$

È passo ricorsivo è del tutto simile: dato U_n, si ha $U_n - C_{n+1} \neq \emptyset$. Detto x_n un punto in $U_n - C_{n+1}$, esiste un intorno compatto in $U_n - C_{n+1}$. Esiste allora U_{n+1} tale che $x \in U_{n+1} \subseteq \overline{U_{n+1}} \subseteq U_n - C_{n+1}$.

Sia ora:

$$\Lambda = \bigcap_{n>0} \overline{U_n} \subseteq U_0$$

Dato che $(\overline{U_n})$ è una catena discendente numerabile di compatti, $\Lambda \neq \emptyset$ perché l'intersezione è non vuota. Inoltre, per costruzione:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+ : \Lambda \subseteq X - C_n \Rightarrow \Lambda \subseteq X - \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Lambda \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n \Rightarrow U_0 \not\subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^+} C_n \text{, c.v.d.}$$

SUCCESSIONI DI CAUCHY

Una successione $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in uno spazio metrico (X,d) si dice una SUCCESSIONE DI CAUCHY se:

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $d(a_n, a_m) < \varepsilon \quad \forall n, m \geq \nu$

Ciò dà che ogni successione convergente è di Cauchy: la dimostrazione è immediata, la curiosità è che l'inverso non è detto: diremo che (X,d) è COMPLETO se ogni successione di Cauchy è convergente.

LEMMA

Una successione di Cauchy è convergente se possiede punti di accumulazione.

Dim.

Sia p punto di accumulazione per $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ successione di Cauchy. Per definizione, dato $\varepsilon > 0$:

$\exists \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $d(a_n, a_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq \nu$.

Dato che p è di accumulazione:

$\exists N \geq \nu \in \mathbb{N}$ t.c. $d(p, a_N) < \frac{\varepsilon}{2}$

Allora, per la disuguaglianza triangolare:

$\forall n \geq \nu$: $d(p, a_n) \leq d(p, a_N) + d(a_n, a_N) <$

$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$,

da cui la tesi:

$p = \lim_{n\to+\infty} a_n$

OSSERVAZIONE

Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, il limite è ovviamente un punto di accumulazione.

COROLLARIO

In uno spazio metrico completo per successione, ogni sottosuccessione di Cauchy ammette una sottosuccessione convergente. Per un lemma precedente, allora, esistono punti di accumulazione.

Per definizione, uno spazio metrico (X,d) è COMPLETO se ogni successione di Cauchy a valori in X converge in X.

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio metrico completo, e sia $Y \subseteq X$ chiuso. Y è completo se e solo se Y è chiuso.

Dim.

Una successione di Cauchy a valori in Y è una particolare successione di Cauchy a valori in X, che converge in Y per completezza di X e chiusura di Y. Dunque $(Y, d|_{Y\times Y})$ è completo.

Viceversa ogni successione di valori in Y convergente a $x \in Y$ è di Cauchy, da cui $x \in Y$ per completezza di Y: allora Y è chiuso, c.v.d.

Ex. $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ è uno spazio metrico completo.

Definiamo $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{R}$ compatto, e definiamo:

$$V(\mathbb{K}, \varepsilon, f_n) \overset{def}{=} \{ f \in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \sup_{\mathbb{K}} |f - f_n| < \varepsilon \}$$

Definiamo allora la seguente SEMINORMA:

$$\| f \|_{\mathbb{K}} \overset{def}{=} \sup_{\mathbb{K}} |f|$$

Sia $(\mathbb{K}_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una successione di compatti di $\mathbb{R}$. Se $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{K}_m$, si ha $\| f \|_{\mathbb{K}} \leq \| f \|_{\mathbb{K}_m}$.

La seguente applicazione allora, è una distanza:

$$d(f,0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{2^m} \min(\| f \|_{\mathbb{K}_m}, 1),$$

e la topologia indotta è la stessa di prima. Che questa sia una distanza, è evidente

TEOREMI DI BAIRE (SECONDO TEOREMA)

TEOREMA (SECONDO DI BAIRE)

Ogni spazio metrico completo è uno spazio di Baire.

Dim.

Sia $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una famiglia numerabile di chiusi con $\overset{\circ}{C}_n = \emptyset$ di (X,d) spazio metrico completo.

Assumiamo, per assurdo, che esista una palla aperta:

$$B(x_0, r) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$$

Ogni C_n ha parte interna vuota. Allora:

$$\forall C_n,\ n\in\mathbb{N},\ \forall B(x,\varepsilon),\ \varepsilon>0 : B(x,\varepsilon) \not\subseteq C_n \neq \emptyset$$

Scegliamo $x_1 \in B\left(x_0, \frac{r}{3}\right) : C_1$ è un numero reale $0 < r_1 < \frac{r}{3}$ tale che $B(x_1, r_1) \cap C_1 = \emptyset$, ossia $B(x_1, r_1) \subseteq B\left(x_0, \frac{r}{3}\right) - C_1$.

Iterando, esistono $x_2, r_2 < \frac{r_1}{3}$ tale che $B(x_2, r_2) \cap C_2 = \emptyset$, ossia $B(x_2, r_2) \subseteq B\left(x_1, \frac{r_1}{3}\right) - C_2$.

Otteniamo dunque due successioni:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad (r_n)_{n\in\mathbb{N}},\ r_n < \frac{r_{n-1}}{3} < \frac{r_{n-2}}{3^2} < \dots < \frac{r}{3^n}$$

Usando la disuguaglianza triangolare, per $n < m$:

$$d(x_n, x_m) \leq d(x_n, x_{n+1}) + \dots + d(x_{m-1}, x_m) \leq$$

$$\leq \frac{r_n}{3} + \frac{r_{n+1}}{3} + \dots + \frac{r_{m-1}}{3} \leq$$

$$\leq \frac{r}{3^{n+1}} + \frac{r}{3^{n+2}} + \dots + \frac{r}{3^m} =$$

$$= \frac{r}{3^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3^{m-n-1}}\right) \leq$$

$$\leq \frac{r}{3^{n+1}} \cdot c_3 \cdot \frac{2}{3} \leq \frac{r}{3^n}$$

La successione è dunque di Cauchy, dunque convergente: sia h il suo limite. Per $m \to +\infty$, si ottiene:

$$d(x_n, h) \leq \frac{r}{3^n},$$

da cui $h \notin C_n$ per ogni n.

D'altra parte $d(x_0, h) < r$, da cui $h \in (x_0, r) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.

Assurdo dunque e assurdo, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Uno spazio topologico X dice di PRIMA CATEGORIA se è unione numerabile di chiusi rari; è di SECONDA CATEGORIA se non è di prima categoria.

TEOREMA

Uno spazio è di Baire se e solo se ogni suo aperto è di seconda categoria.

Dim.

$\Rightarrow$ Se un aperto non vuoto è di prima categoria, allora esso ha parte interna non vuota, e d'altronde X è un'unione numerabile di chiusi rari, cioè un insieme magro con parte interna non vuota. Per definizione, allora, lo spazio non è uno spazio di Baire.

$\Leftarrow$ Se lo spazio non è uno spazio di Baire, allora esiste un suo insieme magro a parte interna non vuota; sia A questa parte interna. Allora A è un insieme aperto di prima categoria, c.v.d.

OSSERVAZIONE

$\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, dotati della topologia indotta da $\mathbb{R}$ munito della topologia euclidea (cioè della topologia discreta) sono spazi di Baire: l'unico chiuso raro è l'insieme vuoto, infatti.

In generale, uno spazio metrico numerabile con la topologia discreta è uno spazio di Baire; se lo spazio non è dotato di tale topologia, cioè non tutti i punti sono aperti, per il secondo teorema di Baire esso non può essere completo.

Ad esempio $\mathbb{Q}$ non è uno spazio di Baire, se dotato con la topologia indotta da $\mathbb{R}$ euclideo. Infatti $\mathbb{Q}$ stesso è un aperto (a parte interna non vuota) ottenuto con un'unione numerabile di chiusi rari (i punti razionali, che non sono aperti).

ESERCIZI VARI

1. Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{R}^2$:

$$(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \iff \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1\} \subseteq \mathbb{Z}$$

Dire quali tra i seguenti spazi topologici sono equivalenti:

$\mathbb{R}^2/\sim$ $\quad S^1 \times \mathbb{R}$ $\quad S^1 \times S^1$ $\quad S^1$

Ricordiamo che $\mathbb{R}^2/\sim$ è compatto e T2. La risposta è affermativa, e per dimostrarlo, dimostriamo che il quadrato $[0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ (compatto, perché chiuso e limitato) ha un rappresentante per ogni classe di equivalenza. Se $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, allora $(x, y) \sim (0, 0)$. In questo caso, si ha:

$$(x, y) \sim (\text{frac}(x), \text{frac}(y)),$$

ove $(\text{frac}(x), \text{frac}(y)) \in [0,1[\times [0,1[\subseteq [0,1] \times [0,1]$.

Infine $[0,1] \times [0,1]$ passa suriettivamente al quoziente, da cui $\mathbb{R}^2/\sim$ è compatto.

Dato che $S^1 \times S^1$ e S^1 sono compatti, così come $\mathbb{R}^2/\sim$, mentre $S^1 \times \mathbb{R}$ non lo è, deduciamo che $S^1 \times \mathbb{R}$ non è omeomorfo a nessuno degli altri spazi.

Dimostriamo ora che $\mathbb{R}^2/\sim \cong S^1 \times S^1$. Consideriamo:

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow S^1 \times S^1$$
$$(x, y) \longmapsto ((\cos 2\pi x, \sin 2\pi x), (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y))$$

Si ha:

$$\varphi(x, y) = \varphi(x', y') \iff x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z},$$

da cui la funzione:

$$\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2/\sim \longrightarrow S^1 \times S^1,$$

continua e biiettiva da un compatto a un T2, è un omeomorfismo.

Identifichiamo ora $\mathbb{R}^2/\sim$ con $[0,1]^2/\sim$. Sia, per assurdo, ψ un omeomorfismo da $[0,1]^2/\sim$ in S^1: $[0,1]^2/\sim - A$, con $A = \{(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}), (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})\}$ è connesso per archi. $\psi([0,1]^2/\sim - A)$, invece, essendo $S^1 - B$, con $B = \{x, y\}$ unione di due punti distinti di S^1, è sconnesso. Dunque ψ non può esistere.

2. Consideriamo la seguente relazione di equivalenza su $\mathbb{C}$:

$$z \sim w \iff z = w \ \vee \ \{z, w\} \subset \mathbb{N}$$

Sia $X = \mathbb{C}/\sim$, munito della topologia quoziente.

Lo spazio topologico X è di Hausdorff? È compatto? È connesso? Esiste un altro spazio topologico di $\mathbb{R}^n$ omeomorfo a X per qualche n?

Essendo $\mathbb{C}$ connesso, $\mathbb{C}/\sim$ è ovviamente connesso. $\mathbb{C}/\sim$ non è compatto: sia infatti:

$$(U_z)_{z \in \mathbb{N}} \quad U_z \overset{\text{def}}{=} B([0], z)$$

Questo è un ricoprimento aperto di $\mathbb{C}/\sim$ che però non ammette un sottoricoprimento finito: se così fosse $\mathbb{C}/\sim$ risulterebbe limitato, ma ciò è assurdo.

Inoltre, X è T_2. $\mathbb{C}/\sim$ è T_2, e il passaggio al quoziente di questo altro spazio topologico è ammesso, da cui è sufficiente controllare l'assioma di separazione per i punti razionali, ossia $[0]$ nel quoziente. Ma, dato un punto $z \notin \mathbb{N}$, esistono un intorno V di z e un intorno U di $\mathbb{N}$ tali che $U \cap V = \emptyset$: ad esempio $\overline{B}(z, \mathbb{N}) : \varepsilon$, basta prendere palle aperte di raggio $\frac{\varepsilon}{3}$. Il quoziente è dunque T_2.

Infine non esiste un altro spazio topologico di $\mathbb{R}^n$ omeomorfo a X, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Infatti $\mathbb{R}^n$ è N_1 (addirittura N_2), mentre $[0]$ in $\mathbb{C}/\sim$ non ammette un sistema fondamentale di intorni numerabile: la cosa si verifica agevolmente usando la proprietà diagonale di Cantor.

3. Sia S l'insieme di tutti i segmenti chiusi contenuti nel piano affine $\mathbb{R}^2$. Per ogni aperto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, munito della topologia euclidea, sia S_U l'insieme di tutti i segmenti contenuti in U. Si consideri:

$$T = \{ S_U \mid U \text{ aperto in } \mathbb{R}^2 \}$$

L'insieme T è una topologia su S? È una base di una topologia su S?

L'insieme T non è una topologia su S, ma è una base per una topologia su S.

Dimostriamo prima questa seconda affermazione:

- $S = S_{\mathbb{R}^2} = \bigcup_{U \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ aperto}} S_U$;
- $\forall S_U, S_V \in T$, $\forall s \in S_U \cap S_V$: $\forall p \in \mathbb{R}^2$, $p \in s$: $p \in U \cap V \Rightarrow \exists S_{U \cap V} \in T$ t.c. $s \in S_{U \cap V} \subseteq S_U \cap S_V$.

L'insieme T non è però una topologia su S. Consideriamo infatti due aperti U e V di $\mathbb{R}^2$ tali che $U \cup V = \mathbb{R}^2$, $U \cap V \neq \emptyset$ (ad esempio $U = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| > \frac{1}{2}\}$, $V = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| < \frac{3}{4}\}$). Consideriamo $S_U \cup S_V$: dovrebbe essere $S_U \cup S_V = S_U = S_V = S_{U \cup V} = S_{\mathbb{R}^2} = S \Rightarrow \forall s \in S$, ma $S_U \cup S_V \neq S$ infatti, detti x, y tali che $\|x\| = 0$, $\|y\| = \frac{1}{2}$, il segmento che li congiunge non sta in $S_U \cup S_V$.

4. Si consideri

$$S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

Dire quali fra i seguenti spazi topologici sono omeomorfi:

- S_1;
- $S_1 / \sim$, $z \sim w \Leftrightarrow z = w \vee \{z, w\} = \{i, -i\}$;
- $\mathbb{R} / \sim$, $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee |x|, |y| \geq 1$;
- $\mathbb{R} / \sim$, $x \sim y \Leftrightarrow x = y \vee |x|, |y| \geq 1$

In particolare sappiamo che:

- S_1 è T_2;
- $\mathbb{R} / \sim$ con la prima relazione è T_2;
- $\mathbb{R} / \sim$ con la seconda relazione non è T_2;
- $S_1 / \sim$ è T_2.

Dunque $\mathbb{R} / \sim$ con la seconda relazione non è omeomorfo agli altri tre. Riguardo $\mathbb{R} / \sim$ con la prima relazione, notiamo che $[0,1]$ si mappa surgettivamente sul quoziente, e nel quoziente i punti $0, 1$ sono da identificare tra loro, in effetti, $[0,1] / \sim$ è omeomorfo a S_1:

$$\varphi : [0,1] / \sim \longrightarrow S_1$$
$$x \longmapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$$

Infine, $S_1 / \sim$ non è omeomorfo a S_1. Supponiamo che esista ψ omeomorfismo:

$$\psi : S_1 / \sim \longrightarrow S_1$$

Allora $\psi([i]) = p \in S_1$ (ogni un punto). Ma accade che $S_1 / \sim - [i]$ è connesso (ha due complementi connessi) mentre $S_1 - p$ è connesso, e ciò è assurdo.

SPAZI METRICI COMPATTI

Uno spazio metrico si dice TOTALMENTE LIMITATO se, per ogni $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$ è possibile ricoprire tale spazio con un numero finito di palle aperte di raggio r.

OSSERVAZIONE

$\mathbb{R}$ con la topologia discreta è limitato, ma non totalmente limitato. Infatti, dato $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{R} \subseteq B(x, r) \Rightarrow \mathbb{R} = B(x, r)$, poiché:

$\forall r \in]0, 1[: B(x, r) = \{x\}$.

LEMMA

Ogni spazio metrico completo per successioni è totalmente limitato.

Dim.

Sia (X, d) uno spazio metrico completo per successioni, supponiamo per assurdo che non sia totalmente limitato, cioè:

$\exists r > 0$ s.t. X non è ricopribile con un numero finito di palle di raggio r.

Costruiamo allora $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, dove $p_1 \in X$ è scelto in modo arbitrario, e:

$$p_2 \in X : p_2 \notin B(p_1, r)$$

$$p_3 \in X : p_3 \notin B(p_1, r) \cup B(p_2, r)$$

$$\vdots$$

$$p_n \in X : p_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(p_i, r)$$

Tale che $d(p_n, p_m) \geq r \quad \forall n, m$ - ogni sottosuccessione $(p_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ non può essere convergente - ciò è assurdo, c.v.d.

LEMMA

Ogni spazio metrico totalmente limitato è a base numerabile.

Dim.

Sia (X, d) totalmente limitato. Allora, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un sottoinsieme $E_n \subseteq X$ finito tale che:

$$X = \bigcup \{B(p, 2^{-n}) \mid p \in E_n\}$$

L'insieme numerabile:

$$E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$$

è denso.

Infatti:

$\forall x \in X : x \in B(e, 2^{-n})$ per un $e \in E$ e un $n \in \mathbb{N}$

X è dunque separabile.

Per un lemma precedente, allora, X è uno spazio N2, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Per (X, d) spazio metrico, sono equivalenti i seguenti fatti:

- X è completo;
- ogni successione in X possiede punto di accumulazione;
- X è completo per successioni;
- X è completo e totalmente limitato.

Dim

Denotiamo con d la distanza su X. Si sa che (X, d) è uno spazio N2, e implicazioni (1) ⇒ (2) e (2) ⇒ (3) sono state già dimostrate.

Dimostriamo ora che (3) ⇒ (1). I due lemmi precedenti ci dicono che X è a base numerabile, e per una proposizione precedente, le condizioni (1), (2), (3) sono equivalenti.

Dimostriamo ora che (2) + (3) = (4). Per un lemma appena dimostrato, X è totalmente limitato, e per un lemma precedente, lo spazio è completo, perché le successioni di Cauchy convergono.

Per concludere, dimostriamo che (4) ⇒ (3): basta provare che, in uno spazio metrico totalmente limitato, da ogni successione si può estrarre una sottosuccessione di Cauchy.

Sia $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una successione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$, $\exists A_n$ un ricoprimento finito di palle aperte di raggio 2^{-n} che ricoprono X.

Scegliamo una applicazione

$$f_n : \mathbb{N} \to A_{n-1}$$

tale che per ogni $i \in \mathbb{N}$, $f_n(i)$ è una palla che contiene

ne di $\mathbb{N}$. Supponiamo di aver dimostrato che esiste una sottosuccessione $(a_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ tale che:

$$\forall m > n : f_n(g(m)) \neq f_n(g(n))$$

Allora $a_{g(n)}$ e $a_{g(m)}$, $m > n$, appartengono tutti alla stessa palla di raggio 2^{-n}. Allora $(a_{g(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di Cauchy, c.v.d.

Per completare la dimostrazione ci serviamo del seguente Lemma.

Lemma

Sia $\{f_n : \mathbb{N} \to A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ una famiglia numerabile di applicazioni di insiemi, se A_n è un insieme finito per ogni $n \in \mathbb{N}$, allora esiste una applicazione strettamente crescente $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $f_n(g(m)) = f_n(g(n))$ per ogni $m > n$.

Dim.

Siccome F_1 è finito, dunque ci sono una delle sottosuccessioni di f_1 di cardinalità infinita. Sulla f_1 questa diverrà, esiste $g_1 : \mathbb{N} \to F_1$ tale che la seguente:

$$f_1 \; g_1$$

è costante.

Analogamente, una sottosuccessione di $f_2 g_1$ è infinita, ma essa F_2: esiste allora $g_2 : \mathbb{N} \to F_2$ tale che $f_2 g_1 g_2$ è costante.

Proseguendo, otteniamo una successione $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ di funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tali che:

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n g_1 g_2 \dots g_n \text{ è costante}$$

Definiamo ora $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ in questo modo:

$$g(n) = g_1 \dots g_n(n)$$

Dati $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, sia:

$$e = g_{n+1} g_{n+2} \dots g_m(m) > n$$

Vale allora:

$$f_n(g(m)) = f_n(g_1 \dots g_n(e)) = f_n(g_1 \dots g_n(n)) = f_n(g(n)), \text{ c.v.d.}$$

BIRAPPORTO IN $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$

Sia r una retta affine in uno spazio affine W su campo $\mathbb{K}$. Siano $O, U \in r$, $O \neq U$ due punti di r:

- fissare O vuol dire rendere r uno spazio vettoriale di dimensione 1;
- fissare U vuol dire fissare una base di questo spazio vettoriale.

Sia $P \in r$. La coordinata affine x di P nel riferimento OU è quel numero di $\mathbb{K}$ tale che:

$$x \cdot \overrightarrow{OU} = \overrightarrow{OP}$$

Sia dunque (P_1, P_2, P), $P_1 \neq P_2$ una terna di punti di r. Si definisce RAPPORTO SEMPLICE la coordinata affine di P nel sistema di riferimento P_1, P_2.

Dato:

$$(P - P_1) = (x - x_1)\,OU \qquad (P_2 - P_1) = (x_2 - x_1)\,OU,$$

da cui:

$$\alpha(P_1, P_2, P) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Consideriamo ora $\mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Siano P_1, P_2, P_3 tre punti a due a due distinti. Essi definiscono un riferimento proiettivo: diciamo che P_1 e P_2 sono i punti fondamentali, e P_3 il punto unità. Sia $P \in \mathbb{P}^1(\mathbb{K})$. Siano:

$$[y_0, y_1]$$

le coordinate omogenee di P nel riferimento proiettivo in cui P_1 e P_2 sono i punti fondamentali e P_3 è il punto unità. Si definisce BIRAPPORTO $\beta(P_1, P_2, P_3, P)$ il numero:

$$\frac{y_0}{y_1} \in \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

Si ha, in particolare:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P) = \infty \iff P = P_2$$

Consideriamo ora:

$$P\Gamma(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S_2$$

(vogliamo di conoscere questo omeomorfismo).

Vogliamo determinare:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

Supponiamo che sia $P \neq P_1$, $P \neq P_2$: possiamo pensare λ come la coordinata affine di P nel riferimento proiettivo P_1, P_3, e μ come la coordinata affine di P nel riferimento proiettivo P_2, P_3. Si ottiene e dunque un rapporto di rapporti semplice:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P) = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{\alpha(P_1, P_3, P)}{\alpha(P_2, P_3, P)}$$

In particolare, si ha:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P) = \left(\frac{z - z_1}{z_3 - z_1}\right) \Big/ \left(\frac{z - z_2}{z_3 - z_2}\right) = \frac{(z - z_1)(z_3 - z_2)}{(z_3 - z_1)(z - z_2)},$$

e ancora una volta:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P) = \infty \iff P = P_2$$

Consideriamo ora:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$$

Si ha, allora:

$$\begin{cases} x_1' = a x_1 + b x_2 \\ x_2' = c x_1 + d x_2 \end{cases},$$

da cui:

$$z' = \frac{x_1'}{x_2'} = \frac{a x_1 + b x_2}{c x_1 + d x_2} = \frac{a \frac{x_1}{x_2} + b}{c \frac{x_1}{x_2} + d} = \frac{az + b}{cz + d}$$

Il gruppo $\left\{\left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right) \mid ad - bc \neq 0\right\}$ è detto GRUPPO DELLE OMOGRAFIE. Esso si trasforma sempre bene proiettivo.

PROPOSIZIONE

Il rapporto è invariante per proiettività.

Dim.

Sia $\varphi: \mathbb{P}(V) \to \mathbb{P}(V')$, ove $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$ sono due rette proiettive.

Siano (P_1, P_2, P_3) e (Q_1, Q_2, Q_3) due riferimenti proiettivi di $\mathbb{P}(V)$ e $\mathbb{P}(V')$, tali che $\phi(P_i) = Q_i$. Sia P_4 appartenente a $\mathbb{P}(V)$, tale che:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\gamma_1}{\gamma_0}$$

Allora, detta φ l'applicazione lineare invertibile indotta da ϕ, si ha, se $P_1 = [v_1]$, $P_2 = [v_2]$, $P_3 = [v_3]$, $Q_1 = [w_1]$, $Q_2 = [w_2]$, $Q_3 = [w_3]$:

$$P_4 = [\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2] \Rightarrow \phi(P_4) = [\varphi(\gamma_0 v_1 + \gamma_1 v_2)] = [\gamma_0 w_1 + \gamma_1 w_2],$$

da cui:

$$\beta(P_1, P_2, P_3, P_4) = \frac{\gamma_0}{\gamma_1} \Rightarrow \beta(Q_1, Q_2, Q_3, \phi(P_4)) = \frac{\gamma_0}{\gamma_1}, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Il birapporto $\beta(P_1, P_2, P_3, P)$ è reale se e solo se i quattro punti appartengono ad una retta o circonferenza.

Dimostrazione

Sufficienza che (z_1, z_2, z_3, z_4) appartengano ad una retta o circonferenza. Per transitività del gruppo delle omografie, esiste $\Phi \in \mathbb{H}$ (dove $\mathbb{H}$ è il gruppo delle omografie) tale che $\Phi(z) = x$, dove x è la retta (circonferenza) comune a x e l'asse reale; vediamo che il birapporto è invariato per trasformazioni. Si ha dunque:

$$\beta(z_1, z_2, z_3, z_4) = \beta(\Phi(z_1), \Phi(z_2), \Phi(z_3), \Phi(z_4)) = \frac{(\Phi(z_4) - \Phi(z_1))(\Phi(z_3) - \Phi(z_2))}{(\Phi(z_3) - \Phi(z_2))(\Phi(z_4) - \Phi(z_2))} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Viceversa, sia $\beta(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Sia c la circonferenza (retta) formata per z_1, z_2, z_3: applicando che ne esiste una sola, e che si tratta della retta se e solo se i tre punti sono allineati. Esiste $\Phi \in \mathbb{H}$ tale che $\Phi(c) = x$, dunque

$$\beta(z_1, z_2, z_3, z_4) = \beta(\Phi(z_1), \Phi(z_2), \Phi(z_3), \Phi(z_4)) =$$

$$= \frac{(\Phi(z_4) - \Phi(z_1))(\Phi(z_3) - \Phi(z_2))}{(\Phi(z_2) - \Phi(z_2))(\Phi(z_3) - \Phi(z_1))} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{(\Phi(z_4) - \Phi(z_1))}{(\Phi(z_4) - \Phi(z_2))} \in \mathbb{R},$$

da cui segue che i vettori $\phi(z_n) - \phi(z_2)$ e $\phi(z_n) - \phi(z_1)$ sono paralleli, e quindi $g(z_n)$ appartiene a x. Allora:

$$z_n = \phi^{-1}(\phi(z_n)) \in c, \text{ c.v.d.}$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo che $Iso(\mathbb{R}^2)^+ \cong \left\{ \left(\frac{az+b}{cz+d} \right) \mid ad - bc = 0 \right\}$.

Infatti:

$$x \longmapsto x + b \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x \longmapsto e^{i\theta} x \Rightarrow \begin{bmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

OSSERVAZIONE

Rette proiettive e circonferenze sono equivalenti nel piano proiettivo. Estendo questo omeomorfismo a S_2, in particolare le rette sono quelle circonferenze che intersecano il punto all'infinito; le altre sono circonferenze reali e proprie.

ESERCIZI VARI

1. Dimostrare che:

$$f : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \to S_2^2$$
$$[z_0, z_1] \to \left(\frac{|z_0|^2 - |z_1|^2}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\bar{z}_0 z_1 - \bar{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2}, \frac{\bar{z}_0 z_1 + \bar{z}_1 z_0}{|z_0|^2 + |z_1|^2} \right)$$

è un omeomorfismo.

Innanzitutto la funzione associata $\tilde{f} : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to S_2$ è continua, da cui f è continua (perché $\pi : \mathbb{C}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ è un identificazione).

Inoltre è un'applicazione da uno spazio compatto e uno di Hausdorff, dunque è chiusa.

Resta da dimostrare la iniettività: per questo obiettivo, ci limitiamo a dire che quest'applicazione è la proiezione stereografica da $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$ a S_2, e sappiamo già che quest'applicazione è bigettiva.

2. Dimostrare che $S_3 \subseteq \mathbb{R}^4$ è unione di due tori pieni:

$$S_3 = T_1 \cup T_2,$$
$$T_1 = S_1 \times D^2,$$
$$T_2 = D^2 \times S_1$$

Sia:

$$S_3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2,$$

ove $\mathbb{C}^2 \cong \mathbb{R}^4$.

Poniamo:

$$S_3 = U_1 \cup U_2 \cup U_3,$$

ove:

- $U_1 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 = |z_2|^2 = \frac{1}{2}\}$;
- $U_2 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 < \frac{1}{2}, |z_2|^2 > \frac{1}{2}\}$;
- $U_3 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 > \frac{1}{2}, |z_2|^2 < \frac{1}{2}\}$.

In particolare:

$$U_1 = S_1 \times S_1,$$

è un toro.

Definiamo ora $T_1 = U_1 \cup U_2$, $T_2 = U_1 \cup U_3$. Allora:

$$S_3 = T_1 \cap T_2.$$

Dobbiamo ora dimostrare che:

$$T_1 = S_1 \times D^2,$$

$$T_2 = D^2 \times S_1.$$

La dimostrazione è omeomorfa, ad esempio, prendendo in esame:

$$T_1 = S_1 \times D^2,$$

si ha che il seguente è un omeomorfismo:

$$\varphi : T_1 \longrightarrow S_1 \times D^2$$

$$(z_1, z_2) \longmapsto \left(\frac{z_1}{\|z_1\|}, z_2 \right),$$

perché dalla norma di z_2 è ben visibile anche la norma di z_1.

Dunque S_3 è l'unione di due Tori pieni, che forma per intersezione un Toro, detto TORO DI CLIFFORD.

3. Dimostriamo che, dato $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \to I$ continua:

$$\exists\, x \in I \text{ s.t. } f(x) = x$$

Siamo infatti di generalità, sia $I = [0,1]$. Consideriamo $g(x) = f(x) - x$. Si ha:

$$g(0) \in [0,1] \Rightarrow g(0) - 0 \geq 0$$

$$g(1) \in [0,1] \Rightarrow g(1) - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \exists\, \xi \in [0,1] \text{ s.t. } f(\xi) = \xi$$

perché è l'immagine di un continuo (I) è continua.

QUOZIENTI OMEOMORFI A $\mathbb{R}^n$

Consideriamo un disco aperto in $\mathbb{R}^n$:

$$D^n = \left\{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 < 1 \right\}$$

Consideriamo il quoziente $\mathbb{R}^n / D^n$. Esso non è tale, dunque non è immergibile in $\mathbb{R}^m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$.

Consideriamo ora un disco chiuso in $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{D}^n = \left\{ \underline{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

Consideriamo $\mathbb{R}^n / \overline{D}^n$. Vogliamo dimostrare che:

$$\mathbb{R}^n / \overline{D}^n \cong \mathbb{R}^n$$

A tal proposito, definiamo la funzione:

$$\Phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\Phi(x) = \max\left(0, (\|x\| - 1)\, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

Vogliamo dimostrare che essa è un omeomorfismo. Innanzitutto, se di fuori di $\overline{D}^n$:

$$(\|x\| - 1)\frac{x}{\|x\|} = (\|y\| - 1)\frac{y}{\|y\|} \Rightarrow \|y\| = \|x\|, \ \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|} \Rightarrow x = y$$

Abbiamo anche dimostrato che Φ è ben definita dal quoziente in $\mathbb{R}^n$. Dimostriamo la suriettività se di fuori di $\overline{D}^n$:

$$\forall\, z = \rho e^{i\theta} \in \mathbb{R}^n - \{0\} \ \exists\ \omega = (\rho + 1) e^{i\theta} \in \mathbb{R}^n - \overline{D}^n \ \text{ t.c. } \Phi(\omega) = z$$

La funzione inoltre è continua, poiché espressa mediante funzioni razionali e denominatori mai nulli, e tende a 0 per l'avvicinarsi di x al bordo di $\overline{D}^{n-1}$.

Infine, l'inversa di Φ è:

$$\Psi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n / \overline{D}^n$$

$$x \longmapsto (\|x\| + 1)\frac{x}{\|x\|},$$

ove 0 viene mappato nel punto del quoziente che rappresenta $\overline{D}^n$: essa è continua, dunque Φ è un omeomorfismo.

DECOMPOSIZIONE DI HEEGAARD DELLA SFERA S^3

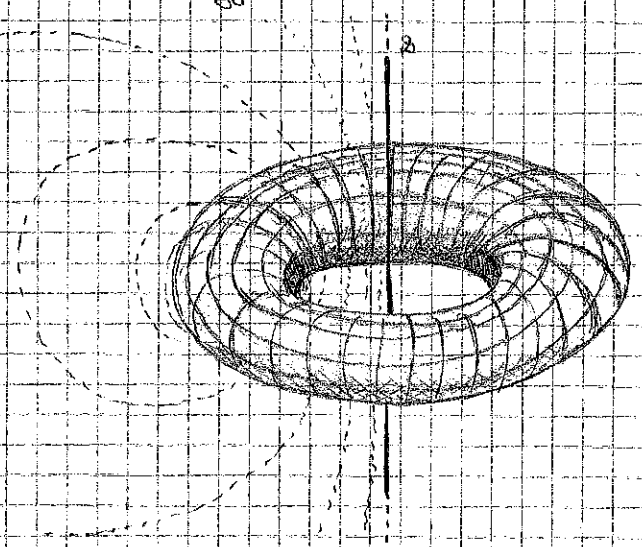
Consideriamo i due tori pieni:

$$T_1 = S_1 \times D^2$$
$$T_2 = D^2 \times S_1$$

La loro intersezione è $C = S_1 \times S_1$. Vogliamo studiare una legge di incollamento dei due Tori, e vedere a cosa è omeomorfo:

$$S_1 \times S_1 \xrightarrow{\varphi} S_1 \times D^2$$
$$\xrightarrow{\psi} D^2 \times S_1$$

Intuitivamente, pensiamo che l'unione di due Tori pieni, mediante l'incollamento precedente, è S_3, ovvero la compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{R}^3$:



La retta z, nel compattificato è S_1, da cui il complementare di un Toro pieno in $\mathbb{R}^3$ compattificato è un Toro pieno.

In effetti:

$$S_3 = \partial D^4 = \partial(D^2 \times D^2) = (S_1 \times D^2) \cup_{S_1 \times S_1} (D^2 \times S_1)$$

Dimostriamo quindi che $S^3 = T_1 \cup T_2$. Innanzitutto:

$$S_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

Consideriamo il seguente ricoprimento di S_3:

$$U_1 = \{(z_1, z_2) \mid |z_1|^2 = \tfrac{1}{2}, |z_2|^2 = \tfrac{1}{2}\}$$

$$U_2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 \leq \frac{1}{2},\ |z_2|^2 \geq \frac{1}{2}\}$$

$$U_3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid |z_1|^2 \geq \frac{1}{2},\ |z_2|^2 \leq \frac{1}{2}\}$$

Vogliamo ora dimostrare che $T_1 = U_1 \cup U_2$ e $T_2 = U_1 \cup U_3$ sono dei tori pieni: fatto ciò, $T_1 \cap T_2 = S_1 \times S_1$, come desiderato.

La parametrizzazione della sfera è la seguente:

$$(x e^{i\theta}, \sqrt{1 - x^2}\, e^{i\varphi})$$

Facendo variare $x \in \Theta$, una volta fissato φ, si ottiene un disco D_2; facendo variare φ, fissati $x \in \Theta$, si ottiene una circonferenza S_x.

In effetti, considerando T_1, si ha che:

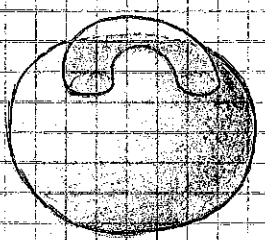
$$\Phi : (z_1, z_2) \longrightarrow \left(z_2, \frac{z_1}{\|z_1\|}\right)$$

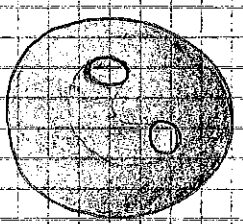
è un omeomorfismo.

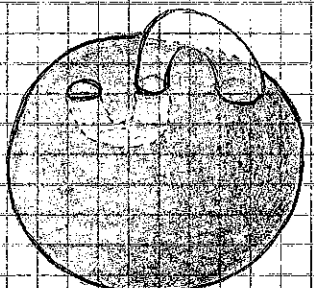
Tutto ciò ha a che fare con il TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE, che ora enunciamo solamente.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO) (DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE)
Ogni superficie compatta è omeomorfa ad una sfera, ad una somma connessa di Tori, o ad una somma connessa di piani

Consideriamo ad esempio una sfera munita di due fori e un cilindro con le estremità incollate ai due fori. L'incollamento del cilindro può essere fatto in diverse maniere. Il cilindro può rimanere esterno alla sfera, o essere interno, oppure le maniere delle due. Nei primi due casi la nuova figura è omeomorfa ad un _____, mentre nell'ultimo ad una bottiglia di Klein.







Considerando gli insiemi seguenti in $\mathbb{R}^3$, $n \in \mathbb{N}$:

$$S_3^n = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 = 1\}$$

$$B_3^n = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i^2 \leq 1\}$$

Vogliamo dimostrare che:

$$B_3^n \cong S_3^n + \{P\}$$

Per far ciò, costruiamo l'omeomorfismo $\Pi_S : \mathbb{R}^3 \to S_3^n + \{P\}$ data dalla proiezione stereografica con il seguente omeomorfismo:

$$\varphi : B_3^n \to \mathbb{R}^3$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 - \|x\|}$$

Le funzioni φ e φ^{-1} sono definite e continue e inoltre $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ e $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathrm{id}_{B_3^n}$, quindi:

$$\varphi^{-1} : \mathbb{R}^3 \to B_3^n$$

$$x \mapsto \frac{x}{1 + \|x\|}$$

Dove φ è un omeomorfismo.

La mappa data dalla proiezione stereografica è definita come:

$$\Pi_S : B_3^n \to S_3^n + \{P\}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \dots & \text{se } x \neq P \\ P & \text{se } x = P \end{cases}$$

Per ogni $x \in B_3^n$ considerato, la retta passante per P e x interseca S_3^n in un punto $\Pi_S(x)$.

$$B_3^n \quad (\mathbb{R}) \quad \mathbb{R}^3 \quad S_3^n$$

COMPATTIFICAZIONE DI ALEXANDROFF DI $\mathbb{Q}$

Vogliamo ora studiare la compattificazione di Alexandroff del campo $\mathbb{Q}$ dei razionali. Sappiamo che questo spazio topologico, munito della topologia indotta da $\mathbb{R}$, è T_2 e totalmente sconnesso. Sappiamo che $\hat{\mathbb{Q}}$ è connesso, ma non T_2.

LEMMA

$\mathbb{Q}$ non è localmente compatto.

Dim.

Ogni intervallo di $\mathbb{Q}$ è del tipo $I \cap \mathbb{Q}$, con I intervallo di $\mathbb{R}$. Se $I \cap \mathbb{Q}$ fosse compatto, esso sarebbe chiuso in $\mathbb{R}$, ma ciò è falso: esiste infatti $\xi \in I \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ d'accumulazione per $I \cap \mathbb{Q}$, c.v.d.

COROLLARIO

$\hat{\mathbb{Q}}$ non è uno spazio di Hausdorff.

Dim.

Supponiamo che una condizione necessaria perché la compattificazione di Alexandroff sia O, è che lo spazio di partenza sia localmente compatto, c.v.d.

PROPOSIZIONE

$\hat{\mathbb{Q}}$ è connesso.

Dim.

Sia A un aperto e chiuso in $\hat{\mathbb{Q}}$, allora A è della forma:

$$C_{\hat{\mathbb{Q}}}(P) \cup \{\infty\}$$

con P chiuso e compatto in $\mathbb{Q}$. Dato che A è aperto e chiuso in $\hat{\mathbb{Q}}$, $C_{\hat{\mathbb{Q}}}(A) = P$ è aperto e chiuso in $\mathbb{Q}$, da cui P è aperto e compatto in $\mathbb{Q}$. Allora necessariamente $P = \emptyset$.

$\hat{\mathbb{Q}}$ è allora, è connesso, c.v.d.

FUNZIONI SIMMETRICHE ELEMENTARI

Per ogni intero positivo n le FUNZIONI SIMMETRICHE ELEMENTARI $\sigma_1, \dots, \sigma_n : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ sono le funzioni definite dalle relazioni:

$$t^n + \sigma_1(z_1, \dots, z_n)\, t^{n-1} + \dots + \sigma_n(z_1, \dots, z_n) = \prod_{i=1}^{n} (t + z_i)$$

Ad esempio, se $n = 3$, le funzioni simmetriche sono:

$$\sigma_1 = x_1 + x_2 + x_3$$

$$\sigma_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

$$\sigma_3 = x_1 x_2 x_3$$

I valori delle funzioni simmetriche, calcolate su una n-upla di numeri complessi $(a_1, \dots, a_n)$, sono i coefficienti del polinomio monico di grado n che ha come radici $(-a_1, \dots, -a_n)$. Il polinomio si scriverà dunque:

$$p(x) = (x + a_1)(x + a_2) \dots (x + a_{n-1})(x + a_n)$$

Le funzioni simmetriche elementari generano il sottoanello di $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ dato dai polinomi simmetrici:

Definiamo, in particolare:

$$N_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$N_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

$$\dots$$

$$N_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

Si ha, ad esempio:

$$(x + y)^2 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow N_2 = \sigma_1^2 - 2\sigma_2$$

PROPOSIZIONE

Sia $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ tale che $\sigma(z_1, \dots, z_n) = (-\sigma_1(z_1 \dots z_n), \dots, (-1)^n \sigma_n(z_1 \dots z_n))$, dove $\sigma_i(z_1 \dots z_n)$ sono i coefficienti del polinomio monico $\prod_{i=1}^{n} (x - z_i)$. Allora σ è un'identificazione chiusa.

Dim.

L'applicazione è suriettiva per il Teorema fondamentale dell'algebra. Presi $(a_1, \dots a_n) \in \mathbb{C}^n$, il polinomio:

$$t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_{n-1} t + a_n$$

ha n radici in $\mathbb{C}$, dunque esiste $\sigma \in \mathbb{C}^n$ tale che:

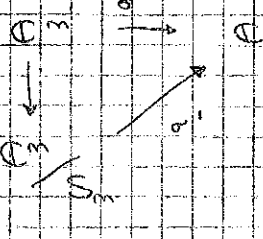
$$\sigma(z_1 \dots z_n) = (a_1, \dots a_n)$$

è dunque continua e suriettiva, vogliamo dimostrare che è chiusa.

Se $z \in \sigma^{-1}(a)$, gli altri punti di $\sigma^{-1}(a)$ sono le permutazioni delle coordinate di z. Se $\tau \in S_n$, l'applicazione

$$\tau(z_1, \dots z_n) = (z_{\tau(1)}, \dots, z_{\tau(n)})$$

Dato che S_n è un gruppo finito di omeomorfismi di $\mathbb{C}^n$, possiamo considerare lo spazio quoziente:



Ogni polinomio di grado n determina univocamente le radici e meno dell'ordine: σ è dunque biiettiva.

Dato che S_n è un gruppo finito, π è un'identificazione aperta e chiusa.

Sia C un chiuso in $\mathbb{C}^n$, sia:

$$\hat{C} = \bigcup_{\tau \in S_n} \tau(C)$$

il saturato di C:

$$\pi(C) = \pi(\hat{C})$$

Allora $\mathbb{C}^n - \hat{C}$ è un aperto saturo, e $\pi(\mathbb{C}^n - \hat{C})$ è aperto, ed è il complementare di $\pi(C)$, che quindi è chiuso. Ci resta dunque da mostrare che σ è un'identificazione chiusa, per dimostrare che σ è un omeomorfismo.

Consideriamo di nuovo $\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$:

$$\sigma : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$$
$$(z_1, \dots, z_n) \to (a_1, \dots, a_n)$$

Esso induce un'applicazione:

$$\sigma_* : [\mathbb{C}_1[x]]^n \to \mathbb{C}_n[x]$$
$$((x-z_1), \dots, (x-z_n)) \to x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

Identifichiamo ora con V_n lo spazio $\mathbb{C}_n[x]$, e con $\mathbb{P}(V_n)$ il suo proiettivizzato. Dato:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n \in \mathbb{C}_n[x],$$

omogeneizzando si ottiene:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} x_0 + \dots + a_n x_0^n$$

Dunque:

$$\mathbb{P}(V_n) = \{[a_0, \dots, a_n] \mid (a_0, \dots a_n) \in \mathbb{C}^{n+1}\}$$

In modo analogo:

$$\mathbb{P}(V_1)^n = \{([a_0^1, a_1^1], [a_0^2, a_1^2], \dots [a_0^n, a_1^n])\}$$

L'applicazione che manda gli n polinomi nei polinomio omogeneo dato dal prodotto è un'applicazione olomorfa, infatti $\mathbb{P}(V_1)^n$ è compatto e $\mathbb{P}(V_n)$ è T2:

$$p : \mathbb{P}(V_1)^n \to \mathbb{P}(V_n)$$

Consideriamo le applicazioni:

$$g : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}(V_n) \qquad g(a_1, \dots a_n) = [t_1^n + a_1 t_0 t_1^{n-1} + \dots + a_n t_0^n]$$
$$f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{P}^n(U) \qquad f(z_1, \dots, z_n) = ([t_1 + z_1 t_0], \dots [t_1 + z_n t_0])$$

g induce un omeomorfismo tra $\mathbb{C}^n$ e U:

$$U = \{[h(t_0, t_1)] \in \mathbb{P}(V_n) \mid h(0,1) \neq 0\},$$

e f è un omeomorfismo. Basta allora considerare il seguente diagramma commutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C}^n & \xrightarrow{\sigma} & \mathbb{C}^n \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ \mathbb{P}(V_1)^n & \xrightarrow[p]{} & \mathbb{P}(V_n), \end{array}$$

e concludere che δ si chiama dicendo che p è chiusa, e f e g sono omeomorfismi con le loro immagini, c.v.d.

SPAZI DI FUNZIONI

Siano X uno spazio completo e Y uno spazio metrico. Definiamo $\mathcal{C}$ l'insieme di tutte le applicazioni continue da X a Y con $C(X,Y)$.

È possibile, sotto certe ipotesi, dare a $C(X,Y)$ una struttura di spazio metrico. Potremmo, ad esempio, definire:

$$\rho(f,g) \overset{\text{def}}{:=} \sup_{x \in X} d(f(x), g(x))$$

Se però X non è completo (e ad esempio $Y = \mathbb{R}$), $\rho(f,g)$ potrebbe essere non finito. Per ogni $K \subseteq X$ compatto, però, è finito definendo:

$$\rho_K(f,g) := \sup_K d(f(x), g(x))$$

Si può allora considerare la nuova metrica.
Questa è una SEMINORMA poiché ci sono funzioni distinte ma coincidenti su K, dunque distinte ma tali che $\rho_K(f,g) = 0$.
Se però ad esempio avessi un aperto Ω in compatti, ad es. $\{K_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ allora potremmo definire la seguente norma:

$$d(f,g) \overset{\text{def}}{:=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \|f-g\|_{K_n} < +\infty$$

Non analizzeremo ora la questione: torniamo al caso in cui X è compatto.

Dimostriamo la disuguaglianza triangolare per ρ:

$$\rho(f,h) = \sup_{x \in X} d(f(x), h(x)) = \sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) + \sup_{x \in X} d(g(x), h(x)) = \rho(f,g) + \rho(g,h)$$

L'applicazione di valutazione $e: C(X,Y) \times X \to Y$, $e(f,x) = y = f(x)$ è continua. Scelti infatti $f \in C(X,Y)$, $x \in X$, $\varepsilon > 0$, U intorno di x tale che $d(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ per ogni $y \in U$. Se $\rho(f,g) < \frac{\varepsilon}{2}$, allora:

$$d(f(x), g(y)) \leq d(f(x), f(y)) + \rho(f,g) \leq \varepsilon$$

Teorema

Se Y è completo, allora $C(X,Y)$ è completo.

Dim.

Sia $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una successione di Cauchy in $C(X,Y)$. Allora, per ogni $x \in X$, $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy in Y. Dato che Y è completo, si ha convergenza:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$$

Dobbiamo dimostrare che:

- f è continua;
- $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$.

Poiché $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è di Cauchy, dato $\varepsilon > 0$ esiste N_ε tale che:

$$\rho(f_n, f_m) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$$

Ora, fissato per ogni $n \in \mathbb{N}$ tale che $n \geq N_\varepsilon$:

$\exists\, U$ intorno di x_0 t.c. $d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(x_0)) < \frac{\varepsilon}{3} \quad \forall x \in U$

Dato che $d(f(x), f(x_0)) = \lim_{n\to+\infty} d(f_n(x), f_n(x_0))$, per ogni $x \in U$, con U intorno opportuno di $x_0 \in X$:

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_{N_\varepsilon}(x)) + d(f_{N_\varepsilon}(x), f_{N_\varepsilon}(x_0)) + d(f_{N_\varepsilon}(x_0), f(x_0)) \leq$$

$$\leq \lim_{m\to+\infty} d(f_m(x), f_{N_\varepsilon}(x)) + \frac{\varepsilon}{3} + \lim_{m\to+\infty} d(f_{N_\varepsilon}(x_0), f_m(x_0)) \leq$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

da cui

$$d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

e f è continua.

Ora, dato $\varepsilon > 0$ come sopra:

$$\rho(f_n, f) < \varepsilon \quad \forall\, n, m \geq N_\varepsilon$$

Per ogni $x \in X$:

$$d(f_n(x), f(x)) = d(f_n(x), \lim_{m\to+\infty} f_m(x)) = \lim_{m\to+\infty} d(f_n(x), f_m(x)) \leq \varepsilon$$

da cui $\rho(f_n, f) \leq \varepsilon$, cioè $\lim_{n\to+\infty} f_n = f$.

COROLLARIO

Sia (Y, d) uno spazio metrico completo. Allora, per ogni $m \in \mathbb{N}^+$, (Y^m, ρ), dove:

$$\rho((x_1, \dots, x_m), (y_1, \dots, y_m)) = \max_{1 \le i \le m} d(x_i, y_i)$$

è completo.

Dim.

Basta osservare che lo spazio metrico (Y^m, ρ) è omeomorfo allo spazio metrico $C(\{1, \dots, m\}, Y)$, e.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Si considerino i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$:

$$I_{a,b} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > a,\ y > b\}$$

- Mostrare che $\mathcal{B} = \{I_{a,b} \mid a,b \in \mathbb{R}\}$ è base di una topologia. Sia τ la topologia generata da questa base: sia $(\mathbb{R}^2, \tau)$ lo spazio topologico così costruito. È compatto? È connesso? È di Hausdorff?
- Mostrare che le traslazioni in $\mathbb{R}^2$ sono omeomorfismi di $(\mathbb{R}^2, \tau)$.
- Determinare la chiusura $\overline{\{(x,y)\}}$ di un singoletto $\{(x,y)\}$ in $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Soluzione:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} I_{n,n}$$

Inoltre:

$$\forall\, I_{a,b}, I_{c,d} \in \mathcal{B}: \quad I_{a,b} \cap I_{c,d} = I_{\max(a,c),\max(b,d)} \in \mathcal{B},$$

da cui $\mathcal{B}$ è base di una topologia τ di $\mathbb{R}^2$.

Notiamo che:

$$\forall\, I_{a,b} \in \mathcal{B}: \quad I_{a,b} = \left]a, +\infty\right[\times \left]b, +\infty\right[\in \tau_e,$$

da cui τ è meno fine della topologia euclidea. È facile vedere il fatto che la topologia euclidea rispetta i moduli topologici.

La topologia τ non è completa. Sia infatti $\mathcal{S}$ il seguente ricoprimento di $\mathbb{R}^2$:

$$\mathcal{S} = \{I_{n,n}\}_{n \in \mathbb{N}}$$

Esso non ammette sottoricoprimento per inclusione:

$$n < m \Rightarrow I_{n,n} \not\supseteq I_{m,m}$$

Se esiste un sottoricoprimento finito:

$$\exists\, k_* \in \mathbb{N} \text{ s.t. } \mathbb{R}^2 = I_{k_*,k_*},$$

ma ciò è palesemente falso, visto che ad esempio $(k_*, k_*) \notin I_{k_*,k_*}$.

Lo spazio è connesso. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme proprio $U \subsetneq \mathbb{R}^2$ aperto e chiuso. Allora, poiché aperto e chiuso anche in $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, ma ciò è assurdo.

Infine, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ non è neanche T_1. Siano infatti $P = (x_1, y_1)$ e $Q = (x_2, y_2)$. Confrontiamo x_1 e x_2, e y_1 e y_2, ovvero una relazione di disuguaglianza stretta in uno dei due casi. Supponiamo però che sia $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$.

Allora:

$\forall\, V$ aperto in $(\mathbb{R}^2, \tau)$, $P \in V : V = \bigcup_{i \in \Lambda} I_{a_i, b_i}$, $a_i < x_1, b_i < y_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow Q \in V$,

da cui non esiste un intorno di P che non contenga Q.

In generale, comunque, per ogni coppia di punti non esistono intorni disgiunti.

Consideriamo in particolare $\overline{(x,y)} \in \mathbb{R}^2$, e calcoliamo $\overline{\{(x,y)\}}$.

I complementari degli aperti $I_{a,b}$ sono:

$$J_{a,b} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq a \ \vee \ y \leq b \}$$

Dato $\{(x,y)\} \subseteq \mathbb{R}^2$, dunque, ogni insieme del tipo $J_{a,b}$ che contiene (x,y), cioè contiene l'insieme:

$$K_{x,y} = \{ (t,w) \in \mathbb{R}^2 \mid t \leq x \wedge w \leq y \},$$

da cui, considerando che se $t < x$ e $w > y$, per quanto detto prima, esiste un aperto della base che contiene (t,w) ma non (x,y), deduciamo che:

$$\overline{\{(x,y)\}} = K_{x,y}$$

Infine, sia $\underline{v} = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^2$, e consideriamo la traslazione secondo $\underline{v}$:

$$\tau_{\underline{v}} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longmapsto (x + v_1, \dots, y + v_n)$$

Immediatamente, è invertibile di $\tau_{\underline{v}}$ è $\tau_{-\underline{v}}$, dunque possiamo restringerci a $\tau_{\underline{v}}$ e dimostrarne la continuità. È sufficiente ragionare con gli aperti di $\mathcal{B}$:

$\forall\, I_{a,b} \in \mathcal{B} \ \exists\, I_{a-v_1, b-v_n}$ t.c. $\tau_{\underline{v}}(I_{a-v_1, b-v_n}) = I_{a,b}$,

e dunque $\tau_{\underline{v}}$ è un omeomorfismo.

2. Definiamo un "chiuso affine" in $\mathbb{R}^n$ un insieme C che sia unione finita di sottospazi affini di dimensione k arbitraria, con $0 \le k \le n$. È unione vuota e ammessa. Consideriamo il caso $n = 2$, e definiamo:

$$\tau = \{ C^c \mid C \text{ chiuso affine in } \mathbb{R}^2 \}$$

Mostra che τ definisce una topologia su $\mathbb{R}^2$. Che relazione c'è fra τ e la topologia euclidea τ_ε?
Lo spazio $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è compatto? È connesso? È di Hausdorff?

Dato che $\emptyset$ è unione vuota di chiusi affini, $\mathbb{R}^2 \in \tau$. Ora $\emptyset = \mathbb{R}^{2c} \Rightarrow \emptyset \in \tau$. Per dimostrare le restanti proprietà, ragioniamo con i chiusi affini:

- $C_1 \cup C_2$ è una unione di due unioni finite di sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$, dunque un'unione finita di sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$;
- $\bigcap_{i \in I} C_i$ è un'unione finita (ovviamente) di sottospazi affini di $\mathbb{R}^2$.

Allora, se $(C_i)_{i \in I}$ è una famiglia di aperti di τ, allora $\bigcup_{i \in I} C_i$ è un aperto di τ, e $\bigcap_{i \in I} C_i$ è un aperto di τ (I indica una famiglia finita). τ è dunque una topologia su $\mathbb{R}^2$.

Certamente τ non è più fine di τ_ε, in quanto ad esempio l'insieme $\mathbb{R}^2 - \{x+y-1=0\}$ è aperto in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ ma non in $(\mathbb{R}^2, \tau)$. Viceversa, i chiusi affini sono in particolare chiusi di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$, da cui ogni aperto in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ lo è anche in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$. In conclusione, τ è meno fine di τ_ε.

Lo spazio è ovviamente connesso. τ è infatti meno fine di τ_ε, dunque "le fattorie non esistono sotto insiemi propri aperti che chiusi in $(\mathbb{R}^2, \tau)$.

Lo spazio è compatto. Sia $(A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}^2, \tau)$. Scegliamo un qualsiasi aperto della famiglia, non vuoto (senza perdita di generalità). Esso copre tutto $\mathbb{R}^2$, tranne un numero finito di punti e rette, diciamo n punti e m rette. Per ogni retta, scegliamo un punto

di $\mathbb{R}^2$. Circondiamo allora degli intorni $A_2, A_3, \dots, A_{2m}$ che mandano questi punti in m insiemi di questi $(m+1)$ intorni coprono tutto $\mathbb{R}^2$, formano al più $(m+m)$ punti. Per ipotesi, esistono nella famiglia $(m+m)$ aperti $A_{m+2}, \dots, A_{2m+1}$ che mandano questi punti. Dunque esiste un sottoricoprimento finito di $\mathbb{R}^2$.

Infine, lo spazio non è T_2. Siano infatti P e Q punti distinti; e $U \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno di P, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ intorno di Q. Siamo A_U un aperto contenuto in U contenente P; diciamo poi $Q \in A_V \subseteq V$. Vediamo $A_U \cap A_V$: esso è $\mathbb{R}^2$ meno un'unione finita di sette aperti affini di dimensione 0 o 1, dunque $A_U \cap A_V \neq \emptyset$. Concludiamo che $(\mathbb{R}^2, \tau)$ non è T_2.

3. Consideriamo la seguente famiglia di sottoinsiemi del piano $\mathbb{R}^2$ dotato della topologia euclidea:

$$\tau = \{C^c \mid C \text{ chiuso e limitato di } \mathbb{R}^2\} \cup \{\emptyset\}$$

Mostrare che τ definisce una topologia su $\mathbb{R}^2$, che relazione c'è tra τ e la topologia euclidea? Lo spazio $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è completo? È connesso? È di Hausdorff?

Dimostriamo che τ è una topologia. Dato che $\emptyset$ è limitato e chiuso nella topologia euclidea, $\mathbb{R}^2 \in \tau$ e $\emptyset \in \tau$ per ipotesi. Dato che in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ intersezioni arbitrarie di chiusi e limitati sono chiusi e limitati, e unioni finite di chiusi e limitati sono chiusi e limitati, deduciamo che unioni arbitrarie e intersezioni finite di aperti di τ sono aperti di τ. τ è dunque una topologia, ovviamente meno fine di quella euclidea. Gli aperti di τ sono infatti esattamente complementari di chiusi di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$, dunque aperti di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$. L'insieme $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ è aperto di $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$ ma non in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ perché il complementare è chiuso, ma non limitato.

Per questo motivo, essendo $\tau \subsetneq \tau_\varepsilon$, $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è sconnesso.

Lo spazio è anche completo.

Partiamo dalla seguente osservazione: un chiuso è limitato in $(\mathbb{R}^2, \tau)$ è un insieme compatto, visto che lo è in $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$. Se infatti ogni ricoprimento aperto del chiuso è limitato ammette un sottoricoprimento finito, allora ciò vale a maggior ragione per i ricoprimenti effettuati con aperti di τ.

Sia dunque $(\Phi_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $(\mathbb{R}^2, \tau)$. Allora, scelto un aperto non vuoto della famiglia, il suo complementare è un chiuso limitato di $(\mathbb{R}^2, \tau_e)$, e $(\Phi_i)_{i \in I} - \Phi_i$ è un ricoprimento aperto. Esiste dunque $(\Phi_i)_{i \in I} \cup \Phi_i$ sottoricoprimento finito di $(\mathbb{R}^2, \tau)$, che dunque è compatto.

Infine, lo spazio non è T_2. Siano $P, Q \in \mathbb{R}^2$, siano $U \in V$ aperti di $(\mathbb{R}^2, \tau)$ tali che $P \in U \subseteq \mathbb{R}^2$ e $Q \in V \subseteq \mathbb{R}^2$. Allora $U^c \cup V^c$ è un chiuso limitato di $\mathbb{R}^2$, dunque $U \cap V \neq \emptyset$ poiché $U^c \cap V^c \neq \mathbb{R}^2$.

1. Sia (X, d) uno spazio metrico. Dati $x \in X$ e $A \subseteq X$, la distanza tra x e A è definita come:

$$d(x, A) = \inf \{ d(x, y) \mid y \in A \}$$

Il ε-intorno di A è il sottoinsieme $U_\varepsilon(A)$ dato da:

$$U_\varepsilon(A) = \{ x \in X \mid d(x, A) < \varepsilon \}$$

Sia dunque:

$$\mathcal{D} = \{ U_\varepsilon(A) \mid A \subseteq X, \varepsilon > 0 \}$$

Mostrare che ogni elemento di $\mathcal{D}$ è aperto, e che $\mathcal{D}$ è una base di una topologia su X.

Sia poi $X = \mathbb{R}$ con la distanza euclidea. Costruire un aperto di $\mathbb{R}$ che non sia un elemento di $\mathcal{D}$. È insieme $\mathcal{D}$ è chiuso rispetto alle intersezioni finite?

Consideriamo $U_\varepsilon(A)$, $x \in U_\varepsilon(A)$. Allora $d(x, A) = \delta < \varepsilon$. Sia dunque $\lambda = \varepsilon - \delta$. Si ha che:

$\forall z \in B(x, \lambda) = d(z, A) \leq d(z, x) + d(x, A) < \lambda + \delta = \varepsilon$,

da cui $B(x, \lambda) \subseteq U_\varepsilon(A)$. $U_\varepsilon(A)$ è dunque aperto.

Mostriamo anzitutto che $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X. Siano infatti $U_{\varepsilon_1}(A_1)$ e $U_{\varepsilon_2}(A_2)$ due aperti di $\mathcal{B}$ a intersezione non vuota: sia $x \in U_{\varepsilon_1}(A_1) \cap U_{\varepsilon_2}(A_2)$. Allora:

$$d(x, A_1) = \delta_1 < \varepsilon_1 \qquad d(x, A_2) = \delta_2 < \varepsilon_2$$

siano $\lambda_1 = \varepsilon_1 - \delta_1$, $\lambda_2 = \varepsilon_2 - \delta_2$, sia $\lambda = \min(\lambda_1, \lambda_2)$. Allora:

$$\exists\, U_\lambda(\{x\}) \in \mathcal{B} \;\exists'\; x \in U_\lambda(\{x\}) = U_{\varepsilon_1}(A_1) \cap U_{\varepsilon_2}(A_2),$$

dunque $\mathcal{B}$ è una base per una topologia su X.

Sia ora $X = (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$: continuiamo dire ε-intorni la cui intersezione non sia in $\mathcal{B}$, in modo da ottenere effettivamente i punti: costruiamo infatti che $\mathcal{B}$ non sia chiusa rispetto all'intersezione finita.

Sia:

$$\bigcup_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{1}{2} + 2m\right)_{m \in \mathbb{N}}\right) = \left]0, 1\right[\cup \left]2, 3\right[\cup \left]4, 5\right[\cup \dots$$

$$\bigcup_{\frac{1}{2}}\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{m} + 2(m-1)\right)_{m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}}\right) = \left]0, 1\right[\cup \left]\frac{5}{2}, \frac{6}{2}\right[\cup \left]\frac{14}{3}, \frac{15}{3}\right[\cup \dots$$

Si ha che l'insieme intersezione è:

$$Y = \left]0, 1\right[\cup \left]\frac{5}{2}, 3\right[\cup \left]\frac{14}{3}, 5\right[\cup \dots$$

e l'ampiezza degli intervalli decresce costantemente come $\frac{1}{n}$. Essendo $\mathbb{R}$ archimedeo, $Y \in \mathcal{B}$, da cui $\mathcal{B}$ non è chiusa per l'intersezione finita, ma Y è ovviamente un aperto di $(\mathbb{R}, \tau_\varepsilon)$, non appartenente a $\mathcal{B}$.

5. Definiamo su $\mathbb{R}$ la seguente topologia τ:

$$\tau = \{\Lambda \subseteq \mathbb{R} \mid \forall x \in \Lambda \;\exists\; \varepsilon > 0 \;\exists'\; [x, x+\varepsilon[\subseteq \Lambda\}$$

Verifichiamo che τ sia effettivamente una topologia. La spazio $(\mathbb{R}, \tau)$ è connesso?

Sia poi τ_ε la topologia euclidea su $\mathbb{R}$. Mostriamo che una funzione:

$$f : (\mathbb{R}, \tau_\varepsilon) \longrightarrow (\mathbb{R}, \tau)$$

è continua se e solo se è costante.

Si insieme vuoto e spazio metrico e τ insieme che soddisfa le condizioni: non è vuoto; ovviamente $\mathbb{R} \in \tau$.

Siano ora $(U_i)_{i \in \Delta}$ aperti di τ. Allora $\bigcup_{i \in \Delta} U_i$ è aperto in τ.

Infatti:

$\forall x \in \bigcup_{i \in \Delta} U_i : \exists U_j \in (U_i)_{i \in \Delta} \text{ t.c. } x \in U_j \Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \text{ t.c. }]x, x+\varepsilon[\subseteq U_j \subseteq \bigcup_{i \in \Delta} U_i$

Se invece U_1 e U_2 sono aperti in τ, allora, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, o non sono aperti:

$\forall x \in U_1 \cap U_2 : \exists \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0 \text{ t.c. }]x, x+\varepsilon_1[\subseteq U_1,]x, x+\varepsilon_2[\subseteq U_2$

da cui:

$\exists \varepsilon \overset{\text{def}}{=} \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \text{ t.c. }]x, x+\varepsilon[\subseteq U_1 \cap U_2$,

da cui $U_1 \cap U_2$ è aperto in τ.

Lo spazio $(\mathbb{R}, \tau)$ è totalmente sconnesso:

$\forall x, y \in \mathbb{R}, x > y \quad \exists U_1 =]-\infty, x[, U_2 =]x, +\infty[\text{ t.c. } y \in U_1, x_2 \in U_2, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}$

Le componenti connesse di $(\mathbb{R}, \tau)$ sono dunque formate dai singoletti. Dato che $(\mathbb{R}, \tau_e)$ è connesso, se f è continua, $f(\mathbb{R})$ deve essere connesso: f, dunque, deve essere necessariamente costante. La funzione costante, tuttavia, una continua e piana, dato che in ogni topologia, l'insieme intero è sempre un aperto.

6. Dato un insieme X, indichiamo con X_{cof} lo spazio topologico (X, τ_{cof}), ove τ_{cof} è la topologia cofinita:

$$\tau_{cof} = \{A \subseteq X \mid X \setminus A \text{ finito}\} \cup \{\emptyset\}$$

Sia X un insieme di cardinalità infinita.

Sui prodotti cartesiani $X^2 = X \times X$ sono definite due topologie: $(X_{cof}) \times (X_{cof})$ e $(X \times X)_{cof}$. Coincidono?

Lo spazio topologico $(X_{cof}) \times (X_{cof})$ è completo? È di Hausdorff?

Le due topologie non sono equivalenti: nella seconda, $(X \times X)_{cof}$ è meno fine di $(X_{cof}) \times (X_{cof})$.

Sia infatti Δ aperto in $(X \times X)_{cof}$. Allora, ricordando l'analogo caso finito, avrà:

$$\Delta = (X \times X) - \{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$$

Questo insieme è aperto in $(X_{cof}) \times (X_{cof})$, essendo unione di aperti:

$$\Delta = [X \times (X - \gamma_1)] \cup [(X - \gamma_1) \times X] \cup \dots \cup [(X - \gamma_m) \times X]$$

Prima insieme $\Delta = (X - \gamma_0) \times (X - \gamma_0) \in (X_{cof}) \times (X_{cof})$, in quanto il complementare di Δ è $[\{\gamma_0\} \times X] \cup [X \times \{\gamma_0\}]$, che non è finito. Dunque Δ non è aperto in $(X \times X)_{cof}$.

Lo spazio topologico è ovviamente non T_2. Siano P e Q in $X_{cof} \times X_{cof}$: siano U e V aperti in $(X_{cof}) \times (X_{cof})$ tali che $P \in U$ e $Q \in V$. Siano $U_1 = \pi_1(U)$, $U_2 = \pi_2(U)$, $V_1 = \pi_1(V)$, $V_2 = \pi_2(V)$. Allora $V_1^c \cup V_2^c \cup U_1^c \cup U_2^c$ è un insieme finito di punti di X_{cof}. Scelti allora due punti di X non contenuti in questo insieme, diciamo a e b, il punto (a,b) appartiene a $U \cap V$, che quindi non è vuoto.

Infine, lo spazio topologico è compatto. Per fissare le idee, parleremo di rette orizzontali, rette verticali, e punti. Sia $(A_i)_{i \in I}$ un ricoprimento aperto di $(X_{cof}) \times (X_{cof})$. Senza perdere di generalità, costituito da elementi non ridotti, considerando, cioè, ciascun aperto come unione finita di rette e punti. Per ogni retta selezioniamo un punto di essa, e un intorno che lo contiene. L'unione di questi intorni copre tutto lo spazio, ad eccezione di un numero finito di punti. Occorrono quindi un numero finito di aperti per ricoprire $(X_{cof}) \times (X_{cof})$, che dunque è compatto.

Uno spazio metrico (X, d) viene detto ULTRAMETRICO o ad disuguaglianza triangolare più forte se vale la seguente proprietà:

$$d(x,z) \leq \max\{d(x,y), d(y,z)\}$$

Sia $\Lambda = \{a, b, c\}$, e si indichi con $S(\Lambda)$ l'insieme delle stringhe di lunghezza infinita costituite con elementi di Λ.

Se $\alpha, \beta \in S(\Lambda)$, si pone:

$$d(\alpha, \beta) = 2^{-n},$$

se α e β differiscono per la prima volta nella n-esima posizione.

Si può dire che $S(\Lambda)$ con questa distanza è uno spazio ultrametrico. Si può dire, in generale, in uno spazio ultrametrico se due palle si intersecano, allora una delle due è contenuta nell'altra, e che le palle chiuse di raggio positivo sono anche aperte.

Siano $a, b \in S(\Lambda)$, con $d(a,b) = 2^{-n}$; sia $c \in S(\Lambda)$.

Possiamo avere due casi:

- $d(a,c) \leq 2^{-n}$: in tal caso $d(a,c) = d(a,b)$;
- $d(a,c) > 2^{-n}$: in tal caso $d(a,c) = d(b,c)$.

Quindi $d(a,c) = \max\{d(a,b), d(b,c)\}$, e $S(\Lambda)$ è effettivamente uno spazio ultrametrico.

Siano ora $\Phi = B(x_0, \varepsilon_1)$, $\Psi = B(y_0, \varepsilon_2)$; supponiamo che sia $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, e sia $\vartheta \in \Phi \cap \Psi$: vogliamo dimostrare che $\Phi = \Psi$.

Si ha infatti:

$$\forall t \in \Phi: \quad d(t, y_0) \leq \max\{d(t, \vartheta), d(\vartheta, y_0)\} < \max(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \varepsilon_2,$$

da cui $\Phi \subseteq \Psi$.

Sia, per finire, $\Lambda = B(x_0, r_0)$. Vale:

$$\forall t \in B(x_0, r_0) \quad \exists \Lambda_t = B(t, \tfrac{r_0}{2}) \ni \Lambda_t \subseteq \Lambda,$$

da cui Λ è anche aperto.

8. Sia $X = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'insieme delle parti dell'insieme dei numeri naturali.

Per ogni coppia (A, B) di sottoinsiemi finiti e disgiunti di $\mathbb{N}$ si pone:

$$V(A,B) = \{ S \in X \mid A \subseteq S \wedge S \subseteq \mathbb{N} \setminus B \}$$

Si provi che $\{V(A,B)\}$ è un intorno di A e B e una base per una topologia di X. L'insieme X con tale topologia è connesso? È di Hausdorff?

Innanzitutto:

$$\mathcal{P}(\mathbb{N}) = V(\{0\}, \emptyset) \cup V(\emptyset, \{0\})$$

Inoltre:

$$V(A,B) \cap V(C,D) = V(A \cup B, C \cup D),$$

da cui $\{V(A,B)\}$ è un intorno di A e B, e una base per una topologia di X.

Certamente è insieme sconnesso non è connesso, in quanto, dato $\mathbb{N}$:

$$A, B \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N}) : B \ni \{0\} \quad , \quad B \not\ni \{0\},$$

e poiché "$\cup$" è esclusiva, abbiamo $V(\{0\}, \emptyset) \cap V(\emptyset, \{0\}) = \emptyset$, $V(\{0\}, \emptyset) \cup V(\emptyset, \{0\}) = \mathcal{P}(\mathbb{N})$, e i due insiemi sono aperti.

Infine, siano A, B due insiemi distinti. Senza perdere di generalità:

$\exists x \in A \setminus B \Rightarrow V(\{x\}, \emptyset)$, $V(\emptyset, \{x\})$ sono intorni di A e B rispettivamente, e $V(\{x\}, \emptyset) \cap V(\emptyset, \{x\}) = \emptyset$, da cui lo spazio è T2.

9. Sia X uno spazio topologico. Sia $Y = \{a, b\}$ uno spazio dotato della topologia discreta. Mostrare che X è connesso se e solo se le uniche applicazioni continue da X in Y sono le costanti.

Le costanti sono sempre funzioni continue, in quanto per ogni spazio topologico, lo spazio stesso e l'insieme vuoto sono aperti della topologia.

Supponiamo che X sia connesso: allora, essendo Y totalmente sconnesso (tutti i suoi sottoinsiemi sono aperti della topologia discreta), ogni funzione continua deve mandare X in un connesso, dunque in costante. Esistono dunque due funzioni continue, e solo due, da X a Y.

Viceversa, supponiamo che X sia sconnesso. Siano C e D due aperti disgiunti tali che $C \cup D = X$. Definiamo:

$$f : X \to Y$$

$$f|_C \equiv a$$

$$f|_D \equiv b$$

Dato che:

$\exists\, C \in X \;|\; f(C) = \{a\}$,

$\exists\, D = X \;|\; f(D) = \{b\}$,

$\exists\, X = X \;|\; f(X) = \{a, b\}$,

per definizione f è continua, essendo quelle tre gli unici aperti non nulli di Y. f è dunque una "terza" funzione continua da X a Y: ciò conclude l'esercizio.

10. Siano P e Q due punti sulla sfera S^2: diremo segmento di estremi P e Q un qualsiasi arco di cerchio massimo avente P e Q estremi inclusi. Indicheremo con Σ l'insieme di tutti i segmenti sulla sfera e, se Ω è un aperto della sfera, con $\Sigma(\Omega)$ l'insieme di tutti i segmenti contenuti in Ω.

Dire se la famiglia degli insiemi $\Sigma(\Omega)$ al variare di Ω nella famiglia degli aperti della sfera definisce una topologia su Σ, e per lo meno una base di una topologia su Σ. In caso affermativo, dire se la topologia generata dalla famiglia dei $\Sigma(\Omega)$ è T_0, T_1, T_2.

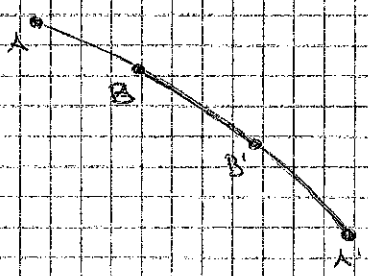
Se $\Omega = \Sigma(S^2)$, $\mathcal{D} = \Sigma(\mathcal{A})$, e anche che $\Sigma(\Omega_1) \cap \Sigma(\Omega_2) = \Sigma(\Omega_1 \cap \Omega_2)$, dunque la famiglia dei $\Sigma(\mathcal{O})$ al variare di $\mathcal{O}$ aperto in S_2 è tale da essere la base di una topologia su Ω. Questa famiglia di aperti non ci farà una topologia alla Σ.

Consideriamo infatti T_1 e T_2 delle semisfere chiuse di S_2, tali che $T_1 \cup T_2 = S_2$ (ad es.):

$$\Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2) = \Sigma(T_1 \cup T_2) = \Sigma(S_2)$$

ma il contenimento è stretto in quanto, presi $S \in T_1 \cap T_2$ e $t \in T_2 \setminus T_1$, si ha $\notin \Sigma(T_1) \cup \Sigma(T_2)$.

Lo spazio Σ non è T_2, se munito di questa topologia. Infatti, considerati i seguenti segmenti:



non esistono aperti di S_2 contenenti $\overline{AA'}$ ma non $\overline{BB'}$. È vero però che, data una coppia di segmenti, uno dei due ha qualche punto di S_2 che l'altro non ha, se i segmenti sono distinti. Preso dunque il segmento che non contiene tale punto, esiste un aperto di S_2 contenente il segmento ma non il punto, da cui deduciamo che esiste un aperto della famiglia dei segmenti contenente uno dei due ma non l'altro. In conclusione, Σ è T_0, ma non T_1 (né T_2, ovviamente).

11. Sia G il gruppo delle isometrie di $\mathbb{R}^3$ generato dalla rotazione ρ dell'angolo $\frac{\pi}{2}$ intorno all'asse z.

Si verifichi che l'azione di G sulla sfera unitaria S^2, e sia S^2/G lo spazio quoziente rispetto a quest'azione, dotato della topologia quoziente.

Esiste un omeomorfismo tra S^2 e S^2/G?

Consideriamo ora $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, visto come quoziente della sfera S^2 rispetto alla mappa antipodale, poiché ciò induce un'azione su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Il quoziente di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ rispetto a quest'azione è omeomorfo o no a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$?

Considerando la parametrizzazione usuale di S^2, cioè di una sfera, consideriamo l'applicazione continua seguente:

$$f: \begin{cases} x = r\cos\vartheta\sin\varphi \\ y = r\sin\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x = r\cos 4\vartheta\sin\varphi \\ y = r\sin 4\vartheta\sin\varphi \\ z = r\cos\varphi \end{cases}$$

f è una funzione $f: S^2 \to S^2$ ben definita e continua: inoltre S^2/G è compatto e S^2 è T_2.

Notiamo ora che, fissati $(\alpha, \beta) \in [0, 2\pi[$, due punti di S^2 identificati con (r, α, φ) e (r, β, φ) hanno la stessa immagine se e solo se:

$$\cos 4\alpha = \cos 4\beta \iff 4\alpha = 4\beta + 2k\pi \iff \alpha = \beta + k\frac{\pi}{2},$$

da cui:

$$\tilde{f}: S^2/G \longrightarrow S^2$$

è continua, biiettiva e chiusa per l'osservazione precedente, dunque un omeomorfismo.

L'azione di G su S^2 forma un quoziente. Infatti:

$$O_G(\vartheta) = \left\{\vartheta + k\frac{\pi}{2}\right\}_{k=0}^{3} = \left\{-\vartheta + k\frac{\pi}{2}\right\}_{k=0}^{3} = O_G(-\vartheta)$$

Il quoziente $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})/G$, però, non è omeomorfo a $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, poiché ad un disco. L'applicazione f precedente, adattata opportunamente, è un omeomorfismo tra $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})/G$ e una semisfera con i punti del bordo tra loro non identificati in alcun modo, dunque un disco.

12. Siano X_1 e X_2 due copie di $\mathbb{R}$. Si consideri nello spazio X, unione disgiunta di X_1 e X_2, la relazione di equivalenza ρ così definita:

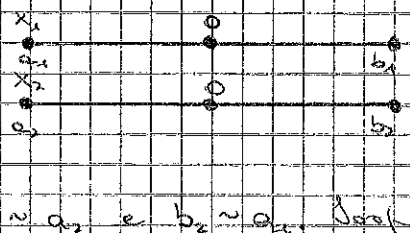
$$x \rho y \iff x = y \ \vee \ x \in X_1, \ y \in X_2, \ xy + 1 = 0.$$

Lo spazio quoziente è connesso? È compatto? È T_2? Cos'è omeomorfo a qualche sottospazio di $\mathbb{R}^n$?

Innanzitutto notiamo che l'insieme completo $[0,1]_1 \times [0,1]_2$ si mappa surgettivamente sul quoziente, dato che:

$$xy = -1 \Rightarrow |x| \geq 1 \ \vee \ |y| \geq 1$$

Allora lo spazio quoziente è compatto. Rappresentiamo i due compatti:



In particolare, $b_1 \sim a_2$ e $b_2 \sim a_1$. Dopotutto che lo quoziente sia omeomorfo a S_1. Verifichiamolo mediante la applicazione:

$$\varphi : X/\rho \longrightarrow S^1$$

$$(x,y) \longmapsto \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2} + (-1)^y \frac{\pi}{2} \right), \cos\left(\frac{\pi x}{2} + (-1)^y \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

La seguente funzione è ben definita:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x_1,y_1) \iff \frac{\pi x}{2} + (-1)^y \frac{\pi}{2} = \frac{\pi x_1}{2} + (-1)^{y_1} \frac{\pi}{2} \iff$$

$$\iff \frac{\pi(x - x_1)}{2} = \frac{\pi}{2}\left[(-1)^{y_1} + (-1)^{y+1} \right] \iff x - x_1 = (-1)^{y_1} + (-1)^{y+1} \iff$$

$$\iff (x = x_1 \ \wedge \ y = y_1) \ \vee \ (x = -x_1 \ \wedge \ |y - y_1| = 1),$$

da cui è ben definita anche e continua: è unica con la eventuale discontinuità in $b_1 \sim a_2$ e $a_1 \sim b_2$: analizziamo il caso $a_1 \sim b_2$. In effetti, la continuità è data dal fatto che $\varphi(-1,1) = \varphi(1,0)$ e $\varphi(1,1) = \varphi(-1,0)$, e le funzioni definite giacendo y sono continue.

Infine, essa è una funzione da un compatto in un T_2, dunque è chiusa: è, in sostanza, un omeomorfismo.

Dunque X/ρ è compatto (già dimostrato), connesso, T_2, e omeomorfo a un sottospazio di $\mathbb{R}^2$, ossia S_1.

13. Si considerino i seguenti sottospazi topologici $\mathbb{R}^2$, e due quali sono tra loro omeomorfi:

- $X_1 = S_1 \times [0,1]$;
- $X_2 = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < |z| \leq 2 \}$
- $X_3 = \{ z \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq |z| \leq 2 \}$
- $X_4 = ([0,1] \times [0,1]) / \sim$, ove:

$$(x,y) \sim (x',y') \iff \begin{cases} (x,y) = (x',y') \\ x = x' \ \{y,y'\} = \{0,1\} \end{cases}$$

Immediato X_3 è chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$; X_4 è prodotto topologico di spazi compatti; X_4 è quoziente di uno spazio compatto. In conclusione X_1, X_3, X_4 sono compatti, e differiscono da X_2 che non è chiuso, poiché $0 \in \overline{X_2} \setminus X_2$.

Osserviamo che $X_1 \simeq X_3 \simeq X_4$ ci vorranno gli omeomorfismi necessari. Dato che è evidente che X_1, X_3, X_4 sono T_2, le funzioni continue e biiettive tra essi saranno automaticamente chiuse, dunque omeomorfismi.

Consideriamo dunque:

$$\begin{aligned} \Phi_1 : X_3 &\longrightarrow X_1 \\ x &\longrightarrow \left(\frac{x}{|x|}, 1 - |x| \right) \end{aligned}$$

L'applicazione è palesemente continua, biiettiva e inoltre è invertibile, e inoltre:

$$\forall (e^{i\vartheta}, \rho) \in S_1 \times [0,1] \ \exists (\rho+1)e^{i\vartheta} \ni \Phi_1((\rho+1)e^{i\vartheta}) = (e^{i\vartheta}, \rho)$$

Dunque $X_3 \simeq X_1$. Consideriamo ora:

$$\begin{aligned} \Phi_2 : X_4 &\longrightarrow X_1 \\ (x,y) &\longrightarrow ((\cos(2\pi y), \sin(2\pi y)), x) \end{aligned}$$

La funzione è continua biiettiva e ovviamente suriettiva. Inoltre:

$$\Phi_2(x,y) = \Phi_2(x',y') \Rightarrow x = x' \wedge y - y' \in \mathbb{Z},$$

da cui Φ_2 è ben definita come applicazione da X_4 a X_1, continua chiusa, dunque omeomorfismo.

Dunque, come annunciato, X_1, X_3, X_4 sono omeomorfi.

14. Consideriamo $A = \mathbb{R}^2$ dato da $A = \{(-1,0), (1,0)\}$. Sia $X = \mathbb{R}^2/A$.
Lo spazio X è completo, connesso, T_2? Dimostrare più che esiste una immersione $f : S^1 \to X$ tale che $X \setminus f(S^1)$ non sia connesso, e una dove invece $X \setminus f(S^1)$ è connesso.

Lo spazio X è evidentemente connesso, essendo quoziente di uno spazio connesso.
Lo spazio è anche di Hausdorff, poiché si sta contraendo un insieme completo. Sia infatti $x \notin A$. Allora:
$\exists\, U = \mathbb{R}^2,\ V = \mathbb{R}^2$ t.c. $x \in U,\ A = U,\ U \cap V = \emptyset \Rightarrow$
$\Rightarrow \exists\, \pi(U),\ \pi(V) \subseteq X$ t.c. $\pi(x) \in \pi(U),\ \pi(A) \in \pi(V)$,
$\pi(U) \cap \pi(V) = \emptyset$,
da cui $X \in T_2$.
Infine, X non è completo. Sia $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ove:
$$T_n = \{x \in X \mid d(x, \pi(A)) < \tfrac{1}{n}\}$$
Supponiamo che esista un sottoricoprimento finito di X, allora:
$\exists\, N \in \mathbb{N}$ t.c. $T_N \supseteq \mathbb{R}^2/A = X$
Allora osserviamo:
$$\mathbb{R}^2 = B((-1,0), N) \cup B((1,0), N),$$
e ciò è assurdo. X non è dunque completo.
Infine, le immersioni di S^1 sono le seguenti:

$\Phi_1 : S^1 \to X$ $\qquad$ $\Phi_2 : S^1 \to X$
$(\cos\theta, \sin\theta) \to (-1 + \cos\theta, \sin\theta)$ $\qquad$ $(\cos\theta, \sin\theta) \to (2\cos\theta, 2\sin\theta)$

È evidente che $X - \Phi_2(S^1)$ sia formato da due componenti connesse, di cui una limitata. Al contrario, $X - \Phi_1(S^1)$ è connesso. Ogni punto è infatti connesso in $\mathbb{R}^2$ a uno dei punti di A, che però è equivalente agli altri punti di A: la parte interna e la parte esterna sono dunque connesse.

15. Consideriamo la quadrica affine $Q_{\lambda,\mu}$ in $\mathbb{R}^3$ seguente:

$$Q_{\lambda,\mu} = \{x^2 + y^2 + 6z^2 + 4xy + 6xz + 6yz - 6x - 2\lambda y - 12z + \mu = 0\},$$

dipendente dai parametri $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Per quali valori di λ e μ la conica è a centro?

Per i valori di λ e μ in cui esiste, determiniamo un centro di $Q_{\lambda,\mu}$.

Per i valori λ e μ in cui la quadrica è a centro, determiniamo il tipo affine di $Q_{\lambda,\mu}$.

Scriviamo la quadrica in forma matriciale:

$$Q_{\lambda,\mu} = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -\lambda \\ 3 & 3 & 6 & -6 \\ \hline -3 & -\lambda & -6 & \mu \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline B^t & d \end{array}\right]$$

Calcoliamo $\det A$. In effetti, la somma della prima due colonne è pari alla terza: allora $\det A = 0$. Determiniamo una base di $\operatorname{Im} A$:

$$\operatorname{Im} A = \left\{ \left[\begin{array}{c} t + 2z \\ 2t + 2 \\ 3(t+z) \end{array}\right] \;\middle|\; t, z \in \mathbb{R} \right\}$$

Imponiamo adesso:

$$\begin{cases} t + 2z = -3 \\ 3t + 3z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + 4z = -6 \\ 3t + 3z = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + 4z = 3t + 3z \\ t + z = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = t \\ t + z = -2, \end{cases}$$

da cui $t = z = -1$. Allora:

- se $\lambda = 3$, la quadrica è a centro;
- se $\lambda \neq 3$, la quadrica non è a centro.

La conica è a centro se e solo se $\lambda = 3$, dunque: su μ non ci sono condizioni. Essendo la conica degenere, è chiaro che il centro non è unico.

Determiniamo dunque un centro di $Q_{3,\mu}$. È chiaro che $[1, 1, 0]^t$ sarà tale che $Ax = -b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Un centro di $Q_{3,\mu}$ è dunque $[1, 1, 0]^t$. Notiamo ora la tipica affinità di $Q_{3,\mu}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 & -6 \\ \hline -3 & -3 & -6 & \mu \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 6 & -6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6+\mu \end{array}\right].$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 6 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -6+\mu \end{array}\right]$$

Normalizziamo ora la matrice A. Occorre prima calcolare la segnatura di A:

$$\det(A - \lambda I_4) = (1-\lambda)[(1-\lambda)(6-\lambda) - 9] - 2[2(6-\lambda) + 9] + 3[6 - 3(1-\lambda)] = (1-\lambda)^2(6-\lambda) - 9 + 9\lambda - 24 + 4\lambda + 18 + 3\lambda - 9 + 9\lambda = (1 + \lambda^2 - 2\lambda)(6-\lambda) + 22\lambda - 6 =$$
$$= -\lambda^3 + 8\lambda^2 + 9\lambda = (-\lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 9) = (-\lambda)(\lambda - 9)(\lambda + 1),$$

da cui la segnatura è $(2, 1, 1)$. Esiste dunque una affinità tale che:

$$P^t Q_{\lambda,\mu} P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6+\mu \end{bmatrix}$$

Dunque:

- se $\mu > 6$, la quadrica è $x^2 - y^2 = 1$, ossia un CILINDRO IPERBOLICO;
- se $\mu < 6$, la quadrica è $-x^2 + y^2 = 1$, ossia ancora un CILINDRO IPERBOLICO;
- se $\mu = 6$, la quadrica è $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = 0$, ossia una COPPIA DI PIANI INCIDENTI.

16. Determinare l'equazione di una quadrica non a centro contenente le due rette:

$$x = y = 0 \quad , \quad x = y = z$$

Determinare poi il tipo affine e il tipo proiettivo della sua completata proiettiva.

Una quadrica non a centro, è unica che può contenere due rette incidenti è il paraboloide ellittico, e può precisamente quello che, intersecato con $z = 0$ dà la coppia di rette:

$$z = x = 0$$
$$z = y = 0$$

Sostituiamo $z = 0$ con il piano contenente le due rette, cioè $x - y = 0$. Su questo piano, le rette sono individuate dalle equazioni:

$$y = 0 \qquad y - z = 0 \,,$$

da cui, considerando la forma normale del paraboloide ellittico:

$$z = xy$$

e sostituendo opportunamente (mediante una trasformazione affine):

$$z = x - y \qquad y = y \qquad x = y + z \,,$$

si ottiene la quadrica:

$$x - y^2 = y(y + z)$$

La matrice relativa è la seguente:

$$Q = \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \hline \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{array}\right]$$

da cui si evince che la quadrica non è a centro.

Ovviamente, il completato proiettivo di questa quadrica è il cono. Di fatto, considerando l'equazione omogeneizzata:

$$\begin{cases} x_0 x_3 = x_1 x_2 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

L'intersezione con il piano $x_0 = 0$ è una coppia di rette:

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 0$$

Dimostriamo ora che, detto $S_1 \subset \mathbb{C}$, $S_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, l'insieme $(S_1 \times S_1) \setminus [(S_1 \times \{1\}) \cup (\{1\} \times S_1)]$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2$.

In effetti, innanzitutti gli S_1 un punto, si ottiene un omeomorfismo con il quadrato aperto

$$Q =]0, 2\pi[\times]0, 2\pi[,$$

omeomorfo a $]0,1[\times]0,1[$. A questo punto è facile determinare un omeomorfismo con $\mathbb{R}^2$:

$$\Phi :]0,1[\times]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x, y) \longrightarrow \left(\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}, \operatorname{tg} \frac{\pi y}{2} \right)$$

4. Consideriamo la equazione seguente in $\mathbb{R}^3$, dipendente da $a \in \mathbb{R}$:

$$x^2 + 4xy + y^2 + 2xz + 2ayz + z^2 + 2x + 4y + 2z + 3 = 0$$

Dimostrare che la quadrica è a centro per ogni $a \in \mathbb{R}$, e determinare il tipo affine al variare di $a \in \mathbb{R}$.

La matrice associata è la seguente:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Il termine cinque è uguale alla prima colonna, dunque la quadrica è a centro per ogni $a \in \mathbb{R}$. Calcoliamo ora $\det A$:

$$\det A = 1 + 2a + 2a + a^2 - 4 - 1 = -(a-2)^2$$

Il unico caso degenere è per $a = 2$: in tale caso determiniamo se la retta di centri è l'intersezione di due piani (reali o complessi?), oppure la quadrica è un cilindro su una conica a centro.

Se $a \neq 2$ l'equazione del centro ha una sola soluzione, che è $[-1, 0, 0]^T$, ovviamente. Applichiamo dunque la giusta trasformazione affine:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

Ricordiamo le informazioni sul minore di testa di ordine 3. Dato che $\det A < 0$ e $\text{Tr } A = 3 \geq 0$, ci sono 1 o 3 autovalori negativi. Ma $\text{Tr } A > 0$, dei cui almeno un autovalore deve positivo. Matematicamente, questo, la forma normale è:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2 = 0$$

da cui, notando che:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 2 \Rightarrow |z| \geq \sqrt{2},$$

si tiene che l'equazione individua, per ogni $a \neq 2$, un iperboloide a due falde.

Sia ora $a = 2$. Allora si ha:

$$\det A = (-1)(\lambda - 1)(\lambda + 2),$$

da cui la forma normale della quadrica è:

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

da cui si evince che la quadrica ha la seguente forma normale:

$$x^2 - y^2 + 1,$$

e dunque è un CILINDRO IPERBOLICO.

18. In $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, sia Q la quadrica avente equazione:

$$x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 + 2x_1x_3 = 0,$$

e sia r_λ la retta:

$$x_3 = \lambda x_0 + x_2 = 0 \quad , \lambda \in \mathbb{R}$$

Per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ $Q \cup r_\lambda$ è conica?

Essendo Q e r_λ coniche, $Q \cup r_\lambda$ è conica se e solo se $Q \cap r_\lambda \neq \emptyset$.

Consideriamo la retta r_λ:

$$\begin{cases} x_2 = -\lambda x_0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Sostituendo nell'equazione di Q, si ottiene:

$$x_0^2 + x_1^2 - \lambda^2 x_0^2 = 0$$

$$(1 - \lambda^2) x_0^2 + x_1^2 = 0,$$

da cui, ricordando che le quadriche omografiche di $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ hanno sempre almeno una coordinata omogenea non nulla, si ha che:

$$Q \cap r_\lambda \Leftrightarrow (1 - \lambda^2) \leq 0 \Leftrightarrow \lambda^2 \geq 1 \Leftrightarrow \lambda \in \mathbb{R} -]-1, 1[$$

19. Consideriamo la quadrica Q in $\mathbb{R}^3$ definita dall'equazione:

$$y - z^2 + x = xz - 1$$

Determinare un'equazione proiettiva della chiusura proiettiva $\bar{Q}$ di Q in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Determinare poi l'intersezione di $\bar{Q}$ con il piano all'infinito. Si tratta di una ellisse, una parabola o un'iperbole?

La quadrica Q ha centro? Determinare il tipo affine di Q, e il tipo proiettivo di $\bar{Q}$.

Innanzitutto, la matrice associata a Q è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

da cui si evince che la quadrica non è centrale.

Operando i cambiamenti seguenti:

$$x = z \quad , \quad y = x \quad , \quad z = y \quad ,$$

la matrice diventa:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

Dato che $rk\, A = 2$, $i_0(A) = 1$. Dato che $\omega(A) = 2$, si ha necessariamente $\sigma_1 = (1, 1, 1)$.

Da qui si vicava che Q è un iperboloide a falda: il tipo proiettivo di Q è dunque un toro.

L'equazione proiettiva della chiusura $\bar{Q}$ di Q è:

$$yt - z^2 + xt = xz - t^2$$

L'intersezione con il piano $t = 0$ è:

$$-z^2 = xz$$

$$z(x - z) = 0,$$

da cui l'intersezione è una coppia di rette. Lo spazio non è connesso, perché l'intersezione delle due rette è vuota, vista che $[0,0,0] \notin \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico numerabile che contiene almeno due punti.

- Mostrare che, se (X, d) è completo, allora non è connesso.
- Mostrare che (X, d) non è connesso in nessun caso.

Il primo punto è abbastanza semplice: uno spazio metrico completo è uno spazio di Baire, e uno spazio numerabile di Baire deve necessariamente essere dotato della topologia discreta: in questa topologia, ogni sottoinsieme è sia aperto che chiuso: X non è connesso, dunque.

Per il secondo punto siano $a, b \in X$. Consideriamo:

$$d_a : X \to \mathbb{R}$$
$$w \mapsto d(a,w)$$

L'immagine contiene 0 ($d(a,a) = 0$) e $\lambda > 0$ ($d(a,b)$): è fatta eccezione, ovviamente, l'intervallo $[0,\lambda]$ e hanno dx, ma questo valore ha cardinalità contenuta: X, dunque, non è connesso.

21. Si consideri la famiglia di quadriche in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$:

$$(a-b)x^2 + 2ay^2 - (a+b)z^2 + 2axt + 2xz + 2ayt + 2ayz = 0$$

Determinare il tipo proiettivo e topologico delle quadriche al variare dei parametri reali a, b.

Scriviamo la conica in forma matriciale:

$$Q = \begin{bmatrix} a-b & 0 & 1 & a \\ 0 & 2a & 0 & a \\ 1 & 0 & -(a+b) & a \\ a & a & a & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha:

2. Consideriamo in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ le coniche seguenti:

$$C_\lambda = \{(\lambda+1)x_0^2 - 2x_0x_1 + (\lambda+1)x_1^2 - (\lambda+1)x_2^2 = 0\},$$

al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$.

Per quali valori di $\lambda \in \mathbb{R}$ la conica C_λ contiene il punto $[1,1,1]$? Determina poi il tipo proiettivo della conica C_λ al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$. Determinare infine i punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ che appartengono a C_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Sostituendo le coordinate omogenee, si ha:

$$\lambda+1 - 2 + (\lambda-1) - (\lambda+1) =$$
$$= \lambda - 1 + \lambda - 1 - \lambda - 1 = -(\lambda+1),$$

da cui:

$$[1,1,1] \in C_\lambda \iff \lambda = -1.$$

La forma matriciale della conica è:

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda+1 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{bmatrix},$$

di cui:

$$\det \bar{A} = \lambda - \lambda^2 - \lambda = -\lambda^2, \quad \det \bar{Q} = \lambda^2(\lambda+1) = \lambda^3 + \lambda^2 = \lambda^2(\lambda+1)$$

Dunque:

- $\lambda \neq 0$, $\lambda \neq -1$: si ha $\operatorname{rk} \bar{Q} = 3$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 2$;
- $\lambda = 0$: si ha $\operatorname{rk} \bar{Q} = 2$, $\operatorname{rk} \bar{A} = 1$;
- $\lambda = -1$: si ha $\operatorname{rk} \bar{Q} = \operatorname{rk} \bar{A} = 2$.

Calcoliamo ora, al variare di λ, i segni dei determinanti delle forme quadratiche:

- $\lambda < -1 \Rightarrow \det \bar{A} < 0$, $\det \bar{Q} < 0$;
- $\lambda \neq -1 \Rightarrow \det \bar{A} < 0$, $\det \bar{Q} = 0$;
- $\lambda \in]-1, 0[\Rightarrow \det \bar{A} < 0$, $\det \bar{Q} > 0$;
- $\lambda = 0 \Rightarrow \det \bar{A} = 0$, $\det \bar{Q} = 0$;
- $\lambda > 0 \Rightarrow \det \bar{A} < 0$, $\det \bar{Q} > 0$.

Allora:

- $\lambda < -1$: $x^2 + y^2 - 2^2 = 0$: CONICA NON DEGENERE;
- $\lambda = -1$: $x^2 - y^2 = 0$: COPPIA DI RETTE;
- $\lambda \in]-1, 0[$: $x^2 - y^2 + 2^2 = 0$: CONICA NON DEGENERE;
- $\lambda = 0$: $x^2 - 2^2 = 0$: COPPIA DI RETTE;
- $\lambda > 0$: $x^2 - y^2 + 2^2 = 0$: CONICA NON DEGENERE.

Consideriamo dapprima $C_1 \cap C_0$. Le due rette di C_1 sono le seguenti:

$$r_2 = \{[1, 1, z] \mid z \in \mathbb{R}\}$$
$$s_2 = \{[1, 0, z] \mid z \in \mathbb{R}\}$$

Vediamo ora l'intersezione con C_0:

$$C_0 = \{x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$$

si ha che i punti di intersezione sono i seguenti:

$$[1, 1, 0], [1, 0, -1], [1, 0, 1]$$

È evidente che i punti $[1, 0, -1]$ e $[1, 0, 1]$ appartengono a C_λ per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Regendo $[1, 1, 0]$ la troviamo ancora imponendo:

$$(1 + \lambda) - 2 + (1 - 1) = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R},$$

da cui l'intersezione di tutte le quadriche consta dei seguenti punti:

- $[1, 1, 0]$;
- $[1, 0, -1]$;
- $[1, 0, 1]$.

23. Sia $\pi = \{x_0 + x_1 = 0\}$ un piano proiettivo nello spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ di coordinate x_0, x_1, x_2, x_3. Sia z un numero complesso. Si consideri la retta proiettiva:

$$r_z = \{[t+u, t-u, uz, -uz] \mid t,u \in \mathbb{C}\}$$

dipendente da $z \in \mathbb{C}$.

Determinare i punti che appartengono a tutte le rette r_z, al variare di $z \in \mathbb{C}$.

Determinare l'insieme dei punti di π che non contengono tutta r_z per qualche z.

Ponendo $z=0$, si ottiene:

$$r_0 = \{[t+u, t-u, 0, 0] \mid t,u \in \mathbb{C}\}$$

Sia ora $z=1$, si ottiene:

$$r_1 = \{[t+u, t-u, u, -u] \mid t,u \in \mathbb{C}\}$$

Determiniamo $r_0 \cap r_1$. È evidente che si debba porre $u=0$, da cui:

$$r_0 \cap r_1 = \{[1,1,0,0]\}$$

Al contrario, è evidente che $[1,1,0,0] \in r_z \ \forall z \in \mathbb{C}$: è sufficiente porre $u=0$, e $t \in \mathbb{C}^*$ (ad esempio $t=1$). Allora $[1,1,0,0]$ è l'insieme cercato.

Il piano π è il piano costituito dalle seguenti classi di equivalenza:

$$[1, -1, t, z], \ t,z \in \mathbb{C} \ \cup$$
$$\cup \ [0,0,t,z], \ (t,z) \neq (0,0)$$

Imponendo $t+u = -(t-u) = -t+u$, si ottiene $t=0$, da cui si ottengono i seguenti punti:

$$\Delta = \{[1, -1, z, -z] \mid z \in \mathbb{C}\}$$

Imponendo invece $t+u = t-u = 0$ si ottiene $t=u=0$, e ciò implica che non vi siano altri punti. Dunque Δ è l'insieme di punti cercati.

24. Sia (X, d) uno spazio metrico completo. Sia $x_0 \in X$.

Mostrare che x_0 è isolato se e solo se $X \setminus \{x_0\}$ è completo.

Mostrare inoltre che l'insieme:

$$\{d(x_0, x) \mid x \in X\} \subseteq \mathbb{R}$$

ha un massimo se e solo se tutti i punti che distano più di x_0 formano un sotto insieme completo di X?

Se x_0 è un punto isolato, dato che la palla di centro in X e raggio zero sono una base della topologia di X:

$$\forall \varepsilon > 0, \varepsilon \in \mathbb{R} \;\; B(x_0, \varepsilon) = (X \setminus \{x_0\}) \cup \{x_0\}$$

da cui:

$$B(x_0, \varepsilon) \setminus X = \{x_0\},$$

da cui x_0 è aperto in X, e $X \setminus \{x_0\}$ è dunque chiuso in X completo, dunque completo. Se invece x_0 non è isolato:

$$\forall n \in \mathbb{N} : B\left(x_0, \frac{1}{n+1}\right) \supsetneq \{x_0\} \Rightarrow \exists x_n \in X, x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n+1}\right),$$

$$x_n \neq x_0 \Rightarrow x_n \in X \setminus \{x_0\}$$

Abbiamo dunque generato una successione in X convergente a $x_0 \in X$. In effetti, la successione è a valori in $X \setminus \{x_0\}$, ma $x_0 \notin X \setminus \{x_0\}$: dobbiamo per definizione, che X non è chiuso, dunque neanche completo, perché (X, d) è, per ipotesi, uno spazio di Hausdorff.

La funzione $d_{x_0} : X \to \mathbb{R}$ che associa a $x \in X$ la sua distanza da x_0, è continua:

$$|d(x_0, x) - d(x_0, y)| \leq d(x, y)$$

Allora, dato che X è completo, $d_{x_0}(X)$ è completo in $\mathbb{R}$, dunque chiuso e limitato: la funzione ammette dunque un massimo M. M è chiuso in $(\mathbb{R}^2, \tau_\varepsilon)$, $d_{x_0}^{-1}(M)$ è chiuso nel completo X, dunque è un sotto insieme completo di X.

25. Si considerino le coniche proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$:

$$C = \{-3x_0^2 + 3x_1^2 + 9x_2^2 + 16x_0x_2 = 0\}$$

$$\mathcal{D}_k = \{x_0^2 + (k-4)x_1^2 + (k+1)x_2^2 + 2x_0x_1 = 0\},\ k \in \mathbb{R}$$

Determinare i valori $k \in \mathbb{R}$ per i quali C e $\mathcal{D}_k$ sono proiettivamente equivalenti.

Classificare poi le coniche $\mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{R}$, a meno di omeomorfismo.

Due equivalenze proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è determinata dal rango e dalla segnatura. Consideriamo allora la matrice di C e $\mathcal{D}_k$, $k \in \mathbb{R}$:

$$C = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ 8 & 0 & 9 \end{bmatrix} \qquad \mathcal{D}_k = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & k-4 & 0 \\ 0 & 0 & k+1 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\det C = -3(27) + 8(-24) = -81 - 192 = -273 < 0,$$

e notando che $\det C < 0$ e che nella diagonale ci sono elementi positivi, deduciamo che $\sigma_C = (2, 1, 0)$; si poteva anche procedere, in maniera molto generale, mediante il criterio di Jacobi. Dunque si ha una CONICA NON DEGENERE.

Studiamo ora $\mathcal{D}_k$, al variare di $k \in \mathbb{R}$. Si ha:

$$\det \mathcal{D}_k = (k+1)[(k-4) - 1] = (k+1)(k-5),$$

da cui:

- $k > 5 \Rightarrow \sigma_{\mathcal{D}_k} = (3, 0, 0)$, usando il criterio di Jacobi;
- $k < -1 \Rightarrow \sigma_{\mathcal{D}_k} = (1, 2, 0)$, usando il criterio di Jacobi;
- $k \in]-1, 5[\Rightarrow \sigma_{\mathcal{D}_k} = (2, 1, 0)$, usando il criterio di Jacobi;
- $k = -1 \Rightarrow \sigma_{\mathcal{D}_k} = (1, 1, 1)$, usando il criterio di Jacobi;
- $k = 5 \Rightarrow \sigma_{\mathcal{D}_k} = (2, 0, 1)$, usando il criterio di Jacobi.

Concludiamo ora l'esercizio. Eguagliando le segnature, C e $\mathcal{D}_k$ sono proiettivamente equivalenti per

$$k \in]-\infty, -1[\cup]-1, 5[.$$

La classificazione topologica è invece la seguente:

- $k > S$: INSIEME VUOTO;
- $k = S$: PUNTO ISOLATO;
- $k = -1$: COPPIA DI RETTE INCIDENTI;
- $k < -1 \ \vee \ k \in]-1, S[$: CONICA NON DEGENERE.

26 Si consideri la quadrica $Q_t \subseteq \mathbb{R}^3$ di equazione:

$$x^2 + 2txy + 2z - 2y + 1 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

Per quali $t \in \mathbb{R}$ la quadrica Q_t ha centro?
Determinare il tipo affine della quadrica Q_t al variare di $t \in \mathbb{R}$.
Determinare un'equazione proiettiva della chiusura proiettiva $\overline{Q_t}$ di Q_t in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$. Sia infine X_t l'intersezione di $\overline{Q_t}$ con il piano all'infinito. Gli spazi topologici X_t sono tutti omeomorfi al variare di t?

La forma matriciale della quadrica è la seguente:

$$Q_t = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

da cui è evidente che la quadrica Q_t ha centro se e solo se $t \neq 0$.
Se $t = 0$, si ha:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

da cui la quadrica è un CILINDRO PARABOLICO.

Se $t \neq 0$, possiamo operare la seguente trasformazione:

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & \frac{1}{t}\ 0\ 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & t\ 0\ -1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 1\ 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ t\ 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & t\ 0\ -1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 1\ 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & \frac{1}{t}\ 0\ 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & t\ 0\ -1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ t\ 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & \frac{1}{t}\ 0\ 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ t\ 0 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & \frac{1}{t}\ 0\ 1 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ t\ 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0\ 0\ 0 \\ \hline 0 & \\ 0 & \\ 0 & 0\ 0\ 1 \end{array}\right]$$

È dunque evidente che ad $Q_0 = (3, 1, 0)$ per ogni $t \in \mathbb{R}^*$ con tale trasformazione affine, la quadrica si riduce alla seguente forma normale:

$$x^2 + y^2 - z^2 + 1 = 0,$$

da cui si evince che la quadrica è un IPERBOLOIDE A DUE FALDE:

$$z^2 = x^2 + y^2 + 1 \geq 1$$

La chiusura proiettiva della quadrica Q_t è:

$$x^2 + 2t\,yz - 2zw + w^2 = 0,$$

e l'intersezione con il piano all'infinito è data dall'insieme dei punti:

$$X_t = \{ x^2 + 2t\,yz = 0 \},$$

da cui:

- se $t = 0$, X_t è una RETTA DOPPIA;
- se $t \neq 0$, X_t è la conica su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di equazione matriciale:

$$X_t = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t \\ 0 & t & 0 \end{array}\right],$$

che per ogni $t \in \mathbb{R}^*$ formano una CONICA NON DEGENERE.

È dunque evidente che gli spazi tipo X_t coincidono a meno di $t \in \mathbb{R}^*$: la eccezione è il caso $t = 0$.

SPAZI LOCALMENTE CONNESSI

Uno spazio topologico X si dice LOCALMENTE CONNESSO se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi. Esso si dice LOCALMENTE CONNESSO PER ARCHI se ogni punto possiede un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

Segue che le componenti connesse sono aperte. Le componenti connesse per archi, invece, non sono né aperte né chiuse, in genere. Gli aperti di $\mathbb{R}^3$ sono tutti localmente connessi. Le proprietà dei spazi localmente connessi e localmente connessi per archi. Si noti che, in generale, uno spazio connesso non è localmente connesso.

Per X spazio topologico, e per $x, y \in X$, definiamo:

$$\Omega(X, x, y) = \{ \gamma : [0,1] \to X \mid \gamma(0) = x, \gamma(1) = y \}$$

Definiamo allora $\pi_0(X) = X/\sim$, ove:

$$x \sim y \iff \Omega(X, x, y) \neq \emptyset$$

Effettuiamo le verifiche:

- $x \sim x$. Basta considerare il cammino costante:
$$\lambda_x : [0,1] \to X$$
$$\lambda_x(t) = x \quad \forall t \in [0,1];$$
- $x \sim y \iff y \sim x$. È infatti definita l'operazione bigettiva di inversione i:
$$i : \Omega(X, x, y) \to \Omega(X, y, x), \quad i(\alpha)(t) = \alpha(1-t)$$
Dunque $\Omega(X, x, y) = \emptyset \iff \Omega(X, y, x) = \emptyset$;
- $x \sim y, y \sim z \Rightarrow x \sim z$. Consideriamo infatti il seguente prodotto:
$$* : \Omega(X, x, y) \times \Omega(X, y, z) \to \Omega(X, x, z)$$
$$(\alpha, \beta) \to \alpha * \beta,$$
$$(\alpha * \beta)(t) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2t-1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Siano X uno spazio topologico e $\alpha : [a,b] \to X$ continuo, con $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Si dice PARAMETRIZZAZIONE STANDARD di α:

$$\alpha^* \in \Omega(X, \alpha(a), \alpha(b)),$$
$$\alpha^*(t) = \alpha((1-t)a + tb)$$

Le classi di equivalenza della relazione $\sim$ sono dette COMPONENTI CONNESSE PER ARCHI. Se X di uno spazio topologico, dunque, è l'insieme delle sue componenti connesse. In generale le componenti connesse per archi non sono né aperte né chiuse.

Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ è localmente connesso per archi: se $X \subseteq \mathbb{R}^n$ è aperto e $x \in X$, allora:
$\exists\, r > 0$ s.t. $B(x,r) \subseteq X$,
da cui le palle $B(x,t)$ con $0 < t < r$ formano un sistema fondamentale di intorni connessi per archi.

PROPOSIZIONE
Sia X uno spazio localmente connesso per archi. Allora le componenti connesse per archi di X sono aperte, e coincidono con le componenti connesse.

Dim.
Fissato $x \in X$, sia A la sua componente connessa per archi:

$$A = \{ y \in X \mid \Omega(X, x, y) \neq \emptyset \}$$

Sia $y \in A$, e sia $\alpha \in \Omega(X, x, y)$. Per ipotesi:
$\exists\, U \in I(y)$ connesso per archi $\Rightarrow \forall\, z \in U\ \exists\, \beta \in \Omega(U, y, z) \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall\, z \in U\ \exists\, \alpha * \beta \in \Omega(X, x, z) \Rightarrow U \subseteq A$,
da cui A è aperto, ed essendo il complementare di un'unione di componenti connesse (aperte), è anche chiuso.
Sia ora $C(x)$ la componente connessa di x. Siccome $A \cap C(x)$ è aperto e chiuso (e non vuoto) in $C(x)$, $C(x) \subseteq A$.
D'altra parte A è connesso per archi e in particolare connesso, dunque $A \subseteq C(x)$, da cui $C(x) = A$, c.v.d.

Se considero adesso f continua, $f: X \to Y$. Notiamo che, se $\alpha: [0,1] \to X$ è un cammino continuo, allora $f\alpha: [0,1] \to Y$ è un cammino continuo:

$$f\alpha: [0,1] \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y$$

Se dunque x_1 e x_2 fanno parte della medesima componente connessa per archi, questa proprietà caratterizzerà anche $f(x_1)$ e $f(x_2)$. f dunque induce un'applicazione:

$$\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$
$$f([x]) = [f(x)]$$

Notiamo che:

- se $Id: X \to X$ è l'identità, allora anche $\pi_0(Id): \pi_0(X) \to \pi_0(X)$ è l'identità. Infatti x e $Id(x) = x$ appartengono alla stessa componente connessa per archi, da cui:
$$Id([x]) = [Id(x)] = [x],$$
da cui $\pi_0(Id)$ è l'identità in $\pi_0(X)$;

- se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ sono continue, allora:
$$\pi_0(gf) = \pi_0(g)\,\pi_0(f): \pi_0(X) \to \pi_0(Z)$$
Infatti:
$$\forall x \in X: \quad gf([x]) = [gf(x)] = [g\{f(x)\}] =$$
$$= g([f(x)]) = g\,f([x])) \Rightarrow \pi_0(gf) = \pi_0(g)\,\pi_0(f)$$

Possiamo dunque chiamare FUNTORE l'applicazione:

$$\pi_0: \{\text{spazi topologici}\} \to \{\text{insiemi}\}$$
$$X \to \pi_0(X)$$

Domini e codomini non sono insiemi, ma CATEGORIE, dunque π_0 non è un'applicazione. Daremo più avanti una definizione di funtore e categoria.

ESERCIZIO

Sia $n \geq 1$, $s \neq t$. Siccome $\mathbb{R}^n - \{s \text{ punti}\}$ non è omeomorfo a $\mathbb{R}^n - \{t \text{ punti}\}$.

Siano $p_1, \dots, p_t$ punti distinti in $\mathbb{R}^n$, e consideriamo:

$$\mathbb{R}^n - \{p_1, \dots, p_t\} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^n_t$$

Per $n > 0$ consideriamo:

$$K_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq n,\ \|x - p_i\| \geq \tfrac{1}{n+1}\}$$

Poi $n = 0$, si ha $\mathbb{R}^n - K_n$ ha esattamente $t+1$ componenti connesse, si ha inoltre:

$\forall i \in \mathbb{N}: K_i \subseteq K_{i+1}$, K_i compatto,

e $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} K_i = \mathbb{R}^n - \{p_1, \dots, p_t\}$.

Allora $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ è un'esaustione in compatti.

Osserviamo già notato prima, ma ripetiamo la notazione:

$\exists k \in \mathbb{N} \ \exists, \forall n \geq k: \mathbb{R}^n_t - K_n$ ha $t+1$ componenti connesse

Consideriamo allora l'esaustione in compatti $(K_i)_{i \geq k}$

La funzione di inclusione seguente:

$$i: \mathbb{R}^n_t - K_{n+1} \to \mathbb{R}^n_t - K_n,$$

dove $n \geq k$, induce una proiezione tra i rispettivi π_0, cioè tra gli insiemi di componenti connesse per archi:

$$\pi_0(i): \pi_0(\mathbb{R}^n_t - K_{n+1}) \to (\mathbb{R}^n_t - K_n)$$

Sotto queste ipotesi, il numero di componenti connesse di $(\mathbb{R}^n - K_n)$, cioè $|\pi_0(\mathbb{R}^n_t - K_{n+1})|$ è un invariante topologico di $\mathbb{R}^n$, che non dipende dalla esaustione scelta.

Ora però seguirà che, essendo:

$$|\pi_0(\mathbb{R}^n_t - K_{n+1})| = t+1, \quad |\pi_0(\mathbb{R}^n_s - K_{n+1})| = s+1,$$

i due spazi $\mathbb{R}^n_t$ e $\mathbb{R}^n_s$ non sono omeomorfi.

Siano dunque $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(H_e)_{e \in \mathbb{N}}$ due esaustioni con le proprietà dette sopra.

Allora:

Se $h_1 \leq h_2$, k_1, k_2 allora $|H_{h_1}| \leq |K_{k_1}| \leq |H_{h_2}| \leq |K_{k_2}|$

di conseguenza abbiamo:

$$X - |K_{k_2}| \xrightarrow{\alpha} \mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |H_{h_2}| \xrightarrow{\beta} \mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |K_{k_1}| \xrightarrow{\gamma} \mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |H_{h_1}|,$$

con α, β, γ inclusioni. Dunque si ha:

$$\pi_0(\mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |K_{k_2}|) \xrightarrow{\pi_0(\alpha)} \pi_0(\mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |H_{h_2}|) \xrightarrow{\pi_0(\beta)} \pi_0(\mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |K_{k_1}|) \xrightarrow{\pi_0(\gamma)} \dots$$
$$\dots \to \pi_0(\mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |H_{h_1}|)$$

Per ipotesi $\pi_0(\beta)\,\pi_0(\alpha) = \pi_0(\gamma)\,\pi_0(\beta)$ sono biiettive.

Per concludere, dimostriamo che $\pi_0(\alpha)$ è biiettiva: seguirà che $\pi_0(\beta) = \pi_0(\beta)\pi_0(\alpha) \circ \pi_0(\alpha)^{-1}$ è biiettiva, e, infine, $\pi_0(\gamma) = \pi_0(\gamma)\,\pi_0(\beta) \circ \pi_0(\beta)^{-1}$ è biiettiva, da cui $|\pi_0(\mathbb{R}^m_{\mathbb{H}} - |K_{k_0}|)|$ è invariante topologica (come ci dice Teri). Per far ciò, enunciamo un lemmino.

LEMMA

Siano date tre applicazioni di insiemi:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D$$

Siano gf biiettiva e hg iniettiva. Allora f è biiettiva.

Dim.

Innanzitutto gf e hg sono iniettive, da cui f e g sono iniettive. Dato che gf è suriettiva:

$\forall\, b \in B \;\exists\, a \in A$ s.t. $gf(a) = g(b)$,

e dalla iniettività di g segue $f(a) = b$, da cui f è suriettiva. Dunque è biiettiva, c.v.d.

OMOTOPIA

Siano $f_0, f_1 : X \to Y$ due applicazioni continue. Esse si dicono OMOTOPE se esiste:

$$F : X \times [0,1] \to Y$$

tale che $F(x,0) = f_0(x)$ e $F(x,1) = f_1(x)$ per ogni $x \in X$.

L'applicazione $F : X \times [0,1] \to Y$ è detta OMOTOPIA tra f_0 e f_1.

Per ogni $(x,t) \in X \times [0,1]$, definiamo:

$$f_t(x) = F(x,t)$$

Allora per $t \in [0,1]$, $f_t : X \to Y$ è continua. f_0 si "deforma" in maniera continua, dunque, fino a coincidere con f_1.

Analogamente, fissato $x \in X$, l'applicazione:

$$\gamma_x(t) \overset{\text{def}}{=} f_t(x)$$

è continua.

Ad esempio, se Y è convesso in $\mathbb{R}^n$ e X è uno spazio topologico qualsiasi, ogni coppia di funzioni continue $f, g : X \to Y$ è omotopa, con l'omotopia:

$$F(x,t) = (1-t) f(x) + t\, g(x)$$

Consideriamo ora $f : S^n \to S^n$, $f(x) = -x$, e $\mathrm{Id} : S^n \to S^n$, $\mathrm{Id}(x) = x$. Se n è dispari, f e Id sono omotope. Se $n = 2k-1$, consideriamo:

$$S^n = \{ z \in \mathbb{C}^k \mid \|z\| = 1 \},$$

e l'omotopia è data da:

$$F(z,t) = z e^{i\pi t}$$

Se n è pari f e Id non sono omotope, cosa difficile da dimostrare, e perciò non la faremo.

Se però $f, g : S^n \to S^n$ sono tali che $f(x) \neq -g(x)$ per ogni $x \in S^n$, allora f e g sono omotope, e l'omotopia è:

$$F(x,t) \quad \frac{(1-t) f(x) + t\, g(x)}{\| (1-t) f(x) + t\, g(x) \|}$$

In particolare, $f : S^n \to S^n$ tale che $f(x) \neq -x$ per ogni $x \in S^n$ è omotopa all'identità; se è tale che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in S^n$, allora è omotopa alla mappa antipodale.

Dimostriamo ora che l'omotopia è una relazione di equivalenza su $C(X,Y)$:

- $f \sim f$: basta considerare $F(x,t) = f(x)$;
- $f \sim g \Rightarrow g \sim f$: basta considerare $F(x,t) \overset{\text{def}}{=} G(x, 1-t)$;
- $f \sim g$, $g \sim h \Rightarrow f \sim h$. Se $F(x,t)$ e $G(x,t)$ sono le due omotopie date per ipotesi, allora $f \sim h$, con l'omotopia:

$$H(x,t) = \begin{cases} F(x,2t) & , 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ G(x,2t-1) & , \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Una applicazione continua $f: X \to Y$ si dice una EQUIVALENZA OMOTOPICA se esiste $g: Y \to X$ continua tale che:

- $(g \circ f)$ è omotopa a Id_X;
- $(f \circ g)$ è omotopa a Id_Y.

Due spazi si dicono OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI se esiste un'equivalenza omotopica $f: X \to Y$.

Due spazi omeomorfi sono omotopicamente equivalenti (ciò è evidente); il viceversa non è vero in effetti, ad esempio, tutti i sottoinsiemi convessi e non vuoti di $\mathbb{R}^n$ sono omotopicamente equivalenti (ma non omeomorfi, in genere).
Siano X e Y questi due spazi: accettiamo due funzioni continue (ad esempio costanti) $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$.
Allora, prendo X e Y convessi, $gf: X \to X$ e $fg: Y \to Y$ sono omotope alle identità. X e Y sono omotopicamente equivalenti, dunque.

Dimostriamo ora un lemma.

LEMMA

Siano $f, g: X \to Y$ due applicazioni continue. Se f e g sono omotope, allora:

$$\pi_0(f) = \pi_0(g): \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$$

In particolare, se $f: X \to Y$ è un'equivalenza omotopica, $\pi_0(f)$ è biiettiva.

Dimostriamo dimostriamo che per ogni $x \in X$ $f(x)$ e $g(x)$ appartengono alla stessa componente connessa per archi di Y. Sia:

$$F : X \times I \to Y \quad , \quad I = [0,1]$$

un'omotopia tra f e g. Allora, se $\tilde{F}_x(t) \overset{\text{def}}{=} F(x,t)$, $f(x)$ e $g(x)$ sono gli estremi del cammino $\tilde{F}_x : [0,1] \to Y$, che per la prima parte del lemma è dimostrato.

Sia ora $f : X \to Y$ un'equivalenza omotopica, e sia $g : Y \to X$ continua e tale che fg e gf sono omotope a Id_Y e Id_X rispettivamente. Per quanto appena dimostrato, le applicazioni seguenti sono uguali ed identità:

$$\pi_0(fg) = \pi_0(f)\pi_0(g) : \pi_0(Y) \to \pi_0(Y)$$

$$\pi_0(gf) = \pi_0(g)\pi_0(f) : \pi_0(X) \to \pi_0(X)$$

Dunque $\pi_0(f)$ è invertibile, con inverso $\pi_0(g)$, c.v.d.

Uno spazio topologico si dice CONTRATTILE se è omotopicamente equivalente ad un punto. In maniera equivalente, X è contraibile se esiste un'applicazione continua tale che Id_X sia omotopa ad una costante.

Per il lemma appena dimostrato, ogni spazio contraibile è connesso per archi.

OSSERVAZIONE

Spesso due spazi omotopicamente equivalenti si dicono anche, più informalmente, OMOTOPI, oppure aventi lo STESSO TIPO DI OMOTOPIA.

RETRAZIONI E DEFORMAZIONI

Sia X uno spazio topologico. Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice RETRATTO di X se esiste $r : X \to Y$ continua (detta RETRAZIONE) tale che $r(y) = y$ per ogni $y \in Y$.

Un sottospazio $Y \subseteq X$ si dice RETRATTO PER DEFORMAZIONE di X se esiste $R : X \times I \to X$ continua, detta DEFORMAZIONE di X su Y, tale che:

- $R(x, 0) \in Y$ e $R(x, 1) = x \quad \forall x \in X$;
- $R(y, t) = y \quad \forall y \in Y, \forall t \in I$.

Ad esempio $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si retrae per deformazione su S^{2}, tramite la deformazione:

$$R(x, t) = t \frac{x}{\|x\|} + (1 - t)\, x$$

e $R_3 : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to S^2$,

$$x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$$

Analogamente su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus p_0$. Ogni iperpiano non passante per p_0 si retrae per deformazione di $\mathbb{P}^n \setminus p_0$. Sia, ad esempio, $p_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Allora, se r è la retrazione, l'omotopia $R(x, t)$ tra r e $\mathrm{Id}_{\mathbb{P}^n \setminus p_0}$ è data da:

$$R([x_0, \dots, x_n], t) = [t x_0, \dots, x_n]$$

Il discorso è facilmente generalizzabile: se consideriamo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, e due rette sghembe r e s, ad esempio, supponendo $r = \{x_2 = x_3 = 0\}$, e $s = \{x_0 = x_1 = 0\}$, allora:

$$r : \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) \setminus r \to s$$

$$[x_0, x_1, x_2, x_3] \mapsto [0, 0, x_2, x_3],$$

mediante:

$$F([x], t) = [t x_0, t x_1, x_2, x_3]$$

PROPOSIZIONE

Siano X uno spazio topologico e $Y \subseteq X$ un retratto per deformazione di X. Allora Y è un retratto di X e l'inclusione:

$$i : Y \hookrightarrow X$$

è una equivalenza omotopica.

Dim.

Sia R la deformazione di X su Y:

$$R : X \times [0,1] \to X$$

Sia $r : X \to Y$ tale che:

$$R(x,0) = i(r(x))$$

Allora r è una retrazione, e R è un'omotopia tra $i \circ r$ e Id_X. Inoltre $r \circ i = \mathrm{Id}_Y$, da cui r e i sono equivalenze omotopiche, c.v.d.

Consideriamo $\mathbb{R}^3 - \{z\}$, con z retta. Allora esiste una retrazione per deformazione su S^1: senza perdere di generalità, sia:

$$z = \{x = y = 0\}$$

Consideriamo l'applicazione:

$$\alpha : \mathbb{R}^3 - z \to S^1 \times \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \to \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right)$$

Per concludere, consideriamo:

$$\beta : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1$$
$$\left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, z\right) \to \left(\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}\right)$$

Allora:

$$\beta \circ \alpha : \mathbb{R}^3 - z \to S^1$$

è una retrazione cercata. Infine:

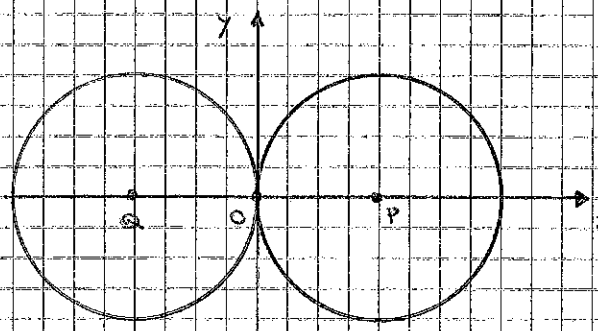
$$R : (\mathbb{R}^3 - z) \times [0,1] \to \mathbb{R}^3$$
$$(x,y,z,t) \to \left(\lambda_t, \mu_t, (1+t)z\right),$$

con:

- $\lambda_t = (1-t)x + t\dfrac{x}{x^2+y^2}$;
- $\mu_t = (1-t)y + t\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

ESEMPI DI DEFORMAZIONI

Consideriamo lo spazio topologico $\mathbb{R}^2 - \{P, Q\}$.
Vogliamo dimostrare che esso si può ridurre a una coppia di dischi "bucati" centrati in P, Q e tangenti in un punto:



Senza perdere di generalità, siano $P = (1, 0)$, $Q = (-1, 0)$.
Cominciamo con il considerare i punti $(x, y) \in \mathbb{R}^2 - \{P, Q\}$ punti "esterni" alla figura, cioè non appartenenti alla parte interna dei due dischi, poniamo di prendere il punto (x, y_0) di intersezione della verticale passante per (x, y) con la frontiera dei due dischi, o con la retta $y = 0$:

$$R : \mathbb{R}^2 - \{P, Q\} \to \mathbb{R}^2 - \{P, Q\}$$
$$R((x, y), t) = (1 - t)(x, y) + t(x, y_0),$$

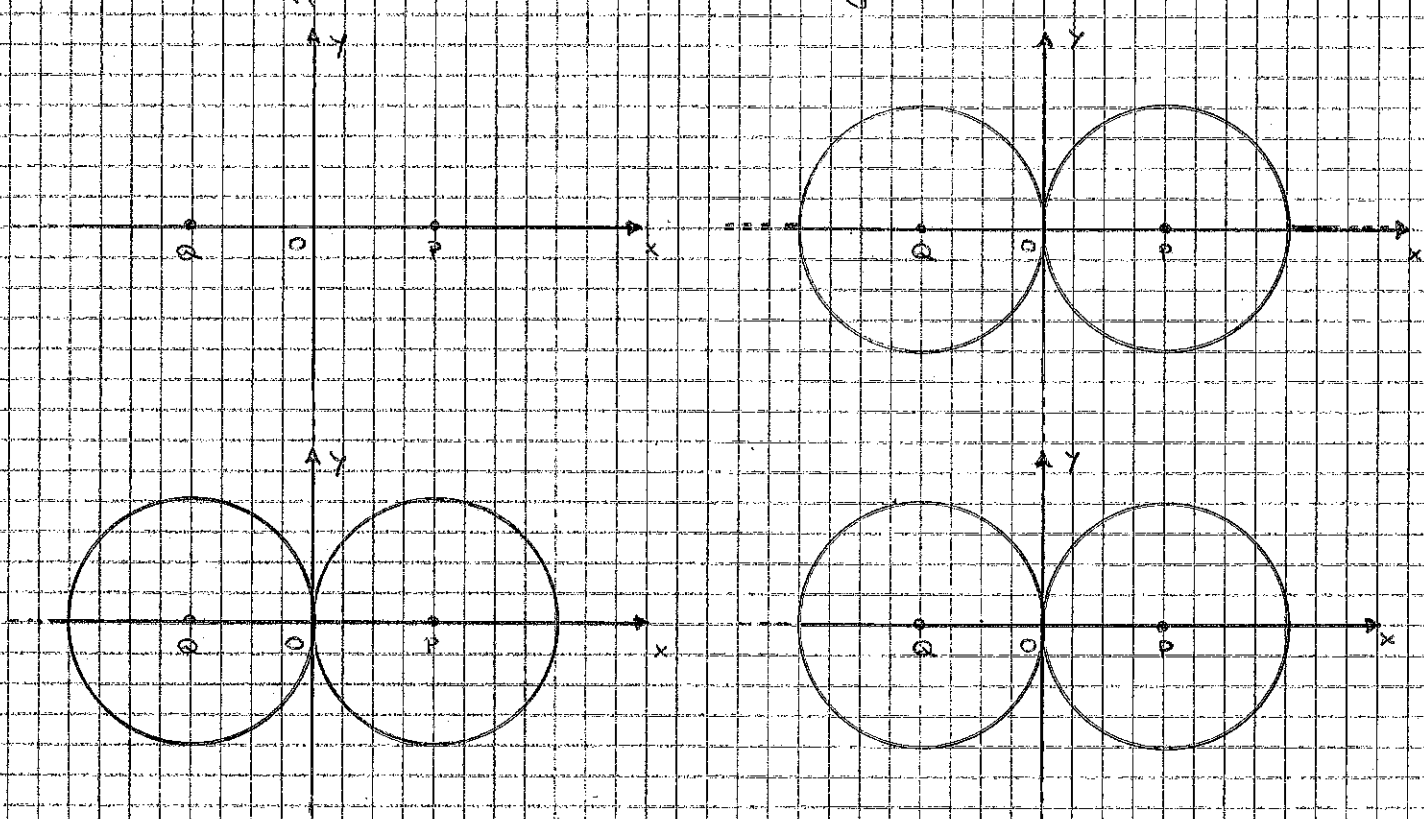
è questa è una deformazione.

A questo punto, restringiamo la retta $y = 0$ ai punti $(-2, 0)$ (per $x < -2$) e $(2, 0)$ (per $x > 2$):

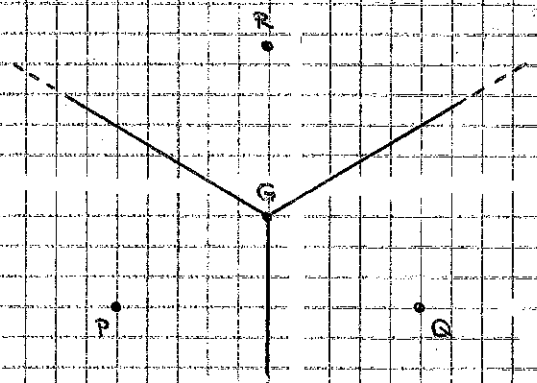
$$S(x, 0) = (-2, 0), \quad x \leq -2$$
$$S(x, 0) = (2, 0), \quad x \geq 2$$
$$S(x, 0) = (x, 0), \quad -1 < x < 2,$$

è anche questa è una deformazione.
Infine, abbiamo già visto che $D^n - \{0\}$ si retrae per deformazione su S^n, di qui la tesi.

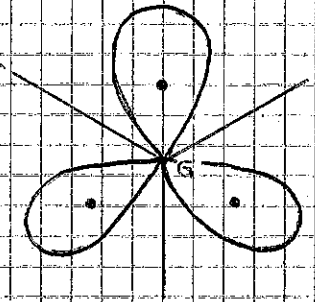
Ecco una rappresentazione della deformazione:



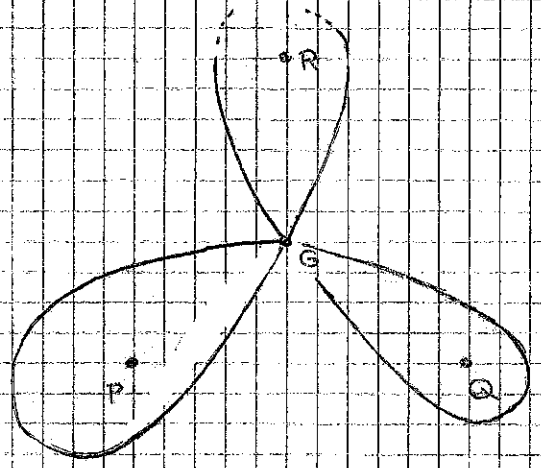
Supponiamo ora che sia $R = \{P, Q, R\}$ senza perdere di generalità, siano P, Q, R vertici di un triangolo equilatero di baricentro $(0,0,0)$. Consideriamo le semirette passanti per i punti medi del triangolo $\hat{PQR}$ e partenti da O:



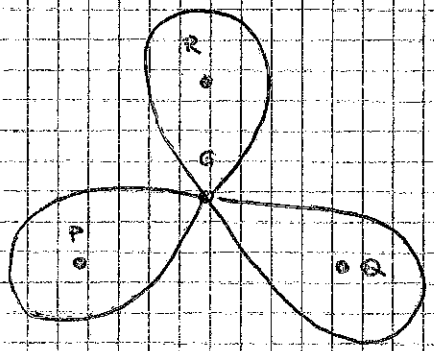
Scegliamo allora tre circa chiuse che si incontrano in O e che siano il bordo di tre regioni omotope, come in figura:



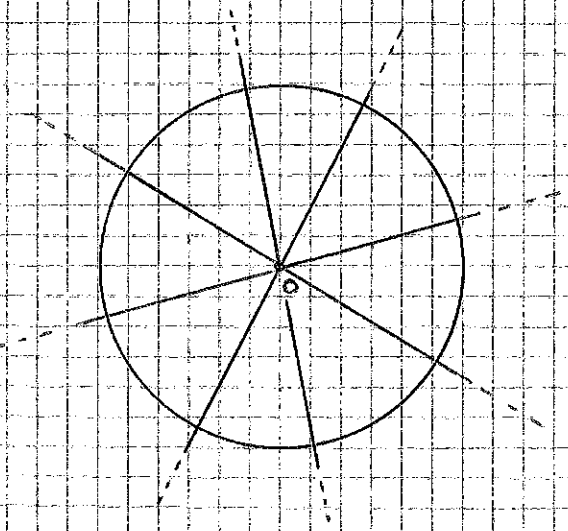
stesso, per ogni punto esterno alle regioni convesse, si può considerare la semiretta uscente da O e passante per il punto, e proiettare dunque il punto sulla figura (che consiste in un BOUQUET di curve convesse:

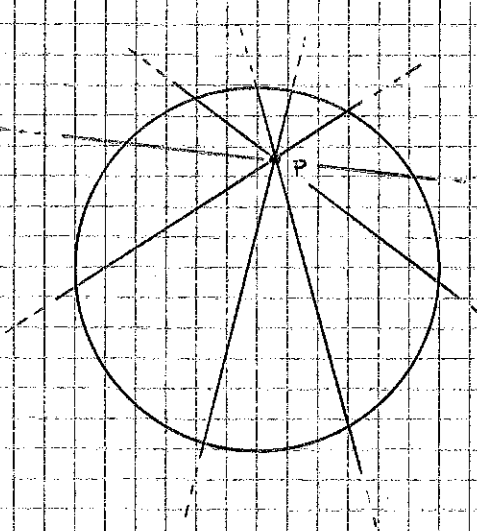


A questo punto, sfruttiamo la convessità delle regioni per deformare la parte interna a cerchiera:



Per ritrovare una regione convessa di due bocche, usiamo la stessa tecnica che usiamo per la figura S^3:





In generale, $R^2 = \{p_1, \dots, p_n\}$ è ottenibile per deformazione a un bouquet di n curve concrete aventi un unico punto in comune. Ciò vale anche se alcuni di questi punti sono addirittura coincidenti, anzi la dimostrazione è più chiara.

Consideriamo ora:

$$\Delta^2 \subseteq \mathbb{C}$$

$$\Delta^2 \overset{\text{def}}{=} \{a \in \mathbb{C} \mid |a| \leq 1\}$$

Determiniamo un omeomorfismo di Δ^2:

$$\varphi_a : \Delta^2 \to \Delta^2,$$

tale che induca un omeomorfismo tra $\Delta^2 - \{a\}$ e $\Delta^2 - \{0\}$, con $|a| \in \mathring{\Delta} \Leftrightarrow |a| < 1$. Definiamo:

$$\varphi_a(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{z - a}{1 - \bar{a} z}$$

Notiamo che:

$$\varphi_a(z) = w = \frac{z - a}{1 - \bar{a} z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w(1 - \bar{a} z) = z - a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w - w\bar{a} z = z - a \Rightarrow z = \frac{w + a}{1 + w\bar{a}},$$

da cui:

$$\varphi_a : \mathbb{C} - \left\{\frac{1}{\bar{a}}\right\} \to \mathbb{C}$$

è iniettiva perché ha inversa.

Notiamo che, per $x \in \partial\Delta \Leftrightarrow x = e^{i\theta}$, si ha:

$$\varphi_a(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - a}{1 - \bar{a} e^{i\theta}} = \frac{e^{i\theta} - a}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{a})} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi_a(e^{i\theta})| = 1$$

Per ragioni di continuità, dato che il bordo viene mandato in $\partial\Delta$, la parte interna viene mappata in sé o nella parte esterna, e la parte esterna viene mappata in sé o nella parte interna. Ma:

$$\varphi_a(0) = -a,$$

da cui φ_a induce un omeomorfismo di Δ^2 con sé stesso.

Si ha infine:

$$\varphi_a(a) = a$$

Si dicono tutte cose generalizzate.

Data una struttura S qualsiasi, $a, b \in S$ e un automorfismo $\varphi : S \to S$ tale che $\varphi(a) = b$, le proprietà di b possono essere determinate a partire da quelle di a, coniugando con φ automorfismo φ.

Ad esempio, consideriamo l'omotopia seguente:

$$F : D - \{0\} \times [0,1] \to D - \{0\}$$
$$F(z,1) = Id_{D-\{0\}}$$
$$F(z,0) = r(z),$$

con:

$$r : D - \{0\} \to S^1,$$

tale che:

$$F(z,t) = z \quad \forall z \in S^1.$$

Adesso consideriamo:

$$r : D - \{0\} \longrightarrow S^1$$
$$\varphi_a \downarrow \qquad\qquad \uparrow \varphi_a^{-1}$$
$$D - \{0\} \longrightarrow S^1$$

Se $z \in S^1$:

$$\varphi_a(z) \in S^1 \Rightarrow r(\varphi_a(z)) = \varphi_a(z) \Rightarrow (\varphi_a^{-1} \circ r \circ \varphi_a)(z) = z,$$

come previsto.

Costruiamo ora l'omotopia coniugata:

$$D - \{a\} \times I \xrightarrow{G} D - \{a\}$$
$$\varphi_a \times Id \downarrow \qquad\qquad \uparrow \varphi_a^{-1}$$
$$D - \{0\} \times I \xrightarrow{F} D - \{0\}$$

Effettuiamo le verifiche:

$$G(z,\lambda) = \varphi_\alpha^{-1}\left(F\left((\varphi_\alpha \times Id)(z,\lambda)\right)\right) = \varphi_\alpha^{-1}\left(F\left(\varphi_\alpha(z),\lambda\right)\right) =$$

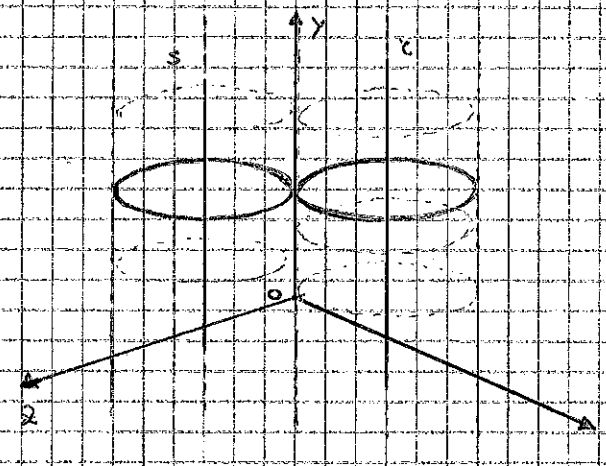
$$= \varphi_\alpha^{-1}\left(\varphi_\alpha(z)\right) = z$$

$$G(z,0) = \varphi_\alpha^{-1}\left(F\left((\varphi_\alpha \times Id)(z,0)\right)\right) = \varphi_\alpha^{-1}\left(F\left(\varphi_\alpha(z),0\right)\right) =$$

$$= \varphi_\alpha^{-1}\left(\tau\left(\varphi_\alpha(z)\right)\right) = (\varphi_\alpha^{-1} \circ \tau \circ \varphi_\alpha)(z) = \tau'(z)$$

Torniamo al caso di $\mathbb{R}^2 - \{p_1, \dots, p_m\}$.

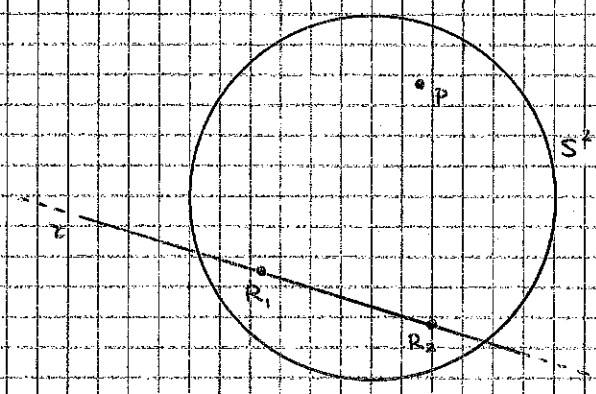
Si può generalizzare al caso di $\mathbb{R}^n$: infatti $\mathbb{R}^n - \{H_1, \dots, H_m\}$, con $H_1, \dots, H_m$ piani $(n-2)$ dimensionali è ritraibile per deformazione ad un bouquet di m circonferenze: questo è il caso di $\mathbb{R}^3$ privato di un numero finito di rette sghembe.



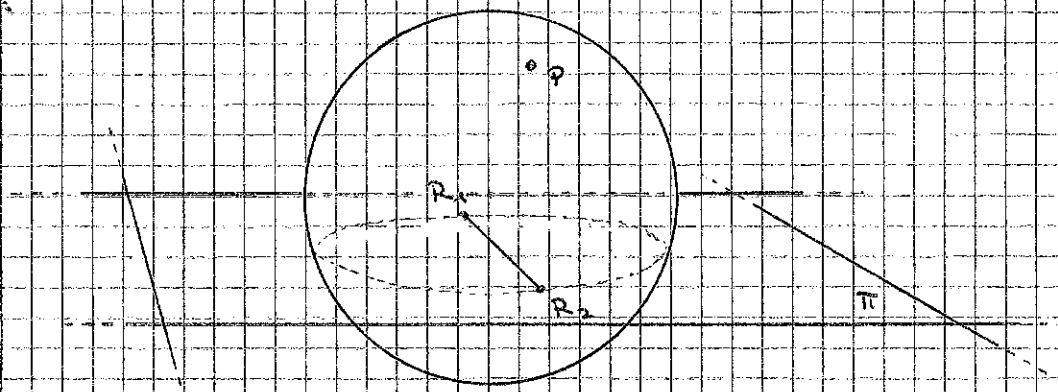
Sia ora $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ la sfera unitaria; sia P un punto di S^2; sia τ una retta secante la sfera e non passante per P.

Consideriamo:

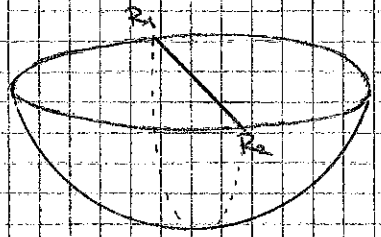
$$X = S^2 \cup \{\tau\} - P$$



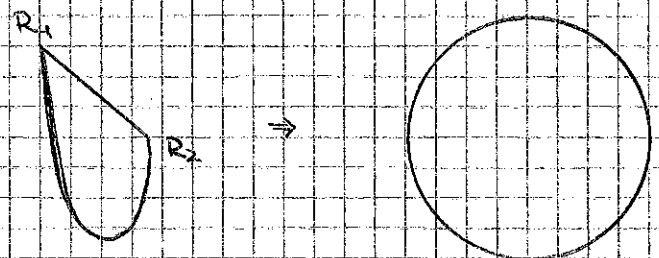
Iniziamo retraendo la retta r nella corda intersezione della sfera unitaria; consideriamo quindi un piano π contenente questa corda, ma non contenente P. Senza perdere di generalità supponiamo che la corda sia il diametro della sezione:



A questa fronte retraiamo la parte di sfera contenente il punto P al suo bordo, ovvero alla parte di S^2 segata dal piano:



A questa fronte "chiudiamo il rientraggio" in questo modo:



Ciò che si ottiene è retraibile per deformazione ad una circonferenza. Dunque X è retraibile per deformazione a S^1.

Come ultimo esempio, consideriamo un Toro privato di un suo punto p:

$$T = S^1 \times S^1$$

$$T - \{p\}$$

Vogliamo dimostrare che esso è retraibile per deformazione su un bouquet di 2 circonferenze.

Dato $I = [0,1]$, si ha:

$$T = \frac{I \times I}{\sim},$$

con la seguente relazione di equivalenza:

$$(x,y) \sim (x',y') \Leftrightarrow x - x' \in \mathbb{Z},\ y - y' \in \mathbb{Z}$$

In effetti:

$$T = \frac{\mathbb{R}^2}{(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})}$$

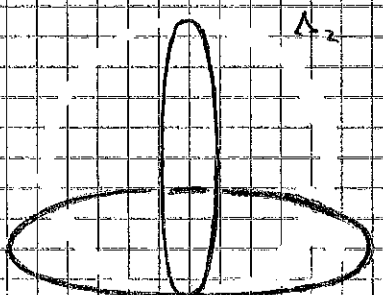
Abbiamo dunque la seguente omotopia:

$$(I \times I) - \{p\} \longrightarrow \partial(I \times I),$$

se $p \in (\overset{\circ}{I} \times I)$. Dunque:

$$\begin{array}{ccc} I \times I - \{p\} & \xrightarrow{\gamma} & \partial(I \times I) \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ T - \pi(p) & \xrightarrow{\gamma'} & \Lambda_2, \end{array}$$

ove Λ_2 è la coppia di circonferenze. In particolare, si noti che π è ligettiva nella parte interna. Rappresentiamo Λ_2:



ESERCIZI VARI

1. Consideriamo un ellisse E, e due punti $P, Q \in E$. Esiste sempre un omeomorfismo che porta P in Q?

Innanzitutto:

$\exists\ \varphi \in \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^2) \ni \varphi(E) = S_1$.

Ora:

$\exists\ r_\alpha \in \mathrm{Aut}(S_1) \ni r_\alpha(\varphi(P)) = \varphi(Q)$,

e questa mappa è omotopa all'identità:

$$R : (S_1, [0,1]) \to S_1$$
$$(t, s) \to e^{i s \alpha} t$$

L'omeomorfismo cercato è dunque:

$$\sigma = \varphi^{-1} \circ r_\alpha \circ \varphi$$

Infatti:

$$\sigma(P) = \varphi^{-1} \circ r_\alpha \circ \varphi(P) = \varphi^{-1}(\varphi(Q)) = Q$$

2. Abbiamo già dimostrato che $GL(n, \mathbb{R})$ ha due componenti connesse: dimostreremo di nuovo questo fatto, alla luce del fatto che $SO(n, \mathbb{R})$ è connesso, e vedremo anche che $GL^+(n, \mathbb{R})$ ha $SO(n, \mathbb{R})$ come retratto di deformazione.

Viceversa le componenti connesse sono almeno 2: infatti, l'applicazione $\det : (GL(n, \mathbb{R})) \to \mathbb{R}^*$ ha l'immagine non connessa.

Consideriamo dunque $GL^+(n, \mathbb{R})$. Per ogni $A \in GL(n, \mathbb{R})$, le colonne di A formano una base come vettori linearmente indipendenti. Siano $v_1, \dots, v_n$ i vettori di una matrice $A \in GL^+(n, \mathbb{R})$.

La relazione seguente:

$$r_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v_1 \to w_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{v_1}{\|v_1\|}$$

è omotopa all'identità tramite l'omotopia:

$$R_1 : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}, [0,1]) \to \mathbb{R}^n$$
$$(v, t) \to (1-t)\, v + t \frac{v}{\|v\|}$$

Abbiamo dunque ritratto per deformazione $GL^+(n, \mathbb{R})$ su:

$$G_1^+(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL^+(n, \mathbb{R}) \mid \|A^1\| = 1 \}$$

Consideriamo ora la seguente retrazione per deformazione:

$$r_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$v_2 \to \tilde{\omega}_2 = v_2 - \langle \omega_1, v_2 \rangle \omega_1,$$

omotopicamente equivalente all'identità per mezzo di:

$$R_2 : (\mathbb{R}^n, [0,1]) \to \mathbb{R}^n$$
$$(v, t) \to v - t \langle \omega_1, v \rangle \omega_1$$

Riconsideriamo ora la retrazione r_1 applicata a $\tilde{\omega}_2$:

$$r_1(\tilde{\omega}_2) = \omega_2 = \frac{\tilde{\omega}_2}{\|\tilde{\omega}_2\|}$$

Abbiamo dunque ritratto per deformazione $GL^+(n, \mathbb{R})$ su:

$$G_2^+(n, \mathbb{R}) = \{ A \in GL^+(n, \mathbb{R}) \mid \|A^1\| = \|A^2\| = 1 \,,\, \langle A^1, A^2 \rangle = 0 \}$$

Si noti che i vettori di matrici sono in ogni loro contenuti in $GL^+(n, \mathbb{R})$, poiché i vettori vengono in ogni momento linearmente indipendenti.

Induttivamente, $GL_m^+(n, \mathbb{R})$ si ritrae dunque per deformazione su $O^+(n, \mathbb{R})$.

È dunque equivalentemente provare che $SO(n, \mathbb{R}) = O^+(n, \mathbb{R})$ è connesso. Sia $A \in O^+(n, \mathbb{R})$ (sia $\{v_1, \dots v_n\}$ la sua forma formata dalle sue colonne, viste come vettori: la base è ortonormale). Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica.

Consideriamo v_1. Si hanno due alternative:

- $\operatorname{Span}(v_1) = \operatorname{Span}(e_1)$. Allora $v_1 = \pm e_1$, da cui o $v_1 = e_1$, e andiamo in altre, oppure $v_1 = -e_1$, ed effettuiamo una retrazione su un qualsiasi piano contenente e_1 (ad esempio $\operatorname{Span}(e_1, e_2)$), ruotando fino a un iperpiano $(n-1)$-dimensionale (nello specifico $\operatorname{Span}(e_2, \dots e_n)$);

- $\mathrm{Span}(e_1) \neq \mathrm{Span}(v_1)$: consideriamo allora $\mathrm{Span}(e_1, v_1)$, ed effettuiamo la rotazione per portare v_1 in e_1. La mappa, analogamente equivalente all'identità, fissa $\mathrm{Span}(v_1, e_1)^\perp$ e manda $\mathrm{Span}(v_1)^\perp$ in $\mathrm{Span}(e_1)^\perp$:

$$\langle \tau(v_2), \dots \tau(v_m) \rangle = \langle e_2, \dots, e_m \rangle$$

A questo punto abbiamo ottenuto una matrice:

$$A = [v_1 | v_2 | \dots | v_m]$$

e la matrice:

$$B_1 = [e_1 | \tau(v_2) | \dots | \tau(v_m)]$$

tale che:

$\forall j = 2, \dots, m : \langle e_1, \tau(v_j) \rangle = 0$

Allora ci si può restringere a $\mathrm{Span}(e_1)^\perp$, e operare induttivamente, fino ad ottenere una matrice:

$$B_{m-2} = [e_1 | e_2 | \dots | e_{m-2} | w_{m-1} | w_m]$$

Dunque A e B_{m-2} sono connesse per archi.

Consideriamo ora $\mathrm{Span}(e_1, \dots e_{m-2})^\perp = \mathrm{Span}(w_{m-1}, w_m) = \mathrm{Span}(e_{m-1}, e_m)$:

- se $\mathrm{Span}(w_{m-1}) = \mathrm{Span}(e_{m-1})$, allora ci sono due possibilità:
  - $w_{m-1} = e_{m-1} \Rightarrow \mathrm{Span}(e_m) = \mathrm{Span}(w_m) \Rightarrow e_m = \pm w_m$;
  - $w_{m-1} = -e_{m-1}$: considerato il piano $\mathrm{Span}(e_{m-1}, e_m)$, effettuando una rotazione su questo piano, si manda w_{m-1} in e_{m-1};
- se $\mathrm{Span}(w_{m-1}) \neq \mathrm{Span}(e_{m-1})$, allora, considerato il piano $\mathrm{Span}(w_{m-1}, e_{m-1})$, esiste una rotazione che manda w_{m-1} in e_{m-1}.

In tutti questi casi, si ha che $\mathrm{Span}(e_1, \dots w_{m-1})^\perp$ viene mappato in $\mathrm{Span}(e_1, \dots e_{m-1})^\perp$, in altri parole w_m viene mappato in e_m o $-e_m$.

Dunque, in conclusione, A è connessa per archi all'identità o alla matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Ma $\det J = -1 < 0$, e ciò è assurdo perché tutte le operazioni eseguite sono state totalmente omotope all'identità, che lascia quindi non cambiare il segno del determinante. Allora ogni matrice $A \in SO(n, \mathbb{R})$ è connessa all'identità: $SO(n, \mathbb{R})$, dunque, è connesso (per archi).

Dunque $GL^+(n, \mathbb{R})$ è connesso.

La stessa dimostrazione fattaci fare ad esempio che $GL^-(n, \mathbb{R})$ è connesso. Dunque $GL(n, \mathbb{R})$ presenta due componenti connesse.

3. Consideriamo:

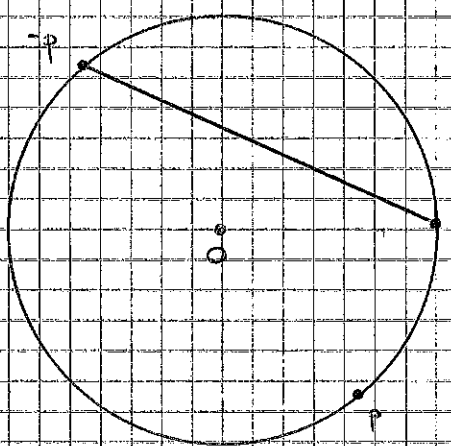
$$X = (S^3 \times S^3) \setminus \Delta = \{(p, q) \in S^3 \times S^3 \mid p \neq q\}$$

Dimostrare che X è omotopicamente equivalente a S^3.

Notiamo immediatamente che $p = -p \Leftrightarrow p = 0 \notin S^3$, da cui il grafico della mappa antipodale è contenuto in X:

$$G = \{(p, -p) \mid p \in S^3\} \subset X$$

Sia $(p, q) \in X$. La corda passante per $-p$ e q non passa per l'origine, perché $p \neq q$. Ciò ci consente di dividere per la norma nella applicazione che segue:



$$F : X \times I \longrightarrow X$$

$$(p, q, t) \longrightarrow \left(p, \frac{(1-t)q - tp}{\|(1-t)q - tp\|}\right)$$

In particolare, F è un'omotopia. Si ha:

$$F(p, q, 1) = (p, -p) \qquad F(p, q, 0) = (p, q)$$

Abbiamo dunque ritratto X per deformazione sul grafico della antipodale. Questo è finalmente omeomorfo a S^3:

$$\Phi : G \longrightarrow S^3$$

$$(p, -p) \longrightarrow p$$

Dunque X è omeomorfo a S^3.

4. Sono:

$$X = \{ A \in M(n, n-1, \mathbb{R}) \mid \operatorname{rk} A = n-1 \}$$

$$GL^+(n,\mathbb{R}) = \{ A \in M(n,\mathbb{R}) \mid \det A > 0 \}$$

Dimostriamo che X e $GL^+(n,\mathbb{R})$ sono omotopicamente equivalenti.

Innanzitutto, la funzione seguente è continua:

$$\rho : GL^+(n,\mathbb{R}) \to X$$
$$(A^1, \dots, A^n) \to (A, \dots, A^{n-1})$$

Consideriamo ora:

$$\sigma : X \to GL^+(n,\mathbb{R})$$
$$(B^2, \dots, B^n) \to (B^1(B), B^2, \dots, B^n),$$

ove:

$$B^1(B) \in \operatorname{Span}(B^2, \dots B^n)^\perp, \quad \|B^1(B)\| = 1, \quad \det(\sigma(B^2, \dots, B^n)) > 0$$

Questa funzione è composizione di funzioni continue, dunque è continua.

Si ha $\rho \circ \sigma = Id_X$. Mentre $\sigma \circ \rho$, anziché essere semplicemente $Id_{GL^+(n,\mathbb{R})}$, poiché si applica un procedimento misto in uno degli esercizi precedenti, fissando i vettori $B^2, \dots B^n$.

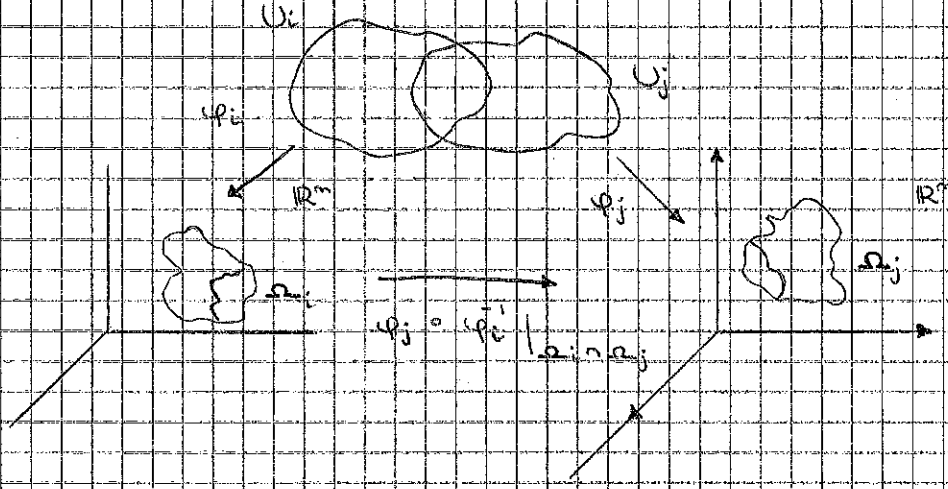
VARIETÀ TOPOLOGICHE

Uno spazio topologico X (qualche autore richiede che sia a base numerabile) si dice una VARIETÀ TOPOLOGICA se X è uno spazio di Hausdorff, e se è dato un ricoprimento di aperti di X ($\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$), e per ogni $i \in I$ è dato un omeomorfismo:

$$\varphi_i : U_i \to \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^m$$

con un aperto di $\mathbb{R}^m$.

Dato questi ipotesi, dati due aperti del ricoprimento U_i, e intersezione non nulla, resta definito un omeomorfismo $U_i \cap U_j$ in sé, detto CAMBIAMENTO DI CARTA:



definiamo:

$$\varphi_{ij} \overset{\text{def}}{=} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} | \Omega_i \cap \Omega_j$$

$$\varphi_{ij} \overset{\text{def}}{=} \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} | \Omega_i \cap \Omega_j : \Omega_i \cap \Omega_j \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

essendo le funzioni φ_{ij} definite in un aperto di $\mathbb{R}^m$ e valori in $\mathbb{R}^m$, si può richiedere che esse siano analitiche, continue, di classe C^k o C^∞.

Una coppia del tipo (U_k, φ_k), con $\varphi_k : U_k \to \Omega_k \subseteq \mathbb{R}^m$ è detta CARTA; l'insieme delle carte $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ è detto ATLANTE.

Sia $f : X \to \mathbb{R}$. allora:

$$f \circ \varphi_i^{-1} : \Omega_i \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R},$$

e ancora una volta posso richiedere che $f \circ \varphi_i^{-1}$ abbia determinate proprietà.

Ad esempio, si può dire che $f : X \to \mathbb{R}$ è di classe C^k se, per definizione, $f \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è di classe C^k per ogni $i \in I$.

Le funzioni φ_{ij} definite precedentemente sono dette CAMBIAMENTI DI CARTA da U_i a U_j.

Diremo che $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ è un atlante di classe C^k se tutte le mappe di cambiamento di carta sono di classe C^k.

Diremo che due carte (U_i, φ_i) e (U_j, φ_j) sono DIFFERENZIABILMENTE C^k-COMPATIBILI se:

$$\varphi_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

è un diffeomorfismo di classe C^k. Se due carte sono differenziabilmente C^k-compatibili, allora sono anche differenziabilmente C^h-compatibili per ogni $h \leq k$.

Diremo dunque che una varietà topologica è una VARIETÀ DIFFERENZIABILE di classe C^k se è dotata di un atlante di carte differenziabili di classe C^k: si dice allora che l'atlante definisce su X una struttura di varietà differenziabile di classe C^k.

Si definisce DIMENSIONE della varietà la dimensione di un qualsiasi aperto nel quale una carta mappa aperti della varietà X. Tale dimensione è ben posta perché le mappe di cambiamento di carta sono omeomorfismi tra aperti di $\mathbb{R}^n$, che quindi hanno la stessa dimensione.

Date due atlanti $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ e $\mathcal{B} = \{(U_j, \varphi_j) \mid j \in J\}$ si dicono EQUIVALENTI se ciascuna carta del primo è differenziabilmente compatibile con ciascuna carta del secondo (se gli atlanti sono di classe C^k, si richiede che le carte siano differenziabilmente C^k compatibili).

Una STRUTTURA DIFFERENZIABILE C^k su uno spazio topologico è una classe di atlanti di classe C^k equivalenti.

ESEMPI DI VARIETÀ TOPOLOGICHE

Vediamo ora alcuni esempi di varietà topologiche.

Ogni $U \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto è una varietà topologica differenziabile di classe C^∞: un suo atlante è dato dalla unica carta (U, i), ove:

$$i : U \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

è l'inclusione. La sua dimensione è m.

In particolare, $\mathbb{R}^m$ è una varietà differenziabile C^∞ di dimensione m. Basta notare che $(\mathbb{R}^m, Id)$ è un atlante.

Più in generale, ogni aperto $S \subseteq X$, munito della topologia indotta dall'ambiente, è una varietà differenziabile della stessa dimensione. Se $\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ è un atlante di X, allora è atlante per l'aperto S anche la sottofamiglia data da:

$$\mathcal{A}_S = \{(U_i \cap S, \varphi_i|_{U_i \cap S}) \mid i \in \Lambda_S\},$$

con:

$$\Lambda_S = \{i \in I \mid U_i \cap S \neq \emptyset\}$$

Sia ora D un sottoinsieme discreto di uno spazio topologico X. Allora D è una varietà topologica di dimensione 0, e l'atlante è dato da:

$$\mathcal{A} = \{(\{p_i\}, \varphi_i) \mid i \in I\},$$

con:

$$\varphi_i : \{p_i\} \to \{0\}$$
$$p_i \to 0$$

Analizziamo ora il Teorema della funzione implicita. Esso afferma che, data una funzione $f : G \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ di classe C^1, e un punto $(x_0, y_0) \in G$ tale che:

$$f(x_0, y_0) = 0, \quad D_2 f(x_0, y_0) \neq 0,$$

allora è insieme:

$$\Gamma = \{(x, y) \in G \mid f(x, y) = 0\}$$

è localmente in $(x_0, y_0) \in \Gamma$ il grafico di una funzione di classe C^1 nella prima variabile.

In altre parole, esistono $h, k > 0$ tali che esiste una funzione $g \in C^1$:

$$g : [x_0 - h, x_0 + h] \to [y_0 - k, y_0 + k]$$

tale che il suo grafico sia:

$$\Gamma = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$$

OSSERVAZIONE

Se invece $D_1 f(x_0, y_0) = 0$, allora la funzione di classe C^1 sarà nella seconda variabile.

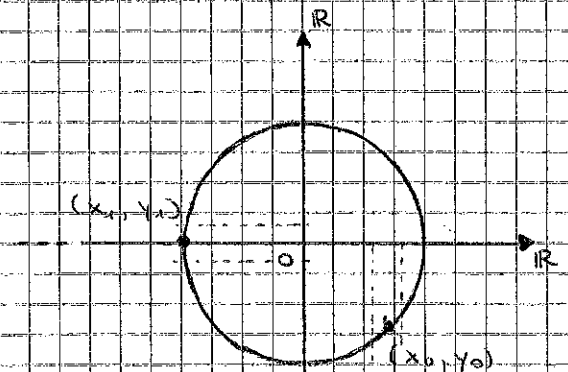
Si ottiene che $f \in C^1$ è tale che:

$\forall (x_0, y_0) \in G = \mathbb{R}^2$ s.t. $f(x_0, y_0) = 0$: $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$,

allora l'insieme $\Gamma = \{(x, y) \in G \mid f(x, y) = 0\}$ è localmente il grafico di una funzione di classe C^1 in una delle due variabili, cioè Γ è una varietà di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1.

Ad esempio, $\Omega \in \mathbb{R}^2$ è una varietà topologica di dimensione 1:

$$\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$



In fatti:

$$\nabla f = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \Rightarrow \forall (x, y) \in \Gamma : \nabla f(x, y) \neq 0$$

Se dunque (x, y) è tale che $D_2 f(x, y) \neq 0$, allora:

- se $x > 0$, la funzione implicita è $u(x) = \sqrt{1 - x^2}$;
- se $x < 0$, la funzione implicita è $u(x) = -\sqrt{1 - x^2}$;

Se invece (x, y) è tale che $D_1 f(x, y) \neq 0$, allora:

- se $y > 0$, la funzione implicita è $v(\,) = \sqrt{1 - y^2}$;
- se $y < 0$, la funzione implicita è $v(\,) = -\sqrt{1 - y^2}$.

Scriviamo quindi un atlante di carte del tipo (U_i, φ_i), ove

$$\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to \sqrt{1 - x^2}$$

$$\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to -\sqrt{1 - x^2}$$

ad esempio.

Prima di continuare, diciamo che, data una varietà topologica X, un sottoinsieme $Y \subseteq X$ è una SOTTOVARIETÀ TOPOLOGICA di X una varietà topologica se dotato della struttura indotta. Se X è munito dell'atlante

$$\mathcal{A} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\},$$

allora $Y \subseteq X$ è una sottovarietà topologica se è una varietà topologica, una volta munito dell'atlante

$$\mathcal{A}' = \{(U_i \cap Y, \varphi_i|_{U_i \cap Y} \mid i \in I_Y\},$$

con:

$$I_Y = \{i \in I \mid U_i \cap Y \neq \emptyset\}$$

Dimostreremo ora, in generale, che S^m è una varietà topologica di dimensione m, poi lo faremo per PROIEZIONE STEREOGRAFICA.

Sia $\mathbb{R}^{m+1} = \langle x_1, x_2, \dots, x_{m+1} \rangle$, e sia $S^m = \{(x_1, \dots, x_{m+1}) \mid \|\underline{x}\|_2 = 1\}$.

Allora:

$$S^m = U_N \cup U_S,$$

con:

$$U_N = S^m \setminus \{(0, \dots, 0, 1)\}$$

$$U_S = S^m \setminus \{(0, \dots, 0, -1)\}$$

Scriviamo, per proiezione stereografica, indotte due omeomorfismi $\varphi_N : U_N \to \mathbb{R}^m$, $\varphi_S : U_S \to \mathbb{R}^m$, ove:

- $\varphi_N(x_1, \dots, x_{m+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{m+1}}, \dots, \frac{x_m}{1 - x_{m+1}} \right)$,
- $\varphi_S(x_1, \dots, x_{m+1}) = \left(\frac{x_1}{1 + x_{m+1}}, \dots, \frac{x_m}{1 + x_{m+1}} \right)$.

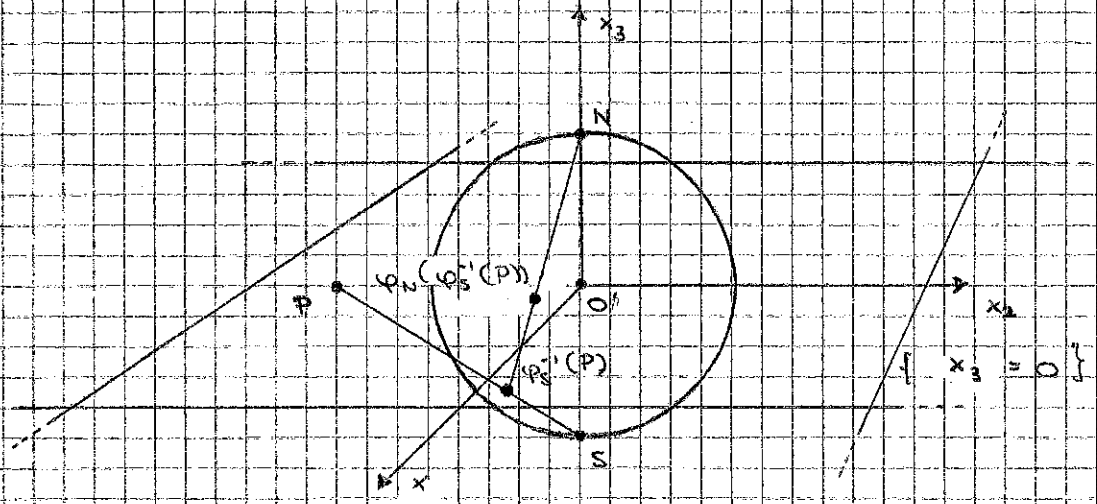
Sappiamo che questi sono omeomorfismi. Allora un atlante è il seguente:

$$\mathcal{A} = \{(U_N, \varphi_N), (U_S, \varphi_S)\},$$

S^n è una varietà topologica di dimensione n.

Vogliamo ora descrivere la mappa del cambiamento di carte, definita su $\varphi(U_N \cap U_S) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1,\ x_{n+1} \neq 1\}$ e valori in $\varphi(U_N \cap U_S)$.

Rappresentiamo la situazione in dimensione 3:

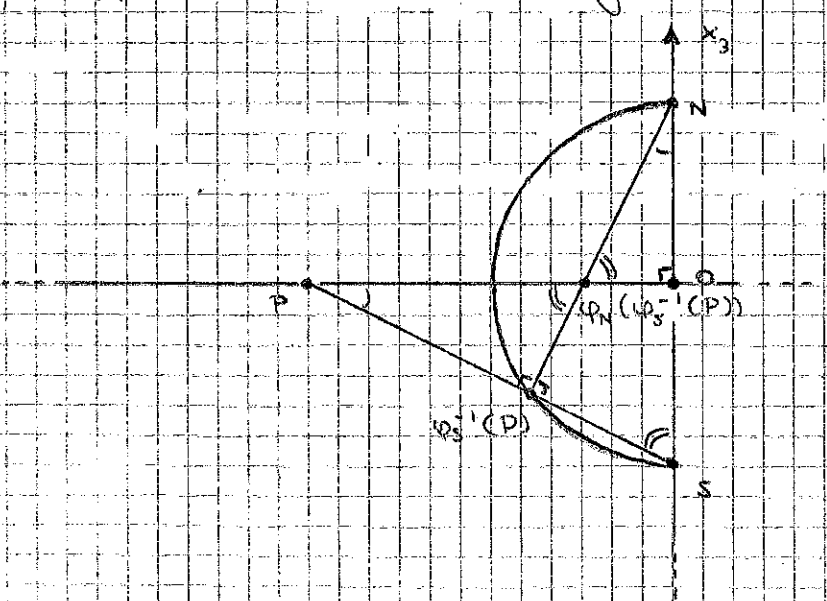


In modo del tutto, in generale, $\varphi_N(U_N \cap U_S) = \varphi_S(U_N \cap U_S) = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Consideriamo $P = (u, v, 0) \in \{x_3 = 0\} \setminus \{0\}$.

Consideriamo il piano passante per O, S, P: esso contiene $\varphi_S^{-1}(P)$, e quindi $\varphi_N(\varphi_S^{-1}(P))$, appartengono a questo piano.

Una rappresentazione è la seguente:



si ha evidentemente:

$$OP : OS = ON : OT \qquad T = \varphi_N(\varphi_S^{-1}(P))$$

$$OT \cdot OP = OS \cdot ON = 1,$$

da cui T si ottiene di P moltiplicando le coordinate di un fattore opportuno, in modo da soddisfare le relazioni scritte sopra. Si ha:

$$\overline{OP} = u^2 + v^2 \Rightarrow \overline{OT} = \frac{1}{u^2+v^2},$$

e si noti che $\frac{1}{u^2+v^2}$ è ben definito perché $u^2+v^2 > 0$ in $\{x_3 = 0\} \setminus \{0\}$. Dunque:

$$T = \left(\frac{\frac{u}{x}}{\frac{u^2+v^2}{x^2}}, \frac{\frac{v}{x}}{\frac{u^2+v^2}{x^2}}, 0 \right),$$

$$\frac{u^2+v^2}{x^2} = \frac{1}{u^2+v^2}$$

dalla quale $x^2 = (u^2+v^2)^2$, ovvero $x = u^2+v^2$ (perché $x > 0$). La quale si legge:

$$\varphi_N(\varphi_S^{-1}) : \{x_3 = 0\} \setminus \{0\} \to \{x_3 = 0\} \setminus \{0\}$$

$$(u, v, 0) \to \left(\frac{u}{u^2+v^2}, \frac{v}{u^2+v^2}, 0 \right)$$

Questa funzione è di classe C^∞ del suo dominio, dunque la varietà è una varietà differenziabile di classe C^∞, per cui vale che $\dim = 2$ (in realtà vale per ogni $n \in \mathbb{N}_+$).

Come ultimo esempio, consideriamo:

$$\pi : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \xrightarrow{R} \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$$

con:

$$v R w \iff \exists \lambda \neq 0 \ : \ v = \lambda w$$

Definiamo:

$$\omega_i = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 0 \}$$

$$H_i = \{ x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_i = 1 \}$$

L'intersezione di H_i con una retta passante per l'origine è:

- ϕ, se la retta è contenuta in ω_i;
- un punto, in caso contrario.

Allora $\pi|_{H_i}$ è invertibile, e $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) - \pi(H_i) = \pi(\omega_i) \simeq \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{R})$.

Ogni punto di $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ è espresso da una m-upla omogenea:

$$P = [x_1, \dots, x_{m+1}],$$

con almeno una coordinata omogenea non nulla: dunque P appartiene ad uno degli iperpiani affini H_i. Notiamo che:

$$\begin{aligned} \varphi_i : \pi(H_i) &\to \mathbb{R}^m \\ [x_1, \dots, 1, \dots x_{m+1}] &\to (x_1, \dots x_{m+1}), \end{aligned}$$

da cui $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ è formata dall'unione di $(m+1)$ iperpiani del tipo $\pi|_{H_i}(H_i) \simeq \mathbb{R}^m$, da cui $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ è una varietà topologica di dimensione m.

Notiamo che $\pi : H_i \to \pi(H_i)$ è un omeomorfismo, e $\pi(H_i)$ è aperto in $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, da cui $\pi^{-1}(\pi(H_i))$ è un aperto saturo per ogni $i = 1, \dots m+1$.

$\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ è dunque una varietà topologica, con un atlante finito:

$$\mathcal{A} = \{(\pi^{-1}(H_i), \varphi_i) \mid i = 1, \dots, m+1\}$$

Vogliamo ora vedere che tipo di varietà è: studiamo dunque le sovrapposizioni di carte.

Consideriamo, senza perdere di generalità, H_1 e H_2. Si ha:

- $H_1 = \{(1, x_2, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}\}$;
- $H_2 = \{(x_1, 1, \dots, x_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1}\}$;
- $\pi(H_1) = \{[1, x_2 \dots x_{m+1}] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})\}$;
- $\pi(H_2) = \{[x_1, 1, \dots x_{m+1}] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})\}$.

Sia $P \in H_1 \cap H_2$. Allora $\pi(P) = [1, a_2, \dots, a_{m+1}] = [b_1, 1, \dots b_{m+1}]$.

Le due m-uple omogenee sono la stessa:

$\exists \lambda \in \mathbb{R}^*$ s.t. $(1, a_2, \dots, a_{m+1}) = \lambda (b_1, 1, \dots, b_{m+1})$

Allora:

$$\lambda b_1 = 1, \quad a_2 = \lambda \Rightarrow b_1 = \frac{1}{a_2}, \quad a_2 = \frac{1}{b_1}$$

Allora:

$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{b_0} \\ a_2 = \frac{b_2}{b_0} \\ a_3 = \frac{b_3}{b_0} \\ \vdots \\ a_n = \frac{b_n}{b_0} \end{cases}$$

Il cambiamento di coordinate avviene per mezzo di funzioni razionali a denominatore mai nullo. Dunque sono anche differenziabili.

In conclusione, dunque, $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è una varietà differenziabile di dimensione n; è intuitivo pensare che, nel caso complesso, $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ sia una varietà differenziabile di dimensione $2n$.

Nel caso $n=2$:

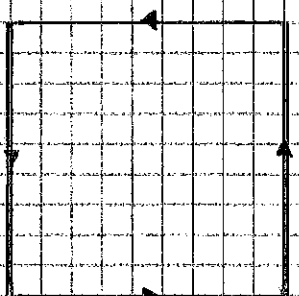
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \cong S^2 / \pm \mathrm{Id}$$

Una calotta semisferica sarà dunque un dominio fondamentale. Infatti:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \cong S^2/\pm\mathrm{Id} \cong S^2 \cap \{x_3 \geq 0\}/\pm\mathrm{Id} \cong D^2/\pm\mathrm{Id}$$

A questo punto il disco può essere ridotto ad un quadrato di lato unitario. Infatti, in conclusione:

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = [0,1]\times[0,1]/\pm\mathrm{Id}$$



SOMMA CONNESSA TRA VARIETÀ

La SOMMA CONNESSA è un'operazione eseguita in geometria per creare una nuova varietà a partire da due varietà assegnate, generalmente topologiche o differenziabili.

Siano M e N due varietà topologiche dello stesso dimensione n. Siano $B_M \subseteq M$ e $B_N \subseteq N$ due aperti omeomorfi a:

$$B^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < 1 \}$$

Siano $\overline{B_M}$ e $\overline{B_N}$ omeomorfi a:

$$\overline{B^n} = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1 \},$$

e in particolare le frontiere ∂B_M e ∂B_N omeomorfe a:

$$S^n = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1 \}$$

Sia $\varphi : \partial B_M \to \partial B_N$ un omeomorfismo.

Si definisce SOMMA CONNESSA di M e N lo spazio che si ottiene rimuovendo le due palle aperte da M e N e incollando successivamente i nuovi bordi sferici tramite l'omeomorfismo φ.

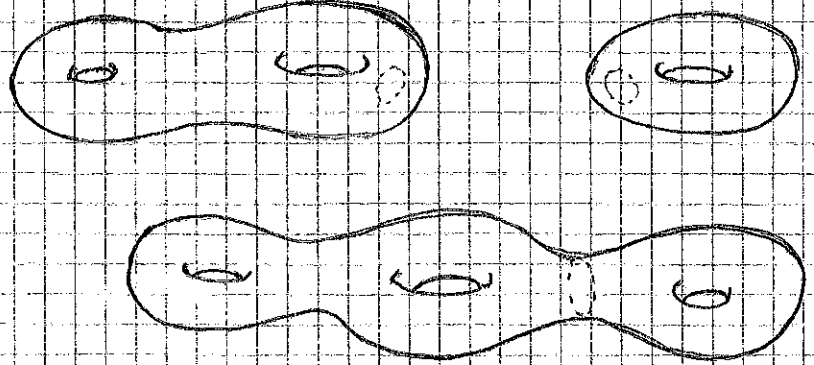
Esso si indica con $M \# N$, ed è una varietà di dimensione n. È lo spazio:

$$M \# N \overset{\text{def}}{=} (M \setminus B_M) \cup (N \setminus B_N) / \sim,$$

dove

$$\forall\, x \in \partial B_M,\ \forall\, y \in \partial B_N : \quad x \sim y \iff y = \varphi(x).$$

Ad esempio:



Notiamo che se ρ è S_3 è l'elemento neutro rispetto all'operazione di somma e prodotto:

$$S_3 \# \rho = \rho \# S_3 = \rho$$

La varietà ottenuta $\rho \# N$ dipende a priori dalla scelta degli operti B_1, B_2, e anche dall'omeomorfismo φ. Se però le varietà M e N sono differenziabili e φ è un diffeomorfismo, la scelta degli operti non influisce sul risultato.

Inoltre, se ψ è sostituito da φ' (composto a ρ) il risultato non cambia, sempre, e questo di nuovo, ci dice due omeomorfismi da S^3 in sé: quello che conserva l'orientazione dello sfera, e quello che la inverte.

ORIENTAZIONE E VARIETÀ ORIENTABILI

Il concetto base di orientazione è definito in uno spazio vettoriale reale, ad esempio quello euclideo (dunque il piano cartesiano, e meno di immaginismo). La definizione si può poi estendere a superfici e varietà.

Dato uno spazio vettoriale V, dire un'ORIENTAZIONE allo spazio equivale a dividere in due classi le basi di tale spazio: quelle POSITIVE e quelle NEGATIVE.

Date due basi di V, esiste un isomorfismo che porta la prima base nella seconda: esso può essere rappresentato da una matrice quadrata a determinante non nullo (dunque positivo o negativo). Diremo che due basi sono entrambe positive, o entrambi negative, se il determinante di suddetta matrice è positivo; diremo che non lo sono in caso contrario.

Sfruttando la proprietà del determinante, si può facilmente che questa è una relazione di equivalenza.

A priori, però, non si sa quali basi sono positive e quali negative: si può solo distinguerle mediante parola. Dare un'orientazione a V significa scegliere quali è la classe delle basi positive: la scelta può essere effettuata in due modi.

Usualmente, uno spazio euclideo si considera già intrinsecamente orientato: si dice infatti che una base $\{v_1 \dots v_n\}$ è positiva se e solo se $\det(v_1 | \dots | v_n) > 0$. Si noti che, con questa definizione, la base canonica $e = \{e_1, \dots, e_n\}$ è positiva: $\det I = 1 > 0$.

Nel caso particolare di $\mathbb{R}^3$, la regola della mano destra consente di capire se una data base è positiva o negativa.

Per una varietà, la nozione di orientazione risulta essenzialmente locale: la varietà può essere ottenuta localmente.

Le varietà sono dunque dette ORIENTABILI o NON ORIENTABILI a seconda che siano o meno orientabili.

Una varietà differenziabile, connessa in ogni punto della varietà sono effettivamente suddivisi in due classi, e si può dunque assegnare un'orientazione.

Considerata una varietà, esiste la possibilità che un oggetto che effettua un viaggio lungo un percorso chiuso all'interno della varietà ritorni con un'orientazione diversa alla fine? Se ciò accade, la varietà non è orientabile; altrimenti, essa è orientabile.

Per una curva, fissare un'orientazione equivale a fissare un verso di percorrimento: una curva è sempre orientabile.

La sfera e il toro sono esempi di superfici orientabili; il nastro di Möbius, invece, non è orientabile.

Equivalentemente, una varietà differenziabile di dimensione n è orientabile se esiste un atlante in cui tutti i cambiamenti di carte hanno matrice Jacobiana con determinante strettamente positivo.

TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE DI DIMENSIONE 2 SENZA BORDO

Un sottoinsieme $S \subseteq \mathbb{R}^3$ si dice SUPERFICIE se per ogni $x \in S$ esiste un intorno aperto U e una funzione $F: U \to \mathbb{R}$ di classe C^1 tale che:

$$\forall x \in U : \quad x \in S \iff F(x) = 0,$$

ovvero:

$$U \cap S = F^{-1}(0),$$

e inoltre ovunque il gradiente non nullo:

$$\nabla F \neq 0$$

Una superficie è, in generale, una varietà topologica di dimensione 2. Una superficie CON BORDO è una VARIETÀ CON BORDO di dimensione 2: per ogni punto esiste un suo intorno aperto omeomorfo ad un aperto di $\mathbb{R}^3$ o a un SEMIAPERTO di $\mathbb{R}^2$, ovvero ad un sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$ della forma:

$$A \cap \{(x,y) \mid x \geq 0\},$$

con A aperto di $\mathbb{R}^2$.

Una superficie senza bordo è detta CHIUSA. Ogni superficie chiusa ha almeno due lati distinti, ed è orientabile. Alcuni esempi sono la sfera e il toro.

Una superficie è di TIPO FINITO se si ottiene rimuovendo R punti da una superficie compatta con bordo. La superficie è compatta se e solo se $= 0$.

Se una superficie è con bordo, i punti di bordo, sono quelli tali che ogni loro intorno è omeomorfo ad un semiaperto di $\mathbb{R}^2$. Formano un bordo che è omeomorfo ad un numero k di circonferenze disgiunte. Una superficie è senza bordo se e solo se $k = 0$. Una superficie è chiusa, allora, se $k = R = 0$.

Abbiamo già parlato di varietà orientabili e non.

definiamo poi, data una superficie, un parametro ε, che vale 0 se la superficie non è orientabile, e 1 in caso contrario.

Presentiamo ora alcune superfici che sono dette PRIME, perché non si possono ottenere come somma connessa di altre superfici. Esse sono sostanzialmente tre:

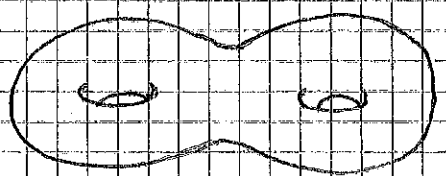
- la SFERA (è l'elemento neutro per la somma connessa);
- il TORO;
- il PIANO PROIETTIVO.

Enunciamo ora il TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI COMPATTE SENZA BORDO: è una delle forme analoghe esiste il Teorema fondamentale dell'aritmetica.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)
Una superficie compatta senza bordo (sempre orientabile) è esprimibile mediante una somma connessa di sfere, tori e piani proiettivi, e la somma connessa è unica:

$$M = N_1 \# N_2 \# N_3 \# \dots \# N_k$$

Esiste anche una nozione di somma connessa per superfici con bordo, per variabili con bordo. Ad esempio, un corpo a due maniglie si ottiene come somma connessa di sfere di due tori solidi.



Poniamo ora infine introdurre la nozione di GENERE. Intuitivamente esso è il numero di "maniglie" della superficie. Il genere può essere definito come il numero massimo G di curve semplici chiuse contenute nella superficie aventi complementare connesso. Ad esempio, la superficie rappresentata sopra ha genere 2.

La disco e la sfera hanno genere 0; la bolligia di Klein ha genere 2; il toro e il nastro di Möbius hanno genere 1.

Per una superficie di tipo finito è dunque definita, alla luce delle considerazioni effettuate, una quaterna:

$$(G, K, R, O)$$

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)

Due superfici di tipo finito sono omeomorfe se e solo se hanno la stessa quaterna (G, K, R, O).

Infine, si definisce CARATTERISTICA DI EULERO di una superficie di tipo finito:

$$\chi \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 2 - 2G - K - R, & O = 1 \\ 2 - G - K - R, & O = 0 \end{cases}$$

Non vogliamo addentrarci ulteriormente in questi discorsi: fermiamoci a parlare di somme connesse.

Consideriamo due sfere A e B: consideriamo due dischi, uno per sfera, ed effettuiamo la somma connessa.

Ripetiamo l'operazione con un altro paio di dischi: non è difficile dimostrare che le due varietà ottenute sono omeomorfe. La questione è delicata, e una sua generalizzazione portò alla CONGETTURA DI POINCARÉ (dimostrata nel 2003).

TEOREMA (CONGETTURA DI POINCARÉ)

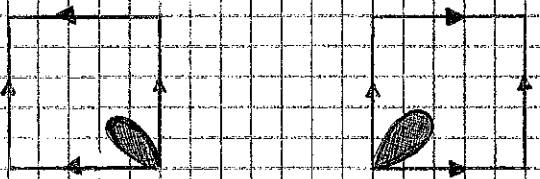
Ogni varietà topologica di dimensione 3 completa, senza bordi e semplicemente connessa è omeomorfa a S^3.

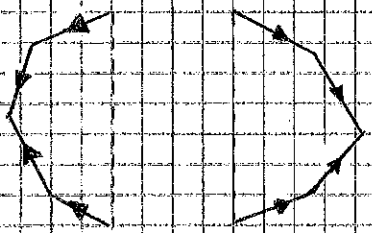
Accettiamo per vero, senza dimostrare, il risultato esposto prima.

ESEMPI DI SOMME CONNESSE

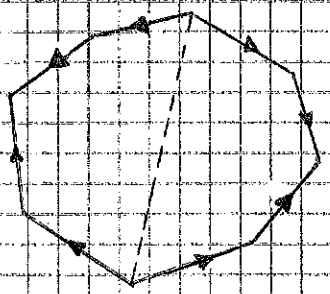
Vediamo ora alcuni esempi di somme connesse.

Innanzitutto, consideriamo due tori, visti come quozienti di un quadrato secondo un'opportuna relazione, e consideriamo i dischi come in figura:

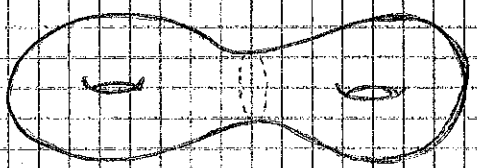




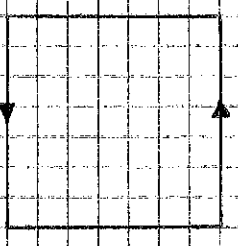
Si ottiene:

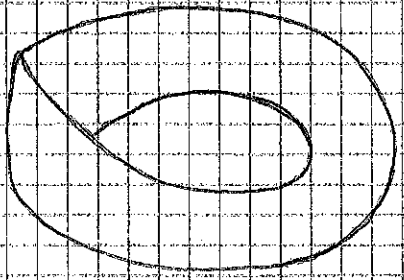


che si traduce così:

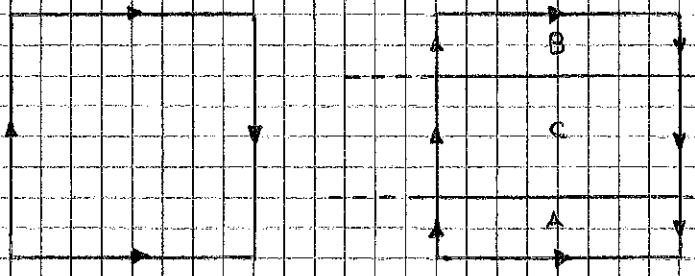


Consideriamo ora un nastro di Möbius, ovvero una superficie con bordo non orientabile:





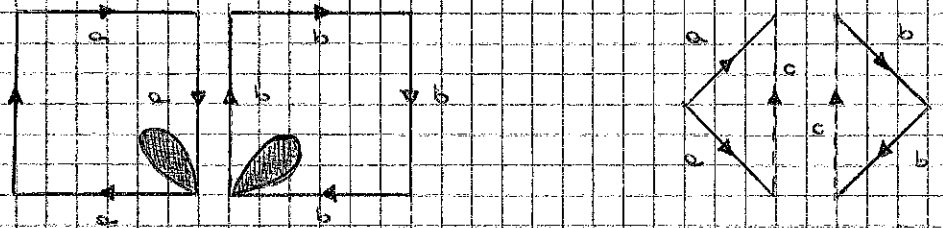
Allora la bottiglia di Klein è una somma connessa di due nastri di Möbius incollati su un S^1:



Una retta rimane C, A e B è un altro nastro di Möbius; essi sono incollati lungo il bordo di ognuno di essi, dunque ci dà una somma connessa a S^1.

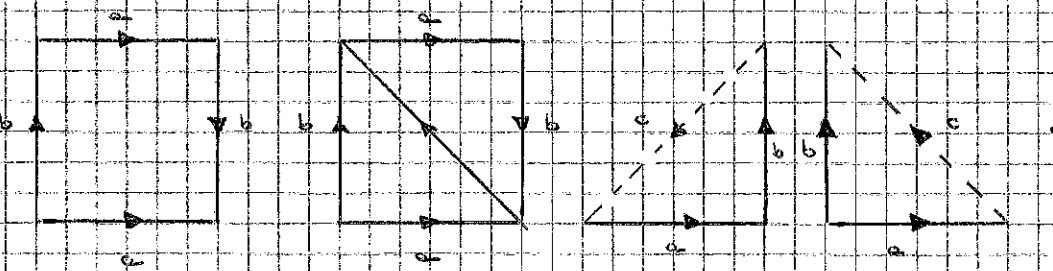
Come ultimo esempio, la somma connessa di un toro e un piano proiettivo è uguale alla somma connessa di tre piani proiettivi.

Innanzitutto, la somma connessa di due piani proiettivi ci è data da:



e la figura non è una sfera proiettiva perché la identifichiamo anche diversa.

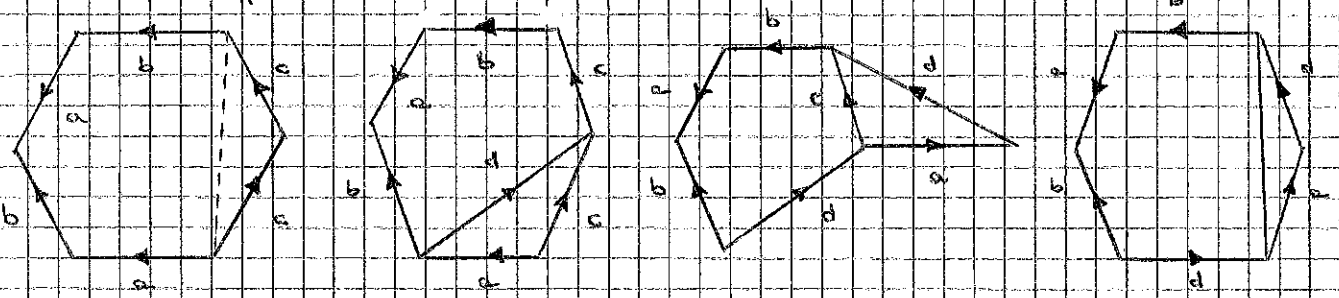
Ora, si ha:



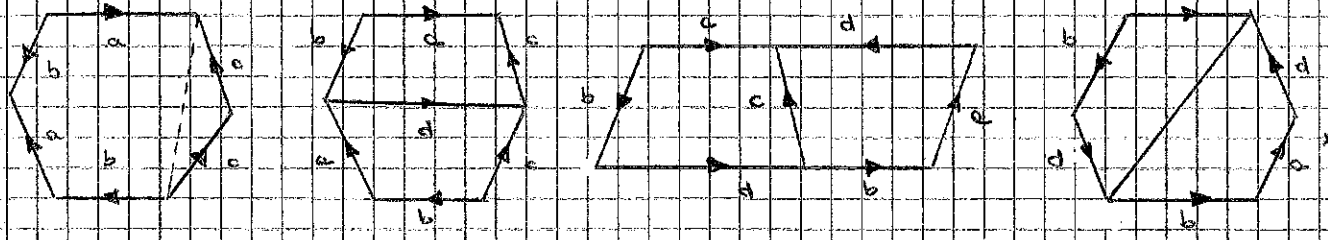
da cui la bottiglia di Klein è somma connessa di due piani proiettivi.

Per concludere, questa dimostra che la somma connessa di un toro e di uno spazio proiettivo è una somma connessa di una bottiglia di Klein e di uno spazio proiettivo.

Partendo dalla prima somma connessa:



Partendo dalla seconda somma connessa:



dunque T_{2n}.

PROPOSIZIONE

Indichiamo con:

- T_0 la sfera;
- T_1 il toro;
- T_g la somma connessa di g toni, $g \geq 2$;
- U_1 il piano proiettivo;
- U_h la somma connessa di h piani proiettivi, $h \geq 2$

Allora:

$$T_g \# U_h \cong U_{h+2g}$$

Dim:

PASSO BASE

$g = 1$

L'enunciato è stato appena dimostrato.

PASSO INDUTTIVO

$g \Rightarrow g+1$

Si ha:

$$T_{g+1} \# U_h \cong T_g \# (T_1 \# U_1) \# U_{h-1} \cong T_g \# U_{h+2} \cong U_{h+2g}, \text{ c.v.d.}$$

TRIANGOLAZIONI

Data una superficie compatta S, una sua TRIANGOLAZIONE è data da una famiglia finita di sottospazi chiusi $\{T_1, \dots, T_m\}$ che ricoprono S, e da una famiglia (finita) di omeomorfismi $\{\varphi_1, \dots, \varphi_m\}$, tali che:

$$\varphi_i : T_i' \longrightarrow T_i,$$

e T_i' è un triangolo in $\mathbb{R}^2$, cioè è l'insieme costituito da tre punti del piano non allineati;

$$X = \bigcup_{i=1}^{m} T_i$$

I sottospazi T_i, con $i = 1, \dots, m$, vengono impropriamente chiamati TRIANGOLI. Le immagini dei vertici e dei lati dei T_i' tramite gli omeomorfismi sono anch'esse dette impropriamente VERTICI e LATI della triangolazione.

Se $i \neq j$, una e una sola di queste condizioni sono verificate:

- T_i e T_j sono disgiunti;
- T_i e T_j hanno in comune solo un vertice;
- T_i e T_j hanno in comune due vertici e il lato che li connette.

OSSERVAZIONE

Ogni lato è lato di esattamente due triangoli.

OSSERVAZIONE

Dato un vertice v, i triangoli di vertice v possono essere ordinati in una sequenza ciclica $T_0, \dots T_k, T_{k+1} = T_0$, immaginando che, dati T_i e T_j, essi abbiano un lato in comune se e solo se essi sono consecutivi nella sequenza.

Enunciamo ora un Teorema.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)

Ogni superficie compatta ammette una triangolazione.

Abbiamo in precedenza definito la caratteristica di Eulero. Una definizione a prima vista differente, ma in realtà equivalente, è la seguente:

Sia S una superficie compatta, e $\{T_1, \dots, T_n\}$ una sua triangolazione. Definiamo le seguenti quantità:

- V, il numero di vertici;
- E, il numero di lati;
- F, il numero di facce.

Allora si definisce CARATTERISTICA DI EULERO:

$$\chi(S) \overset{\text{def}}{=} V - E + F$$

È piuttosto evidente dimostrare che la caratteristica di Eulero è ben definita e non dipende dalla particolare triangolazione scelta.

Per calcolare la caratteristica di Eulero di una superficie compatta, dunque, si può sempre triangolarla, dunque, e calcolare la caratteristica di Eulero usando la sua seconda definizione.

In particolare, i poliedri convessi sono tutti omeomorfi a S^2, perché due superfici aventi stessa caratteristica di Eulero sono omeomorfe. La caratteristica di Eulero comune, infatti, è 2.

Sottolineiamo che un aspetto per niente banale, ma molto forte, relativo alle triangolazioni di una superficie è

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Una superficie triangolabile è un quoziente di triangoli (un numero finito) secondo un'opportuna relazione di equivalenza. Tale quoziente non dipende dall'ordine con cui effettuiamo le identificazioni.

VARIETÀ CONTINUE: ALCUNI CASI PATOLOGICI

Abbiamo visto che, nel caso di varietà differenziabili, esiste lo spazio di PIANO TANGENTE alla varietà, e (nel caso di superfici, che sono il nostro oggetto di studio corrente) si hanno superfici REGOLARI (in alcuni punti esse). Ricordiamo che una varietà è detta differenziabile se è dato un atlante di carte $\mathcal{S} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$ tale che i cambiamenti di carte siano diffeomorfismi.

Tutte queste nozioni vengono a mancare quando si toglie l'ipotesi di differenziabilità. Parlando solo di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ o $\mathbb{R}^2$, esistono vari esempi di funzioni continue ma non derivabili abbastanza "strane" ed antiintuitive.

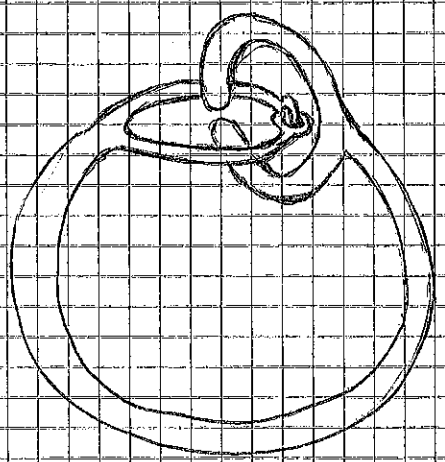
- La FUNZIONE DI CANTOR;
- La FUNZIONE DI WEIERSTRASS, continua ovunque ma derivabile in nessun punto;
- La CURVA DI PEANO, una curva $\Phi : I \to I^2$ suriettiva (si ha $I = [0,1]$).

Presenteremo ora un paio di esempi di superfici non differenziabili abbastanza antiintuitive.

Cominciamo con la SFERA CORNUTA DI ALEXANDER. Si parte da un cono solido di base solida e si aggiungono due estremità come in figura, e si ripete il processo all'infinito. Se i rami non si diramano infinitamente, la sfera di Alexander assomiglia a:

$$D^3 = \{ x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| \leq 1 \}$$

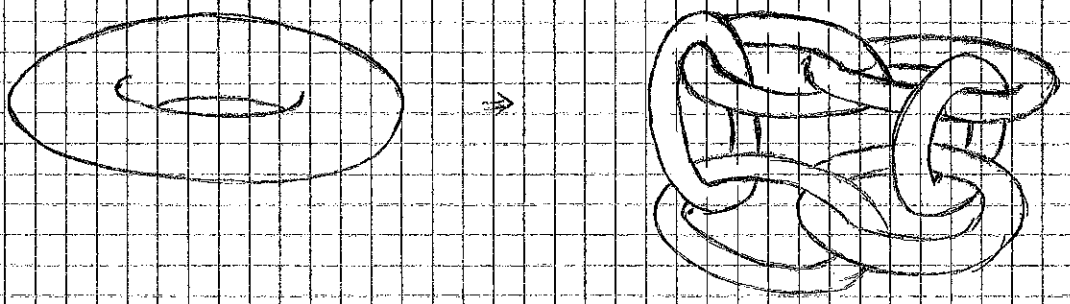
Effettuando la chiusura, ora è omeomorfa al disco. Il grado della chiusura, dunque, è omeomorfo alla sfera: ecco la sfera di Alexander.



Questo deriva dal fatto che la sfera S^2 e la sfera cornuta sono immerse in $\mathbb{R}^3$ in modi topologicamente differenti.
La parte esterna della sfera di Alexander, infatti non è semplicemente connessa, a differenza della parte esterna della sfera standard.

La sfera di Alexander non è una superficie differenziabile in $\mathbb{R}^3$: se lo fosse, infatti, sarebbe equivalente alla sfera standard, a meno di omeomorfismo.

Un altro esempio è la cosiddetta COLLANA DI ANTOINE.
Si parte da un Toro solido: le frecce rosse, cioè come è i-esimo, continua nel sostituire ogni Toro con k Tori incatenati:



Si ripete il procedimento all'infinito. La collana di Antoine è un chiuso in $\mathbb{R}^3$, totalmente sconnesso, e tale che il complementare ha gruppo fondamentale non finitamente generato: la definizione sarà più chiara in seguito.
Ovviamente neanche questa superficie è differenziabile.

Ci sono innumerevoli altre "patologie" relative ai casi continui: esso è quindi insufficiente, il più delle volte, per poter dire una cosa "regolare" di parti della varietà che vi appartengono.

ANCORA SULLE TRIANGOLAZIONI

Enunciamo ora una serie di fatti la cui dimostrazione non è sempre elementare ma le cui conclusioni descrivono una molto intuitiva.

Consideriamo un insieme finito di triangoli $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$. Consideriamo un ordine casuale, quindi uno di incollare dapprima i triangoli con un lato in comune ai triangoli considerati. Ad esempio:



Ciò che si ottiene è ancora un disco:

$$D^2 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\| \leq 1 \}$$

Siano ora D_1^2 e D_2^2 due dischi, siano $S_1 = \partial D_1^2$ e $S_2 = \partial D_2^2$, e siano $T_1 \cong S_1$, $T_2 \cong S_2$, si ha:

$$T \cong T' \cong D^1$$

Ecco ora:



$$D_1^2 \amalg D_2^2 \,/\, D^1 \;?$$

Consideriamo due mappe X_1 e X_2 ancora più dischi, e due immersioni di D^1 in D^2:

$$f_1 : D^1 \to D_0^2 \hookrightarrow X_1 \qquad D^1 \cong \partial(D_0^2)$$

$$f_2 : D^1 \to D_0^2 \hookrightarrow X_2 \qquad D^1 \cong \partial(D_0^2)$$

Allora:

$$D_0^2 \amalg D_0^2 \,/\, f_1 \sim f_2 \cong S^2,$$

ma per dimostrarlo è necessaria più regolarità della parte delle superfici.

Assumiamo dunque che due dischi uniti per un D^1 siano un disco.

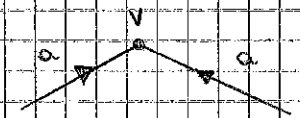
Usando triangoli mediante i lati, dunque, stabiliamo un ordine.

A cinque di notazione, le varie superficie: nate possono essere descritte anche mediante delle lettere. Si decide un senso di percorrenza, e si scrive a (-1) se la freccia è discorde al senso di percorrenza. Ad esempio:

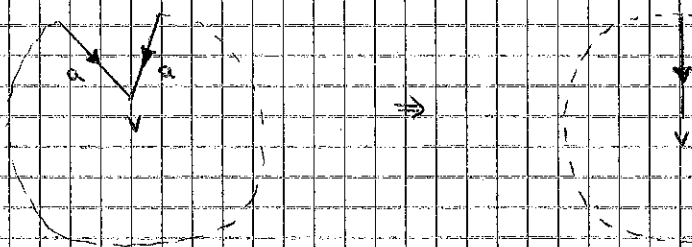
- un toro si esprime con $abab^{-1}$;
- una sfera proiettiva si esprime con aa;
- una bottiglia di Klein si esprime $abab^{-1}$.

Elenchiamo ora una serie di mosse che consentono di interpretare un qualsiasi poligono come somma connessa di tori e piani proiettivi (se non siamo nel caso della sfera).

Innanzitutto, se abbiamo una situazione del tipo

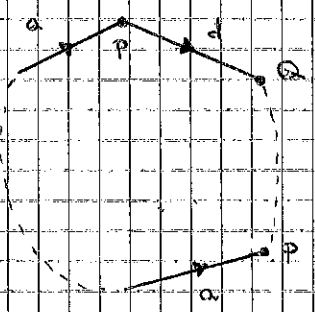


in simboli aa^{-1}, si può semplificare:

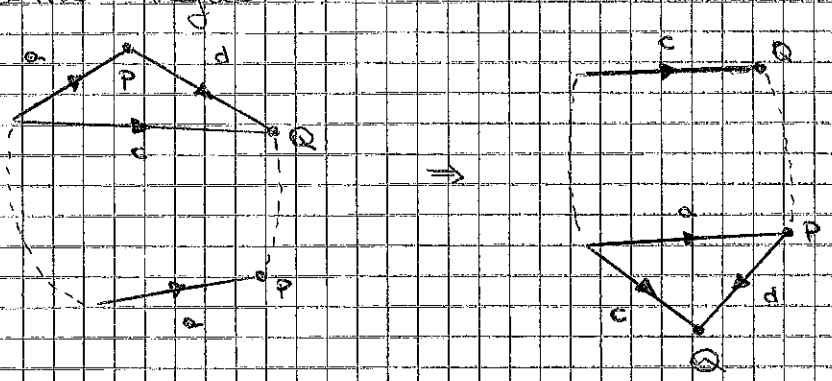


Una volta eliminati tutti questi casi, si effettua la seguente mossa per vertici.

Analizziamo una situazione di questo tipo:



Si procede come segue:



In questo modo sono identificati due vertici P equivalenti, ottenendo la figura di un nuovo vertice P.

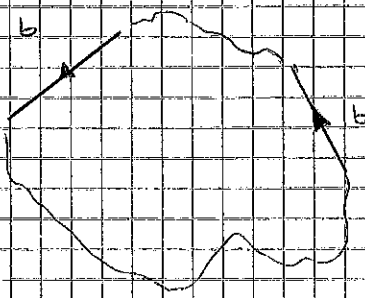
Per semplificare la trattazione, diremo che una coppia di lati identificati è:

- del PRIMO tipo, se i lati che si compongono compaiono con l'orientazione opposta;
- del SECONDO TIPO in caso contrario.

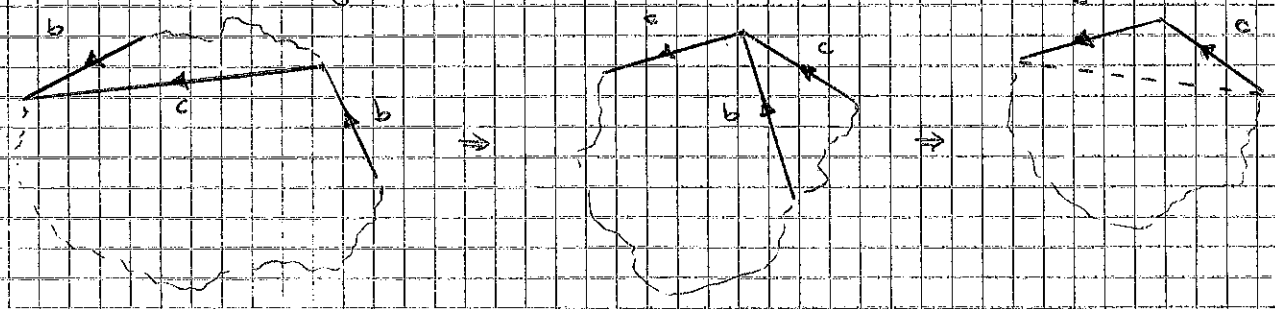
Ad esempio, fino ad ora abbiamo utilizzato algoritmi per eliminare le coppie adiacenti del primo tipo, e per ridurre i vertici ad una unica rappresentante. Dato un numero finito di lati di questi tipi, si ottiene un poligono in cui tutti i vertici devono essere identificati.

Vogliamo ora rendere adiacenti le coppie del secondo tipo.

Davanti alla seguente situazione:

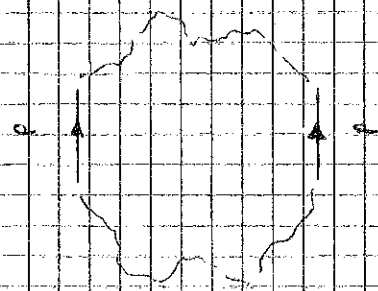


operiamo come segue:

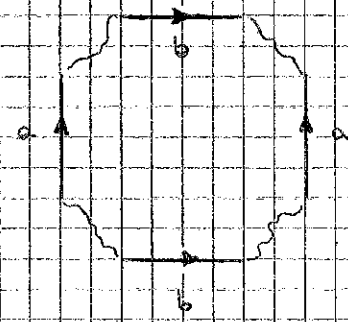


è possibile che le coppie siano tutte del secondo tipo: in tal caso la superficie è una somma connessa di piani proiettivi.

Supponiamo invece di trovarci in questa situazione:

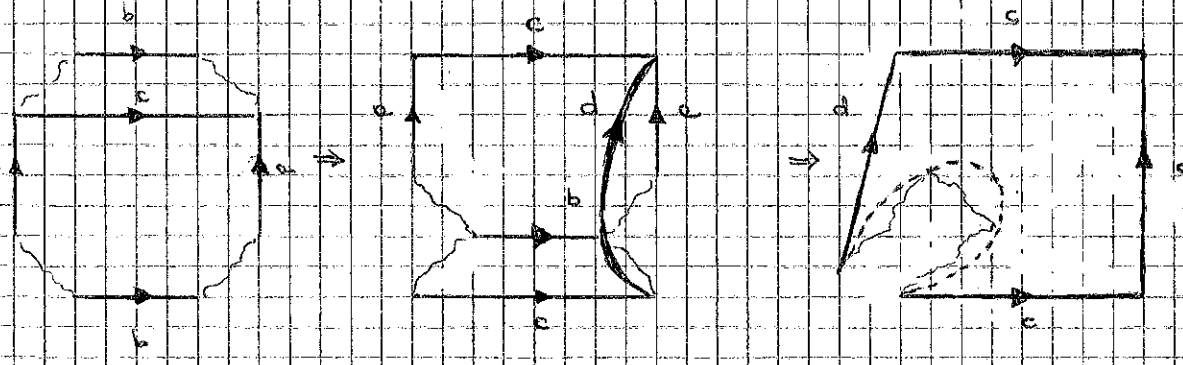


Siamo, in realtà, di fronte a questa situazione:



Se così non fosse, dopo tutte le mosse effettuate, gli estremi di a non sarebbero identificati: ciò è assurdo, per le ragioni viste in precedenza.

Effettuiamo queste mosse allora:



da cui la superficie può essere interpretata come somma connessa di un toro e un'altra superficie.

In conclusione, una superficie compatta senza bordo mentalmente è ottenibile come somma connessa di tori o spazi proiettivi, o, se orientabile, la sfera.

OMOTOPIA DI CAMMINI

Sia X uno spazio topologico. Per $a, b \in X$ si definisce SPAZIO DEI CAMMINI:

$$\Omega(X, a, b) := \{ \alpha : [0,1] \to X \mid \alpha(0) = a,\ \alpha(1) = b \},$$

con $\alpha : [0,1] \to X$ continua. D'ora in poi, posto $I = [0,1]$. Se $a = b$, il cammino si dice CHIUSO, con PUNTO BASE $a \in X$.

Richiediamo anche le operazioni di GIUNZIONE E INVERSIONE:

- $* : \Omega(X, a, b) \times \Omega(X, b, c) \to \Omega(X, a, c)$,
$$(\alpha * \beta)(t) := \begin{cases} \alpha(2t), & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \beta(2t-1), & t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$
- $i : \Omega(X, a, b) \to \Omega(X, b, a)$,
$$(i(\alpha))(t) = \alpha(1-t)$$

Notiamo che

$$i(i(\alpha)) = \alpha$$
$$i(\alpha * \beta) = i(\beta) * i(\alpha)$$

Due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ si dicono OMOTOPICAMENTE EQUIVALENTI se esiste una funzione continua

$$F : I^2 \to X$$

tale che:

- $F(t,0) = \alpha(t)$, $F(t,1) = \beta(t)$ $\forall\, t \in I$;
- $F(0,s) = a$, $F(1,s) = b$ $\forall\, s \in I$.

In particolare, F si dice OMOTOPIA DI CAMMINI. Scriveremo $\alpha \sim \beta$ se α, β risultano omotopicamente equivalenti.

L'omotopia di cammini è una relazione di equivalenza: non dimostreremo ciò, ritenendolo banale.

Es. Sia $X \subseteq \mathbb{R}^3$ un aperto insieme connesso. Allora α, β in $\Omega(X, a, b)$ sono sempre omotopicamente equivalenti.

Basta infatti considerare l'applicazione:

$$F : I^2 \to X$$
$$F(t,s) = s\beta(t) + (1-s)\alpha(t)$$

Le operazioni di giunzione e inversione commutano con la relazione di equivalenza. Dunque:

- dati $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta, \beta' \in \Omega(X, b, c)$, se $\alpha \sim \alpha'$ e $\beta \sim \beta'$, allora:
$$(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta');$$
- dati $\alpha, \alpha' \in \Omega(X, a, b)$, con α, α' equivalenti, si ha:
$$i(\alpha) \sim i(\alpha')$$

Le infatti $F, G : I^2 \to X$ sono le omotopie di cammini date per ipotesi:

- per dimostrare che $(\alpha * \beta) \sim (\alpha' * \beta')$, basta considerare:
$$(F * G)(t,s) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} F(2t, s) & , t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ G(2t-1, s) & , t \in [\frac{1}{2}, 1]; \end{cases}$$
- per dimostrare che $i(\alpha) \sim i(\alpha')$, basta considerare:
$$(iF)(t,s) \overset{\text{def}}{=} F(1-t, s)$$

Lemma

Sia $\alpha : I \to X$ un cammino, e sia $\Phi : I \to I$ un'applicazione continua tale che $\Phi(0) = 0$ e $\Phi(1) = 1$. Allora:
$$\alpha(t) \sim \beta(t) = \alpha(\Phi(t))$$

Dim.

Basta considerare:
$$F : I^2 \to X \quad , \quad F(t,s) = \alpha(s\Phi(t) + (1-s)t),$$
c.v.d.

PROPOSIZIONE

Il prodotto $*$ (a meno di equivalenza) è associativo a meno di omotopia dei cammini. Dati uno spazio topologico X, tre cammini $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, $\beta \in \Omega(X, b, c)$, $\gamma \in \Omega(X, c, d)$, vale:

$$(\alpha * \beta) * \gamma \simeq \alpha * (\beta * \gamma)$$

e dunque è ben definita la classe di omotopia di $\alpha * \beta * \gamma$.

Dim.

Consideriamo:

$$\phi(t) : I \to I, \quad \phi(t) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 2t, & 0 \le t \le \frac{1}{4} \\ t + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \le t \le \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Allora si ha (usando il lemma precedente):

$$((\alpha * \beta) * \gamma)(t) = (\alpha * (\beta * \gamma))(\phi(t)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((\alpha * \beta) * \gamma) \simeq (\alpha * (\beta * \gamma)), \text{ c.v.d.}$$

LEMMA

Siano $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{R}^n$, e indichiamo con $T \subseteq \mathbb{R}^n$ il triangolo (eventualmente degenere) di vertici p_1, p_2, p_3:

$$T = \{ t_1 p_1 + t_2 p_2 + t_3 p_3 \mid t_i \ge 0, \ t_1 + t_2 + t_3 = 1 \}$$

Data $f : T \to X$, sia:

$$f_{ij} : I \to X, \quad f_{ij}(t) = f((1-t)p_i + t p_j)$$

la parametrizzazione standard della restrizione di f al lato di estremi p_i e p_j. Allora vale:

$$f_{13} \simeq f_{12} * f_{23}$$

Dim.

Consideriamo $q : I \times I \to T$ così definita:

$$q(t,s) = \begin{cases} (1 - t - ts) p_1 + 2ts\, p_2 + (t - ts) p_3, & t \le \frac{1}{2} \\ (2 - t - s + ts) p_1 + 2(1-t)s\, p_2 + (t - s + ts) p_3, & t \ge \frac{1}{2} \end{cases}$$

Consideriamo allora $F : I \times I \to X$, $F(t,s) = f(q(t,s))$.

si ha:

$$F(0,s) = f(p_1), \quad F(1,s) = f(p_3),$$

$$F(t,0) = \begin{cases} f((2-t)p_1 + p_3) = f_{13}(t), & t \le \frac{1}{2} \\ f((1-t)p_2 + p_3) = f_{13}(t), & t \ge \frac{1}{2} \end{cases},$$

$$F(t,1) = \begin{cases} f((1-2t)p_1 + 2t\,p_2) = f_{12}(2t), & t \le \frac{1}{2}, \\ f((1-(2t-1))p_2 + (2t-1)p_3) = f_{23}(2t-1), & t \ge \frac{1}{2}, \end{cases}$$

da cui F è un'omotopia di cammini che prova che:

$$f_{13} \simeq f_{12} * f_{23} \quad \text{c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$. Allora

- $1_a * \alpha \simeq \alpha * 1_b \simeq \alpha$;
- $\alpha * i(\alpha) \simeq 1_a$.

Dim:

Si ha:

$$(1_a * \alpha)(t) = \alpha(\psi(t)), \quad \psi(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 2t-1, & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

$$(\alpha * 1_b)(t) = \alpha(\eta(t)), \quad \eta(t) = \begin{cases} 2t & 0 \le t \le \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Per un lemma precedente:

$$1_a * \alpha \simeq \alpha \simeq \alpha * 1_b$$

Consideriamo ora:

$$F(t,s) = \begin{cases} \alpha(2t), & 0 \le t \le \frac{1-s}{2} \\ \alpha(s), & \frac{1-s}{2} \le t \le 1 - \frac{1-s}{2} \\ \alpha(2-2t), & 1 - \frac{1-s}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

Dato che $F(t,0) = 1_a(t)$ e $F(t,1) = (\alpha * i(\alpha))(t)$ per ogni $t \in I$, da cui $\alpha * i(\alpha) \simeq 1_a$.

Alternativamente, se $\alpha \in \Omega(X, a, b)$, si può considerare il triangolo degenere di vertici a, b, a, e concludere come in precedenza, c.v.d.

COROLLARIO

Sia $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ un cammino e sia $p \in [0,1]$. Sia $d = \alpha(p) \in X$, e siano $\alpha_0 = \alpha_1$ le parametrizzazioni standard delle restrizioni di α agli intervalli $[0,p]$ e $[p,1]$, cioè:

$$\alpha_0 \in \Omega(X, a, d) \quad , \quad \alpha_0(t) = \alpha(tp)$$
$$\alpha_1 \in \Omega(X, d, b) \quad \alpha_1(t) = \alpha(p + t - tp)$$

Allora:

- $\alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha$;
- $\forall\, c \in X,\ \forall\, \beta \in \Omega(X, d, c)$: $\alpha_0 * p * i(\beta) * \alpha_1 \sim \alpha$.

Dim.

Si ha:

$$(\alpha_0 * \alpha_1)(t) = \alpha(\phi(t)),$$

con:

$$\phi(t) = \begin{cases} 2tp & , t \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ p + (2t-1)(1-p) & , t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases},$$

da cui $\alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha$.

Ora, sfruttando la proprietà a meno di omotopia:

$$\alpha_0 * \beta * i(\beta) * \alpha_1 = \alpha_0 * (\beta * i(\beta)) * \alpha_1 \sim \alpha_0 * \alpha_1 \sim \alpha, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Sia $f: X \to Y$ una applicazione continua. Allora:

- dati $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$, se $\alpha \sim \beta$, allora $f\alpha \sim f\beta$;
- dati $\alpha \in \Omega(X, a, b)$ e $\beta \in \Omega(X, b, c)$, allora:

$$\begin{cases} f(\alpha * \beta) = f\alpha * f\beta \\ i(f\alpha) = f(i(\alpha)) \end{cases}$$

Dim.

Sia $F: I^2 \to X$ un'omotopia di cammini, allora anche $fF: I^2 \to Y$ è un'omotopia di cammini, da cui:

$$\alpha \sim \beta \Rightarrow f\alpha \sim f\beta$$

Per la seconda:

- $\forall\, t \in [0,1]$: $i(f\alpha)(t) = (f\alpha)(1-t) = f(\alpha(1-t)) = f(i(\alpha))(t)$

• $\forall\, t \in [0,1]$: $f((\alpha * \beta)(t)) = \begin{cases} f(\alpha(2t)) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ f(\beta(2t-1)) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} =$

$= \begin{cases} (f\alpha)(2t) & , t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (f\beta)(2t-1) & , t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases} = (f\alpha) * (f\beta)$, c.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Provare che i due cammini $\alpha, \beta : I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$\alpha(t) = (1+t)(\sin(8t), \cos(8t))$, $\beta(t) = (1+t^2)(\sin(8t), \cos(8t))$

sono omotopicamente equivalenti.

Notiamo che:

$$\operatorname{Im}\alpha, \operatorname{Im}\beta \subseteq \{z \in \mathbb{R}^2 \mid \|z\| \in [1,2]\},$$

da cui è conveniente considerare omotopie contenute tra i fusti delle corone. Notiamo che:

$\forall t \in [0,1]$: $\alpha(t) = \rho_1 e^{i\theta_1}$, $\beta(t) = \rho_2 e^{i\theta_2}$, $\theta_1 = \theta_2$,

e usiamo le coordinate polari. Allora l'omotopia di cammini è radiale, ed è:

$$F : I^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad F(t,s) = [(1-t)(1+s) + t(1+s^2)](\sin(8s), \cos(8s))$$

2. Siano dati due cammini $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$. Dimostrare che $\alpha \sim \beta$ se e solo se $\alpha * i(\beta) \sim 1_a$.

Se $\alpha \sim \beta$, allora:

$$\alpha * i(\beta) \sim \beta * i(\beta) \sim 1_a$$

Viceversa, se $\alpha * i(\beta) \sim 1_a$:

$$\alpha * i(\beta) \sim 1_a \Rightarrow \alpha * i(\beta) * \beta \sim \beta \sim \beta * i(\beta) * \beta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha \sim \alpha * 1_b \sim \beta,$$

come da tesi.

3. Provare che i cammini $\alpha_c : I \to S^2$:

$$\alpha_c(t) = (\sin c \sin \pi t, -\cos c \sin \pi t, \cos \pi t)$$

sono, al variare di $c \in \mathbb{R}$, tutti omotopicamente equivalenti.

Innanzitutto:

$\forall c \in \mathbb{R}$, $\forall k \in \mathbb{Z}$: $\alpha_c \equiv \alpha_{c+2k\pi}$

Dunque basta verificare ciò $c \in [0, 2\pi[$.

In effetti basta considerare $F : I^2 \to S^2$ così definita:

$$F(t,s) = (\sin((1-t)a + ta')\sin \pi s, \cos((1-t)a + ta')\sin \pi s, \cos \pi s)$$

Si ha:

- F continua in entrambe le variabili;
- F è a valori in S^2;
- $F(0,s) = (\sin a \sin \pi s, \cos a \sin \pi s, \cos \pi s) = \alpha_a(s) \ \forall s \in I$;
- $F(1,s) = (\sin a' \sin \pi s, \cos a' \sin \pi s, \cos \pi s) = \alpha_{a'}(s) \ \forall s \in I$.

Allora α_a e $\alpha_{a'}$ sono omotopicamente equivalenti.

4. Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega(X, e, e)$ tali che:

$$\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$$

Sia inoltre X uno spazio di Hausdorff. Allora α, β, γ sono costanti.

Mostriamo ad esempio che α è costante. Dalla relazione, si ha che:

$$\forall t \in \left[0, \tfrac{1}{4}\right] : \alpha(2t) = \alpha(4t)$$

Da qui, ponendo $4t = s$:

$$\forall s \in I : \alpha(s) = \alpha\left(\tfrac{s}{2^2}\right) = \dots = \alpha\left(\tfrac{s}{2^n}\right) = \dots = \lim_{n \to +\infty} \alpha\left(\tfrac{s}{2^n}\right),$$

e per la continuità di α e proprietà di X di essere T2:

$$\lim_{n \to +\infty} \alpha\left(\tfrac{s}{2^n}\right) = \alpha\left(\lim_{n \to +\infty} \tfrac{s}{2^n}\right) = \alpha(0) = e,$$

da cui α è costante.

GRUPPO FONDAMENTALE

Sia X uno spazio topologico, $x \in X$. Definiamo:

$$\pi_1(X,x) := \Omega(X,x,x)/\sim,$$

dove $\sim$ è la relazione di equivalenza omotopica.

Per ogni $\alpha \in \Omega(X,x,x)$, sia $[\alpha]_\sim$ (o più semplicemente $[\alpha]$) la classe di α secondo l'equivalenza omotopica.

L'insieme $\pi_1(X,x)$ possiede una struttura di gruppo. Infatti:

- la legge di composizione (giustapposizione) è associativa (mod quoziente):
$$([\alpha]*[\beta])*[\gamma] = [\alpha]*([\beta]*[\gamma]);$$
- $\exists\, [\lambda_x] \in \pi_1(X,x)$ t.c. $[\lambda_x]*[\alpha] = [\alpha]*[\lambda_x] = [\alpha]$;
- $[\alpha]*[\beta] = [\alpha*\beta] \in \pi_1(X,x)$;
- $[\alpha]^{-1} = [i(\alpha)] \in \pi_1(X,x)$.

Dunque $(\pi_1(X,x), *)$ è un gruppo, che viene effettivamente GRUPPO FONDAMENTALE o PRIMO GRUPPO di OMOTOPIA (o anche GRUPPO DI POINCARÉ) di X con punto base x.

OSSERVAZIONE

Per ogni $x \in X$ $\pi_1(X,x)$ è ben definito perché dipende solamente dalla componente connessa per archi di x in X.

Se X è connesso per archi, allora dati $a,b \in X$, i gruppi $\pi_1(X,a)$ e $\pi_1(X,b)$ sono isomorfi. Sia infatti $\gamma \in \Omega(X,a,b)$. Definiamo:

$$\gamma_\# := i(\gamma)*\alpha*\gamma \in \Omega(X,b,b)$$

dove i è l'applicazione

$$\Gamma : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$$
$$[\alpha] \to [i(\gamma)*\alpha*\gamma]$$

è un omomorfismo di gruppi:

$$\Gamma([\alpha]*[\beta]) = [i(\gamma)*\alpha*\beta*\gamma] = [i(\gamma)*\alpha*\gamma*i(\gamma)*\beta*\gamma] = [i(\gamma)*\alpha*\gamma]*[i(\gamma)*\beta*\gamma] = \Gamma([\alpha])*\Gamma([\beta]),$$

ed è facilmente un isomorfismo, infatti:

$$\bar{\gamma}^{-1} : \pi_1(X, a) \longrightarrow \pi_1(X, a)$$
$$[\beta] \longrightarrow [\gamma * \beta * i(\gamma)]$$

è l'isomorfismo inverso.

Grazie a quest'osservazione, è importante dire quando due punti base si equivalgono: se X è ad esempio connesso per archi, la scelta due punto base è ininfluente: si denota dunque con $\pi_1(X)$ la classe d'isomorfismo del suo gruppo fondamentale, calcolato rispetto ad un generico punto base.

Uno spazio topologico si dice SEMPLICEMENTE CONNESSO se è connesso per archi, e il suo gruppo fondamentale è isomorfo al gruppo banale $G = \{e\}$.

PROPOSIZIONE

Siano X, Y spazi connessi per archi. Allora il gruppo fondamentale del prodotto è isomorfo al prodotto diretto dei gruppi fondamentali:

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) = \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b)$$

Cioè,

Sia $\alpha : I \to X \times Y$. Allora esso è univocamente determinato dalle sue componenti $\alpha_1 : I \to X$ e $\alpha_2 : I \to Y$.

Dunque la seguente è una biiezione:

$$\pi_1(X \times Y, (a, b), (a, b)) = \Omega(X, a, a) \times \Omega(X, b, b)$$

Similmente ogni omotopia $F : I^2 \to X \times Y$ è univocamente determinata dalle sue componenti $F_1 : I^2 \to X$ e $F_2 : I^2 \to Y$, da cui la biiezione indotta per passaggio al quoziente è un isomorfismo di gruppi:

$$\pi_1(X \times Y, (a, b)) \cong \pi_1(X, a) \times \pi_1(Y, b), \text{ c.v.d.}$$

Dalla proposizione precedente ci aiuta a capire che, per $f: X \to Y$ continua e $a \in X$, l'applicazione:

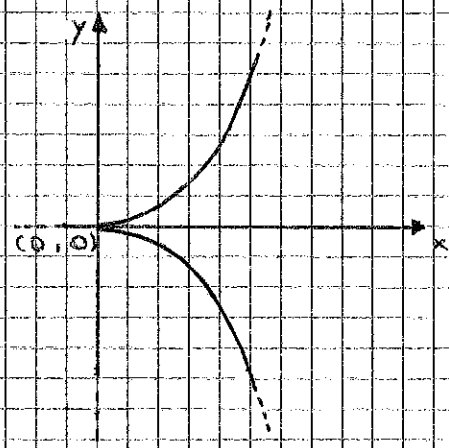
$$f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$$
$$f_*([\alpha]) = [f\alpha]$$

è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi

VARIETÀ E SOTTOVARIETÀ

Consideriamo la curva in $\mathbb{R}^2$ data da:

$$\Gamma = \begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t^3 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



Γ è una varietà differenziabile. Infatti (data che l'elemento di curva è biunivoca) il seguente è un omeomorfismo:

$$f : \Gamma \to \mathbb{R}$$
$$(t^2, t^3) \to t^3$$

Dunque $\mathcal{R} = \{(\Gamma, f)\}$ è un atlante (formato da una sola carta, dove la varietà è differenziabile di classe C^∞ (perché non vi sono cambiamenti di carte).

Γ non è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$. Infatti, dovrebbe esserci:

$\forall (t_0^2, t_0^3) \in \Gamma \ \exists \ g \in C^1(I, \mathbb{R})$, $I \in \mathcal{I}((t_0^2, t_0^3))$ t.c. $\Gamma \cap I = g^{-1}(0)$ e $\nabla g \neq 0$

Sia $f(x,y) = 0$ in Γ. Allora $f(t^2, t^3) = 0$ in $\mathbb{R}$, da cui:

$$\frac{d}{dt} f(t^2, t^3) = D_1 f(t^2, t^3)\, 2t + D_2 f(t^2, t^3)\, 3t^2 = 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} f(t^2, t^3) = D_{11} f(t^2, t^3)\, 4t^2 + D_{12} f(t^2, t^3)\, 6t^3 + D_1 f(t^2, t^3)\, 2 + D_{21} f(t^2, t^3)\, 6t^3 + D_{22} f(t^2, t^3)\, 9t^4 + D_2 f(t^2, t^3)\, 6t = 0 \text{ in } \mathbb{R}$$

Valutando in $(0,0)$, si ottiene $D_1 f(0,0) = 0$. Continuando a derivare e valutando in 0, si ottiene anche $D_2 f(0,0) = 0$. Allora la condizione espressa prima non è verificata, e Γ non è una sottovarietà di $\mathbb{R}^2$.

IL GRUPPO FONDAMENTALE DELLA CIRCONFERENZA

Consideriamo l'applicazione:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t},$$

con $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid \|z\| = 1\}$.

Allora f è continua e suriettiva. Inoltre:

$$f^{-1}(1) = \mathbb{Z}$$

f risulta un OMEOMORFISMO LOCALE, ovvia per ogni coppia $(t, x) \in (\mathbb{R}, S^1)$, con $f(t) = x$ esiste un intorno aperto V di t in $\mathbb{R}$ e un intorno aperto U di x in S^1 tale che $f|_V : V \to U$ è un omeomorfismo.

Gli intervalli di $\mathbb{R}$ su cui f è iniettiva sono quelli del tipo $[a,b]$, con $b - a < 1$, quelli del tipo $[a,b[$, $]a,b]$ o $]a,b[$ con $b - a = 1$. Consideriamo quelli del primo tipo, sufficienti ai nostri scopi.

Resta da dimostrare che $f|_V$ è aperta ($V \overset{\text{def}}{=}]a,b[$ ovviamente f). Ma è evidente che:

$$f|_V(]a,b[) =]e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b}[,$$

da cui $f|_V$ è un omeomorfismo (ove $U \overset{\text{def}}{=}]e^{2\pi i a}, e^{2\pi i b}[$ contenente x).

Sia $U \subseteq S^1$, $U \neq S^1$ un aperto connesso contenente un punto x_0. Allora:

$$f^{-1}(x_0) = t_0 + \mathbb{Z}$$

Si ha:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} V_n,$$

con:

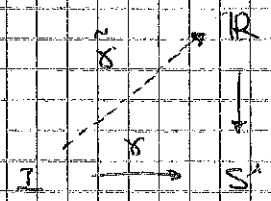
$$f|_{V_n} : V_n \to U$$

omeomorfismo per ogni n ($V_n \overset{\text{def}}{=} V_0 + n$, ove V_0 è l'unico aperto contenente t_0). Aperti del tipo di U si dicono UNIFORMEMENTE RIVESTITI da f.

LEMMA (SOLLEVAMENTO DI CAMMINI)

Sia $\gamma : I = [0,1] \to S^1$. Allora esiste $\tilde{\gamma} : I \to \mathbb{R}$ tale che:

$$f(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$$



In particolare $\tilde{\gamma}$ è unico per ogni scelta di una prima determinazione $\tilde{\gamma}(0) = x_0$, con $f(x_0) = \gamma(0)$.

Dim.

Sia per ogni $x \in S^1$, $U_x = S^1 \setminus \{x\}$: ogni varietà di $x \in S^1$, U_x è un intervallo aperto uniformemente ricoperto da f.

Sia $\mathcal{B} = \{\gamma^{-1}(U_x) \cap [0,1]\}_{x \in S^1}$: esso è un ricoprimento aperto di $[0,1]$, che è compatto. Allora esiste un sottoricoprimento finito. Abbiamo dunque una serie di intervalli finita:

$$[0, s_1[\,,]t_2, t_2[\,,]t_3, s_3[\,\dots]t_{m-1}, s_{m-1}[\,,]t_m, 1],$$

con:

$\forall i \in \{1, m-1\}$: $s_i > t_{i+1}$,

ognuno dei quali è contenuto in un intervallo $\gamma^{-1}(U_x) \cap [0,1]$.

Scegliendo ora $a_i \in]t_{i+1}, s_i[$, $i \in \{1, \dots, m-1\}$, si ha una successione $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_{m-1} < a_m = 1$ tale che, per ogni $i = 0, \dots, m-1$, $\gamma([a_i, a_{i+1}])$ è contenuto in un aperto uniformemente ricoperto da f.

Costruiamo ora, per induzione su $k = 0, 1, \dots, m$, dei sollevamenti $\tilde{\gamma}_k : [0, a_k] \to \mathbb{R}$, con $\tilde{\gamma}_k(0) = x_0$. Per $k = 0$, si ha semplicemente $\tilde{\gamma}_0(0) = x_0$. Supponiamo ora di aver definito $\tilde{\gamma}_k$. Si ha che $\gamma([a_k, a_{k+1}]) \subseteq U$, con U uniformemente ricoperto, tale che:

$$f^{-1}(U) = \bigcup_{j \in J} W_j,$$

con $f|_{W_j} : W_j \to U$ omeomorfismo, per ogni $j \in J$. Allora:

$$\exists! \, W \in \{W_j \mid j \in J\} \;:\; \tilde{\gamma}_k(a_k) \in W$$

Osserviamo che $[a_k, a_{k+1}]$ è connesso per archi, dato che $\tilde{\gamma}_{k+1}$ è continua, si avrà $\tilde{\gamma}_{k+1}|_{[a_k, a_{k+1}]} \subseteq W$.

Sappiamo $f|_W : W \to U$ è un omeomorfismo, per cui:

$\exists!\ \rho = (f|_W)^{-1} \circ \gamma \ \text{ t.c. } \ f\rho = \gamma|_{[a_k, a_{k+1}]}$

Definiamo dunque:

$$\tilde{\gamma}_{k+1}(t) = \begin{cases} \tilde{\gamma}_k(t) & 0 \le t \le a_k \\ \rho(t) & a_k \le t \le a_{k+1} \end{cases}$$

$\tilde{\gamma}_{k+1}$, costruita in un modo unico, è continua perché:

$$\tilde{\gamma}_k(a_k) = \rho(a_k)$$

Per $k+1 = n$, $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{k+1} = \tilde{\gamma}_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ è il sollevamento cercato, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Se γ è un cappio chiuso di punto base 1 (cioè $\gamma(0) = \gamma(1) = 1$), allora:

$$t_0 = 0 \Rightarrow \gamma(t_0) = 1 \Rightarrow \tilde{\gamma}(1) \in f^{-1}(\gamma(1)) = f^{-1}(1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \tilde{\gamma}(1) \in \mathbb{Z}$$

Possiamo dunque definire GRADO di γ il numero intero $\tilde{\gamma}(1)$. Possiamo anzitutto, però, che tale grado sia invariante per omotopia.

Sulla scorta del lemma di sollevamento di cammini, consideriamo l'omotopia:

$$F : I \times I \to S^1 \qquad \gamma_0(t) = F(t,0) \qquad \gamma_1(t) = F(t,1)$$

Dato che F è completa, $I \times I = I^2$ è completo. Determiniamo allora due suddivisioni di I:

$$0 = a_0 < a_1 < \dots < a_{r-1} < a_r = 1$$
$$0 = b_0 < b_1 < \dots < b_{m-1} < b_m = 1,$$

Tali che:

$$R_{ij} = \{(t,s) \in I^2 \mid a_i \le t \le a_{i+1},\ b_j \le s \le b_{j+1}\}, \quad i \overset{\text{def}}{=} R_{ij}$$

con $i = 0, \dots, r-1$, $j = 0, \dots, m-1$, sono contenuti ognuno in qualche aperto $U_{ij} \subseteq S^1$ uniformemente ricoperto da p.

Siano ora γ_0, γ_1 due cammini di estremi finali omotopicamente equivalenti. Allora $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, da cui, $\tilde{\gamma}_0(0) = 0$ e $\tilde{\gamma}_1(0) = 1$:

$\tilde{F}(0,0) = 0 \in f^{-1}(1) = f^{-1}(\gamma_0(0)) = f^{-1}(\gamma_1(0))$

Sia U_{00} aperto di S^1 uniformemente rivestito che contiene R_{00}. Allora esiste un unico $V_{00} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $\tilde{F}(0,0) \in V_{00}$, e $V_{00} \xrightarrow{f|_{V_{00}}} U_{00}$ è un omeomorfismo.

Allora, per $0 \leq t \leq a_1$ e $0 \leq s \leq b_1$:

$$\tilde{F}(t,s) = f|_{V_{00}}^{-1} \circ F(t,s)$$

Possiamo ora a R_{01}: si ha che $R_{01} \subseteq U_{01} \subseteq S^1$, con U_{01} aperto uniformemente rivestito. In particolare esiste ed è unico $V_{01} \subseteq \mathbb{R}$ tale che $f|_{V_{01}} : V_{01} \to U_{01}$ è un omeomorfismo, e $\tilde{F}(0,b_1) \in V_{01}$ (in realtà $\tilde{F}(0,b_1) \in V_{00} \cap V_{01}$).

Allora, per $0 \leq t \leq a_1$ e $b_1 \leq s \leq b_2$:

$$\tilde{F}(t,s) = f|_{V_{01}}^{-1} \circ F(t,s)$$

Si ha ora:

$$V_{00} \cap V_{01} = \{(t,b_1)\}_{t \in [0,a_1]} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{K}_{00}^{01}$$

In relazione a questo luogo di punti, deve essere:

$$f|_{V_{00}}^{-1} \circ F(t,s) = f|_{V_{01}}^{-1} \circ F(t,s)$$

Ma la validità è banale: queste due funzioni inducono due sollevamenti su $\mathbb{K}_{00}^{01}$, ove $\tilde{F}(0,b_1)$ è fissato: allora, per l'unicità dei sollevamenti, esse coincidono su $\mathbb{K}_{00}^{01}$.

Andando avanti in questo modo, si riesce a definire $\tilde{F}(t,s)$ in tutto il rettangolo.

$\tilde{F}(0,s)$ allora è l'arco costante $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ a partire da $\tilde{F}(0,0)$, ma il sollevamento di un arco costante è un arco costante. Allo stesso modo, $\tilde{F}(1,s)$ allora è l'arco costante $\gamma_0(1) = \gamma_1(1)$, a partire da $\tilde{\gamma}_1(1)$. Dunque esiste un arco costante ed esiste il suo altro estremo $\tilde{\gamma}_2(1)$, di modo che:

$$\tilde{\gamma}_1(1) = \tilde{\gamma}_2(1)$$

Ci dunque un'omotopia a estremi fissati tra $\tilde{\gamma}_1$ e $\tilde{\gamma}_2$. Commutativi omotopi hanno dunque lo stesso grado.

COROLLARIO

Cammini omotopicamente equivalenti (a estremi fissati) si sollevano a cammini con gli stessi estremi. In particolare $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$, da cui, definendo:

$$\deg : C^0([0,1], S^1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$\gamma \longrightarrow \deg \gamma = \tilde{\gamma}(1),$$

si ha:

$$\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$$

La mappa deg induce allora, per passaggio al quoziente, una mappa:

$$\varphi : \pi_1(S^1, 1) \longrightarrow \mathbb{Z}$$
$$[\gamma] \longrightarrow \deg(\gamma) = \tilde{\gamma}(1),$$

e l'applicazione è ben definita.

Inoltre anche è:

- Iniettiva, sia $\deg \gamma_0 = \deg \gamma_1$, ossia $\tilde{\gamma}_0(1) = \tilde{\gamma}_1(1)$. Allora $\tilde{\gamma}_0 * i(\tilde{\gamma}_1)$ è omotopicamente equivalente ad un cammino costante $c_0^{\tilde{}}(t) = 0$, da cui $\gamma_0 * i(\gamma_1)$ è omotopicamente equivalente ad un cammino costante $c_0(t) = 1$, cioè γ_0 e γ_1 sono omotopicamente equivalenti;
- Suriettiva. Consideriamo, al variare di $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longrightarrow e^{2\pi i n t}$$

si ha $\tilde{\alpha_n}(1) = n$, da cui $\deg \alpha_n = n$;

- Omomorfismo di gruppi. Si ha $[\gamma_0][\gamma_1] = [\gamma_0 * \gamma_1]$, da cui leggiamo che vale:

$$\varphi([\gamma_0 * \gamma_1]) = \varphi([\gamma_0]) + \varphi([\gamma_1]) = \tilde{\gamma}_0(1) + \tilde{\gamma}_1(1)$$

Sfruttando l'unicità del sollevamento, il sollevamento di $\gamma_1 * \gamma_2$ deve essere il sollevamento di γ_1 più il sollevamento di γ_2 a partire da $\tilde{\gamma}_1(1)$ (dunque $\tilde{\gamma_2}$ è l'unicità dei sollevamenti). Dunque:

$$\widetilde{(\gamma_0 * \gamma_1)}(t) \begin{cases} \tilde{\gamma}_0(2t), & 0 \le t \le \frac{1}{2}, \\ \tilde{\gamma}_1(2t-1) + m_1, & \frac{1}{2} \le t \le 1, \end{cases}$$

con $m_1 = \tilde{\gamma}_1(1) = \deg \gamma_1$. Dunque:

$$\widetilde{(\gamma_0 * \gamma_1)}(1) = \tilde{\gamma}_1(1) + \tilde{\gamma}_0(1),$$

e φ è omomorfismo di gruppi.

Allora φ è un isomorfismo di gruppi. Si ha dunque:

$$\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \mathbb{Z}$$

COROLLARIO (solo ENUNCIATO)

Il gruppo fondamentale del toro è:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Si intende considerare una coppia di circonferenze tangenti esternamente, si ha che il gruppo fondamentale è dato dal PRODOTTO LIBERO $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$, cioè dal prodotto intermittente, senza alcun tipo di relazione. In generale, il gruppo fondamentale di un bouquet di n circonferenze è dato dal prodotto libero di n copie di $\mathbb{Z}$:

$$\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

Sia ora $A \subset X$ un retratto per deformazione. Dimostreremo in seguito che $\pi_1(A) \cong \pi_1(X)$; per ora accettiamolo senza dimostrazione. Allora, dato che un toro privato di un suo punto si retrae per deformazione ad una coppia di circonferenze tangenti esternamente. Aggiungendo il punto mancante, il gruppo fondamentale passa da $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$ a $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dal cui è stata aggiunta una regola di commutazione

IL FUNTORE π_1

Abbiamo già visto che, per ogni $f : X \to Y$ e ogni punto base $a \in X$, l'applicazione:

$$f_* : \pi_1(X, a) \to \pi_1(Y, f(a))$$
$$f_*([\alpha]) = [f\alpha]$$

è ben definita ed è un omomorfismo di gruppi.

Sia ora X uno spazio topologico, $A \subseteq X$, $i : A \hookrightarrow X$ l'inclusione naturale, e $a \in A$. In generale la seguente

$$i_* : \pi_1(A, a) \to \pi_1(X, a)$$

è un omomorfismo, ma non è in generale iniettivo: esistono cammini omotopicamente non banali in A e omotopicamente banali in X: basti pensare a $f : I \to S^1$ definita in $S^1 \subseteq \Delta^2$ da $f(t) = e^{2\pi i t}$.

Tuttavia, se A è un retratto di X, allora l'omomorfismo è iniettivo; se A è un retratto di deformazione di X, allora i_* è un isomorfismo di gruppi.

Sia infatti α un cammino chiuso tale che $i_*([\alpha]) = 0$. Allora esiste un'omotopia $F : I^2 \to X$ tale che $F(t, 0) = \alpha(t)$ e $F(t, 1) = a$.

Se $r : X \to A$ è una retrazione di X in A, $r \circ F$ è un'omotopia da I^2 in A, da cui $[\alpha] = 0$ in $\pi_1(A, a)$, e l'omomorfismo è iniettivo.

Se poi r è una retrazione per deformazione, allora esiste $R : X \times I \to X$ tale che $R(x, 0) = r(x)$, $r(x, 1) = x$. Sia $\beta \in \Omega(X, a, a)$. Definiamo:

$$F : I^2 \to X$$
$$F(t, s) = R(\beta(t), s)$$

Questa è un'omotopia tra β e $r\beta$, dove $r = R(\cdot, 0)$. Dunque $i_*([r\beta]) = [\beta]$, e i_* è un isomorfismo.

OSSERVAZIONE

Sono subito evidenti le seguenti proprietà:

- $\forall e \in X : (id_X)_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(X,e)$ è l'identità di $\pi_1(X,e)$;
- se $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ sono continue, e $e \in X$ è un punto base, allora:

$$g_* f_* = (gf)_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(Z, gf(e))$$

PROPOSIZIONE

Siano $f, g : X \to Y$ due applicazioni omotopicamente equivalenti, sia $F : X \times I \to Y$ un'omotopia tra f e g, sia $e \in X$ un punto base, e sia $\alpha \in \Omega(Y, f(e), g(e))$ definita ponendo, per ogni $s \in I$:

$$\alpha(s) = F(e, s),$$

allora il diagramma seguente è commutativo:

$$\begin{array}{ccc} & \pi_1(X,e) & \\ {\scriptstyle f_*}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle g_*} \\ \pi_1(Y, f(e)) & \xrightarrow{\alpha_\#} & \pi_1(Y, g(e)), \end{array}$$

cioè:

$$f_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(Y, f(e))$$
$$g_* : \pi_1(X,e) \to \pi_1(Y, g(e))$$

Dove:

Abbiamo dimostrato che, dato $\alpha \in \Omega(X, e, e)$, i cammini $\gamma * g\alpha * f\alpha^{-1} * \gamma$ sono omotopicamente equivalenti.

Consideriamo il disegno seguente.

Per un lemma precedente si ha:

$$\gamma * g\alpha \simeq \delta, \quad \delta \simeq f\alpha * \gamma,$$

dove $\delta(t) = F(\alpha(t), t)$ (ossia $(t,s) \to F(\alpha(t), s)$), allora, per la transitività della relazione di equivalenza:

$$\gamma * g\alpha \simeq f\alpha * \gamma, \quad \text{c.v.d.}$$

COROLLARIO

Siano X uno spazio topologico e $g: X \to X$ un'applicazione continua omotopa all'identità. Allora, per ogni punto base $x_0 \in X$, il seguente è un omomorfismo di gruppi:

$$g_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(x_0))$$

Dim.

Sia $F: X \times I \to X$ un'omotopia tra $F(x,0) = x$ e $F(x,1) = g(x)$. Se γ è il cammino dato da:

$$\gamma(t) = F(x_0, t),$$

per la proposizione precedente:

$$g_* = \gamma_\# : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, g(x_0)),$$

e quindi g_* è un omomorfismo di gruppi, c.v.d.

Enunciamo ora un lemma, che useremo (ma non dimostreremo).

LEMMA (SOLO ENUNCIATO)

Siano date due applicazioni tra insiemi:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{h} D,$$

con gf biiettiva e hg iniettiva.

Allora f è biiettiva.

Possiamo ora concludere il discorso relativo all'invarianza per omotopia dei gruppi fondamentali: più precisamente dimostreremo che stesso gruppo fondamentale, e non di omomorfismo.

TEOREMA

Sia $f: X \to Y$ un equivalenza omotopica di spazi topologici. Sia $x_0 \in X$. Allora:

$$f_*: \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$$

è un omomorfismo di gruppi.

Dim.

Sia $g: Y \to X$ tale che fg e gf siano omotopi all'identità. Si hanno i seguenti omomorfismi di gruppi:

$$\pi_1(X, x_0) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, f(x_0)) \xrightarrow{g_*} \pi_1(X, gf(x_0)) \xrightarrow{f_*} \pi_1(Y, fgf(x_0))$$

Per la convoluzione $f * g = g * f$ non implicano, a priori, la
formula f_x è integrabile, c.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Un GRUPPO TOPOLOGICO è un gruppo e uno spazio topologico dotato di un'operazione tale che le funzioni:

$$\cdot : G \times G \to G \qquad g : G \to G$$
$$(x, y) \mapsto x * y \qquad x \mapsto x^{-1}$$

siano continue.

Sia G un gruppo topologico connesso, e $f : R \to G$ un omomorfismo continuo di gruppi topologici. Indichiamo con e l'elemento neutro di G e, per $n \in \mathbb{Z}$, con $\alpha_n : I \to G$ il cammino $\alpha_n(t) = f(nt)$. Sia $R = \ker f = f^{-1}(e)$.

Allora è applicazione

$$\alpha : \mathbb{Z} \to \pi_1(G, e)$$
$$n \mapsto [\alpha_n]$$

è un omomorfismo di gruppi.

Notiamo immediatamente che, data:

$$\alpha_n : I \to G,$$

si ha:

$$\alpha_n\left(\frac{k}{n}\right) = f(k) = e \quad \forall k = 1, \dots, n,$$

da cui:

$$\alpha_n = \underbrace{\alpha_1 * \alpha_1 * \dots * \alpha_1}_{n \text{ volte}}$$

Allora è poi immediato che:

$$\alpha_{n+m} = \alpha_1 * \dots * \alpha_1 = (\alpha_1 * \dots * \alpha_1) * (\alpha_1 * \dots * \alpha_1) = \alpha_n * \alpha_m.$$

2. Dimostrare che, se in via del tutto ipotetica, lo spazio S^n fosse semplicemente connesso, allora $\pi_k(X) = 0$ per ogni spazio topologico X.

Dobbiamo provare che, per ogni $\alpha : I \to X$ tale che $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$, si ha $[\alpha] = 0$.

si ha il seguente diagramma:

con $S^1 = I/\{0,1\}$.

L'applicazione $p : I \to S^1$ è ovviamente equivalente ai cammini costanti, dunque lo è anche α per ogni α, da cui subito che il diagramma è commutativo, e α è ovviamente equivalente ai cammini costanti.

3. Sia X uno spazio topologico connesso per archi. Dimostrare che X è semplicemente connesso se e solo se ogni applicazione continua $f : S^1 \to X$ si estende ad un'applicazione continua $f : D^2 \to X$.

Sia $S^1 = \{e^{2\pi i t} \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{C}$, e sia $f : S^1 \to X$, con $f(0) = x_0 \in X$. Sia X semplicemente connesso. Consideriamo il schema:

Sappiamo $f \circ \alpha : I \to X$, tale che $\alpha(t) = f(\pi(t))$ per ogni $t \in [0,1]$. Per ipotesi, α è ovviamente equivalente ai cammini costanti $c_{x_0}(t) = x_0$, avendo $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ un arco chiuso: sia $F : I \times I \to X$ un'omotopia tra α e c_{x_0}. Si ha:

da cui è possibile collassare ad un punto tra dei quattro lati del quadrato: il quoziente è ora un disco, ove sue bordo in S^1 è α composto α.

L'omotopia f passa al quoziente, poiché vale costantemente x_0 sui lati dei quadrati identificati, ed estende f ad una funzione da S^2 a X.

Osserviamo che l'enunciato può diventare il seguente: un cammino è omotopo ai cammini costanti se e solo se la mappa $f: S^1 \to X$ si estende a tutto il disco.

Viceversa, se $f: S^1 \to X$ si estende a $f: \Delta^2 \to X$, allora f è omotopicamente equivalente alla mappa costante, poiché Δ^2 è contraibile. Ciò vale per ogni $f: S^1 \to X$, X è semplicemente connesso.

4. Siano X uno spazio topologico connesso per archi, $a, b \in X$ due punti. Dimostriamo che $\pi_1(X,a)$ è un gruppo Abeliano se e solo se l'isomorfismo $\gamma_\# : \pi_1(X,a) \to \pi_1(X,b)$ non dipende dalla scelta di $\gamma \in \Omega(X,a,b)$.

Siano $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X,a,b)$. Supponendo che $\gamma_\#$ è invariante rispetto agli isomorfismi, si ha:

$$\forall \alpha \in \pi_1(X,a): \ (\gamma_0)_\#(\alpha) = (\gamma_1)_\#(\alpha) \iff (\gamma_0) * \alpha * i(\gamma_0) \sim (\gamma_1) * \alpha * i(\gamma_1) \iff \alpha \sim (i(\gamma_0) * \gamma_1) * \alpha * i(i(\gamma_0) * \gamma_1) \iff$$

$$\iff \alpha * (i(\gamma_0) * \gamma_1) \sim (i(\gamma_0) * \gamma_1) * \alpha,$$

da cui, per ogni $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(X,a,b)$ $\forall \beta \in \Omega(X,a,a)$, $\beta \sim [\gamma_1 * i\gamma_0]$: $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

Preso $\delta \in \Omega(X,a,a)$ qualunque, si ha che: $\beta_\delta = (\delta * \gamma) * \gamma^{-1}$ e tale che $\beta_\delta([\gamma]) = b$.

Allora:

$$\forall \delta \in \Omega(X,a,a): \ \alpha * \delta \sim \alpha * \delta * \gamma * \gamma^{-1} \sim \alpha * \beta_\delta \sim \beta_\delta * \alpha \sim \delta * \gamma * \gamma^{-1} * \alpha \sim \delta\ \alpha,$$

cioè $\pi_1(X,a)$ è Abeliano.

L'implicazione opposta è ovvia.

TEOREMA DEL NUMERO DI LEBESGUE

TEOREMA

Sia (X, d) uno spazio metrico compatto, e sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento aperto di X.

Esiste allora $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in X$ l'insieme $B(x, \delta)$ è interamente contenuto in un aperto del ricoprimento $\mathcal{A}$.

Dim.

Supponiamo per assurdo che la tesi sia falsa. Allora esiste una successione di aperti del tipo $B(x_n, \varepsilon_n)$, con:

$$\lim_{n \to +\infty} \varepsilon_n = 0$$

tale che la successione $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ammetta una sottosuccessione convergente:

$$\bar{x} = \lim_{k \to +\infty} x_{n_k} \in X$$

In particolare $\bar{x} \in X = \bigcup_{U_\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha$, da cui:

$\exists\, U_\alpha \in \mathcal{A}$ tale che $\bar{x} \in U_\alpha$.

Esiste allora $r > 0$ tale che $B(\bar{x}, r) \subseteq U_\alpha$.

Inoltre:

$$\exists\, k^* \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, k \geq k^* \;:\; x_{n_k} \in B\left(\bar{x}, \frac{r}{2}\right)$$

Infine:

$$\lim_{k \to +\infty} d(x_{n_k}, \bar{x}) = 0$$

Allora:

$$\exists\, k^{**} \in \mathbb{N} \;:\; \forall\, k \geq k^{**} \;:\; \varepsilon_{n_k} + d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{r}{2},$$

da cui:

$$B(x_{n_k}, \varepsilon_{n_k}) \in B(x_\alpha, r) \subseteq U_\alpha,$$

una contraddizione.

Una dimostrazione alternativa è la seguente.

Sia $\mathcal{A}$ un ricoprimento di X:

$$X = \bigcup_{U_\alpha \in \mathcal{A}} U_\alpha = \bigcup_{i=1}^{n} U_i.$$

Sia, per ogni $i = 1, \dots, m$:

$$C_i \overset{def}{=} \forall \gamma \; \Delta_i$$

Si può dire, per ogni $i = 1, \dots, m$, C_i è chiuso, dunque completo.

Definiamo:

$$\forall i = 1 \dots m : d_i(\gamma) \overset{def}{=} d(\gamma, C_i) \geq 0$$

Per chiusura dei C_i:

$$d_i(\gamma) = 0 \iff \gamma \in C_i$$

Dato che:

$$C_1 \cap \dots \cap C_m = \emptyset,$$

si ha:

$$\forall \gamma \in \Gamma : D(\gamma) \overset{def}{=} \max_{i=1 \dots m} d_i(\gamma) > 0.$$

Siccome $D : \Gamma \to \mathbb{R}^+$ è continua e sempre strettamente positiva, e Γ è completo:

$$\exists \; \delta = \min_{\Gamma} D > 0$$

Dunque:

$$\forall \gamma \in \Gamma : D(\gamma) \geq \delta \Rightarrow \exists \, i = 1 \dots m \; s.t. \; d_i(\gamma) = d(\gamma, C_i) \geq \delta,$$

ossia:

$$B(\gamma, \delta) \in \Delta_i \quad , \; c.v.d.$$

PRIMA PARTE DEL TEOREMA DI VAN KAMPEN

TEOREMA (DI VAN KAMPEN, PRIMA PARTE)

Siano A, B due aperti di uno spazio topologico X, tali che $X = A \cup B$. Sia $A \cap B$ connesso per archi, così come A e B. Sia $x_0 \in A \cap B$. Siano:

$$f_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$
$$g_* : \pi_1(B, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$$

gli omomorfismi di gruppi indotti dalle inclusioni $A \subseteq X$ e $B \subseteq X$.

Allora $\pi_1(X, x_0)$ è generato dalle immagini di f_* e g_*.

Dim.

PREMESSA

Ricordiamo che G è generato da $S \subseteq G$ se ogni elemento di G si può scrivere come prodotto finito di elementi di $S \cup$ dei loro inversi.

OSSERVAZIONE

Con questo teorema dimostreremo finalmente che S^n, $n \geq 2$ è semplicemente connessa.

OSSERVAZIONE

Sia $\alpha : I \to X$ un cammino continuo e sia $\mathcal{R}$ un ricoprimento aperto di X. Dato che I è uno spazio metrico compatto, applicando il Teorema del numero di Lebesgue, si ha che esiste un intero $m \in \mathbb{N}^+$ tale che, per ogni $i = 0, \dots, m-1$, l'immagine di $\alpha_i : \left[\frac{i}{m}, \frac{i+1}{m}\right] \to X$ è interamente contenuta in un aperto del ricoprimento $\mathcal{R}$.

Sia $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$ un cammino. Vogliamo dimostrare che α è omotopicamente equivalente alla giunzione di un numero finito di cammini $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Omega(X, x_0, x_0)$, ognuno dei quali interamente contenuto in A o in B.

Per il lemma precedente, esiste $n > 0$ tale che l'immagine delle restrizioni di $\alpha : \left[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}\right] \to X$ sono ognuna contenuta in A o in B. In particolare, se S è il numero di Lebesgue

dei rettangoli, basta porre $\frac{1}{m} < \delta \Leftrightarrow m > \frac{1}{\delta}$.

Per $i = 0, \dots, m-1$, definiamo:

$$\alpha_i^* : I \to X$$

$$\alpha_i^*(t) = \alpha\left(\frac{i+t}{m}\right)$$

α_i^* è la parametrizzazione standard di α_i.

Per $i = 1, \dots, m-1$, definiamo:

$$x_i = \alpha\left(\frac{i}{m}\right)$$

Per ipotesi, A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi:

$\forall i = 1, \dots, m-1 \ \exists \beta_i \in \Omega(x_1, x_0, x_2)$ s.t.:

$$\begin{cases} x_i \in A \cap B \Rightarrow \beta_i \in \Omega(A \cap B, x_i, x_0) \\ x_i \in A \setminus B \Rightarrow \beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0) \\ x_i \in B \setminus A \Rightarrow \beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0) \end{cases}$$

Abbiamo:

- se $x_i \in A$, $\beta_i \in \Omega(A, x_i, x_0)$;
- se $x_i \in B$, $\beta_i \in \Omega(B, x_i, x_0)$.

Allora, definiamo:

- $\gamma_1 = \alpha_1 * \beta_1$;
- $\gamma_j = i(\beta_{j-1}) * \alpha_j * \beta_j \quad \forall j = 2, \dots, m-1$;
- $\gamma_m = i(\beta_{m-1}) * \alpha_m$,

si ha che $\gamma_i \in \Omega(A, x_0, x_1)$ o $\gamma_i \in \Omega(B, x_0, x_1)$ per ogni $i = 1, \dots, m$, e inoltre, per costruzione:

$$\alpha \sim \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_m, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Siano A, B due aperti di X tali che $A \cup B$, $A \cap B \neq \emptyset$. Se A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi, e A, B sono semplicemente connessi, allora X è semplicemente connesso.

Dim.

È evidente che $A \cup B = X$ sia connesso per archi. Se poi

$x_0 \in A \cap B$, si ha $\pi_1(A, x_0) \simeq \pi_1(B, x_0) \simeq \{e\}$, da cui la tesi, c.v.d.

COROLLARIO

La sfera S^n, $n \geq 2$ è semplicemente connessa.

Dim.

Basta considerare $A = S^n - \{(1, 0 \dots 0)\}$ e $B = S^n - \{(-1, 0 \dots 0)\}$, entrambi omeomorfi a $\mathbb{R}^n$ (che è semplicemente connesso), e applicare i risultati precedenti, c.v.d.

COROLLARIO

Il complementare di un insieme finito in $\mathbb{R}^n$ è semplicemente connesso per $n \geq 3$.

Dim.:

Sia $n \geq 3$: ragioniamo per induzione sul numero $m \geq 0$ di punti distinti $p_1, \dots p_m$ tali che $X = \mathbb{R}^n - \{p_1, \dots, p_m\}$.

CASI BASE

$m = 0$

X è connesso, dunque semplicemente connesso.

$m = 1$

Si ha che $\mathbb{R}^n - \{p_1\}$ si retrae per deformazione su S^{n-1}, e applicando il corollario precedente, e il fatto che $\pi_1(X, x_0)$ è invariante per deformazioni (e meno di isomorfismo), essendo $n - 1 \geq 2$, $\mathbb{R}^n - \{p_1\}$ è semplicemente connesso.

PASSO INDUTTIVO "FORTE"

$1 \dots k-1 \Rightarrow k$

Consideriamo due punti distinti $p_i, p_j \in \{p_1, \dots p_k\}$: senza perdita di generalità, consideriamo p_1, p_2. Supponiamo, per non cadere in casi banali, che sia $p_1 \neq p_2$.

Sia H l'iperpiano definito da:

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, p_1) = d(x, p_2)\},$$

ossia l'iperpiano bisettore. Siano ora H_1 e H_2 due iperpiani paralleli a H, distanti da H meno di $p_1 < p_2$.

In $\mathbb{R}^2$ si consideri una rappresentazione come quella accanto.

Definiamo A e B come, rispettivamente, il semispazio di H_1 che contiene p_2 e il semispazio di H_2 contenente p_1.

Si ha che A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi. Inoltre ogni contenga al più k punti della famiglia $\{p_1, \dots, p_{k-1}\}$, perché $p_2 \notin A$ e $p_2 \notin B$.

Dimostriamo che A e B sono omeomorfi a $\mathbb{R}^m$: la dimostrazione è banale, senza perdere di generalità (a meno di omeomorfismo) sia $A = \{x \in \mathbb{R}^m \mid x_1 > 0\}$. La seguente è un omeomorfismo:

$$\Phi : A \longrightarrow \mathbb{R}^m$$
$$(x_1, \dots, x_m) \to (\log(x_1), x_2, \dots, x_m)$$

La dimostrazione per B è analoga.

Per ipotesi induttiva, allora, A e B sono semplicemente connessi.

Per il Teorema di Van Kampen, allora, $A \cup B = \mathbb{R}^m \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ è semplicemente connesso, c.v.d.

OSSERVAZIONE

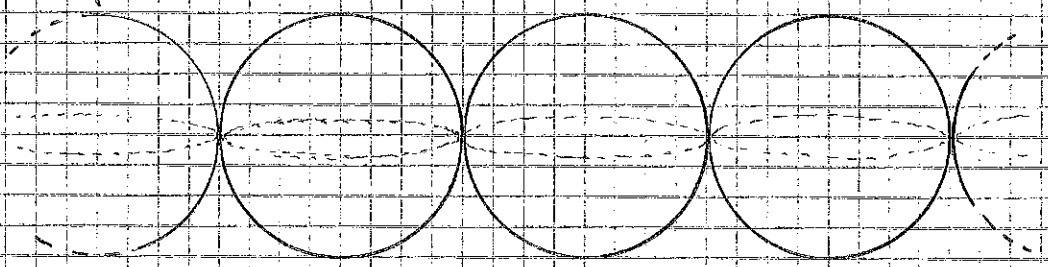
$\mathbb{R}$ e $\mathbb{R}^2$ meno un numero finito di punti non sono semplicemente connessi ($\mathbb{R} \setminus \{*\}$ non è nemmeno connesso).

OSSERVAZIONI VARIE

Siano $k, n \in \mathbb{N}^*$, con $n \geq 3$. Consideriamo:

$$X = \mathbb{R}^n \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$$

Abbiamo appena dimostrato che X è semplicemente connesso. Esso si ottiene ad una collana di sfere che si toccano a due a due in un punto:

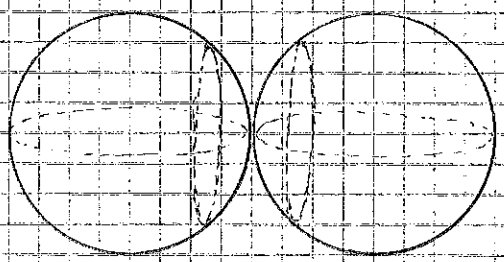


Affermiamo che l'unione è semplicemente connessa.
Le sfere si toccano in un punto (consideriamo il caso in cui le sfere sono due):

$$S_1 \cap S_2 = \{p\}$$

Le sfere però sono dei chiusi; il Teorema di Van Kampen, per essere usato, richiede che gli spazi siano aperti.

Consideriamo allora A e B come in figura (aggiungiamo cioè a ogni sfera una calotta aperta dell'adiacente):

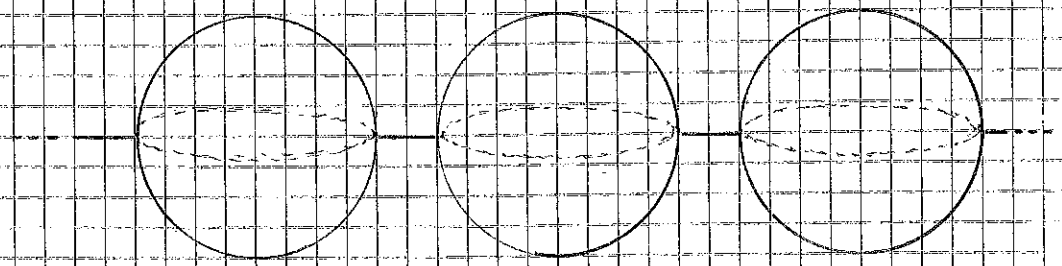


Ora possiamo usare il Teorema di Van Kampen: l'unione è semplicemente connessa. Per induzione, per ogni $k \in \mathbb{N}$ la collana di k sfere come nella prima figura è semplicemente connessa.

E se le sfere sono infinite?
In realtà l'unione è ancora semplicemente connessa: sia Y tale spazio, e sia $\alpha : I \to Y$ un arco. L'immagine $\mathrm{Im}(\alpha)$ è compatta perché I è compatto, da cui è vero il

contenuto in un unione finita di h sfere consecutive: ciò H tale unione. H è semplicemente connesso, dunque l'arco è omotopo ad un cammino costante tramite un omotopia a nodi: in H, dunque "a fortiori" in Y. Y è dunque semplicemente connesso.

Allo stesso modo, per n è uno spazio semplice connesso:



SEMPLICE CONNESSIONE DI $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$

PROPOSIZIONE

Lo spazio proiettivo complesso $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$, $m \geq 0$, è semplicemente connesso.

Dim.

Ragioniamo per induzione su $m \in \mathbb{N}$.

CASO BASE

$m = 0$

In questo caso, $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ è formato da un punto, dunque $\mathbb{P}^0(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso.

PASSO INDUTTIVO

Sia $x_0, \dots x_m$ un sistema di coordinate omogenee su $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. Consideriamo l'iperpiano $H_0 \overset{\text{def}}{=} \{[x_0, \dots, x_m] \in \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \mid x_0 = 0\}$.

Si ha:

- $H_0 \cong \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$;
- $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus H_0 \cong \mathbb{C}^m$.

Siano allora:

$$A \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus H_0 \cong \mathbb{C}^m \quad , \quad B \overset{\text{def}}{=} \mathbb{P}^m(\mathbb{C}) \setminus \{[1, 0, \dots, 0]\}$$

Notiamo che $\mathbb{P}^m(\mathbb{C}) = A \cup B$.

Ora:

- per ipotesi induttiva, $H_0 \cong \mathbb{P}^{m-1}(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso;
- $A \cong \mathbb{C}^m$ è semplicemente connesso;
- $A \cap B \cong \mathbb{C}^m \setminus \{0\}$ è connesso per archi ($m \geq 1$).

Consideriamo ora la seguente retrazione per deformazione:

$$R : I \times B \to B$$
$$(t, [x_0, \dots x_m]) \to ([(1-t)x_0, \dots x_m])$$

B si retrae su H_0 per deformazione: allora B è semplicemente connesso.

Allora $A \cup B = \mathbb{P}^m(\mathbb{C})$ è semplicemente connesso, c.v.d.

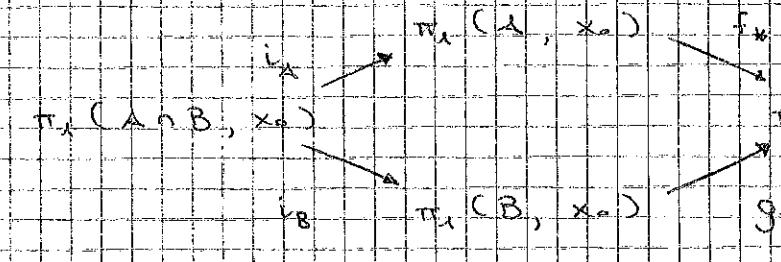
OSSERVAZIONE

Per $m > 0$, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ non è semplicemente connesso.

ESERCIZI VARI

1. Dimostrare che, se in aggiunta alle ipotesi del Teorema di Van Kampen, è $A \cap B \to B$ indurre un omomorfismo suriettivo tra i rispettivi gruppi fondamentali, allora è suriettivo l'omomorfismo $f_* : \pi_1(A, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$.

Consideriamo il seguente schema:



L'ipotesi aggiuntiva afferma che ogni cammino chiuso in B è omotopo ad un cammino chiuso in $A \cap B$:

$$\alpha \in \Omega(B, x_0, x_0) \Rightarrow \alpha \simeq \beta \in \Omega(A \cap B, x_0, x_0)$$

Sia ora $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_0)$. Allora, ripercorrendo la dimostrazione del Teorema di Van Kampen:

$$\gamma \simeq \beta_1 * \beta_2 * \dots * \beta_s,$$

ove per ogni $i = 1, \dots, s$, β_i è un arco chiuso in A o in B.

Ma i β_i archi chiusi in B sono omotopi ad archi in $A \cap B$. Si ha pertanto:

$$\gamma \simeq \beta_1' * \dots * \beta_s',$$

ove ogni β_i' è un arco chiuso in A.

In conclusione, per ogni $\alpha \in \Omega(X, x_0, x_0)$, α è omotopo ad un cammino chiuso $\alpha' \in \Omega(A, x_0, x_0)$, da cui:

$$[\alpha] \in \pi_1(A, x_0, x_0),$$

onde f_* è suriettiva.

2. Siano $a \in \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, e $H \cong \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ un iperpiano che contiene a. Provare che se $m \geq 2$, allora l'inclusione $H \hookrightarrow \mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ induce un'applicazione suriettiva $\pi_1(H, a) \to \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), a)$.

PREMESSA

Consideriamo brevemente il risultato: in maniera intuitiva, se r è una retta proiettiva che contiene a, allora:

$$\alpha : \pi_1(r, a) \to \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), a)$$

è suriettiva.

Dunque il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$, per $m \geq 2$ (in realtà per $m \geq 1$, visto che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è una retta proiettiva) è generato dal gruppo fondamentale di una sua retta.

Evidentiamo il fatto che, per $m \geq 1$, $\mathbb{P}^m(\mathbb{R})$ non è semplicemente connesso, dunque il gruppo fondamentale di una retta proiettiva non è banale.

Riferiamoci la dimostrazione vista per la semplice connessione di $\mathbb{P}^m(\mathbb{C})$. Sia $\mathbb{P}^m(\mathbb{R}) = A \cup B$, con:

$$A = \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \setminus \{b\}, \ b \notin H, \qquad B = \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \setminus H$$

Innanzitutto $B = \mathbb{P}^m(\mathbb{R}) \setminus H \cong \mathbb{R}^m$ è semplicemente connesso.

A invece si retrae su H per deformazione, da cui esiste una mappa $\chi : \pi_1(A, a) \to \pi_1(H, a)$ biiettiva.

Se il punto base è a, dunque, ogni cammino chiuso in A è omotopicamente equivalente ad un cammino chiuso in H.

Per ogni punto $c \in A \cap B$, allora, $\pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), c)$ è generato da $\pi_1(A, c)$.

Il problema è dunque il fatto che $b \notin A \cap B$. Dobbiamo dunque cambiare punto base. Consideriamo lo schema:

$$\begin{array}{ccccc} \pi_1(H, a) & \xrightarrow{\chi} & \pi_1(A, a) & \xrightarrow{\Theta} & \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), a) \\ & \searrow^{\Lambda} & \downarrow \gamma_\# & & \downarrow \gamma_\# \\ & & \pi_1(A, b) & \xrightarrow{\Sigma} & \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), b) \end{array}$$

La scelta è corretta perché $b \in A \cap B$.

Per ipotesi Σ è suriettiva. Allora:

- $\Theta \equiv i(\gamma)_\# \circ \Sigma \circ \gamma_\# : \pi_1(A, a) \to \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), a)$ è suriettiva perché composizione di funzioni suriettive;
- $\Delta \equiv \gamma_\# \circ \chi : \pi_1(H, a) \to \pi_1(A, b)$ è una bigezione, dunque è in particolare suriettiva.

Allora:

$$\Theta \circ \chi \equiv i(\gamma)_\# \circ \Sigma \circ \Delta \equiv i(\gamma)_\# \circ \Sigma \circ \gamma_\# \circ \chi : \pi_1(H, a) \to \pi_1(\mathbb{P}^m(\mathbb{R}), a)$$

è suriettiva.

3. Sia $\mathbb{K}_1 \subseteq \mathbb{K}_2 \subseteq \dots$ un'esaustione in compatti di uno spazio topologico X. Provare che, se $\mathbb{K}_m$ è semplicemente connesso per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora anche X è semplicemente connesso. Più in generale, dimostrare che se $x \in \mathbb{K}_1$, e se l'inclusione $\mathbb{K}_m \subseteq \mathbb{K}_{m+1}$ induce un isomorfismo $\pi_1(\mathbb{K}_m, x) \cong \pi_1(\mathbb{K}_{m+1}, x)$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora l'inclusione $\mathbb{K}_m \subseteq X$ induce un isomorfismo di gruppi $\pi_1(\mathbb{K}_m, x) \cong \pi_1(X, x)$.

Sia $\alpha \in \Omega(X, x, x)$ un cammino chiuso. Allora, dato che $\alpha(I)$ è compatto perché I è compatto, e dato che $(\mathbb{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento di X in compatti, dunque $(\mathbb{K}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ è un ricoprimento aperto di X, da cui, per compattezza di $\alpha(I)$:

$$\exists\, m \in \mathbb{N} \;\exists\; \alpha(I) \subseteq \mathbb{K}_m.$$

Dato che $\mathbb{K}_1 \hookrightarrow \mathbb{K}_m$ induce un isomorfismo $\pi_1(\mathbb{K}_1, x) \longrightarrow \dots \longrightarrow \pi_1(\mathbb{K}_m, x)$, si ha che ogni cammino chiuso in X è omotopo ad un cammino chiuso in $\mathbb{K}_1$. Dunque è applicazione:

$$g : \pi_1(\mathbb{K}_1, x) \to \pi_1(X, x)$$

è suriettiva.

Sia ora $\alpha \in \Omega(\mathbb{K}_1, x, x)$ tale che $g([\alpha]) = 0$. Allora esiste un omotopia:

$$F : I \times I \to X$$

tra α e il cammino costante. Dato che I^2 è compatto, $F(I^2)$ è compatto.

Dunque:

$\exists\, n \in \mathbb{N}$ t.c. $F(I^2) \subseteq \mathbb{K}_n$,

da cui α è omotopicamente banale in $\mathbb{K}_n$. Ma $\pi_1(\mathbb{K}_1, x) \cong \pi_1(\mathbb{K}_n, x)$ come isomorfismi: dobbiamo che $[\alpha] = 0$.

Allora:

$$g : \pi_1(\mathbb{K}_1, x) \longrightarrow \pi_1(X, x)$$

è iniettiva.

Dunque g è un isomorfismo.

Il caso dei $(\mathbb{K}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ semplicemente connessi è un caso particolare.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA

TEOREMA (FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

Sia $p(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio a coefficienti complessi di grado $\deg p > 0$. Allora:

$\exists\, \alpha \in \mathbb{C} \;:\; p(\alpha) = 0$

Come immediata conseguenza, un polinomio non nullo di grado $n \in \mathbb{N}$ ha esattamente n radici in $\mathbb{C}$.

Dim.:

Sia:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_K x^K \,, \quad K > 0$$

Supponiamo per assurdo che:

$\forall\, z \in \mathbb{C} \;:\; p(z) \neq 0$

Allora la seguente funzione:

$$G : I \times [0, +\infty[\;\to\; S^1 = C$$

$$G(t, r) = \frac{p(r e^{2\pi i t})}{|p(r e^{2\pi i t})|} \cdot \frac{|p(z)|}{p(z)} \,,$$

con $0 \le t \le 1$ e $r \ge 0$ è continua. Definiamo poi:

$$F : I^2 \to S^1$$

$$F(t, s) = \begin{cases} G\left(t, \dfrac{s}{1-s}\right) \,, & 0 \le t \le 1 \,,\; 0 \le s < 1 \\ e^{2\pi i k t} \,, & 0 \le t \le 1 \,,\; s = 1 \end{cases}$$

Si ha:

$$\lim_{s \to 1} F(t, s) = \lim_{s \to 1} G\left(t, \frac{s}{1-s}\right) = \lim_{r \to \infty} G(t, r) =$$

$$= (e^{2\pi i t})^k = e^{2\pi i k t} \,,$$

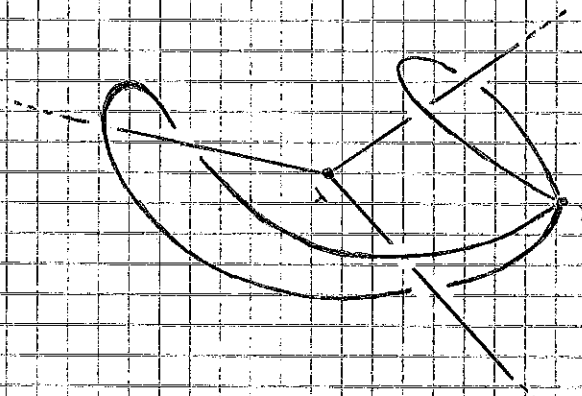
da cui F è continua.

È dunque un omotopia tra $F(t,0) = G(t,0) = 1$ (che è costante, dunque ha grado 0) e $F(t,1) = e^{2\pi i k t}$, che ha grado $k > 0$, e ciò è assurdo per l'invarianza del grado.

Dunque la tesi, c.v.d.

ESEMPIO DI GRUPPO FONDAMENTALE

Consideriamo $\mathbb{R}^3$ privato di tre semirette partenti dall'origine:



Vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di tale insieme, che indicheremo con X_3. Senza perdere di generalità, possiamo supporre che le tre semirette siano i tre semiassi coordinati positivi, e che il punto di intersezione sia dunque O.

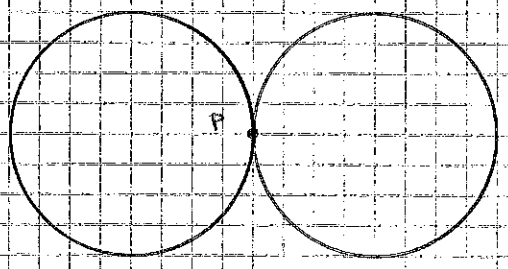
X_3 si retrae per deformazione su $S^2 \setminus \{p, q, r\}$, ove:

$$p = (0,0,1), \quad q = (0,1,0), \quad r = (1,0,0)$$

Sia $Y = S^2 \setminus \{p,q,r\}$. Considerato $P = p$, usando la proiezione stereografica abbiamo che:

$$\pi_1(X_3) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{Q, R\}),$$

con $\mathbb{R}^2 \setminus \{Q, R\}$ retraibile per deformazione a un bouquet di due circonferenze:



Resta $\pi_1(X_3) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$: dimostreremo rigorosamente questo fatto più avanti, ora abbiamo voluto ridurre il calcolo di $\pi_1(X_3)$ al calcolo del gruppo fondamentale di un bouquet di due circonferenze.

Una volta noto ciò, saremmo generalizzare facilmente, se vi fossero stati n, ovvero:

$$\pi_1(X_n) = \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{(n-1) \text{ volte}}$$

OMEOMORFISMI LOCALI

Un'applicazione continua $f: X \to Y$ è un **OMEOMORFISMO LOCALE** se per ogni $x \in X$ esistono degli aperti $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ tali che $x \in A$, $f(x) \in B$, $f|_A : A \to B$ è un omeomorfismo.

LEMMA

Ogni omeomorfismo locale è un'applicazione aperta.

Dim.

Sia $f: X \to Y$ un omeomorfismo locale, sia $V \subseteq X$ un aperto. Vogliamo dimostrare che $f(V)$ è aperto: è sufficiente dimostrare che $f(V)$ è intorno di ogni suo punto, ossia che: $\forall\, y \in f(V)\ \exists\, U \subseteq Y$ aperto $: y \in U \subseteq f(V)$.

Sia $x \in V$ | $y = f(x)$. Allora esistono $A \ni x$ e $B \ni y$ tali che $x \in A$, $y \in B$, $f|_A : A \to B$ è un omeomorfismo. Allora:

$$y \in f(V \cap A),$$

con $U \overset{\text{def}}{=} f(V \cap A)$, aperto in B, dunque anche in Y, da cui $f(V)$ è aperto, c.v.d.

LEMMA

Sia $f: X \to Y$ un omeomorfismo locale. Allora le fibre sono discrete.

Dim.

Consideriamo $y \in Y$, consideriamo $f^{-1}(y)$. Sia $x \in f^{-1}(y)$. Allora esistono $A \ni x$, $B \ni y$ tali che $x \in A$, $y \in B$, e $f|_A : A \to B$ è un omeomorfismo. Allora:

$$\forall\, a \in A : \{x\},\ f(a) \neq y,$$

sono, per definizione, $f^{-1}(y)$ è discreto:

$$f^{-1}(y) \cap A = \{x\}, \text{ c.v.d.}$$

Abbiamo già visto esempi di omeomorfismi locali. L'applicazione:

$$f: \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longrightarrow e^{2\pi i t}$$

è un omeomorfismo locale.

RIVESTIMENTI

Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Un'applicazione continua e suriettiva:

$$p : E \to X$$

è un RIVESTIMENTO di X se per ogni $x \in X$ esiste un aperto connesso per archi $V \subseteq X$ tale che:

- $x \in V$;
- se $U \subseteq E$ è una componente connessa di $p^{-1}(V)$, allora $p|_U : U \to V$ è un omeomorfismo.

Lo spazio X è detto BASE del rivestimento; E viene detto SPAZIO TOTALE del rivestimento; gli insiemi $p^{-1}(x)$, $x \in X$, sono detti FIBRE del rivestimento.

Un aperto connesso $V \subseteq X$ è un APERTO BANALIZZANTE di p se soddisfa la condizione espressa sopra: segue subito che per ogni $x \in X$ esiste un aperto banalizzante contenente x. Un rivestimento è BANALE se X è un aperto banalizzante.

In particolare p è un omeomorfismo locale, dunque p è aperta, e le fibre sono discrete.

Se $p : E \to X$ è un rivestimento, segue direttamente dalla definizione che per ogni $e \in E$ esiste un intorno aperto omeomorfo ed un intorno aperto di $p(e)$: basta considerare V aperto banalizzante che contiene $p(e)$, e U la componente connessa di $p^{-1}(V)$ contenente e: segue che E è localmente connesso per archi. Se in più E è connesso, si dice che il rivestimento è CONNESSO.

ESEMPI DI RIVESTIMENTI

Vediamo ora alcuni esempi di rivestimenti.

Consideriamo la mappa esponenziale:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longmapsto e^{2\pi i t} = \cos(2\pi t) + i \sin(2\pi t)$$

Essa è un rivestimento connesso. Infatti essa è un'applicazione suriettiva, e per ogni $]a, b[\subseteq \mathbb{R}$, si ha:

$$f^{-1}(f(]a,b[)) = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} (\,]a+m, b+m[\,)$$

se $|b-a| < 1$. Per $m \in \mathbb{Z}$ l'intervallo $]a+m, b+m[$ è una componente connessa di $f^{-1}(f(]a,b[))$, e l'applicazione:

$$f|_{]a+m,b+m[} :]a+m, b+m[\longrightarrow S^1$$

è un omeomorfismo.

Identificando $\mathbb{R}$ con l'asse reale:

$$\mathcal{E} = \{(z,t) \in (\mathbb{C} \times \mathbb{R}) \mid z = f(t)\},$$

l'applicazione $f : \mathbb{R} \to S^1$ coincide con la restrizione all'asse reale della proiezione:

$$p : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(f(t), t) \longmapsto f(t)$$

Consideriamo ora la proiezione naturale:

$$p : S^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3(\mathbb{R})$$

Essa è un rivestimento. Infatti per ogni $x \in S^3$ l'aperto:

$$U = \{z \in S^3 \mid \langle x, z \rangle \neq 0\}$$

è saturo rispetto a p, e ha come componenti connesse gli aperti:

$$U_1 = \{z \in S^3 \mid \langle x, z \rangle > 0\}$$
$$U_2 = \{z \in S^3 \mid \langle x, z \rangle < 0\}$$

La restrizione di p ad ognuna delle due componenti connesse è un omeomorfismo sulla immagine. Ritorneremo su questo esempio più avanti, per dimostrare (tra l'altro) che il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Le applicazioni:

$$p_m : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*, \quad m \in \mathbb{N}^+$$
$$z \mapsto z^m$$

sono rivestimenti.

In particolare, ogni punto dell'immagine è tale che:

$\forall\, m \in \mathbb{N}^+ : |p^{-1}(x)| = m$

Torneremo su questi esempi quando analizzeremo i sottogruppi di un gruppo fondamentale. Se $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, infatti, $p_m^*(\pi_1(\mathbb{C}^*))$ dà, al variare di $m \in \mathbb{N}^+$, tutti i sottogruppi di $\mathbb{Z}$.

Come ultimo esempio, l'applicazione:

$$p : \mathbb{C} \to \mathbb{C} - \{0\} = \mathbb{C}^*$$
$$z \mapsto e^z$$

è un omeomorfismo locale differenziabile in ogni punto, con differenziale di rango massimo, dunque è un diffeomorfismo locale.

Essa è continua e suriettiva, ma non è iniettiva:

$$p(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow p(x+iy) = p(x + i(y + 2k\pi)) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z}$$

Notiamo infine che $S^1 \subset \mathbb{C}^*$ è rivestito dall'asse immaginario:

$\forall\, y \in \mathbb{R} : p(y) = e^{iy} = e^0(\cos y + i \sin y) \in S^1$

ANCORA SUI RIVESTIMENTI

PROPOSIZIONE

Sia $p: E \to X$ un rivestimento. Allora per ogni sottospazio $Y \subseteq X$ connesso e localmente connesso per archi, la restrizione:

$$p|_{p^{-1}(Y)}: p^{-1}(Y) \to Y$$

è ancora un rivestimento.

Dim.

Sia $y \in Y$: vogliamo trovare un aperto di Y contenente y che sia banalizzante.

Innanzitutto, esiste $V \subseteq X$ aperto banalizzante contenente y. Dato che Y è localmente connesso per archi, e $V \cap Y$ è aperto in Y (perché V è aperto), esiste $B \subseteq X$ tale che $B \cap Y$ è la componente connessa di y in $V \cap Y$. Sia ora $A \subseteq B \cap V$ la componente connessa che contiene $B \cap Y$: allora $A \cap Y = B \cap Y$. Dato

PROPOSIZIONE

La fibra di un rivestimento hanno tutte la stessa cardinalità.

Dim.

Sia $x_0 \in X$. Consideriamo:

$$C = \{ x \in X \mid \#p^{-1}(x) = \#p^{-1}(x_0) \}$$

Innanzitutto $x_0 \in C$.

Se $V \subseteq X$ è un aperto banalizzante, allora per ogni $x \in V$, $p^{-1}(x)$ interseca ogni componente connessa di $p^{-1}(V)$ in esattamente un punto. Si ha, pertanto, che le fibre

del tipo $\mathcal{P}(x)$, con $x \in V$. Hanno tutti la stessa cardinalità.

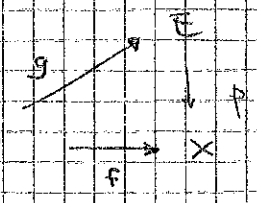
Infatti:

$$V \cong C \quad \text{e} \quad V \cap C = \emptyset$$

Dato che gli aperti fondamentali in $\mathcal{P}(X)$ sono X, C e $X - C$ sono entrambi aperti. Dato che X è connesso, $C = X$, c.v.d.

SOLLEVAMENTO DI APPLICAZIONI

Sia $p: E \to X$, $f: Y \to X$ un'applicazione continua. Un'applicazione continua $g: Y \to E$ è un sollevamento di f se $f = pg$, ossia se il seguente diagramma è commutativo:



TEOREMA (UNICITÀ DEL SOLLEVAMENTO)

Siano f, p come sopra, sia Y connesso. Allora, per ogni coppia $g, h: Y \to E$ di sollevamenti, si ha una sola delle seguenti possibilità:

- $g = h$;
- $\forall y \in Y: g(y) \neq h(y)$.

Dim.

Consideriamo:

$$A = \{ y \in Y \mid g(y) = h(y) \}$$

Sia $y \in Y$; sia $V \subseteq X$ un aperto connesso che contiene $f(y)$. Siano $U_g, U_h \subseteq p^{-1}(V)$ le componenti connesse tali che $g(y) \in U_g$, $h(y) \in U_h$. Sia:

$$\omega = g^{-1}(U_g) \cap h^{-1}(U_h)$$

Se $y \in A$, allora $g(y) = h(y)$, da cui $U_g = U_h$. Dato che:

$$p|_{U_g} = p|_{U_h}$$

sono iniettive, allora:

$$g(\omega) = h(\omega) \ \forall \omega \in \omega \Rightarrow \omega \subseteq A$$

Se invece $y \notin A$, allora $U_g \cap U_h = \emptyset$, da cui $\omega \cap A \neq \emptyset$.

Allora A e $Y - A$ sono aperti, c.v.d.

Nella tesi del teorema, dati $y \in Y$ e $e \in E$ tale che $p(e) = f(y)$, esiste al più un sollevamento $g: Y \to E$ di f tale che $g(y) = e$. Ciò è un'immediata conseguenza.

SOLLEVAMENTO DI CAMMINI

TEOREMA (SOLLEVAMENTO DI CAMMINI)

Siano $p : E \to X$ un rivestimento, $\alpha : I \to X$ un cammino continuo, $e_0 \in E$ un punto tale che $p(e_0) = \alpha(0)$. Allora esiste un unico sollevamento $\alpha_{e_0} : I \to E$ di α tale che $\alpha_{e_0}(0) = e_0$.

Dim.

Innanzitutto X è ricoperto da aperti banalizzanti. Usando il lemma del numero di Lebesgue, possiamo suddividere I mediante un insieme di punti:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1,$$

tale che:

$$\forall\, i = 0, \dots, n-1 : \quad \alpha([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_i,$$

con V_i aperto banalizzante.

Abbiamo dunque una serie di aperti banalizzanti:

$$V_0, \dots V_{n-1}$$

Sia dunque V_0 tale che $\alpha(0) \overset{\text{def}}{=} x_0 \in V_0$. Sia U_0 la componente connessa di $p^{-1}(V_0)$ contenente e_0.

Definiamo:

$$\forall\, t \in [0, t_1] : \quad \alpha_{e_0}(t) \overset{\text{def}}{=} \left[\left(p|_{U_0} \right)^{-1} \circ \alpha \right](t)$$

$\alpha_{e_0}|_{[0,t_1]}$ è dunque un arco e vale in U_0. In particolare:

$$\left(p|_{U_0}\right)^{-1} : V_0 \to U_0$$

$$p(\alpha_{e_0}(t_1)) = \alpha(t_1) \in V_0 \cap V_1$$

Sia U_1 la componente connessa di $p^{-1}(V_0)$ contenente $\alpha(t_1)$: essa è unica. Definiamo:

$$\forall\, t \in [t_1, t_2] : \quad \alpha_{e_0}(t) \overset{\text{def}}{=} \left[\left(p|_{U_1} \right)^{-1} \circ \alpha \right](t)$$

Continuando in questo modo, α_{e_0} è unica, ed è continua su ogni intervallo e nei punti di giunzione, c.v.d.

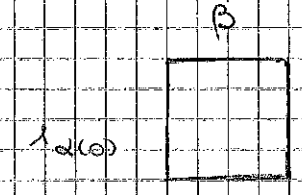
SOLLEVAMENTO DELL'OMOTOPIA

TEOREMA (SOLLEVAMENTO DI OMOTOPIE)

Siano α, β due cammini in $\Omega(X, a, b)$ omotopicamente equivalenti tali, appunto, che $\alpha(0) = \beta(0) = a$ e $\alpha(1) = \beta(1) = b$. Sia $e_0 \in E$ un punto tale che $p(e_0) = a$ (ove $p: E \to X$ per ipotesi è un rivestimento). Siano $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$ gli unici sollevamenti di α e β rispettivamente, tali che $\hat{\alpha}(0) = \hat{\beta}(0) = e_0$. Allora ogni omotopia tra α e β si solleva in modo unico ad un'omotopia tra $\hat{\alpha}$ e $\hat{\beta}$.

Dim.

Abbiamo il seguente schema:



Inoltre abbiamo:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\ p\ } & X \\ \cup & & \cup \\ e_0 & & a \end{array} \qquad p(e_0) = a = \alpha(0) = \beta(0)$$

Ancora una volta, usando il Lemma di Lebesgue, esistono due suddivisioni di I:

$$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = 1$$
$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{m-1} < s_m = 1,$$

tali che

$$\forall\, i = 0, \dots, n-1,\ \forall\, j = 0, \dots, m-1 : F(R_{ij}) = V_{ij},$$

ove:

- $F: I^2 \to X$ è l'omotopia (a parametri fissi) tra α e β;
- $R_{ij} \overset{\text{def}}{=} [t_i, t_{i+1}] \times [s_j, s_{j+1}]$;
- V_{ij} è un aperto banalizzante di X.

Esiste dunque un'unica componente connessa U_{00} di $p^{-1}(V_{00})$ contenente $\tilde{F}(0,0) = e_0$. Definiamo dunque:

$$\tilde{F}(t,s) \overset{\text{def}}{=} (p|_{U_{00}})^{-1} \circ F(t,s) \qquad \begin{array}{l} 0 \le t \le t_1 \\ 0 \le s \le s_1 \end{array}$$

Allo stesso modo si definisce il sollevamento di F per ogni $s \in I$:

$$\forall\, j = 0, \dots, m-2: \quad \tilde{F}_j(t,s) \overset{\text{def}}{=} \left(p\Big|_{U_j}\right)^{-1} \circ F(t,s) \qquad \begin{matrix} 0 \le t \le t_1 \\ s_j \le s \le s_{j+1} \end{matrix}$$

Per i precedenti teoremi di esistenza e unicità, $\tilde{F}_j$ è continua in $[0,t_1] \times I$. In particolare:

$$\tilde{F}(t,0) = \tilde{\alpha}\Big|_{[0,t_1]}(t)$$
$$\tilde{F}(t,1) = \tilde{\beta}\Big|_{[0,t_1]}(t)$$

In generale $\tilde{\alpha}(t_1)$ e $\tilde{\beta}(t_1)$ sono distinti. Per poter continuare a costruire il sollevamento, bisogna osservare che il dato di ascissa t_1 è costituito da punti tutti giacenti sulla stessa componente connessa: ciò è vero, perché c'è un arco che connette $\tilde{\alpha}(t_1)$ e $\tilde{\beta}(t_1)$.

Potremmo dire, dunque, che i dati verticali giacciono interamente su una medesima componente connessa degli aperti $\tilde{U}_j$ precedenti.

La costruzione del sollevamento dell'omotopia, dunque, può essere portata a termine, ed è unica, c.v.d.

QUOZIENTI PER AZIONI

Sia E uno spazio topologico, e sia $G \times \mathrm{Omeo}(E)$. Vogliamo studiare il seguente quoziente:

$$E/G,$$

ma vogliamo studiare l'azione di G su E, dunque analizzare il grafico quoziente.

Abbiamo già visto, in passato, esempi di azioni di gruppi su spazi topologici:

- $M(n, \mathbb{R}) / GL(n, \mathbb{R})$, che porta allo studio delle forme di Jordan;
- $M(n, \mathbb{R}) / \sim$, (relazione di congruenza, che porta allo studio delle forme di Sylvester);
- $M(n, \mathbb{R}) / \mathrm{Aff}(\mathbb{R}^n)$, che porta allo studio delle quadriche.

OSSERVAZIONE

Consideriamo un'equazione differenziale lineare a coefficienti costanti:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = 0$$

La equazione di derivazione è un operatore lineare.

Le formule per determinare lo spazio delle soluzioni usa indirettamente la determinazione delle forme canoniche di Jordan:

- il teorema di Jordan produce un certo numero di soluzioni;
- l'identità di Bézout, gli autospazi generalizzati relativi agli operatori di derivazione (cioè gli autospazi delle soluzioni) risolvono in somma diretta.

In questo modo si determina dunque lo spazio vettoriale delle soluzioni dell'equazione (anche con che questo sia anche, naturalmente, lo spazio nullo di natura affine).

AZIONI DI GRUPPI SU SPAZI

Consideriamo lo spazio topologico $\mathbb{R}^2$.

Consideriamo il gruppo degli omeomorfismi di $\mathbb{R}^2$ generato da:

$$a: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \to (x+1, y)$$

$$b: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \to (x, y-1)$$

Vogliamo studiare:

$$\mathbb{R}^2 / \langle a, b \rangle$$

Per riuscirci, studiamo prima:

$$\mathbb{R}^2 / \langle a \rangle$$

Consideriamo il seguente schema:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{e} & S^1 \\ & \searrow^{\pi} & \nearrow_{\varphi} \\ & \mathbb{R}/\langle a \rangle & \end{array}$$

ove $\pi(x) = \text{frac}(x)$, $e(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) \in S^1$.

Vogliamo dimostrare che $\mathbb{R}^2/\langle a \rangle \cong S^1$, ovvio che φ è un omeomorfismo. Innanzitutto notiamo che:

$$e(x) = e(y) \iff (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x) = (\cos 2\pi y, \sin 2\pi y) \iff$$

$$\iff x = y + k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

da cui si deduce che φ è ben definita, iniettiva, e suriettiva perché e è. Dunque φ è continua e biiettiva.

Per concludere, notiamo che $\pi([0,1]) = \mathbb{R}/\langle a \rangle$, da cui $\mathbb{R}/\langle a \rangle$ è compatto, e S^1 è T_2, da cui φ è chiusa.

Dunque $\varphi: \mathbb{R}/\langle a \rangle \to S^1$ è un omeomorfismo.

Si deduce allora:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \xrightarrow{e \times e} & S^1 \times S^1 \\ & \searrow^{\pi_2} & \nearrow_{\varphi_2} \\ & \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \langle a, b \rangle & \end{array}$$

con φ_2 omeomorfismo. Allora $\mathbb{R}^2/\langle a, b \rangle \cong S^1 \times S^1$ è un Toro.

Consideriamo ora il sottogruppo di $\mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ generato da:

$$a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (x+1, 2-y)$$

$$b : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad (x,y) \mapsto (x, y+2)$$

Notiamo subito che:

$$b \circ b(x,y) = b \circ a(x, y+2) = b(x+1, -y) = (x+1, -y+2) =$$
$$= (x+1, 2-y) = a(x,y)$$

Dunque con $\langle a, b \rangle$ indichiamo il gruppo generato da a e da b, con la relazione $b \circ b = a$. Notiamo che il gruppo non è Abeliano. Infatti:

$$a = b \circ b \neq b \circ b^{-1}$$

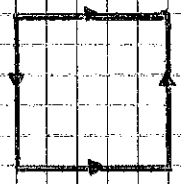
Vogliamo ora dimostrare che I^2 è un dominio fondamentale. Sia $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sia $k = \lfloor x \rfloor$ (parte intera). Applicando k volte a o a^{-1} in modo opportuno, si ottiene un punto equivalente a (x,y) della forma:

$$(x \pm k, (y^*)),$$

ove $(x \pm k) \in I$, e $y^* = y$ se $k \equiv 0 \ (2)$, $y^* = 1 - y$ se $k \equiv 1 \ (2)$. Sia ora $h = \lfloor y^* \rfloor$: applicando h volte $b \circ b^{-1}$ in modo opportuno, si ottiene un punto equivalente a (x,y) in I^2, della forma:

$$(x \pm k, y^* \pm h)$$

Dunque I^2 è un dominio fondamentale. Come agisce il gruppo di omeomorfismi su I^2? Si vede facilmente che si ottiene $\mathbb{R}^2/\langle a,b \rangle$ quando nella parte interna di I^2 si incolla, e che in particolare $I^2/\sim$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^2/\langle a,b \rangle$ con la relazione:



Dove che $\mathbb{R}^2/\langle a,b \rangle$ è omeomorfo a una bottiglia di Klein.

OSSERVAZIONE

Più avanti si dimostrerà che il gruppo fondamentale della bottiglia di Klein è proprio $\langle a, b \rangle$, con la relazione $bab = a$.

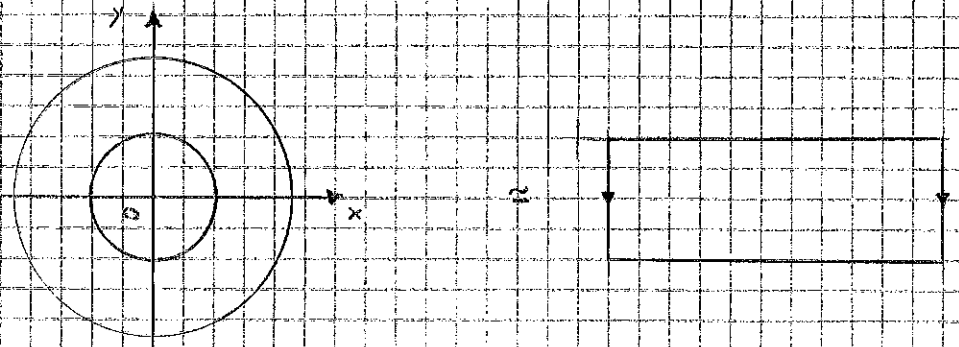
Infine, sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 1$. Consideriamo $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ e consideriamo:

$$\Lambda : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$
$$(x, y) \to \lambda (x, y)$$

Vogliamo studiare $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \langle \Lambda \rangle$.

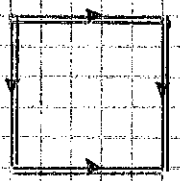
Si può che il seguente è un dominio fondamentale:

$$X_1 = \{ x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \mid \|x\| \in [1, \lambda] \}$$



Ciò che vogliamo fare è identificare i punti di norma 1 e quelli di norma λ, nel modo standard. Si ha allora:

$\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \langle \Lambda \rangle \cong$



ovvia $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} / \langle \Lambda \rangle$ è un toro.

In generale $\mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \langle \Lambda \rangle \cong S^1 \times S^{n-1}$. Dimostriamolo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & S^1 \times S^{n-1} \\ \pi \searrow & & \nearrow \varphi \\ & \mathbb{R}^n \setminus \{0\} / \langle \Lambda \rangle & \end{array}$$

con:

$$f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^1 \times S^{n-1}$$
$$x \to \left((\cos 2\pi \log_\lambda \|x\|, \sin 2\pi \log_\lambda \|x\|), \frac{x}{\|x\|} \right)$$

si ha:

$$f(x) = f(y) \Leftrightarrow \frac{x}{\|x\|} = \frac{y}{\|y\|}, \ \log_\lambda \frac{\|x\|}{\|y\|} = k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{\|x\|}{\|y\|} = \lambda^k, \ k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \|x\| \frac{x}{\|x\|} = \lambda^k \|y\| \frac{y}{\|y\|} \Leftrightarrow \lambda^k y,$$

da cui φ è ben definita e invertibile. Essa è anche (banalmente) suriettiva, da cui φ è un esempio di applicazione continua.

Per concludere, è sufficiente dimostrare che φ^{-1} è chiusa: ciò discende dal fatto che $S^1 \times S^{3-1} \cong T^2$, e $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\} / \sim$ è compatto perché il segmento $[1,2]$ è un dominio fondamentale:

$$X_\lambda = \{ x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \mid \|x\| \in [1, \lambda] \}$$

PROLEGOMENI AI TEOREMI DI BROUWER E BORSUK

LEMMA

Siano $p: E \to X$ un rivestimento (X connesso e localmente connesso per archi). Siano $\alpha, \beta \in \Omega(X, a, b)$ due cammini con gli stessi estremi, e sia $e \in E$ tale che $p(e) = a$. Siano $\alpha_e, \beta_e : I \to E$ i sollevamenti di α e β tali che $\alpha_e(0) = \beta_e(0) = e$. Le seguenti condizioni sono equivalenti.

- α e β sono omotopicamente equivalenti;
- $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$, e α_e e β_e sono omotopicamente equivalenti.

Dim.

Sia, per ipotesi, $\alpha \sim \beta$. Consideriamo $F: I^2 \to X$ omotopia di cammini tale che:

$$F(0,t) = a \qquad F(s,0) = \alpha(s)$$

$$F(1,t) = b \qquad F(s,1) = \beta(s)$$

Raffiguriamo la situazione:

$F: I^2 \to X$



Per il teorema di sollevamento dell'omotopia, esiste $G: \to E$ continua, tale che $G(0,t) = e$. Per l'unicità dei sollevamenti, si ha:

$$G(s,0) = \alpha_e(s)$$

$$G(s,1) = \beta_e(s)$$

Inoltre $G(1,t)$ è un sollevamento di un cammino costante (1_b), e per la proprietà di omeomorfismo locale, esso è una costante. Ricordando, si ha:

$$G(1,t) = 1_u$$

$$G(0,t) = 1_e,$$

da cui $G(1,0) = \alpha_e(1) = G(1,1) = \beta_e(1)$, e G è un'omotopia tra i cammini α_e e β_e, che dunque sono omotopi.

Dimostriamo ora l'altra implicazione. Se α_e e β_e sono equivalenti (dunque ricordiamo $\alpha_e(1) = \beta_e(1)$), allora $\alpha = p \circ \alpha_e$ e $\beta = p \circ \beta_e$ sono omotopicamente equivalenti (ed è proprio ciò che definisce elementi identificati), c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia X semplicemente connesso, e sia $p: E \to X$ un rivestimento connesso. Allora p è "banale", ovvero un omeomorfismo.

Dim.

Un rivestimento è già un'applicazione continua, aperta e suriettiva: resta dunque mostrare che essa è iniettiva.

Siano $x \in X$ e $y, z \in E$ tali che $p(y) = p(z) = x$ (con p rivestimento connesso). E è connesso per archi, dunque sia $\alpha: I \to E$ con $\alpha(0) = y$ e $\alpha(1) = z$. X connesso per archi, dunque $\exists$ un cammino γ in X, omotopo ad una costante perché $\pi_1(X) = 0$. Allora:

$$p \circ \alpha \simeq 1_x,$$

e per il lemma precedente $\alpha \simeq 1_e$, con $\alpha(1) = 1_e(1)$, da cui $z = e$. Dunque p è iniettiva, c.v.d.

COROLLARIO

S^1 non è semplicemente connesso.

Dim.

Immediata:

$$e: \mathbb{R} \to S^1$$
$$t \to (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

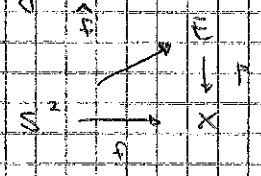
è un rivestimento connesso non banale (di nuovo la proposizione precedente), c.v.d.

COROLLARIO

Siano $p: E \to X$ un rivestimento e $f: S^2 \to X$ un'applicazione continua. Per ogni $y \in S^2$ e ogni $e \in p^{-1}(f(y))$ esiste un unico sollevamento $\hat{f}: S^2 \to E$ di f tale che $\hat{f}(y) = e$.

Dim

Lo schema è il seguente:



Dim

Una volta provata l'esistenza, l'unicità segue subito dal teorema di unicità del sollevamento: se $\tilde{f}$ e $\tilde{g}$ sono due sollevamenti tali che $\tilde{f}(y) = \tilde{g}(y) = e$, allora essi sono uguali.

Non è restrittivo supporre che y sia uguale a $(1,0,0)$.

Consideriamo la proiezione stereografica:

$$\mathbb{R}^2 \cong S^2 - \{y\}$$

Ma $\mathbb{R}^2 \cong]0,1[^2$, da cui $]0,1[^2 \cong S^2 - \{x\}$, da cui esiste un'identificazione:

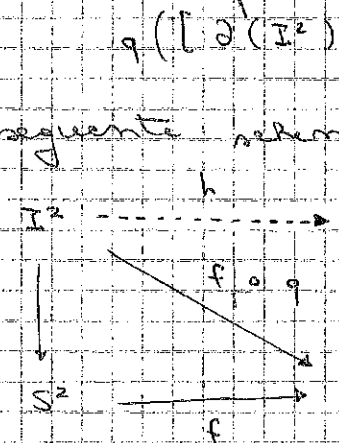
$$q : I^2 \longrightarrow S^2$$

che contrae il bordo del quadrato nel punto $(1,0,0)$.

Sia dunque $S^2 = I^2/\sim$, dove la relazione contrae tutto il bordo di I^2 in un unico punto:

$$q(\partial(I^2)) = y_0 \in S^2$$

Consideriamo il seguente schema:



Per il teorema di sollevamento delle omotopie, esiste unica $h : I^2 \to E$ che solleva $f \circ q$ tale che $h(0,0) = e$. Notiamo anche che:

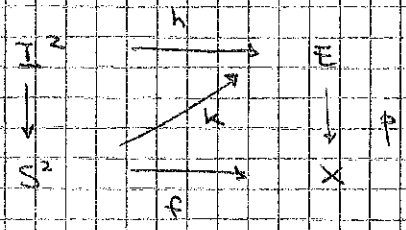
$$f \circ q|_{\partial(I^2)} = 1_{f(x_0)}$$

Allora, per la proprietà di omeomorfismo locale:

$$h|_{\partial(I^2)} = 1_e,$$

e l'applicazione h passa al quoziente.

L'applicazione h però dunque si quozienta. In altre parole esiste unica un'applicazione $k : S^2 \to E$ tale che $h = k \circ q$:



Allora:

$$p \circ k \circ q = p \circ h = f \circ q \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p \circ k = f$$

perché q è suriettiva, c.v.d.

ESERCIZI VARI

1. Sia $p: E \to X$ un rivestimento. Dimostrare che:

- ogni applicazione continua $f: \Delta^2 \to X$ ammette un sollevamento;
- ogni applicazione continua $f: \mathbb{R}^2 \to X$ ammette un sollevamento;
- Sia $q: Y^2 \to Y$ una identificazione tale che la fibra $q^{-1}(y)$ è connessa per ogni $y \in Y$. Allora ogni applicazione continua $f: Y \to X$ ammette un sollevamento

Il quinto relativo a $f: \Delta^2 \to X$ è immediato: Δ^2 è infatti omeomorfo a I^2. Sia $h: \Delta^2 \to I^2$ un omeomorfismo. Allora:

$$\begin{array}{ccc} & & \Delta^2 \xrightarrow{g} E \\ & \overset{h}{\swarrow} & \downarrow p \\ I^2 & \xrightarrow{f \circ h^{-1}} & X \end{array}$$

Vogliamo provare l'esistenza di g. Per il sollevamento delle omotopie, esiste $\alpha: I^2 \to E$ (non unica) di $f \circ h^{-1}$. Allora, definendo:

$$g := \alpha \circ h,$$

si ha:

$$p \circ g = p \circ \alpha \circ h = f \circ h^{-1} \circ h = f,$$

dunque g è un sollevamento di f.

Sia ora $f: \mathbb{R}^2 \to X$. Sia $f(0,0) = x_0 \in X$, e sia $e \in E$ con $p(e) = x_0$. Dato che $\mathbb{R}^2$ è connesso per archi, per ogni $a \in \mathbb{R}^2$ esiste un arco che connette 0 e a, sia esso $\alpha: [0,1] \to \mathbb{R}^2$. Allora:

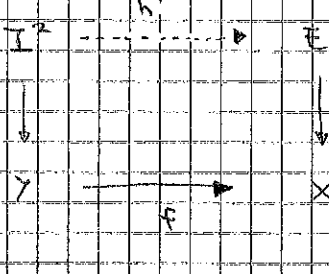
$$f \circ \alpha: [0,1] \to X$$

è un arco che connette x_0 e $f(a)$. Per il teorema del sollevamento di cammini, esiste un unico sollevamento $(f \circ \alpha)_e: [0,1] \to E$ tale che $(f \circ \alpha)_e(0) = e$. Per concludere, definiamo $g(a) = (f \circ \alpha)_e(1)$.

La funzione $g: \mathbb{R}^2 \to E$ è detta un sollevamento di f:

$$p \circ g = f$$

Per l'ultimo quesito, consideriamo lo schema seguente:



Per ipotesi:

$\forall y \in Y$ $q^{-1}(y)$ è connesso

È sufficiente mostrare che h è costante, dopo di che si ha:

$$(r,s) \in q^{-1}(y) \Rightarrow f \circ q(r,s) = f(y) \in X$$

Sia dunque $F = q^{-1}(y)$. Si ha:

$$h(F) \subseteq p^{-1}(f(y)),$$

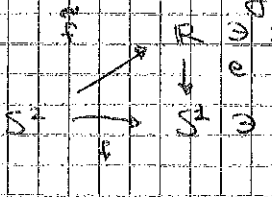
e dato che $h(F)$ è connesso, e $p^{-1}(f(y))$ è discreto, necessariamente $h(F) = \{a\}$, ove $p(a) = f(y)$. Di qui la tesi.

OSSERVAZIONE

Notiamo anche che questo è un modo per costruire mappe, a patto che la mappa non dipenda dall'arco scelto. Nel caso di $f: \mathbb{R}^2 \to X$ ciò è vero perché $\mathbb{R}^2$ è contrattile.

2. Dimostrare che ogni applicazione continua $f: S^2 \to S^1$ è omotopa ad una costante.

Consideriamo lo schema seguente:



Sia $s_0 \in \operatorname{Im} f$, ovvero $y_0 \in \operatorname{Im} f$. Sia F un omotopismo tra f e $\mathbb{1}_{y_0}$. Allora $p \circ F$ è un'omotopia tra f e $\mathbb{1}_{y_0}$, da cui la tesi.

I TEOREMI DI BROUWER E BORSUK

TEOREMA (DI BORSUK)

Non esistono applicazioni continue $f: S^2 \to S^1$ tali che:

$\forall x \in S^2 : f(-x) = -f(x)$

Dimo.

Consideriamo il ricoprimento:

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$$
$$t \longrightarrow (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$$

Consideriamo poi un sollevamento di f:

$$\begin{array}{ccc} & & \mathbb{R} \\ & \overset{\tilde{f}}{\nearrow} & \downarrow e \\ S^2 & \xrightarrow{f} & S^1 \end{array}$$

Ricordiamo ora un lemma, già dimostrato in passato.

LEMMA

Sia $\varepsilon > 0$, e $g: S^3 \to \mathbb{R}$. Allora

$\exists\, x \in S^3$ t.c. $g(x) = g(-x)$

Dimo.

Per le proprietà di S^2, $g(S^3)$ è connesso e compatto, dunque è un intervallo chiuso in $\mathbb{R}$.

Definiamo:

$$h(x) = g(x) - g(-x)$$

Notiamo subito che:

$$h(x) = -h(-x)$$

Anche $h(S^3)$ è connesso e compatto in $\mathbb{R}$: esso è dunque un intervallo chiuso di $\mathbb{R}$, dunque è connesso. Dato che: $\forall x \in S^3 : h(x) = -h(-x)$, si ha immediatamente $0 \in h(S^3)$, come da tesi, c.v.d.

Applicando il lemma a $\tilde{f}^2$:

$\exists\, x_0 \in S^3$ t.c. $\tilde{f}(x_0) = \tilde{f}(-x_0) \Rightarrow f(x_0) = f(-x_0) \neq -f(-x_0)$,

c.v.d.

COROLLARIO

Sia $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione continua. Allora esiste $x \in S^2$ tale che $g(x) = g(-x)$.

Dim.

Supponiamo per assurdo che non sia così. Definiamo:

$$f: S^2 \to S^1$$

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{g(x) - g(-x)}{\| g(x) - g(-x) \|}$$

f è un'applicazione continua da S^2 in S^1, tale che:

$\forall\, x \in S^2 : \quad f(x) = -f(-x)$

Ciò è in contraddizione con il Teorema di Borsuk, c.v.d.

COROLLARIO

Siano $n \geq 3$ e $A \subseteq \mathbb{R}^n$ un aperto non vuoto. Sia $f: A \to \mathbb{R}^2$. Allora f non è iniettiva.

Dim.

A ricordiamo contiene un sottospazio omeomorfo a S^2. Se $f: A \to \mathbb{R}^2$ fosse iniettiva, avremmo un'applicazione indotta $g: S^2 \to \mathbb{R}^2$ iniettiva, in contraddizione con il corollario precedente, c.v.d.

COROLLARIO

Non esistono mappe continue $r: D^2 \to S^1$ tali che:

$\forall\, x \in S^1 : \quad r(-x) = -r(x)$

Dim.

Se una tale mappa r esistesse, definendo:

$$f: S^2 \to S^1$$

$$f(x_1, x_2, x_3) := \begin{cases} r(x_1, x_2) & \text{se } x_3 \geq 0 \\ -r(-x_1, -x_2) & \text{se } x_3 \leq 0 \end{cases},$$

risulterebbe $f(x_1, x_2, x_3) = -f(-x_1, -x_2, -x_3)$ per ogni $(x_1, x_2, x_3) \in S^2$, in contraddizione con il Teorema di Borsuk, c.v.d.

COROLLARIO

Non esistono applicazioni continue $r: D^2 \to S^1$ tale che $r(x) = x$ per ogni $x \in S^1$. Dunque S^1 non è un retratto di D^2.

Dim.

Se una tale mappa esistesse, avremmo

$\forall\, x \in S^1 : \; r(x) = x = -(-x) = -r(-x) \Rightarrow r(-x) = -r(x)$,

in contraddizione con quanto detto nel precedente corollario, c.v.d.

TEOREMA (D. BROUWER, DEL PUNTO FISSO)

Ogni applicazione continua $f: D^2 \to D^2$ possiede almeno un punto fisso.

Dim.

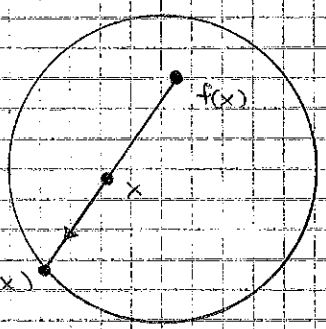
Sia, per assurdo, $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$. Definiamo allora:

$$r: D^2 \to S^1$$

$$r(x) = x + t\,(x - f(x))$$

$$t \geq 0 \qquad \|r(x)\| = 1$$

Ecco un disegno:



$r(x)$ è ben definito per ogni $x \in D^2$ proprio perché $f(x) \neq x$ per ogni $x \in D^2$ (per assurdo).

L'applicazione r è continua, ed è tale che:

$\forall\, x \in S^1 : r(x) = x$

Dunque r è una retrazione di D^2 su S^1, in contraddizione con il precedente corollario, c.v.d.

TEOREMA DI LUSTERNIK - SCHNIRELMANN

TEOREMA (DI LUSTERNIK - SCHNIRELMANN)

Siano $F_1, F_2, F_3 \subseteq S^2$ tre chiusi tali che $F_1 \cup F_2 \cup F_3 = S^2$. Allora esiste un indice $i \in \{1, 2, 3\}$ tale che il chiuso F_i contiene una coppia di punti antipodali.

Dim.

Se il chiuso F_i non contiene punti antipodali:

$$F_i \cap (-F_i) = \emptyset$$

Poiché gli F_i sono compatti, ha senso definire:

$$d_{F_i}(x) = d(x, F_i) \overset{\text{def}}{=} \min \{ d(x, y) \mid y \in F_i \},$$

si ha:

$$d_i(x) = 0 \iff x \in F_i$$

Supponiamo allora per ass.:

$$\begin{cases} F_1 \cap (-F_1) = \emptyset \\ F_2 \cap (-F_2) = \emptyset \end{cases}$$

Allora, per questo fatto, è ben definita:

$$f : S^2 \to \mathbb{R}^2$$

$$f(x) = \left(\frac{d_{F_1}(x)}{d_{F_1}(x) + d_{-F_1}(x)}, \frac{d_{F_2}(x)}{d_{F_2}(x) + d_{-F_2}(x)} \right)$$

Allora:

$\exists\, x_0 \in S^2$ t.c. $f(x_0) \neq f(-x_0)$,

da cui, con ovvia notazione, che:

$\forall\, x \in S^2\ \exists\, i \in \{1, \dots, 3\}$ t.c. $d_{F_i}(x) \neq 0$.

Si ha $x_0 \notin F_1$, $x_0 \notin F_2$ (altrimenti, da $f(x_0) = f(-x_0)$ otterremmo $F_1 \cap (-F_1) \neq \emptyset$ o $F_2 \cap (-F_2) \neq \emptyset$, assurdo), da cui $x_0 \in F_3$, e per ovvie ragioni anche $-x_0 \in F_3$. Allora:

$$F_3 \cap (-F_3) \neq \emptyset,$$

anch'esso falso, c.v.d.

QUOZIENTI PER AZIONI PROPRIAMENTE DISCONTINUE

Sia G un sottogruppo del gruppo $\mathrm{Omeo}(E)$ degli omeomorfismi di uno spazio topologico E in sé. Diremo che G agisce in modo PROPRIAMENTE DISCONTINUO se ogni $e \in E$ possiede un intorno U tale che:

$$g(U) \cap U \neq \emptyset \iff g = \mathrm{Id}$$

Equivalentemente, vale:

$$g(U) \cap g'(U) \neq \emptyset \iff g = g'$$

Se vale la seconda, infatti, vale la prima, ponendo $g' = \mathrm{Id}$, come caso particolare. Se la seconda non vale, vuol dire:

$$\exists\, g, g' \in G \;:\; g(U) \cap g'(U) \neq \emptyset \implies g'^{-1} g(U) \cap U \neq \emptyset,$$

e non vale la prima perché $g' \neq g \iff g'^{-1} g \neq \mathrm{Id}$

Diremo poi che G agisce LIBERAMENTE se:

$$\forall\, x \in E : \; g(x) = x \iff g = \mathrm{Id}$$

PROPOSIZIONE

Sia $G \leq \mathrm{Omeo}(E)$ un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di E in sé, con E spazio topologico di Hausdorff. Allora G agisce in maniera propriamente discontinua se e solo se:

- G agisce LIBERAMENTE;
- per ogni $x \in E$ esiste un intorno aperto U tale che $g(U) \cap U \neq \emptyset$ per al più un insieme finito di g (eventualmente automaticamente soddisfatta se G è finito).

Dim.

La prima implicazione è del tutto banale. Passiamo dunque alla seconda implicazione.

Sia $x \in E$, e sia U un intorno aperto U tale che $|\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}| < +\infty$. Siano $g_1, \dots, g_k$ tali omeomorfismi. Definiamo:

$$\forall\, i = 1, \dots, k : \; a_i = g_i(x)$$

Dato che G agisce liberamente:

$$\forall\, i, j = 1, \dots, k : \; i \neq j \implies a_i \neq a_j$$

Per comodità, sia $g_1 = Id$.

Dato che $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, esistono n aperti disgiunti $V_1, \dots V_k$ tali che:

$\forall i = 1, \dots k : a_i \in V_i$

Dunque, per ogni $i \neq j$, si ha $V_i \cap V_j = \emptyset$.

Sia ora:

$$U_0 \stackrel{def}{=} U \cap \bigcap_{i=1}^{k} g_i^{-1}(V_i)$$

Sia $\tilde{x}$ un intorno aperto di x. Equivalentemente:

$$U_0 = \bigcap_{i=1}^{k} (U \cap g_i^{-1}(V_i))$$

Sia:

$$U_0 \subseteq U \cap g_1^{-1}(V_1) = U \cap V_1 \subseteq U,$$
$$g_1(U_0) \subseteq V_1,$$

e dato che

$$U_0 \subseteq V_1 \quad \text{e} \quad V_1 \cap V_i = \emptyset \ \forall i \neq 1,$$

si ha:

$$g_i(U_0) \cap U_0 = \emptyset \ \forall i \neq 1,$$

quindi ora vale:

$$g_i(U_0) \cap (U_0) \neq 0 \iff g_i = Id, \text{ c.v.d.}$$

ESEMPIO DI AZIONE DI UN GRUPPO CON QUOZIENTE NON SEPARATO

Abbiamo dimostrato in passato la seguente proposizione, che ora enunciamo nuovamente.

PROPOSIZIONE

Sia X uno spazio topologico di Hausdorff, e sia $G < \mathrm{Omeo}(X)$ un sottogruppo del gruppo degli omeomorfismi di X in sé.

Sia:

$$\pi : X \to X/G$$

la proiezione al quoziente.

Si assume l'esistenza di un sottoinsieme aperto $A \subseteq X$ tale che:

- $\pi : A \to X/G$ è suriettiva (A è un dominio fondamentale);
- $|\{g \in G \mid g(A) \cap A \neq \emptyset\}| < +\infty$.

Allora X/G è di Hausdorff.

Prima di enunciarla, dati uno spazio topologico X, e $G < \mathrm{Omeo}(X)$, si dice che l'azione di G su X è:

- LIBERA, se $\forall x \in X, \forall g \in G : g(x) = x \Leftrightarrow g \equiv \mathrm{id}$;
- PROPRIAMENTE DISCONTINUA, se:

$$\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{I}(x) \text{ s.t. } g(U) \cap U \neq \emptyset \Leftrightarrow g \equiv \mathrm{id}.$$

Un'azione è propriamente discontinua se e solo se è libera, e inoltre:

$$\forall x \in X \ \exists U \in \mathcal{I}(x) \text{ s.t. } |\{g \in G \mid g(U) \cap U \neq \emptyset\}| < +\infty.$$

A differenza della proprietà espressa nella proposizione, questa proprietà è locale, non globale.

Consideriamo ora un sistema di equazioni differenziali in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(x(t), y(t)) \\ y'(t) = g(x(t), y(t)) \end{cases}$$

Possiamo vedere questo sistema come il sistema di equazioni del moto di una particella in $\mathbb{R}^2$.

La particella è rappresentata il tempo t, $(x(t), y(t))$ sono le coordinate della particella al tempo t.

La particella si muoverà dunque su una delle curve integrali, quale di queste, dipende dalla posizione iniziale $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$ all'istante $t=0$.

Possiamo allora definire un'azione di $\mathbb{R}$ su $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2) \\ t &\longmapsto (\varphi_t : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ &\qquad (x,y) \to t\cdot(x,y)), \end{aligned}$$

ove l'azione va così interpretata: dato $t \in \mathbb{R}$ e $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $t\cdot(x,y)$ è la posizione della particella al tempo t, se (x,y) è la posizione della particella al tempo $t=0$.

Si ha infatti:

- $0\cdot(x,y) = (x,y)$,
- $s\cdot[t\cdot(x,y)] = (s+t)\cdot(x,y)$,

da cui $\Phi : \mathbb{R} \to \mathrm{Omeo}(\mathbb{R}^2)$ è effettivamente un'azione di un gruppo su uno spazio topologico.

Consideriamo poi l'azione ristretta dei soli gruppi $n\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Notiamo, comunque, che l'orbita è priva di punti fissi.

Consideriamo il seguente sistema:

$$\begin{cases} x'(t) = \cos^2(x(t)) \\ y'(t) = \sin(x(t)) \end{cases}$$

Si ha, nel caso in cui $\cos(x(t)) \neq 0$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Rightarrow dy = \frac{\sin x}{\cos^2 x}\,dx,$$

da cui:

$$\begin{aligned} y &= \sec(x(t)) + c, \ c \in \mathbb{R} = \\ &= \frac{1}{\cos(x(t))} + c, \ c \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Si ha poi:

$$\dot{x} = \cos^2 x(t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \operatorname{Tg} x = t + c, \quad c \in \mathbb{R},$$

da cui:

$$x = \operatorname{arcTg} t + c' \quad c' \in \mathbb{R}$$

Si noti che $\cos x = 0$ ai punti delle rette verticali:

$$x = n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

In generale, dunque, otteniamo:

$$\begin{cases} x(t) = \operatorname{arcTg}(t+c) \\ y(t) = \cos(\operatorname{arcTg}(t+c))^{-1} + d, \end{cases}$$

con $c, d \in \mathbb{R}$.

Dato che stiamo considerando $\Phi|_{\mathbb{Z}\times 1}$, diciamo che $P, Q \in \mathbb{R}^2$ sono equivalenti se $P = \varphi_z(Q)$ per qualche $z \in \mathbb{Z}$.

Vogliamo dimostrare che esistono due punti $P, Q \in \mathbb{R}^2$ tali che, per ogni $U \in \mathcal{I}(P)$ e $V \in \mathcal{I}(Q)$ esistono $R \in U$, $S \in V$, con $R \sim S$, ossia tali che:

$$\varphi_z(R) = S, \quad z \in \mathbb{Z}$$

Proveremo prima che l'azione di $\mathbb{Z}$ su $\mathbb{R}^2$ è properamente discontinua; si veda il disegno alla pagina seguente.

Sia $P = (x, y)$, e sia C l'unica curva integrale passante per P; siano C_1 e C_2 due curve integrali limitrofe, una per sotto. Sia poi T_0 una curva liscia passante per P, ortogonale a tutte le curve integrali tra C_1 e C_2. Per ogni $t \in \mathbb{R}$, sia:

$$T_t = t \cdot T_0$$

Sia poi U_0 l'intorno di P delimitato da $C_1, C_2, T_{\frac{1}{3}}, T_{-\frac{1}{3}}$. Allora i "fratelli" di U_0 sono a due a due disgiunti:

$$U_m \overset{\text{def}}{=} m \cdot U_0, \quad m \in \mathbb{Z}$$

Dunque $\mathbb{Z}$ agisce su $\mathbb{R}^2$ in modo properamente discontinuo:

Consideriamo i due punti $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$. Siano U e V intorni aperti di $\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$ e $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ rispettivamente: non si perde di generalità se ci si restringe a coppie (U, V) di intorni del tipo:

$$U = B\left(\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \varepsilon\right), \quad V = B\left(\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \varepsilon\right), \quad \varepsilon > 0$$

Consideriamo allora $a > 0$, $a < \varepsilon$, e i punti:

$$\left(-\frac{\pi}{2} + a, 0\right) \in U, \quad \left(\frac{\pi}{2} - a, 0\right) \in V$$

è immediato (anche dal disegno) che $\left(-\frac{\pi}{2} + a, 0\right) \overset{\text{def}}{=} P_1$ e $\left(\frac{\pi}{2} - a, 0\right) \overset{\text{def}}{=} P_2$ si trovano sulla stessa curva integrale.

Quanto tempo occorre ad una particella che si trova in P_1 all'istante $t = 0$ a raggiungere P_2?

È sufficiente proiettare il cerchio sull'una delle rette.

Sia ora:

$$\frac{dx}{dt} = \cos^2 x$$

si ha:

$$\int_{t_0}^{t_1} dt = \int_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} \frac{dx}{\cos^2 x} = \left[\operatorname{Tg} x \right]_{-\frac{\pi}{2}+a}^{\frac{\pi}{2}-a} = 2 \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Dunque il tempo che occorre per andare da P_1 a P_2 è:

$$T_{P_1 P_2} = 2 \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right)$$

Questa è una funzione continua nella variabile a, e si ha:

$$\lim_{a \to 0^+} 2 \operatorname{Tg}\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = +\infty,$$

da cui, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $0 < a < \varepsilon$ tale che, se:

$$P_{2,a} = \left(-\frac{\pi}{2} + a, 0\right) \quad ; \quad P_{2,a} = \left(\frac{\pi}{2} - a, 0\right),$$

allora $T_{P_{1,a} P_{2,a}} \in \mathbb{N}$.

Possiamo dunque concludere che il quoziente non è separato.

MONODROMIA DEL RIVESTIMENTO

Sia E uno spazio localmente connesso per archi. Sia $p: E \to X$ un rivestimento, e siano $x, y \in X$ due punti. Si definisce MONODROMIA:

$$\mathrm{Mon}: p^{-1}(x) \times \Omega(X, x, y) \to p^{-1}(y)$$
$$\mathrm{Mon}(e, \alpha) = \alpha_e(1)$$

Per un lemma precedente, $\mathrm{Mon}(e, \alpha)$ dipende solo dalla classe omotopica di α.

In generale, per azione di monodromia si intende quella indotta da cammini chiusi. Se dunque $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, e $e \in p^{-1}(x)$, si ha:

$$\alpha_e(1) = \mathrm{Mon}(e, \alpha) = e[\alpha]$$

In particolare, $[\alpha]$ induce una permutazione della fibra su X.

Verifichiamo che questa sia effettivamente un'azione di gruppo, ossia che $\pi_1(X, x)$ agisca sulla fibra $p^{-1}(x)$.

Per la proprietà di omeomorfismo locale:

$$\mathrm{Mon}(e, 1_{\pi_1}) = \tilde{1}_e(1) = e$$

Ora, si ha:

$$\mathrm{Mon}(e, \alpha * \beta) = \mathrm{Mon}(\mathrm{Mon}(e, \alpha), \beta),$$

infatti:

$$(\alpha * \beta)_e = \alpha_e * \beta_{\alpha_e(1)}$$

Si ha inoltre:

$$\mathrm{Mon}(e, \alpha * \bar{\alpha}) = e,$$

da cui, fissato $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, l'applicazione:

$$\Phi: p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$$
$$e \to \mathrm{Mon}(e, \alpha)$$

è biiettiva, con inversa:

$$\Phi^{-1}: p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$$
$$e \to \mathrm{Mon}(e, \bar{\alpha})$$

PROPOSIZIONE

Sia $p: E \to X$ un rivestimento connesso. Fissato $e \in E$, $x = p(e)$. Segue:

- è ben definito il gruppo:
$$p_* : \pi_1(E,e) \to \pi_1(X,x)$$
è iniettivo, e vale:
$$p_* \pi_1(E,e) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid e \cdot [\alpha] = \mathrm{Mon}(e,\alpha) = e \};$$
- esiste una bigezione tra $p^{-1}(x)$ e l'insieme dei laterali destri di $p_* \pi_1(E,e)$ in $\pi_1(X,x)$;
- per ogni $[\alpha] \in \pi_1(X,x)$ vale $[\alpha]^{-1} p_* \pi_1(E,e) [\alpha] = p_* \pi_1(E, e \cdot [\alpha])$. In particolare, i sottogruppi $\{ p_* \pi_1(E,e) \mid p(e) = x \}$ sono tutti e soli i coniugati di $p_* \pi_1(E,e)$ in $\pi_1(X,x)$.

Dim:

- Se $[\alpha] \in p_* \pi_1(E,e)$, esiste $\beta : I \to E$ tale che $\beta(0) = \beta(1) = e$, con $[\alpha] = [p\beta]$. Vale, per un lemma precedente, $\beta(1) = \alpha_e(1)$, da cui $e \cdot [\alpha] = e$.
Viceversa, se $\alpha \in \Omega(X,x,x)$, con $e[\alpha] = e$, allora α_e è chiuso, da cui $[\alpha] = [p\alpha_e] \in p_* \pi_1(E,e)$.
In particolare, abbiamo dimostrato che $p_* \pi_1(E,e) = \{ [\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid e \cdot [\alpha] = \mathrm{Mon}(e,\alpha) = e \}$. L'iniettività è una conseguenza di un lemma precedente;
- Sia
$$\Lambda_e : \pi_1(X,x) \to p^{-1}(x)$$
$$[\alpha] \to e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$$
L'applicazione è suriettiva. Sia $u \in p^{-1}(x)$. Poiché E è connesso per archi, esiste $\gamma : I \to E$ tale che $\gamma(0) = e$ e $\gamma(1) = u$. Si ha allora:
$$\gamma = (p\gamma)_e \Rightarrow$$
$$\Rightarrow e \cdot [p\gamma],$$
e Λ_e è suriettiva. Si ha inoltre:
$$\ker \Lambda_e = \{ [\alpha] \in \pi_1(X,x) \mid e \cdot [\alpha] = e \} = p_* \pi_1(E,e),$$

e per il Teorema di omomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,x) & \xrightarrow{\Lambda_e} & p^{-1}(x) \\ & \searrow^{\pi} \quad \nearrow_{\varphi} & \\ & \pi_1(X,x)/p_*\pi_1(E,e) & \end{array}$$

con φ isomorfismo, da cui la Tesi;

- Basta provare che, preso $\alpha \in \Omega(X,x,x)$, vale:

$$[\alpha]^{-1} \cdot p_*\pi_1(E,e)[\alpha] = p_*\pi_1(E, e\cdot[\alpha]).$$

Sia $\alpha_e : I \to E$ il sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$.
Allora $\alpha_e(1) = e\cdot[\alpha]$, e vale:

$$i(\alpha_e) * \Omega(E,e,e) * \alpha_e \subseteq \Omega(X, e\cdot[\alpha], e\cdot[\alpha])$$

In altre parole, se $\beta \in p_*\pi_1(E,e)$, si ha:

$$\gamma \simeq i\alpha * \beta * \alpha,$$

da cui:

$$\beta \simeq \alpha * \gamma * i\alpha,$$

da cui necessariamente $\gamma \in \Omega(X, e\cdot[\alpha], e\cdot[\alpha])$, c.v.d.

COROLLARI E OSSERVAZIONI

OSSERVAZIONE

L'indice di $\pi_1(E,e)$ come sottogruppo di $\pi_1(X,p(e))$ è uguale alla cardinalità della fibra.

COROLLARIO

Il gruppo fondamentale di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ per ogni $n \geq 2$.

Dim.

La proiezione $p: S^n \to \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ è un rivestimento connesso di grado 2. Siano $e \in S^n$, $x = p(e)$. Allora il sottogruppo:

$$p_* \pi_1(S^n, e) < \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)$$

è costituito dai cataloghi destri. Se $n \geq 2$ la sfera S^n è semplicemente connessa, da cui si ottiene che:

$$|\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x)| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R}), x) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Sia dato un diagramma commutativo di applicazioni continue:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\varphi} & F \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array},$$

con p, q rivestimenti. Allora per ogni $e \in E$ e ogni $[\alpha] \in \pi_1(X, p(e))$ vale:

$$\varphi(e \cdot [\alpha]) = \varphi(e) \cdot f_*([\alpha])$$

Dim.

Sia $\alpha: I \to X$ un cammino chiuso con punto base $p(e)$, e $\alpha_e: I \to E$ l'unico sollevamento di α tale che $\alpha_e(0) = e$. Allora:

$$\alpha_e(1) = e \cdot [\alpha] \Rightarrow \varphi(e \cdot [\alpha]) = \varphi\alpha_e(1)$$

Sia ora $\rho : I \to \mathbb{R}$, $\rho(t) = \varphi \alpha_\varepsilon(t)$. Allora

$$\rho \in \Omega\left(\mathbb{R}, \varphi(e), \varphi(\alpha_\varepsilon(1))\right),$$

e inoltre:

$$q\rho(t) = q\varphi\alpha_\varepsilon(t) = p\rho\alpha_\varepsilon(t) = p\alpha(t) \quad \forall t \in [0,1].$$

Poiché α è un sollevamento di $f\alpha$ tale che $\rho(0) = \varphi(e)$, si ha:

$$\varphi(e) \cdot f_*([\alpha]) = \varphi(e) \cdot [f\alpha] = \rho(1) = \varphi\alpha_\varepsilon(1), \text{ c.v.d.}$$

AZIONI DESTRE E SINISTRE

Siano G un gruppo e T un insieme.

Una AZIONE SINISTRA di G su T è un'applicazione:

$$\Sigma : G \times T \to T$$
$$(g, t) \to g \cdot t,$$

tale che:

- $\lambda \cdot t = t \quad \forall\, t \in T$ ($\lambda \in G$ è l'elemento neutro);
- $(gh) \cdot t = g \cdot (h \cdot t) \quad \forall\, t \in T, \forall\, g, h \in G$.

Una AZIONE DESTRA di G su T è un'applicazione:

$$\Delta : T \times G \to T$$
$$(t, g) \to t \cdot g,$$

tale che:

- $t \cdot \lambda = t \quad \forall\, t \in T$ ($\lambda \in G$ è l'elemento neutro);
- $t \cdot (gh) = (t \cdot g) \cdot h \quad \forall\, t \in T, \forall\, g, h \in G$.

Se G agisce a sinistra su T, per ogni $g \in G$ è definita un'applicazione:

$$L_g : T \to T$$
$$L_g(t) = g \cdot t,$$

e dato che $L_g L_h = L_{gh}$, e $L_\lambda = id$ è biunivoca, L_g è biunivoca per ogni $g \in G$, con $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$.

Se G agisce a destra su T, per ogni $g \in G$ è definita un'applicazione:

$$R_g : T \to T$$
$$R_g(t) = t \cdot g$$

Poiché $R_g R_h = R_{hg}$ segue in particolare che R_g è biunivoca per ogni $g \in G$, con $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$.

Sia Σ un'azione sinistra di G su T. L'azione è:

- FEDELE, se per ogni $g \neq 1$ esiste $t \in T$ tale che $g \cdot t \neq t$;
- LIBERA, se per ogni $g \neq 1$, per ogni $t \in T$, vale $g \cdot t \neq t$;
- TRANSITIVA, se per ogni $t, s \in T$ esiste $g \in G$ tale che $g \cdot t = s$.

Le definizioni sono analoghe nel caso di Δ azione destra di G su T.

Un'azione è fedele, mentre è G agisce liberamente e transitivamente su T, allora:

$\forall t, s \in X \; \exists! \; g \in G \;\; s.t. \;\; (g \cdot t) = s.$

Ex. Sia X uno spazio topologico, e $\mathrm{Omeo}(X)$ il gruppo degli omeomorfismi di X in sé. La seguente è un'azione sinistra:

$$\Phi : \mathrm{Omeo}(X) \times X \to X$$
$$(\phi, e) \mapsto \phi(e)$$

Ex. Sia $p : E \to X$ un rivestimento. Allora è ben definita l'applicazione di monodromia:

$$\mathrm{mon} : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$$
$$(u, [\alpha]) \mapsto u \cdot [\alpha]$$

è un'azione destra.

AZIONI COMPATIBILI

Siano dati un insieme X, e:

- un gruppo G che agisca su X a sinistra;
- un gruppo H che agisca su X a destra.

Tali azioni si dicono COMPATIBILI se per ogni $x \in X$, $g \in G$, $h \in H$:

$$g \cdot (x \cdot h) \overset{\text{def}}{=} (g \cdot x) \cdot h \overset{\text{def}}{=} g \cdot x \cdot h$$

Ex. Siano V, W spazi vettoriali. Consideriamo $\mathrm{Hom}(V, W)$. Si ha che:

- $Gl(W)$ agisce a sinistra su $\mathrm{Hom}(V, W)$;
- $Gl(V)$ agisce a destra su $\mathrm{Hom}(V, W)$.

Le due azioni sono compatibili.

Enunciamo ora un teorema.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)

Sia E uno spazio topologico, localmente connesso per archi. Sia $G < \mathrm{Omeo}(E)$ un gruppo che agisce su E in modo fortemente discontinuo. Sia E/G connesso. Sia poi $p : E \to X = E/G$ il rivestimento.

Dati $x \in X$ e $u, v \in p^{-1}(x)$ esiste un unico $g \in G$ tale che $g(u) = v$. La seguente azione, dunque, è libera e transitiva:

$$\Lambda : G \times p^{-1}(x) \to p^{-1}(x)$$
$$(g, u) \mapsto g(u)$$

LEMMA

L'azione sinistra Λ descritta sopra è compatibile con l'azione di monodromia (destra):

$$\Gamma : p^{-1}(x) \times \pi_1(X, x) \to p^{-1}(x)$$
$$(e, [\alpha]) \mapsto e \cdot [\alpha]$$

Sia $e \in p^{-1}(x)$, sia $g \in G$, sia $\alpha : I \to X$ un cammino in $\Omega(X, x, x)$. Vogliamo dimostrare che:

$$g(e) \cdot [\alpha] = g(e \cdot [\alpha])$$

A tal fine consideriamo il diagramma commutativo seguente:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{g} & E \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ X & \xrightarrow[\mathrm{Id}]{} & X \end{array}$$

Per una proposizione precedente:

$$g(e \cdot [\alpha]) = g(e) \cdot \mathrm{Id}_* [\alpha] = g(e) \cdot [\alpha], \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Dunque $e \in p^{-1}(x)$, definiamo:

$$\theta_e : \pi_1(X, x) \to G,$$

ove $\theta_e([\alpha])$ è l'unico $g \in G$ tale che $g(e) = e \cdot [\alpha]$, ovvero l'unico $g \in G$ che porta e in $e \cdot [\alpha] = \alpha_e(1)$ (notiamo che $g \in G$ esiste perché l'azione è libera e transitiva). Allora:

- θ_e è un omomorfismo di gruppi;
- $\ker \theta_e = p_* \pi_1(E, e) \lhd \pi_1(X, x)$;
- se E è connesso, allora θ_e è suriettiva, e dunque induce un isomorfismo

$$\tilde{\theta}_e : \pi_1(X, x) / p_* \pi_1(E, e) \to G$$

Come immediata conseguenza, se E è semplicemente connesso, si ha che:

$$\pi_1(E/G, x) \cong G,$$

per ogni $x \in E/G$.

Sia:

si ha:

$$\theta_e([\alpha][\beta])(e) = e([\alpha][\beta]) = (\alpha * \beta)_e(1) = \beta_{\alpha_e(1)}(1) =$$

$$= (e \cdot [\alpha]) \cdot [\beta],$$

da cui

$$\vartheta_e([\alpha][\beta]) = (\vartheta_e[\alpha])[\beta] = \vartheta_e([\alpha])[\beta] =$$

$$= (\vartheta_e([\alpha]))(\vartheta_e([\alpha])[\beta]) = \vartheta_e([\alpha])\,\vartheta_e([\beta])(e),$$

da cui ϑ_e è un omomorfismo. Si ha chiaramente:

$$\ker \vartheta_e = p_*\pi_1(E,e) \triangleleft \pi_1(X,x)$$

Se E è semplicemente connesso, $p_*\pi_1(E,e)$ è banale.

Se E è connesso (per archi), per ogni $g \in G$ esiste $\beta : I \to E$ con $\beta(0) = e$, $\beta(1) = g(e)$, da cui, considerando $\alpha = p\beta$ α è chiuso, con $\alpha(e) = e$, $[\alpha]$, da cui $g \in \operatorname{Imm} \vartheta_e$.

ϑ_e è allora suriettiva, e per il lemma di omomorfismo:

$$\pi_1(X,x) / p_*\pi_1(E,e) \cong G,$$

e se E è semplicemente connesso:

$$\pi_1(X,x) \cong G, \text{ c.v.d.}$$

ESERCIZI E COMPLEMENTI

Dato $\mathbb{R}^3$, $3 \geq 2$, consideriamo una coppia di rette r, s.

Vi sono casi in cui questa coppia di rette è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$ omeomorfo a una retta.

Vi sono due casi:

- $r \cap s \neq \emptyset$. In questo caso lo spazio formato dalle due rette non è omeomorfo, a differenza di una sola retta;
- $r \cap s \neq \emptyset$. Sia P il punto di intersezione (supponiamo $r \neq s$), e sia $X = r \cup s$, $Y = r'$. Sia:

$$\varphi : r \cup s \to r'$$

tale che $\varphi(P) = Q \in r'$. Se φ fosse un omeomorfismo, allora la seguente sarebbe un omeomorfismo:

$$\varphi_1 : r \cup s \setminus \{P\} \to r' \setminus \{Q\},$$

ma ciò è assurdo perché $r \cup s \setminus \{P\}$ conta 4 componenti connesse, mentre $r' \setminus \{Q\}$ ne conta sicuramente 2.

In nessun caso, dunque, una coppia di rette è omeomorfa a una singola retta.

Consideriamo ora in $\mathbb{R}^3$ i seguenti luoghi di punti:

$$\Gamma_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = xy\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = xy\}$$

Γ_1 è il grafico di una funzione, dunque è una varietà topologica, ed è un paraboloide a sella. Γ_1 è omeomorfo a $\Gamma_1' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$, che è grafico di g, con:

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

dunque:

$$\nabla g = \begin{bmatrix} 2x \\ -2y \end{bmatrix} \qquad H(g) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$

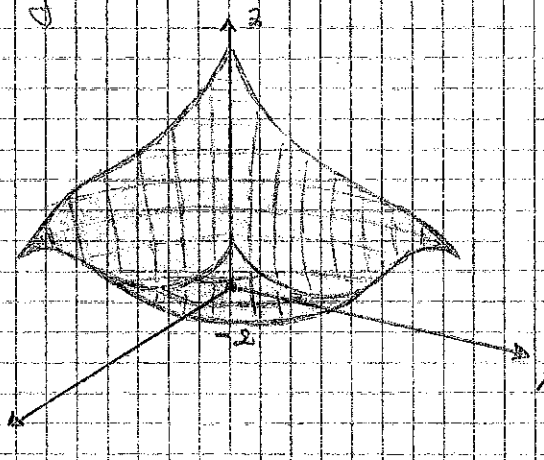
da cui $(0,0)$ è un punto stazionario di sella.

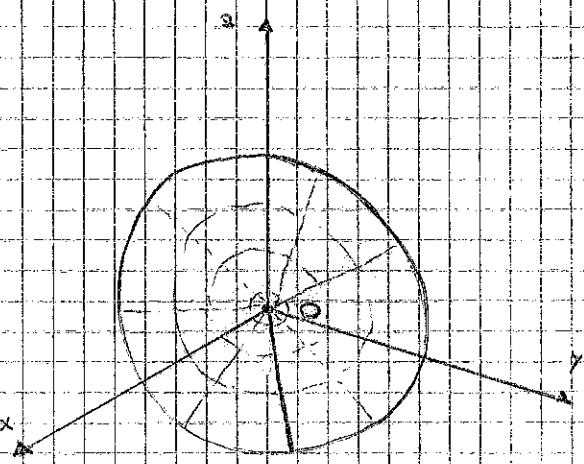
La quadrica $\{z^2 = xy\}$ invece, è un cono di un'iperbole equilatera, centrata nell'origine.

Per assurdo, sia φ un omeomorfismo tra T_2 e T_1. Sia:

$$\varphi(0,0,0) \overset{\text{def}}{=} P \in T_1$$

Allora $T_2 \setminus \{(0,0,0)\}$ ha due componenti connesse mentre $T_1 \setminus \{P\}$ è connesso: ciò è assurdo. T_1 e T_2 non sono dunque omeomorfi.



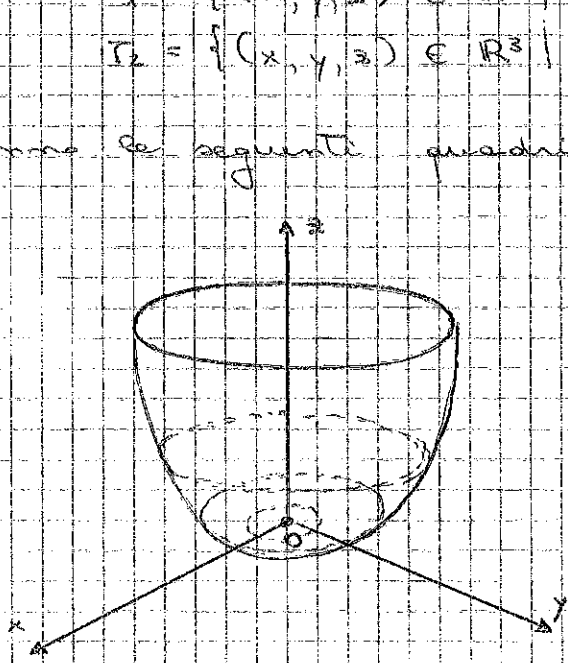


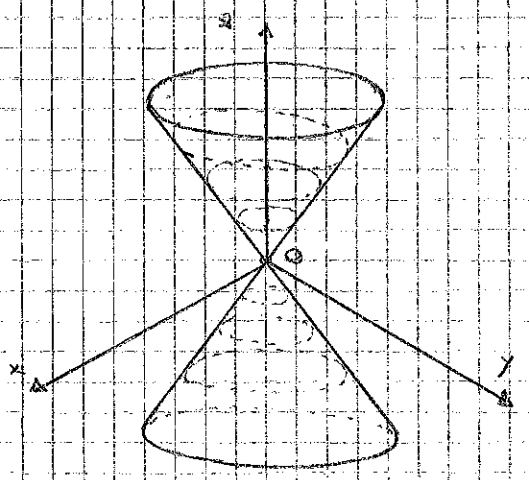
Consideriamo in $\mathbb{R}^3$:

$$T_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 + y^2\}$$

$$T_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z^2 = x^2 + y^2\}$$

Si hanno le seguenti quadriche:





Se $\varphi : T_2 \to T_1$ fosse un omeomorfismo, si avrebbe $T_1 \setminus \varphi(O)$ connesso, a differenza di $T_2 \setminus \{(0,0,0)\}$, avente due componenti connesse: ciò è assurdo.

Dunque gli spazi non sono omeomorfi.

Consideriamo ora $\mathbb{C}^3$, e riconsideriamo le coppie di quadriche che Γ_1 e Γ_2 del primo esempio:

$$\Gamma_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid z = xy\}$$
$$\Gamma_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{C}^3 \mid z^2 = xy\}$$

Γ_1 è il grafico di:

$$g: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$
$$(x,y) \to xy,$$

dunque $\Gamma_1 \simeq \mathbb{C}^2$.

È dunque equivalente dire che la seconda quadrica è omeomorfa o meno a $\mathbb{C}^3$.

Innanzitutto, $\mathbb{C}^2 \simeq \mathbb{R}^4$ è semplicemente connesso, quindi ogni rivestimento connesso è banale.

Γ_2 è un cono complesso centrato nell'origine. Consideriamo, d'ora in poi, $\Gamma_2 \setminus \{0\}$. Sia:

$$\psi: \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C}^3 \setminus \{0\}$$
$$(u,v) \to (u^2, v^2, uv)$$

Allora:

$$\operatorname{Imm} \psi = \Gamma_2 \setminus \{0\}$$

(Stiamo sfruttando il fatto che $\mathbb{C}$ è algebricamente chiuso). Si ha:

$$J(\psi) = \begin{bmatrix} 2u & 0 \\ 0 & 2v \\ v & u \end{bmatrix},$$

di rango massimo in $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$. Allora ψ è un diffeomorfismo locale, in particolare un omeomorfismo locale: un rivestimento è un rivestimento.

Si ha:

$$\forall (x,y,z) \in \Gamma_2 - \{0\}: \psi^{-1}(x,y,z) =$$
$$= \{(\sqrt{x}, \sqrt{y}), (-\sqrt{x}, -\sqrt{y})\},$$

da cui $\Gamma_2 \setminus \{0\}$ ammette un rivestimento doppio.

Dunque Γ_1 e Γ_2 non sono omeomorfi, perché se $P \in \Gamma_1$, $\Gamma_1 \setminus \{P\} \simeq \mathbb{R}^4 \setminus \{p\}$ è semplicemente connesso, mentre $\Gamma_2 \setminus \{0\}$ non lo è.

GRUPPI LIBERI

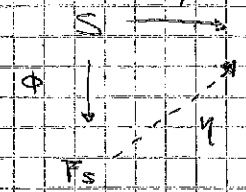
Sia V uno spazio vettoriale, e sia $S \subseteq V$ un insieme. Il sottospazio vettoriale generato da S, detto comunemente GENERATO di S, è il più piccolo sottospazio vettoriale di V che contiene S.

Detto in termini più formali, il generato di S è l'intersezione di tutti i sottospazi vettoriali che contengono S: l'intersezione è ben definita poiché V è un sottospazio vettoriale cioè contenente S.

Esso sottospazio deve ovviamente contenere le combinazioni lineari di elementi di S: d'altra parte, l'insieme di tutte queste combinazioni lineari (somme di prodotti di elementi di S per scalari) è un sottospazio vettoriale, ed è ovviamente, quindi, il generato di S.

Da qui non abbiamo a disposizione tutto ciò che serve per definire, infine, la nozione di GRUPPO LIBERO.

Sia S un insieme. Un GRUPPO LIBERO GENERATO da S è una coppia (F_S, Φ), ove $\Phi : S \to F_S$ è un'applicazione che gode della PROPRIETÀ UNIVERSALE. Per ogni gruppo H e per ogni applicazione $\psi : S \to H$ esiste, dunque, un unico omomorfismo di gruppi $\eta : F_S \to H$ tale che $\psi = \eta\Phi$, ovvia tale che il diagramma seguente commuti:



OSSERVAZIONE

Il gruppo libero generato dall'insieme vuoto è quello banale: $F_S = \{e\}$.

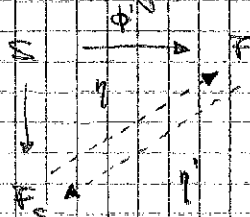
Il gruppo libero generato da $S = \{*\}$ e $\mathbb{Z}$, e $\Phi : S \to F_S = \mathbb{Z}$ è dato da $\Phi(*) = 1$.

LEMMA

Sia S un insieme, e supponiamo che esistano (F_S, Φ) gruppo libero. Allora esso è unico: più precisamente, due gruppi liberi generati dallo stesso insieme sono canonicamente isomorfi.

Dim.

Siano (F_S, Φ) e (F_S', Φ') due gruppi liberi generati da S. Allora si ha il seguente diagramma commutativo:



ove η e η' sono univocamente determinati.

Si ha allora:

- $\eta\eta'\Phi' = \eta\Phi = \Phi'$;
- $\eta'\eta\Phi = \eta'\Phi' = \Phi$,

da cui $\eta\eta' = \eta'\eta = Id$, e $\eta^{-1} = \eta'$, da cui η è un isomorfismo canonico tra $F_S \cong F_S'$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Per ogni insieme S, esiste il gruppo libero da esso generato.

Dim.

Dato S, denotiamo con λ la parola nulla, e per ogni s_i, $i \in \Lambda$ (ove $S = \{s_i \mid i \in \Lambda\}$), definiamo $s_i^{-1} \in S^{-1} = \{s_i^{-1} \mid s_i \in S\}$ tale che:

$$s_i s_i^{-1} \stackrel{def}{=} \lambda$$

Sia $T = S \cup S^{-1}$, e consideriamo l'insieme delle espressioni finite del tipo:

$$s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \dots s_{i_r}^{a_r},$$

ove:

$\forall\, r = 1, \dots, n : a_j \in \{+1, -1\}$, $s_{i_j} \in T$

Definiamo poi, per $s_i \in T$: $s_i^2 \stackrel{def}{=} s_i s_i$, $s_i^{-2} = s_i^{-1} s_i^{-1}$.

chiaramente possiamo ora ricondurci alla parola ridotta ad esponenti finiti, del tipo:

$$s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \dots s_{i_k}^{a_k},$$

ove:

$\forall h = 1 \dots k-1 : i_h \neq i_{h+1}$

$\forall \ell = 1 \dots k : a_\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Sia F_S l'insieme delle parole ridotte. Vogliamo dotare F_S di una struttura di gruppo: tralasciamo la verifica, facile e lunga e supponiamo quella data dall'intuizione.

Vediamo che:

$$(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k})^{-1} = s_{i_k}^{-a_k} \dots s_{i_1}^{-a_1},$$

e, ricavandola:

$$(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k})(s_{j_1}^{b_1} \dots s_{j_h}^{b_h}) = \begin{cases} s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k} \cdot s_{j_1}^{b_1} \dots s_{j_h}^{b_h} \\ s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k+b_1} \dots s_{j_h}^{b_h} \\ (s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_{k-1}}^{a_{k-1}})(s_{j_2}^{b_2} \dots s_{j_h}^{b_h}), \end{cases}$$

e ricordo che sia:

- $s_{i_k} \neq s_{j_1}$;
- $s_{i_k} = s_{j_1}$ $\wedge$ $a_k \neq -b_1$;
- $s_{i_k} = s_{j_1}$ $\wedge$ $a_k = -b_1$.

Dunque F_S è un gruppo. Sia $\Phi : S \hookrightarrow F_S$ l'inclusione naturale.

Allora (F_S, Φ) è un gruppo libero, tale che, dato G gruppo, e $\psi : S \to G$, esiste un unico $\eta : F_S \to G$ tale che $\psi = \eta \Phi$:

$$\eta : F_S \to G$$

$$\eta(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k}) \overset{\text{def}}{=} \psi(s_{i_1})^{a_1} \dots \psi(s_{i_k})^{a_k}, \text{ c.v.d.}$$

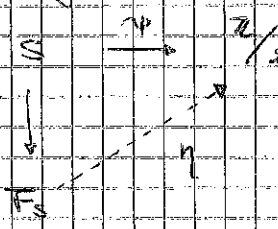
LEMMA

Sia $\Phi : S \to F_S$, con (F_S, Φ) gruppo libero generato da S. Allora Φ è iniettiva, e $\Phi(S)$ genera F_S.

Dim.

Sia $a \neq b$. Allora consideriamo $\psi : S \to \{0,1\}$, tale che $\psi(s) = 1 \Leftrightarrow s = b$.

si ha allora il seguente diagramma commutativo:



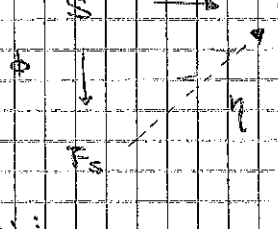
ora:

$$\eta\Phi(a) = \psi(a) = 0 \neq 1 = \psi(b) = \eta\Phi(b) \Rightarrow \Phi(a) \neq \Phi(b)$$

sia ora $G < F$ il sottogruppo generato da $\Phi(S)$, e sia $i : G \hookrightarrow F$ la inclusione naturale: è sufficiente dimostrare che i è suriettiva, e ha $\Phi(S) \subseteq G$, da cui:

$$\Phi = i\psi, \quad \psi : S \to G$$

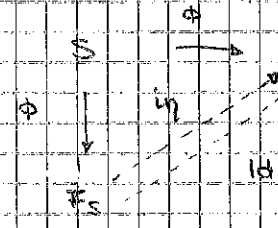
allora si ha:



ove $\eta\Phi = \psi$. allora:

$$i\eta\Phi = i\psi = \Phi = \mathrm{id}\,\Phi,$$

da cui si ha:



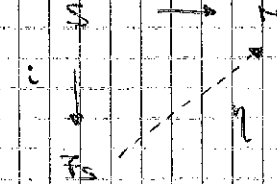
e per l'unicità, $i\eta = \mathrm{id}$, onde i è suriettiva, c.v.d.

TEOREMA

sia S un insieme, e (F_S, i) il gruppo libero generato. se $a \neq b \in S$, $p \neq 1$, allora $ab \neq ba$.

Dim.

Consideriamo il seguente diagramma commutativo:



chiaramente possiamo ora ricondurci alle parole ridotte, ma a esponenti finiti, del tipo:

$$s_{i_1}^{a_1} s_{i_2}^{a_2} \dots s_{i_k}^{a_k},$$

ove:

$\forall h = 1 \dots k-1 : i_h \neq i_{h+1}$

$\forall \ell = 1 \dots k : a_\ell \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

Sia F_S l'insieme delle parole ridotte. Vogliamo dotare F_S di una struttura di gruppo: facciamo ciò verificando, tuttavia, il lavoro è supportato anche dalla intuizione.

Diciamo che:

$$(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k})^{-1} = s_{i_k}^{-a_k} \dots s_{i_1}^{-a_1},$$

e, ricordiamo, che:

$$(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k})(s_{j_1}^{b_1} \dots s_{j_h}^{b_h}) = \begin{cases} s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k} s_{j_1}^{b_1} \dots s_{j_h}^{b_h} \\ s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k + b_1} s_{j_2}^{b_2} \dots s_{j_h}^{b_h} \\ (s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_{k-1}}^{a_{k-1}})(s_{j_2}^{b_2} \dots s_{j_h}^{b_h}), \end{cases}$$

a seconda che sia:

- $s_{i_k} \neq s_{j_1}$;
- $s_{i_k} = s_{j_1}$, $a_k \neq -b_1$;
- $s_{i_k} = s_{j_1}$, $a_k = -b_1$.

Dunque F_S è un gruppo; sia $\Phi : S \hookrightarrow F_S$ l'inclusione naturale.

Allora (F_S, Φ) è un gruppo libero - infatti, dato G gruppo, e $\psi : S \to G$, esiste un unico $\eta : F_S \to G$ tale che $\psi = \eta \Phi$:

$$\eta : F_S \to G$$
$$\eta(s_{i_1}^{a_1} \dots s_{i_k}^{a_k}) \overset{\text{def}}{=} \psi(s_{i_1})^{a_1} \dots \psi(s_{i_k})^{a_k}, \text{ c.v.d.}$$

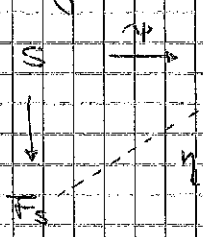
LEMMA

Sia $\Phi : S \to F_S$, con (F_S, Φ) gruppo libero generato da S. Allora Φ è iniettiva, e $\Phi(S)$ genera F_S.

Dim.

Sia $a \neq b$. Allora consideriamo $\psi : S \to \{0,1\}$, tale che $\psi(s) = 1 \iff s = b$.

si ha allora il seguente diagramma commutativo:



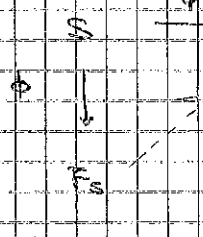
ove:

$$\eta\Phi(a) = \eta(a) = 0 \neq 1 = \eta(b) = \eta\Phi(b) \Rightarrow \Phi(a) \neq \Phi(b)$$

sia ora $G < F$ il sottogruppo generato da $\Phi(S)$, e sia $i: G \hookrightarrow F$ l'inclusione naturale: è sufficiente dimostrare che i è suriettiva. $\forall\, \Phi(S) \subseteq G$, da cui:

$$\Phi = i\psi, \quad \psi: S \longrightarrow G$$

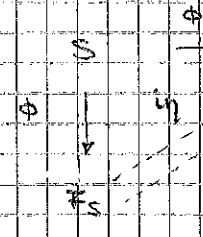
ovvero ci ha:



ove $\eta\Phi = \psi$. Allora:

$$i\eta\Phi = i\psi = \Phi = \mathrm{id}\,\Phi,$$

da cui si ha:



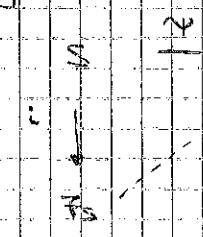
e per l'unicità, $i\eta = \mathrm{id}$, onde i è suriettiva, c.v.d.

TEOREMA

Sia S un insieme, e (F_S, i) il gruppo libero generato. Se $a \neq b \in S$, $a \neq 1$, allora $ab \neq b$.

Dim.

Consideriamo il seguente diagramma commutativo:



Car :

$$\psi(a) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad , \quad \psi(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Si l'on a :

$$\psi(a)\,\psi(b) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \psi(b)\cdot\psi(a),$$

de sorte :

$$\eta(a)\,\eta(b) = \eta(ab) \neq \eta(ba) = \eta(b)\,\eta(a),$$

de qui nécessairement :

$$ab \neq ba.$$

PRODOTTI LIBERI DI GRUPPI

Sia $\{G_s \mid s \in S\}$ una famiglia di gruppi. Il PRODOTTO LIBERO della famiglia $\{G_s \mid s \in S\}$ consta di un gruppo F e di una famiglia di omomorfismi $\{\phi_s \mid s \in S\}$, con:

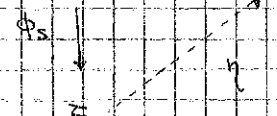
$$\phi_s : G_s \to F,$$

tale che per ogni gruppo H e per ogni famiglia di omomorfismi $\{\psi_s \mid s \in S\}$, ove:

$$\psi_s : G_s \to H,$$

esiste un unico omomorfismo $\eta : F \to H$ tale che, per ogni $s \in S$, valga:

$$\psi_s = \eta \phi_s$$



LEMMA

Nelle notazioni di prima, ϕ_s è iniettivo per ogni $s \in S$.

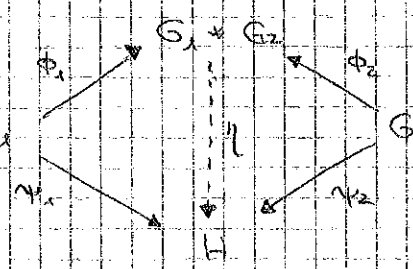
Dim.

Sia $H = G_s$, $\psi_s = Id$, $\psi_i = 0$ $\forall i \neq s$. Allora:

$$\eta \phi_s = \psi_s = Id,$$

da cui ϕ_s è iniettivo, c.v.d.

Nel caso di due gruppi G_1, G_2, si ha il seguente schema commutativo:



PROPOSIZIONE

Per ogni famiglia di gruppi $\{G_s \mid s \in S\}$, il prodotto libero esiste ed è unico.

Sia:

Dimostriamo dapprima l'esistenza.

Sia $\{G_s \mid s \in S\}$ la famiglia di gruppi. Sia:

$$X = \{ g \in \bigcup_{s \in S} G_s \mid \exists\, i \neq j \ni g \in G_i \cap G_j \}$$

Definiamo su $\left[\bigcup_{s \in S} G_s\right] \cdot X \rfloor$ la seguente relazione di equivalenza:

$$g \sim h \iff \exists\, G_k \in \{G_s \mid s \in S\} \ni' g, h \in G_k$$

Sia F l'insieme delle parole ridotte di $\bigcup_{s \in S} G_s$, cioè l'insieme formato dalle successioni finite:

$$g_1 \cdot \ldots \cdot g_m \quad , \quad g_i \not\sim g_{i+1} \ \forall\, i = 1 \ldots m-1,$$

unita alla stringa 1 (elemento neutro).

Definendo:

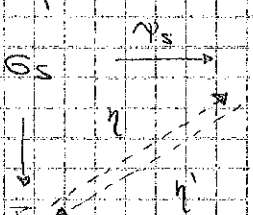
$$(g_1 \ldots g_m)^{-1} = g_m^{-1} g_{m-1}^{-1} \ldots g_1^{-1},$$

e (in maniera ricorsiva):

$$(g_1 \ldots g_m)(t_1 \ldots t_m) = \begin{cases} g_1 \ldots g_m t_1 \ldots t_m \ , & g_m \not\sim t_1 \\ g_1 \ldots g_{m-1} g_m t_1 t_2 \ldots t_m \ , & g_m \sim t_1,\ g_m t_1 \neq 1 \\ (g_1 \ldots g_{m-1})(t_2 \ldots t_m) \ , & g_m \not\sim t_1,\ g_m t_1 = 1 \end{cases}$$

Si verifica allora che F è il prodotto libero di $\{G_s \mid s \in S\}$.

Siano ora F e H due prodotti liberi di $\{G_s \mid s \in S\}$. Allora:



con:

$$\eta\, \varphi_s = \psi_s$$
$$\eta\, \psi_s = \varphi_s$$

Allora:

$\forall\, s \in S$: $\eta \eta'\, \psi_s = \eta\, \varphi_s = \psi_s$, $\eta' \eta\, \varphi_s = \eta'\, \psi_s = \varphi_s$,

da cui:

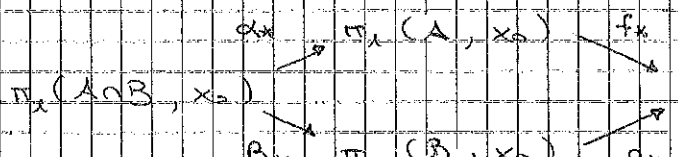
$$\eta \eta' = \eta' \eta = \mathrm{Id} \iff \eta' = \eta^{-1},$$

e F e H sono canonicamente isomorfi. c.v.d.

PRODOTTI LIBERI E TEOREMA DI VAN KAMPEN

Supponiamo di avere uno spazio topologico X che sia unione di due aperti A e B, con A, B, $A \cap B$ CONNESSI PER ARCHI, sia $x_0 \in A \cap B$.

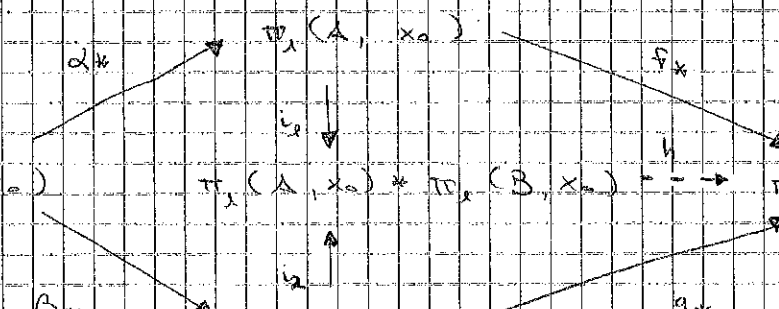
Si può allora il seguente diagramma commutativo di omomorfismi di gruppi fondamentali, indotti dalle inclusioni $A \subseteq X$, $B \subseteq X$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$:



Per definizione del prodotto libero, esiste un unico omomorfismo:

$$h : \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \longrightarrow \pi_1(X, x_0)$$

che rende commutativo il diagramma seguente:



In particolare, l'immagine di h è il sottogruppo di $\pi_1(X, x_0)$ generato dalle immagini di $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$, rispettivamente mediante f_* e g_*.

Per la prima parte del Teorema di Van Kampen, dato che A, B, $A \cap B$ sono connessi per archi, h è suriettiva.

Infatti, dato $\gamma \in \Omega(X, x_0, x_0)$, si dimostra che:

$$\gamma \sim \gamma_1 * \gamma_2 * \dots * \gamma_k,$$

con:

$$\forall\, i = 1 \dots k : \quad \gamma_i \in \Omega(A, x_0, x_0) \ \vee\ \gamma_i \in \Omega(B, x_0, x_0)$$

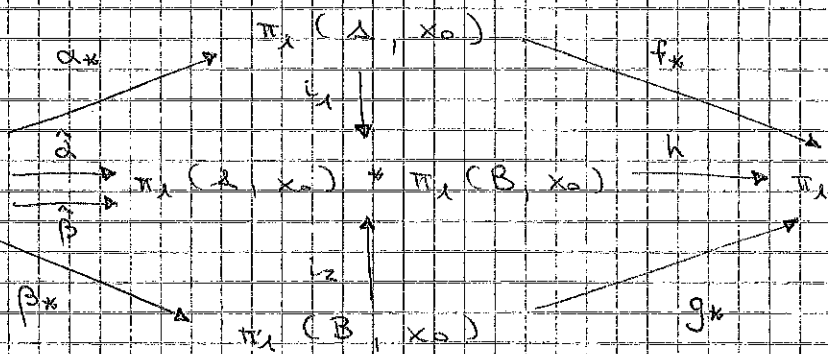
Passando alle classi, si ha dunque, ad esempio:

$$[\gamma] = f_*([\gamma_1]) * \dots * g_*([\gamma_k]),$$

da cui h è suriettivo.

Bisognerebbe dimostrare che le operazioni effettuate finora non dipendono dalla scelta dei rappresentanti, ma ciò verrà trascurato.

In generale h non è iniettivo. Consideriamo il seguente diagramma commutativo:



Notiamo che, per rendere il diagramma commutativo, dobbiamo imporre:

$$h\hat{\alpha} = f_*\alpha_* = g_*\beta_* = h\hat{\beta} \Rightarrow h\hat{\alpha} = \hat{\alpha}\hat{\beta}$$

Se dunque $[\gamma] \in \pi_1(A\cap B, x_0)$ deve essere:

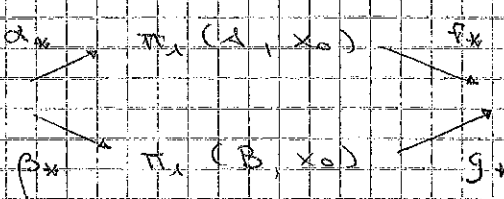
$$h(\hat{\alpha}([\gamma])\hat{\beta}([\gamma^{-1}])) = h(\hat{\alpha}([\gamma]))\,h(\hat{\beta}([\gamma^{-1}])) = (h\hat{\alpha}([\gamma]))(h\hat{\beta}([\gamma]))^{-1} = 1,$$

ovvio!

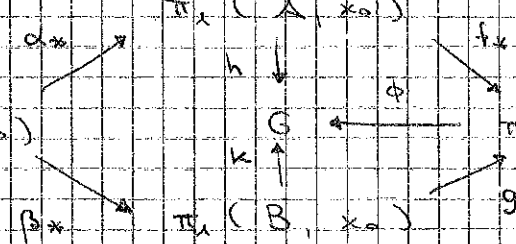
$$\operatorname{Ker} h = \{\hat{\alpha}([\gamma])\hat{\beta}([\gamma^{-1}]) \mid [\gamma] \in \pi_1(A\cap B, x_0)\}$$

TEOREMA

Nelle notazioni precedenti, consideriamo il seguente diagramma commutativo:



Per ogni gruppo G e ogni coppia di omomorfismi $h: \pi_1(A,x_0) \to G$, $K: \pi_1(B,x_0) \to G$ tale che $K\alpha_* = h\beta_*$ esiste ed è unico l'omomorfismo di gruppi $\Phi: \pi_1(X,x_0) \to G$ che rende commutativo il diagramma:



Dim.

Ogni commino in $\Omega(X, x_0, x_0)$ è omotopo ad prodotto di un numero finito di commini chiusi interamente contenuti in A o in B. Dato $[\gamma] \in \pi_1(X, x_0)$, esistono $[a_1] \dots [a_n]$ in $\pi_1(A, x_0)$ e $[b_1] \dots [b_m]$ in $\pi_1(B, x_0)$ tali che:

$$[\gamma] = f_*([a_1])\, g_*([b_1]) \dots f_*([a_m])\, g_*([b_m])$$

deve dunque essere necessariamente:

$$\phi([\gamma]) = h([a_1])\, k([b_1]) \dots h([a_m])\, k([b_m]),$$

da cui ϕ, se esiste è unica (Osserviamo che dimostrazione dell'esistenza), e concludiamo qui la dimostrazione, c.v.d.

TEOREMA (VAN KAMPEN)

Nelle notazioni precedenti, se A, B, $A\cap B$ sono connessi per archi, allora Ker h è il più piccolo nello gruppo normale di $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$ contenente tutti gli elementi $\hat{\alpha}([\gamma])\hat{\beta}([\gamma^{-1}])$ al variare di $[\gamma] \in \pi_1(A\cap B, x_0)$:

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \Big/ \left\langle \hat{\alpha}([\gamma])\hat{\beta}([\gamma^{-1}]) \;\middle|\; [\gamma] \in \pi_1(A\cap B, x_0) \right\rangle$$

Più precisamente, se S è un insieme di generatori di $\pi_1(A\cap B, x_0)$, allora:

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) \Big/ \left\langle \hat{\alpha}([s])\hat{\beta}([s^{-1}]) \;\middle|\; s \in S \right\rangle$$

Nel caso in cui $A\cap B$ è semplicemente connesso (cioè $\pi_1(A\cap B, x_0)$ è banale), si ha:

$$\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$$

—

Richiamiamo alcuni fatti preliminari che non dimostriamo.

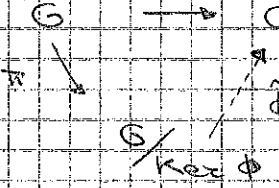
LEMMA (SOLO ENUNCIATO)

Dato un omomorfismo tra gruppi $\Phi : G \to G'$, si ha:

$$\operatorname{Ker}\Phi \trianglelefteq G$$

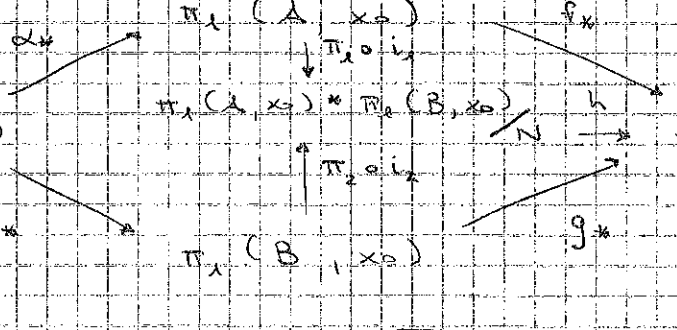
PROPOSIZIONE (TEOREMA DI OMOMORFISMO PER GRUPPI) (SOLO ENUNCIATO)

Sia $\Phi : G \to G'$ un omomorfismo. Allora si ha il seguente diagramma commutativo:



ove $\tilde{\Phi}$ è iniettiva, ed è univocamente determinata da Φ. $\tilde{\Phi}$, inoltre, è unica.

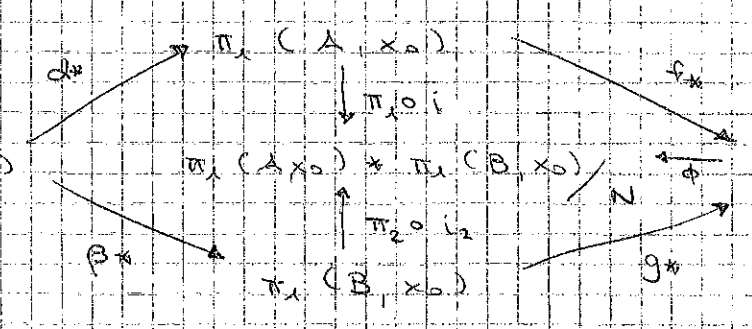
Definiamo ora $N = \langle \hat{\alpha}([\gamma])\,\hat{\beta}([\gamma^{-1}]) \mid \gamma \in \pi_1(A\cap B, x_0)\rangle \trianglelefteq$
$\trianglelefteq \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$. Si ha chiaramente $N \trianglelefteq \operatorname{Ker} h$.
Valgono anche $\alpha_* \equiv \beta_* \pmod N$. Si ha allora:



Per il teorema precedente, esiste un unico omomorfismo:

$$\Phi : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)/N$$

tale che il seguente diagramma è commutativo:



Per l'unicità deve essere:

$$h\,\Phi = \mathrm{id},$$

da cui Φ è iniettiva. Ma $\pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) / N$ è generato dalle immagini di $\pi_1(A, x_0)$ e $\pi_1(B, x_0)$, per un lemma dimostrato precedentemente. Siccome Φ è anche suriettiva, da cui

$$h = \Phi^{-1}$$

è un omomorfismo:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) / N$$

Ma ciò in cui $A \cap B$ è semplicemente connesso, N è banale, da cui:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$$

Siamo sia:

$$H = \langle \hat{\alpha}([\gamma])\,\hat{\beta}([\gamma^{-1}]) \mid [\gamma] \in S \rangle$$

$$T = \{ [\gamma] \in \pi_1(A \cap B, x_0) \mid \hat{\alpha}([\gamma])\,\hat{\beta}([\gamma^{-1}]) \in H \}.$$

Per quanto dimostrato prima, basta dimostrare che $T = \pi_1(A \cap B, x_0)$: un contenimento è già vero per definizione di T.

Dato che $S \subseteq T$ e S genera $\pi_1(A \cap B, x_0)$, basta dimostrare che T è un sottogruppo. Si ha $T \neq \emptyset$, da cui basta dimostrare che, dati $[\gamma], [\delta] \in T$, si ha $[\gamma][\delta^{-1}] \in T$:

$$\hat{\alpha}([\gamma][\delta^{-1}])\,\hat{\beta}([\delta][\gamma^{-1}]) = \hat{\alpha}([\gamma])\,\hat{\alpha}([\delta])^{-1}\,\hat{\beta}([\delta])\,\hat{\beta}([\gamma])^{-1} =$$

$$= [\hat{\alpha}([\gamma])\,\hat{\beta}([\gamma])]\,[\hat{\beta}([\gamma])^{-1}\,\hat{\beta}([\delta])\,[(\hat{\alpha}([\delta]))\,\hat{\beta}([\delta])^{-1}]^{\hat{\beta}([\gamma])^{-1}}] \cdot$$

$$\cdot [(\hat{\beta}([\gamma])\,\hat{\beta}([\delta])^{-1})^{-1}],$$

e dato che $H \triangleleft \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0)$, si ha che ciò appartiene a T. Dunque si ha la tesi:

$$\pi_1(X, x_0) \cong \pi_1(A, x_0) * \pi_1(B, x_0) / H, \quad \text{c.v.d.}$$

CALCOLO DI GRUPPI FONDAMENTALI

Consideriamo ora un toro "bucato", cioè privato di un punto: vogliamo calcolare il gruppo fondamentale di questo spazio topologico; ricaveremo da questo il gruppo fondamentale del toro (che sappiamo essere $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$).

Sia $T = U \cup V$, dove:

- T è il toro,
- U è il toro "forato" in un punto,
- V è un disco che copre il "buco".

Si noti che $U \cap V$ è un disco privato di un suo punto nel toro.

Per il teorema di Van Kampen:

$$\begin{array}{ccccc} & & \pi(U) & & \\ & \overset{\phi_1}{\nearrow} & & \overset{i_*}{\searrow} & \\ \pi(U \cap V) & & & & \pi(T), \\ & \underset{\phi_2}{\searrow} & & \underset{g_*}{\nearrow} & \\ & & \pi(V) & & \end{array}$$

dove ϕ_1 e ϕ_2 sono le inclusioni naturali.

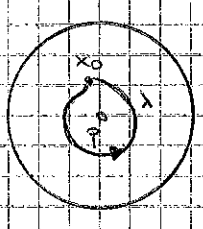
Si ha, poiché, $\pi(V) = \{e\}$, in quanto un disco Δ^2 è contraibile.

Inoltre $(U \cap V)$, cioè $S^1 \vee S^1$, si retrae per deformazione ad S^1, da cui:

$$\pi(U \cap V) = \mathbb{Z} = \langle \lambda \rangle,$$

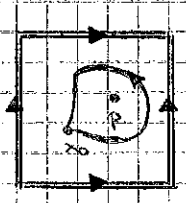
dove λ è un cappio intorno al foro di T:

$U \cap V =$

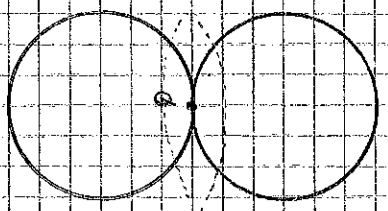


Consideriamo ora U:

$U =$



Il toro forato si ottiene ai lati dei quadrati identificati, ossia ad una coppia di circonferenze tangenti in un punto.



È immediato verificare che il gruppo fondamentale di una coppia di circonferenze tangenti esternamente, ossia il gruppo fondamentale del toro forato, è dato dal gruppo libero di due generatori:

$$F_2(U) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

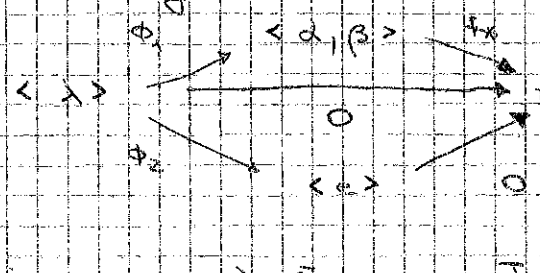
Prima di continuare, notiamo che il laccio λ, immerso nel toro, è un laccio intorno al foro: più nel dettaglio, ogni sollevamento di $\phi_2(\gamma)$ in I^2 è un laccio intorno al punto, che si può ritrarre per deformazione al suo fondo, ossia:

$$\phi_1(\lambda) = \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1},$$

ove:

$$\pi_1(U) = \langle \alpha, \beta \rangle$$

si ha allora il seguente schema:



Dato che il diagramma è commutativo, deve essere:

$$\ker i_* = \langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle,$$

ossia il sottogruppo dei commutatori di $\langle \alpha, \beta \rangle$.

Dunque:

$$F_2(T) \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle \alpha\beta\alpha^{-1}\beta^{-1} \rangle \cong \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$$

Le particolarità $F_2(T)$ è abeliano.

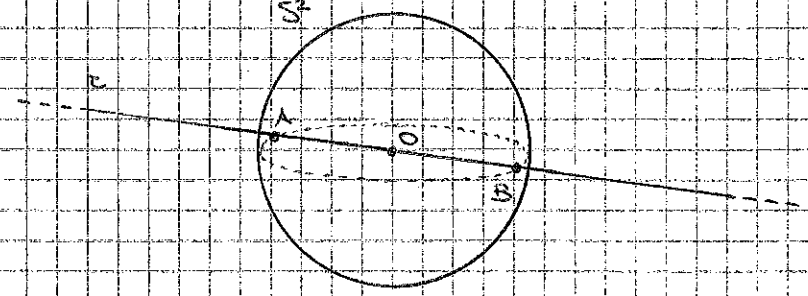
OSSERVAZIONE

Abbiamo visto che il gruppo fondamentale di un bouquet di due circonferenze è $\mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

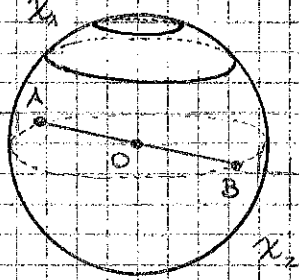
Per induzione, si prova dimostrare facilmente che il bouquet di n circonferenze è:

$$\underbrace{\mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_{n \text{ volte}}$$

Vogliamo ora calcolare $\pi_1(X)$, ove X è l'unione di una sfera S^2 e di una retta che interseca S^2 in due punti:



Senza perdere di generalità, possiamo supporre che AB sia un diametro. Inoltre possiamo subito retrarre la retta sul segmento. Scegliamo due aperti come in figura:



La parte evidenziata è $X_1 \cap X_2$.

Da prima abbiamo dimostrato che X_2 è retraibile per deformazione a S^1; inoltre $X_1 \simeq \Delta^2$. Infine $X_1 \cap X_2$ si retrae per deformazione a S^1 sempre.

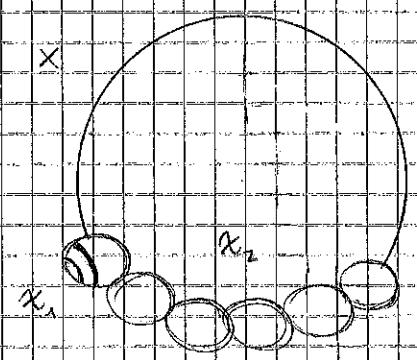
Dunque:

- $\pi_1(X_1) = \{e\}$;
- $\pi_1(X_2) = \mathbb{Z}$;
- $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} = \langle \lambda \rangle$.

Dato che λ è multiplo di un cammino contenuto sia in X_1 che in X_2, possiamo concludere che

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z}$$

Consideriamo ora uno "spazio a collana" come in figura (sia esso X):



Consideriamo gli intorni come in figura: la parte evidenziata, sia $X_1 \cap X_2$, è retraibile per deformazione su S^1.

La sfera contenente è aperta X_1, con ragionamenti analoghi all'esempio precedente, è retraibile per deformazione ad un segmento, da cui X_2 è lo stesso spazio fondamentale della figura composta da una collana con una "perla" in meno.

Si ha inoltre $\pi_1(X_1)$ banale.

Vi sono $\pi_1(X_1 \cap X_2) = \mathbb{Z} = \langle \lambda \rangle$, con $[\lambda]$ classe banale in $\pi_1(X_1)$, così come in $\pi_1(X_2)$.

Dato che le ipotesi sono verificate, il gruppo fondamentale che cerchiamo è il gruppo fondamentale di una collana con una sola sfera. Prendendo gli spazi in questa maniera, X_2 si retrae su S^1, da cui:

$$\pi_1(X) = \mathbb{Z}$$

Vogliamo ora calcolare $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$. Consideriamo $S^3 \setminus S^1$, ossia

$$\mathbb{R}^3 \cup \{\infty\} \setminus S^1$$

Vogliamo dimostrare che ha lo stesso gruppo fondamentale.

Sia:

$$A = \mathbb{R}^3 \setminus S^1 \qquad B = Y$$

dove Y è una "sfera" di S^3 contenente $\{\infty\}$. Si ha che $B \cong \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, e ha $\pi_1(B) = \{e\}$; inoltre $A \cap B$ è retraibile per deformazione su $\partial B \cong S^2$, dunque $\pi_1(A \cap B) = \{e\}$. Dunque:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(S^3 \setminus S^1)$$

Dunque $S^3 \setminus S^1$ ha lo stesso gruppo fondamentale di $\mathbb{R}^3 \setminus S^1$.

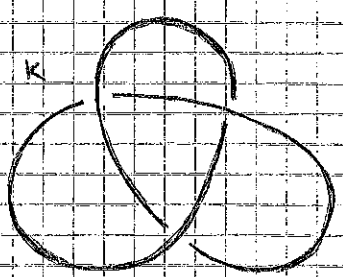
A questo punto, sia $G = \pi_1(S^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1)$. Scegliamo $P \in S^1$, e usiamo la proiezione stereografica: $S^3 \setminus S^1$ è dunque omeomorfo a $\mathbb{R}^3 \setminus r$, dove:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus r)$$

Abbiamo in precedenza dimostrato che $\mathbb{R}^3 \setminus r$ si retrae per deformazione su S^1. Allora, in conclusione:

$$\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus S^1) \cong \mathbb{Z}$$

Si può dimostrare che, dato in $\mathbb{R}^3$ il NODO TRIFOGLIO:



si ha $\pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus K) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / \sim$, con la relazione:

$$a\,b\,a = b\,a\,b$$

Tale gruppo non è $\mathbb{Z}$. Abbiamo dunque K è un'immersione non esotica di S^1 in $\mathbb{R}^3$: in sostanza, il nodo trifoglio non può essere "sciolto".

Calcoliamo ora il gruppo fondamentale della Bottiglia di Klein.

Sia K la bottiglia di Klein, $p \in K$ un punto. Sia U un intorno aperto del punto, omeomorfo a Δ^2; sia $V = K - p$. Allora:

- $\pi_1(U) = \{e\}$;
- $\pi_1(V) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$.

$U \cap V$ si ritrae ad una circonferenza S^1, da cui $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} = \langle \varphi \rangle$. Si ha, per $x_0 \in U \cap V$:

- $\varphi = a b a b^{-1}$ in $\Omega(V, x_0, x_0)$;
- $\varphi = 1_{x_0}$ in $\Omega(U, x_0, x_0)$.

Allora:

$$\pi_1(K) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z} / \langle a b a b^{-1} \rangle$$

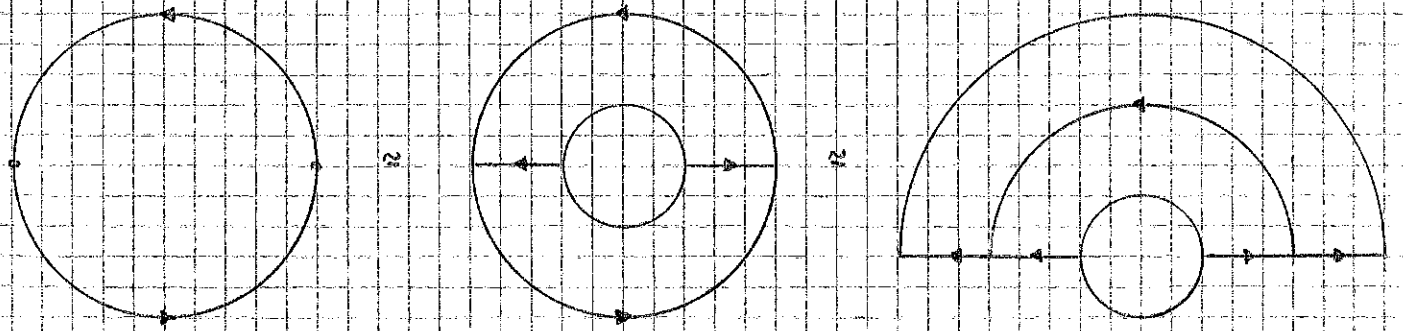
Dunque il toro e la bottiglia di Klein non sono omeomorfi, perché il loro gruppo fondamentale è differente.

Come ultima analisi, notiamo che, per $n \geq 2$:

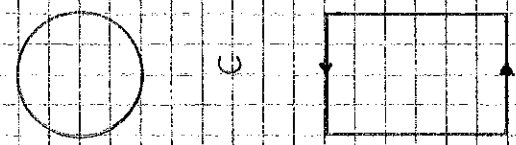
$$\pi_1(\mathbb{P}^n(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Vogliamo determinare un suo generatore.

Sappiamo che $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D \cup M$, dove D è un disco e M è un nastro di Moebius:



Ora, $\pi_1(M) = \mathbb{Z}$ (ed è generato dal cammino chiuso che, per così dire, $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ad infinito), $\pi_1(D) = \{e\}$. Infine, S^1 lungo il disco è omotopo a uno contenuto in M; è omotopo a due



Nella il generatore di $\pi_1(\mathbb{R}^2)$, avendo il ribaltamento di Möbius. Dunque

$$\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

SOLLEVAMENTO DI APPLICAZIONI QUALSIASI

Sia $p : E \to X$ un rivestimento, e sia Y uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi, e sia $f : Y \to X$.
Quando esiste un sollevamento di f?

Sia $y_0 \in Y$ fissato, e supponiamo che esista $g : Y \to E$ tale che:

$$pg = f$$

Se $e_0 := g(y_0)$ e $x_0 := f(y_0) = p(e_0)$, allora si ha il seguente diagramma di gruppi:

$$f_* : \pi_1(Y, y_0) \to \pi_1(X, x_0),$$

dovuto alla commutazione degli omomorfismi:

$$\pi_1(Y, y_0) \xrightarrow{g_*} \pi_1(E, e_0) \xrightarrow{p_*} \pi_1(X, x_0)$$

Quindi $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Im} p_*$.

La condizione $\operatorname{Im} f_* \subseteq \operatorname{Im} p_*$ è anche sufficiente.

Sia $x = f(y_0)$, e per $y \in Y$, sia $\alpha : I \to Y$ tale che $\alpha(0) = y_0$ e $\alpha(1) = y$.

La composizione $f\alpha : I \to X$ è un cammino con $f\alpha(0) = f(y_0)$ e $f\alpha(1) = f(y)$.

Consideriamo ora il monodromio:

$$\operatorname{Mon} : p^{-1}(x_0) \times \Omega(X, x_0, f(y)) \to p^{-1}(f(y)),$$

e definiamo:

$$g(y) := \operatorname{Mon}(e_0, f\alpha)$$

Dimostriamo che g è ben definita.

Dimostriamo ora che g è continua. Sia $y \in Y$ e sia V un intorno aperto di $g(y)$. Sia $V \subseteq X$ un aperto banalizzante che contiene $f(y)$, e sia $U := p^{-1}(V)$ la componente con

Denoto semplicemente $g(\gamma)$. La restrizione:

$$p : U \longrightarrow V$$

è un omeomorfismo, e dato che f è continua, esiste $W \subseteq \gamma$ connesso per archi tale che:

$$\gamma \in W, \quad f(W) \subseteq p(U \cap A) \subseteq V$$

Vogliamo provare che $g(W) \subseteq A$, e avremo provato la tesi. Dato che $f(W) \subseteq V$ e $p : U \to V$ è omeomorfismo, è ovvio $f(W) \subseteq U$.

Sia $\alpha \in \Omega(\gamma, \gamma_0, \gamma)$: per ogni punto $w \in W$ esiste $\beta_w : I \to W$ di estremi γ e w. Allora il sollevamento di $f\beta_w$ con inizio in $g(\gamma)$ è interamente contenuto in $(U \cap A)$ (sempre per il fatto che $p : U \to V$ è omeomorfismo), e dato che:

- $g(\gamma) = \text{Mon}(e_0, f\alpha)$;
- $g(w) = \text{Mon}(e_0, f(\alpha * \beta_w)) = \text{Mon}(g(\gamma), f\beta_w)$,

si ha $g(w) \in U \cap A$. Dunque $g(W) \subseteq A$.

RIVESTIMENTI REGOLARI

LEMMA

Siano X uno spazio Topologico connesso per archi, $x_1, x_2 \in X$ due punti, e $f : X \to Y$ continua.
Allora esiste un isomorfismo di gruppi:

$$\gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_1)) \to \pi_1(Y, f(x_2))$$

tale che:

$$\gamma_{\#}(f_* \pi_1(X, x_1)) = f_* \pi_1(X, x_2))$$

In particolare $f_* \pi_1(X, x_1)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y, f(x_1))$ se e solo se $f_* \pi_1(X, x_2)$ è un sottogruppo normale di $\pi_1(Y, f(x_2))$.

Dim.
Sia $\delta : [0,1] \to X$ un cammino continuo tale che $\delta(0) = x_1$, $\delta(1) = x_2$ e identifichiamo con δ il cammino $f\delta : [0,1] \to Y$.
E identifichiamo con $\delta_{\#}$ l'operatore di coniugio, si ha il seguente isomorfismo di gruppi:

$$\delta_{\#} : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_2)$$
$$\delta_{\#}[\beta] = [i(\delta) * \beta * \delta],$$

che induce un altro isomorfismo di gruppi:

$$\gamma_{\#} : \pi_1(Y, f(x_1)) \to \pi_1(Y, f(x_2))$$
$$\gamma_{\#}[\alpha] = [i(\gamma) * \alpha * \gamma]$$

In particolare, se $\beta \in \Omega(X, x_1, x_1)$:

$$\gamma_{\#} f_*[\beta] = \gamma_{\#}[f\beta] = [i_{(f\delta)} * f\beta * f\delta] = [f(i_{(\delta)} * \beta * \delta)] =$$
$$= f_* \delta_{\#}[\beta] \in f_* \pi_1(X, x_2)$$

La proprietà desiderata di sottogruppi normali è solo un'osservazione normale, che però sarà utile più avanti, c.v.d.

Un rivestimento connesso $p : E \to X$ si dice REGOLARE se $p_* \pi_1(E, e) \triangleleft \pi_1(X, p(e))$, per un qualsiasi $e \in E$.
La definizione è ben posta: ciò deriva dalla osservazione precedente.

Vediamo alcuni casi in cui si hanno rivestimenti regolari:

- se $\tilde{E}$ è semplicemente connesso, si avrà che ogni rivestimento è regolare;
- se X è connesso e $\pi_1(X)$ è abeliano, ogni rivestimento connesso è regolare;
- ogni rivestimento connesso di grado d è regolare: ciò deriva dal fatto che ogni sottogruppo di indice d è normale nel gruppo.

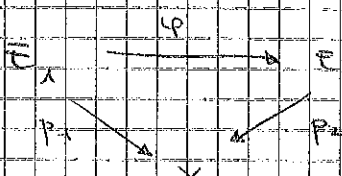
OSSERVAZIONE

Sia E uno spazio topologico connesso, e sia $G < \mathrm{Omeo}(E)$ un gruppo che agisce in maniera propriamente discontinua. Se $e \in E$, $x = p(e) \in X$. Innanzitutto E/G è connesso. In questa situazione, il rivestimento $p: E \to E/G$ dato dalla proiezione canonica è regolare, perché $p_* \pi_1(E, e)$ è il nucleo di un omomorfismo, e dunque è un sottogruppo normale di $\pi_1(X, x)$.

Vale anche il viceversa: è ciò che vedremo nei prossimi paragrafi. I rivestimenti regolari sono dunque tutti e soli quelli ottenuti per quozienti di azioni propriamente discontinue.

MORFISMI DI RIVESTIMENTI

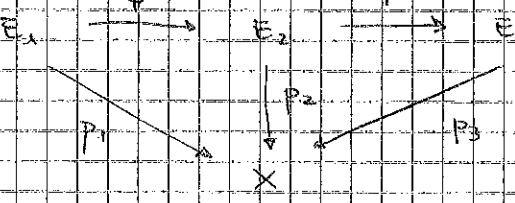
Siano $p_1 : E_1 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ due rivestimenti di uno stesso spazio topologico. Diciamo che un applicazione continua $\varphi : E_1 \to E_2$ è un MORFISMO DI RIVESTIMENTI se commuta con p_1 e p_2, ovvero se il diagramma seguente è commutativo:



In effetti, i morfismi di rivestimenti $\varphi : E_1 \to E_2$ sono tutti e soli i sollevamenti di p_1.

Diciamo di sollevamenti, se due morfismi di rivestimenti $\varphi, \psi : E_1 \to E_2$ sono distinti, allora $\varphi(e) \neq \psi(e)$ $\forall e \in E_1$.

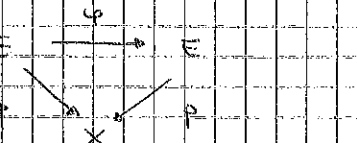
Chiaramente la composizione di due morfismi di rivestimenti è un morfismo di rivestimenti:



$$p_3 (\psi \circ \varphi) = p_1$$

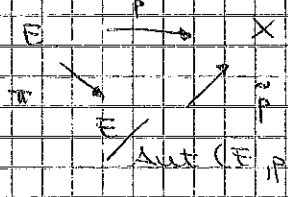
Siano $p_1 : E_2 \to X$, $p_2 : E_2 \to X$ due rivestimenti di X. Un morfismo di rivestimenti $\varphi : E_1 \to E_2$ è un ISOMORFISMO se è sollevato con $\varphi^{-1} : E_2 \to E_1$ isomorfismo di rivestimenti.

Se $p : E \to X$ è un rivestimento, $\varphi : E \to E$ è detto AUTOMORFISMO DI RIVESTIMENTI se è un isomorfismo:



Denotiamo con $\mathrm{Aut}(E, p)$ tale gruppo di automorfismi (rispetto alla composizione).

$\mathrm{Aut}(F,p)$ agisce su $\tilde{E}$. Dato che p è costante sulle orbite, si ha una fattorizzazione di p:



con $\tilde{p}$ ovviamente e suriettiva. Allora $\tilde{p}$ è un omeomorfismo se e solo se è anche iniettiva, ovvero se e solo se $\mathrm{Aut}(F,p)$ agisce transitivamente nella fibra di p.

AUTOMORFISMI DI RIVESTIMENTI

TEOREMA

Sia $p : E \to X$ un rivestimento connesso. Allora:

- dati $e_1, e_2 \in E$, esiti $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ tale che $\varphi(e_1) = e_2$ se e solo se:
$$p(e_1) = p(e_2) \quad , \quad p_* \pi_1(E, e_1) = p_* \pi_1(E, e_2);$$
- $\mathrm{Aut}(E,p)$ agisce su E in modo propriamente discontinuo.

Dim.

Dimostriamo il primo punto.

Se esiste $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ tale che $\varphi(e_1) = e_2$, allora valgono:

- $p(e_1) = p\,\varphi(e_1) = p(e_2)$;
- $p_* \pi_1(E, e_2) = p_* \varphi_* \pi_1(E, e_1) = p_* \pi_1(E, e_2)$.

Viceversa, se $p(e_1) = p(e_2)$ e $p_* \pi_1(E, e_1) = p_* \pi_1(E, e_2)$, dato che siamo nelle ipotesi del Teorema di sollevamento di applicazioni quadrate, esistono $\varphi, \psi : E \to E$ tali che $\varphi(e_1) = e_2$, $\psi(e_2) = e_1$. Allora:
$$\varphi\psi(e_2) = e_2 = \mathrm{Id}(e_2) \quad , \quad \psi\varphi(e_1) = e_1 = \mathrm{Id}(e_1).$$
Per l'unicità del sollevamento, allora:
$$\varphi\psi = \psi\varphi = \mathrm{Id} \Rightarrow \varphi = \psi^{-1},$$
e φ è l'automorfismo di rivestimento cercato.

Dimostriamo ora il secondo punto.

Fissiamo $e \in E$: sia $V \subseteq X$ un aperto semplicemente connesso che contiene $p(e)$, e sia $U \subseteq p^{-1}(V)$ la componente connessa che contiene e. Sia $\varphi \in \mathrm{Aut}(E,p)$ tale che $U \cap \varphi(U) \neq \emptyset$: vogliamo dimostrare che necessariamente $\varphi = \mathrm{Id}$. Sia $u \in U \cap \varphi(U)$: allora $\{u, \varphi^{-1}(u)\} \subseteq U$, e dato che $p : U \to X$ è iniettiva, si ha $u = \varphi^{-1}(u)$, ossia $u = \varphi(u)$. L'unicità del sollevamento, allora, impone $\varphi = \mathrm{Id}$. Dunque vale tesi, c.v.d.

COROLLARIO

Un rivestimento connesso $p : E \to X$ è regolare se e solo se il gruppo $\mathrm{Aut}(E,p)$ agisce transitivamente sulle fibre di p. In tal caso vale:

$$E / \mathrm{Aut}(E,p) \cong X,$$

e per ogni $e \in E$ esiste un isomorfismo di gruppi:

$$\pi_1(X, p(e)) / p_* \pi_1(E,e) \cong \mathrm{Aut}(E,p)$$

Dim.

La prima parte discende facilmente dal teorema appena visto: indicando semplicemente che, fissato $e_1 \in E$, i sottogruppi $p_* \pi_1(E,e_2)$ al variare di $e_2 \in p^{-1}(p(e_1))$ sono tutti e soli i coniugati di $p_* \pi_1(E,e_1)$.

Nel caso in cui $\mathrm{Aut}(E,p)$ agisce transitivamente sulle fibre, allora abbiamo già provato che si ha il seguente diagramma commutativo, con $\tilde{p}$ iniettiva:

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & X \\ & \searrow^{\pi} \quad \nearrow_{\tilde{p}} & \\ & E / \mathrm{Aut}(E,p) & \end{array},$$

da cui $E / \mathrm{Aut}(E,p) \cong X$.

Inoltre, per un teorema precedente, esiste un isomorfismo di gruppi:

$$\Theta_e : \pi_1(X, p(e)) / p_* \pi_1(E,e) \to G, \text{ c.v.d.}$$

RIVESTIMENTI UNIVERSALI

Un rivestimento $u : \tilde{X} \to X$ si dice UNIVERSALE se $\tilde{X}$ è connesso e semplicemente connesso.

Dato che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, segue immediatamente che ogni rivestimento universale è regolare.

Se $u : \tilde{X} \to X$ è universale, allora $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, u)$ agisce liberamente e transitivamente sulle fibre di u, dunque si ha:

$$F_x(x) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{X}, u)$$

PROPOSIZIONE (PROPRIETÀ UNIVERSALE DEL RIVESTIMENTO UNIVERSALE)

Sia $u : \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale, e $p : E \to X$ un rivestimento. Allora, per ogni coppia di punti $\tilde{x} \in \tilde{X}$, $e \in E$ tali che $u(\tilde{x}) = p(e)$, esiste ed è unico il morfismo di rivestimenti:

$$\Phi : \tilde{X} \to E$$

tale che $\Phi(\tilde{x}) = e$.

Come conseguenza, i rivestimenti universali di X sono tutti isomorfi fra loro: a meno di isomorfismo, pertanto, il rivestimento universale di X è unico.

Dim:

Si ha immediatamente

$$\{e\} \cong u_* F_1(\tilde{X}, \tilde{x}) \cong p_* \pi_1(E, e),$$

dunque Φ esiste per un teorema precedente. Siano ora:

$$u_1 : \tilde{X}_1 \to X \qquad u_2 : \tilde{X}_2 \to X$$

Allora esistono:

- $\varphi : \tilde{X}_1 \to \tilde{X}_2$ tale che $\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_2$;
- $\psi : \tilde{X}_2 \to \tilde{X}_1$ tale che $\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_1$.

Allora:

$$\psi\varphi(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1 \quad , \quad \varphi\psi(\tilde{x}_2) = \tilde{x}_2 \ ,$$

e per unicità:

$$\psi\varphi = \varphi\psi = \mathrm{Id}, \text{ c.v.d.}$$

Vediamo ora alcuni fatti relativi all'esistenza del rivestimento universale.

Uno spazio topologico X si dice SEMILOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO se ogni $x \in X$ possiede un intorno V_x connesso per archi tale che $i_* \pi_1(V_x) = \{e\}$ in $\pi_1(X)$, ove $i: V_x \to X$ è l'inclusione.

Equivalentemente ogni suo punto $x \in X$ è contenuto in un aperto V_x tale che ogni cammino chiuso in V è omotopicamente banale in X.

TEOREMA (SOLO ENUNCIATO)

Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Esso possiede un rivestimento universale, unico a meno di isomorfismo, se e soltanto se è semilocalmente semplicemente connesso.

ESERCIZI VARI

1. Siano dati i seguenti 4 spazi topologici:

- $X_1 = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \{[1,1,1]\}$
- $X_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \{[2,i],[1,i]\}$
- $X_3 = \mathbb{P}^3(\mathbb{R}) = \{[1,2,-2,1]\}$
- $X_4 = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+t^2 = 1\} = \{(1,0,1,0)\}$

Quali di questi sono omotopicamente equivalenti?

Quali di questi ammettono un rivestimento con fibra infinita?

Enunciamo un teorema che ci servirà nella risoluzione dell'esercizio.

TEOREMA

Sia X uno spazio topologico semilocalmente semplicemente connesso, e sia $x_0 \in X$. Allora vi è una corrispondenza biunivoca tra i rivestimenti connessi (U, φ), $\varphi: U \to X$ (a meno di omeomorfismo) e le classi di coniugio dei sottogruppi di $\pi_1(X, x_0)$.

OSSERVAZIONE

Il grado di un rivestimento, nelle ipotesi precedenti, è uguale all'indice del sottogruppo che gli corrisponde in $\pi_1(X, x_0)$.

Consideriamo $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, $[1,1,1] \notin \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si retrae per deformazione su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$. Dato che $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \cong S^1$, si ottiene che:

$$\pi_1(X_1) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$$

Si ammette $\mathbb{R}$ come rivestimento a fibra infinita, ma è errato, da qui, affermare ciò che $\mathbb{R}$ è un rivestimento a fibra infinita di X_1, ciò che X_1 ammette un rivestimento a fibra infinita. È invece corretto affermare che poiché X_1 è semilocalmente semplicemente connesso, da cui il rivestimento universale di X_1, corrispondente al sottogruppo banale in $\mathbb{Z}$, è a fibra infinita, ovvero $|\mathbb{Z}| = +\infty$.

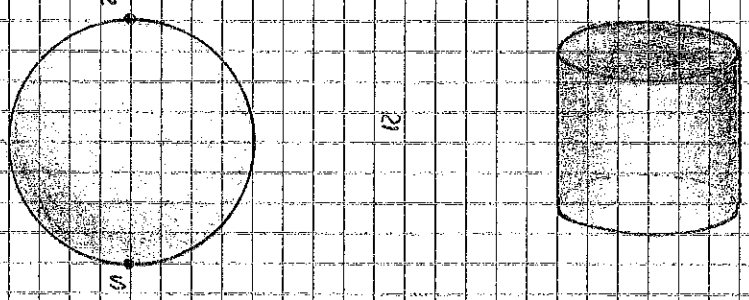
$X_2 = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{p, q\}$ è omeomorfo a $S^2 \setminus \{p, q\}$, che si retrae per deformazione su S^1. Allora, anche in questo caso:

$$\pi_1(X_2) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z},$$

da cui, dato che la retrazione per deformazione induce un equivalenza omotopica, e l'equivalenza omotopica è una relazione di equivalenza, si ha:

$$\begin{cases} X_1 \sim S^1 \\ X_2 \sim S^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 \simeq S^1 \\ X_2 \simeq S^1 \end{cases} \Rightarrow X_1 \simeq X_2$$

X_2 può anche essere pensato come una sfera privata dei due poli, dunque in contesto come $S^1 \times]0,1[$:



Allora $\mathbb{R} \times]0,1[$ è un ricoprimento a fibra infinita:

$$q : \mathbb{R} \times]0,1[\to S^1 \times]0,1[$$
$$q(t,s) \overset{\text{def}}{=} (p(t), s),$$
$$p(t) \overset{\text{def}}{=} e^{2\pi i t}$$

Possiamo anche X_3. Esso si retrae per deformazione su $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, da cui:

$$\pi_1(X_3) = \pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Dunque:

- X_3 non ha ricoprimenti a fibra infinita, poiché $|\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}| = 2$;
- $X_3 \not\simeq X_4$, $X_3 \not\simeq X_2$, poiché $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \not\simeq \mathbb{Z}$.

Infine, X_4 è un toro privato di un punto, da cui:

$$\pi_1(X_4) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z},$$

dunque X_4 non è omotopicamente equivalente a nessuno dei precedenti, ma ammette ricoprimenti di cardinalità infinita.

OSSERVAZIONE

Siano X, Y spazi topologici, e siano $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$. Indichiamo con $[((X, x_0), (Y, y_0))] \overset{\text{def}}{=} \pi_0(C((X, x_0), (Y, y_0)))$.

Si definisce n-ESIMO GRUPPO DI OMOTOPIA:

$$\pi_n(Y, y_0) := [((S^n, N), (Y, y_0))],$$

cioè il gruppo delle classi di omotopia delle applicazioni $\varphi : S^n \to Y$.

In particolare, uno spazio contrattile ha tutti i gruppi di omotopia banali: chiaramente uno è "a forma" semplicemente connessa.

Sappiamo che S^n, $n \geq 2$, è semplicemente connesso: limitandoci al caso $n = 2$, però, dimostreremo che esistono applicazioni $\varphi : S^3 \to S^2$ non omotope ad una costante: dunque S^2 non è contrattile.

La mappa, detta MAPPA DI HOPF, è la seguente:

$$\varphi : S^3 \subseteq \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\} \xrightarrow{q} \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \cong S^2,$$

dove:

$$q(z_1, z_2) = [z_1, z_2]$$

e φ non risulta omotopa alla mappa costante.

Si decompone S^3 nell'unione di due tori pieni, saldati da un toro "nullo".

Questa decomposizione di S^3 è chiamata DECOMPOSIZIONE DI HEEGAARD.

Sia:

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \mid \|z_1\|^2 + \|z_2\|^2 = 1\} \subseteq \mathbb{C}^2$$

Per $a = 1$, $a \neq 0$ reale, per $(z_1, z_2) \in S^3$:

$$\|z_1\|^2 = a \iff \|z_2\|^2 = 1 - a$$

Sia $X \subseteq S^3$ il seguente sottoinsieme:

$$X = \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \;\middle|\; \|z_1\|^2 = \|z_2\|^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

Si può dire che X è omeomorfo a $S^1 \times S^1$, dove:

$$S^1_1 \overset{\text{def}}{=} \left\{ z_1 \in \mathbb{C} \;\middle|\; \|z_1\|^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

$$S^1_2 \overset{\text{def}}{=} \left\{ z_2 \in \mathbb{C} \;\middle|\; \|z_2\|^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

Dunque X è un toro.

Si può anche dire che X scinde S^3 in due parti:

$$S^3 \setminus X = A_+ \cup A_-,$$

con:

$$A_+ \overset{\text{def}}{=} \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \;\middle|\; \|z_1\|^2 > \frac{1}{2} \right\}$$

$$A_- \overset{\text{def}}{=} \left\{ (z_1, z_2) \in S^3 \;\middle|\; \|z_2\|^2 > \frac{1}{2} \right\}$$

Allora:

$$S^3 = X \cup A_+ \cup A_-,$$

con X toro.

Sotto queste condizioni che $A_+ \cup X$ e $A_- \cup X$ sono dei tori pieni: per simmetria è sufficiente dimostrare solo uno dei due.

Considerando $p \in A_-$, $S^3 \setminus p$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^3$, e X viene mappato in un toro. Avendo rimosso $p \in A_-$ a S^3, A_+ verrà mappato nell'interno del toro (parte compatta); mentre A_- verrà mappato nella parte esterna al toro (parte non limitata).

Dunque effettivamente S^3 è unione di due tori pieni, aventi in comune un toro.

Si noti che, per $z_1 = 0$, si ottiene un S^1, corrispondente all'"anima" del toro pieno.

3. Calcolare, per $n \geq 3$, il gruppo fondamentale di

$$X = \{(x_0, \dots, x_n) \in S^n \mid x_0^2 + x_1^2 < 1\}$$

Poniamo considerare i vettori:

$$\underline{x} = (x_0, x_1), \quad \underline{y} = (x_2 \dots x_n),$$

e scriviamo:

$$S^n = \{(\underline{x}, \underline{y}) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{n-1} \mid \|\underline{x}\|^2 + \|\underline{y}\|^2 = 1\}$$

Dunque, per $a \in [0,1]$, e $(\underline{x}, \underline{y}) \in S^n$:

$$\|\underline{x}\|^2 = a \iff \|\underline{y}\|^2 = 1 - a$$

4. Sia:

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, \ z \neq 0\},$$

e sia $G \leq \mathrm{Omeo}(X)$ il sottogruppo generato da $a, b : X \to X$, ove:

$$a(x, y, z) = (-x, -y, z)$$
$$b(x, y, z) = (x, y, -z)$$

Dimostrare che G è isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ed agisce in modo propriamente discontinuo. Il quoziente X/G è omeomorfo o $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$? Motivare la risposta.

È evidente che a e b hanno ordine 2, e inoltre vale:

$$ab = ba,$$

da cui $G = \{\mathrm{Id}, a, b, ab\} \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

X è un cono ellittico privato dell'origine, dunque $\mathbb{R}^2$ due componenti connesse, ciascuna omeomorfa a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ per l'esercizio.

Dato che $b(x,y,z) = (x,y,-z)$, anche punti di componenti connesse diverse vengono identificati, X/G è connesso.

Dato (x,y,z), la sua orbita è composta da quattro elementi:

$$(x,y,z), \quad (x,y,-z), \quad (-x,-y,z), \quad (-x,-y,-z)$$

Un dominio fondamentale sarà allora la metà di una componente connessa di X (dunque un piano passante per l'asse $\{x=y=0\}$, con i bordi identificati. Questa è parzialmente ancora omeomorfa a $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, da cui $\pi_1(X) = \pi_1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) = \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$.

Inoltre è evidente che l'azione sia propriamente discontinua.

ANCORA SUI RIVESTIMENTI UNIVERSALI

Torniamo ora a parlare dell'esistenza del rivestimento universale di uno spazio topologico X.

LEMMA

Sia X uno spazio topologico connesso e localmente connesso per archi. Se X possiede un rivestimento universale, allora X è semilocalmente semplicemente connesso.

Dim.

Sia $u: \tilde{X} \to X$ un rivestimento universale, sia $x \in X$, e sia V_x un aperto banalizzante. Indichiamo con $i: U \to X$ l'inclusione.

Noi vogliamo dimostrare che:

$$i_* : \pi_1(U, x) \to \pi_1(X, x)$$

è la mappa banale (costantemente nulla).

Scegliamo $s: V_x \to \tilde{X}$ tale che s inverta u su V_x: ad esempio, scegliamo $U \subseteq p^{-1}(V_x)$ in modo che $u: U \to V$ sia un omeomorfismo: sia $s = u|_U^{-1}$.

Allora si ha:

$$i_* \pi_1(U, x) = u_* s_* \pi_1(U, x) \subseteq u_* \pi_1(\tilde{X}, s(x)) = 0, \text{ c.v.d.}$$

Esistono spazi connessi e localmente connessi per archi, ma non semilocalmente semplicemente connessi (dunque non ammettono rivestimenti universali): sia:

$$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{(2^{-n}, 0) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Sia $\varepsilon \notin \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$, tale che, scelto $U \subseteq X$ intorno di 0, si abbia:

$$\{x \in X \mid \|x\| \leq 2\varepsilon\} \subseteq U$$

Sia $n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $2^{-n_0} < 2\varepsilon$. Consideriamo:

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x - (\varepsilon, 0)\| = \varepsilon\}$$

$$\alpha \overset{\text{def}}{=} \mathbb{R}^2 \setminus \{(2^{-n_0}, 0)\}$$

Vale la seguente catena di inclusioni:

$$Y \subset U \subseteq X \subseteq A,$$

e questa induce un omomorfismo di gruppi:

$$\pi_1(Y,0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(A,0),$$

da cui si ha:

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(X,0) & \longrightarrow & \pi_1(U,0) \\ \uparrow & & \downarrow \\ \pi_1(Y,0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_1(A,0), \end{array}$$

da cui:

$$\pi_1(X,0) \longrightarrow \pi_1(U,0),$$

in particolare, non può essere banale.

OSSERVAZIONE

Sia:

$$\nu : \tilde{X}^2 \to X$$

il rivestimento universale di X.

Sia $\tilde{x} \in \tilde{X}$. Allora si ha una bigezione:

$$\Phi : \tilde{X} \xrightarrow{\sim} \bigcup_{y \in \nu^{-1}(x)} F(X, x, y),$$

con:

- $x = \nu(\tilde{x})$;
- $F(X,x,y) \overset{\text{def}}{=} Q(X,x,y)/\sim$ è l'insieme delle classi di omotopia dei cammini di estremi x e y.

Dato $\tilde{y} \in \tilde{X}$, esiste un unico elemento di omotopia $[\omega] \in F(X, \nu(\tilde{x}), \nu(\tilde{y}))$, da cui la mappa definita:

$$\Phi(\tilde{y}) = [\omega]$$

L'inverso di Φ è dato dalla monodromia del rivestimento.

TEOREMA

Uno spazio topologico, connesso e localmente connesso per archi, possiede un rivestimento universale, unico a meno di isomorfismo, se e soltanto se è semilocalmente semplicemente connesso.

Dim.

Un'implicazione è già stata dimostrata.

Sia ora $x \in X$, e consideriamo:

$$\tilde{X} = \bigcup_{y \in X} \pi(X, x, y) = \bigcup_{y \in X} \Omega(X, x, y) / \sim$$

l'omotopia di cammini conserva gli estremi, da cui è ben definita l'applicazione (suriettiva) seguente:

$$u : \tilde{X} \longrightarrow X$$
$$u([\alpha]) = \alpha(1)$$

Si noti, ad esempio, che si ha una biiezione tra $\pi_1(X, x)$ e $u^{-1}(x)$.

Vogliamo ora definire una topologia in modo che $u : \tilde{X} \to X$ appena definita sia un rivestimento universale.

Dati:

- $\alpha \in \Omega(X, x, y)$;
- U intorno di y,

definiamo:

$$\omega(\alpha, U) = \tilde{X}$$

come l'insieme delle classi di omotopia di cammini del tipo $\alpha * \beta$, con $\beta \in \Omega(U, y, z)$, con $z \in U$, ovviamente.

Osserviamo che:

- $\omega(\alpha, U) = \omega(\alpha, U')$, ove U' è la componente connessa di U che contiene $\alpha(1)$;
- $[\beta] \in \omega(\alpha, U)$ implica che sia $\beta = \alpha * \beta'$, con $\beta'(1) \in U$;
- se $[\beta] \in \omega(\alpha, U)$ e $V = U$ contiene $\beta(1)$, allora:

$$\omega(\beta, V) = \omega(\alpha, U).$$

Dato insieme $\omega(\alpha, U)$, con $\alpha \in \Omega(X, x, y)$ e U intorno di y, formiamo (al variare di $y \in X$) una base di una topologia su X. Infatti:

- sia $[\beta] \in \pi(X, x, y)$: allora $[\beta] \in \omega(\alpha, X)$;
- sia $[\gamma] \in \omega(\alpha, U) \cap \omega(\beta, V)$. Allora ovviamente:

$$\gamma(1) \in U \cap V$$

Il "candidato naturale" è $\omega(\gamma, U \cap V)$. Ovviamente $[\gamma] \in \omega(\gamma, U \cap V)$, e inoltre, per quanto osservato precedentemente, dato che $[\gamma] \in \omega(\alpha, U)$ e $U \cap V \subseteq U$ contiene $\gamma(1)$, allora:

$$\omega(\gamma, U \cap V) \subseteq \omega(\alpha, U)$$

Analogamente:

$$\omega(\gamma, U \cap V) \subseteq \omega(\beta, V),$$

da cui finalmente:

$$\omega(\gamma, U \cap V) \subseteq \omega(\alpha, U) \cap \omega(\beta, V),$$

e la dimostrazione è completa.

In tale topologia, la proiezione naturale $u : \tilde{X} \to X$ è continua e aperta. Sia infatti $U \subseteq X$ un aperto connesso. Allora:

$$u^{-1}(U) = \bigcup_{\omega(\alpha, U) \in \mathcal{U}} \omega(\alpha, U),$$

da cui u è continua. In particolare:

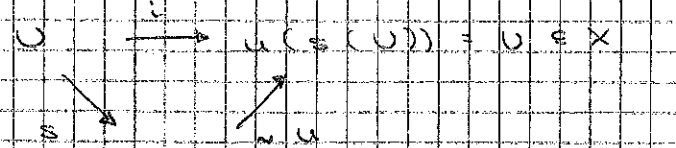
$$u(\omega(\alpha, U)) = U,$$

dunque u è aperta.

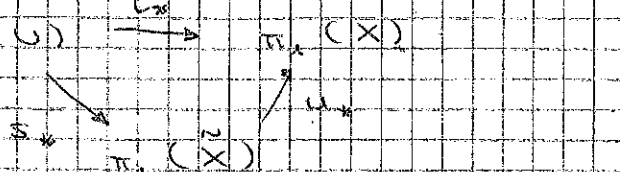
Dobbiamo ora provare che $u : \tilde{X}^2 \to X$ è un rivestimento.

Dobbiamo dunque costruire una famiglia di aperti trivializzanti (connessi) $U \subseteq X$, tali che, per ognuno di essi, $u^{-1}(U)$ sia formato da componenti connesse, ciascuna omeomorfa a U.

Se tali aperti trivializzanti esistono, consideriamo $i : U \to X$ l'inclusione naturale; sia $V \subseteq \tilde{X}$ tale che $u : V \to U$ sia un omeomorfismo; sia $s = u^{-1}|_V$. Allora si ottiene il seguente diagramma commutativo:



che induce:



Dato che $\pi_1(\tilde{X})$ è banale, deve essere $i_* \pi_1(U)$ banale in $\pi_1(X)$: in altre parole, X deve essere SEMILOCALMENTE SEMPLICEMENTE CONNESSO.

La condizione, insieme alla locale, è anche sufficiente: sia $U \subseteq X$ un aperto connesso tale che $i_* : \pi_1(U) \to \pi_1(X)$ sia banale. Sia $\alpha : I \to X$ con $\alpha(0) = *$ e $\alpha(1) = u([\alpha])$ in U. Allora:

$$u : \omega(\alpha, U) \to U$$

è un omeomorfismo. Sappiamo già che è ben suriettiva:

$$u(\omega(\alpha, U)) = U$$

Resta da provare l'iniettività. Sia $u([\alpha * \beta]) = u([\alpha * \gamma])$. Allora $i(\beta) * \gamma$ è chiuso in U, perché $\beta(1) = \gamma(1)$, da cui $i(\beta) * \gamma$ è omotopicamente banale in X, da cui β e γ sono omotopicamente equivalenti in X, e $[\alpha * \beta] = [\alpha * \gamma]$ in $\tilde{X}$, da cui u è iniettiva.

Per completare la dimostrazione, dati α, β in X con fissato in loro $* \in X$ e punto finale in U, allora:

$$\omega(\alpha, U) = \omega(\beta, U) \neq \varnothing \quad \omega(\alpha, U) \neq \omega(\beta, U)$$

Sia infatti γ in X tale che $[\gamma] \in \omega(\alpha, U) \cap \omega(\beta, U)$. Allora:

$$[\alpha] = [\gamma * \alpha'] \quad [\beta] = [\gamma * \beta'] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} [\beta] = [\alpha * i(\alpha') * \beta'] \in \omega(\alpha, U) \\ [\alpha] = [\beta * i(\beta') * \alpha'] \in \omega(\beta, U), \end{cases}$$

da cui:

$$\omega(\alpha, U) = \omega(\beta, U), \ \omega(\beta, U) = \omega(\alpha, U) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega(\alpha, U) = \omega(\beta, U)$$

Dunque $u : \tilde{X} \to X$ è un rivestimento: resta da mostrare che $\tilde{X}$ è semplicemente connesso.

Sia $\alpha \in \Omega(X, x, y)$, definiamo:

$\forall\, s \in [0,1]$: $\alpha_s : [0,1] \to X$, $\alpha_s(t) \overset{\text{def}}{=} \alpha(st)$

Definiamo poi:

$$\hat{\alpha} : [0,1] \to \tilde{X}$$
$$\hat{\alpha}(s) \overset{\text{def}}{=} [\alpha_s] \in \pi(X, x, \alpha(s))$$

Siano ora $s \in [0,1]$, $\alpha(s) \in U$, U aperto. Allora:

$\exists\, \varepsilon > 0$ t.c. $\alpha(t) \in U$ $\forall\ s - \varepsilon \le t \le s + \varepsilon$

Allora:

$$[\alpha_t] \in \omega(\alpha_s, U) \quad \forall\ s - \varepsilon \le t \le s + \varepsilon$$

Dunque $\hat{\alpha}$ è continua, e $\tilde{X}$ è connesso per archi. Ora:

- $u(\hat{\alpha}(s)) = \alpha(s)$, da cui $\hat{\alpha}$ è il sollevamento di α tale che $\hat{\alpha}(0) = [1\!\!1_x]$;
- $[\alpha] = \hat{\alpha}(1) = \text{mon}([1\!\!1_x], \alpha)$.

Allora l'esistenza di sollevamenti per rivestimenti u è risolta. Dunque:

$$u_* \pi_1(\tilde{X}, [1\!\!1_x]) = \{[\alpha] \in \pi_1(X, x) \mid [1\!\!1_x] \cdot [\alpha] = \text{mon}([1\!\!1_x], \alpha) = [1\!\!1_x]\} = \{[1\!\!1_x]\}$$

dato che:

$\forall\, [\alpha] \neq [1\!\!1_x]$, $\text{mon}([1\!\!1_x], \alpha) \neq [1\!\!1_x]$,

visto che l'esistenza è risolta.

Dato che u_* è iniettiva, allora:

$$\pi_1(\tilde{X}, [1\!\!1_x]) = \{0\},$$

da cui $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, c.v.d.

CALCOLO DI RIVESTIMENTI UNIVERSALI

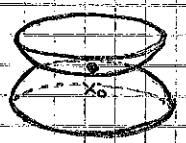
Consideriamo $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, e sia $X = S^2/(0,0,1) \sim (0,0,-1)$. Intendiamo calcolare il rivestimento universale di X.

Innanzitutto:

$$\pi_1(X, x_0) = \mathbb{Z}$$

Sia x_0 un punto di X, scelto, di uno dei seguenti due modi:

- per ogni punto $x_0 \neq [0,0,1]$, si prenda un intorno di quel punto come sulla sfera;
- per $x_0 = [0,0,1]$, esiste un sistema fondamentale di intorni costituiti da una calotta relativa al polo nord e una calotta relativa al polo sud, identificate in un punto, come in figura:



Consideriamo allora una sequenza infinita di sfere, ossia:

$$\tilde{X} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} B((0,0,2k+1), 1)$$

Si ha chiaramente:

$$S_i \overset{\text{def}}{=} B((0,0,2i+1), 1)$$

$$S_i \cap S_{i+1} = \{(0,0,2i+2)\}$$

Definiamo poi:

$$u|_{S_i}(x,y,z) = \pi(x,y,z-2i-1),$$

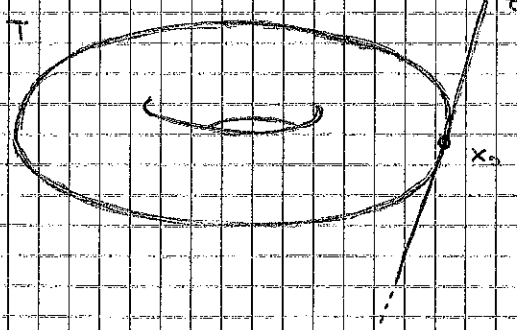
dove $\pi: S^2 \to X$ è la proiezione.

Notiamo che:

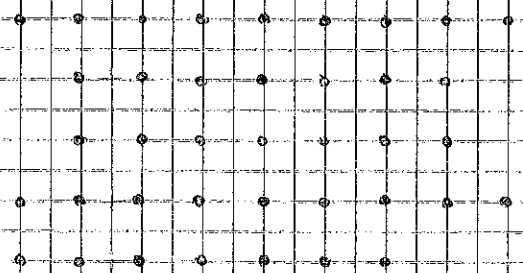
$$u|_{S_i}(0,0,2i+2) = u|_{S_{i+1}}(0,0,2i+2)$$

Inoltre $\tilde{X}$ è semplicemente connesso, da cui è il rivestimento universale.

Consideriamo un toro unito ad una retta ad esso tangente, come in figura:

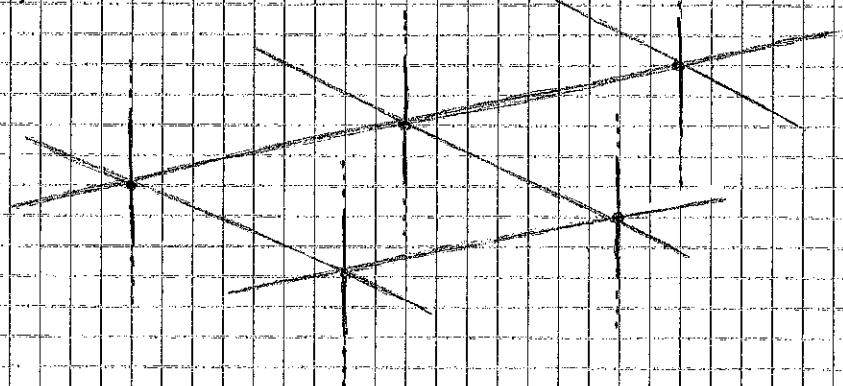


Sappiamo bene che il rivestimento universale del toro è $\mathbb{R}^2$. In particolare l'immagine inversa di ogni punto del toro forma un reticolo su $\mathbb{R}^2$:



(in particolare ciò vale per il punto di tangenza). Il rivestimento, allora, ha grado infinito.

Considerata allora la controimmagine di x_0, per ogni punto aggiungiamo una retta trasversale a $\mathbb{R}^2$ passante per quel punto:



Questo è il rivestimento universale cercato.

Notiamo che, se al posto di una retta trasversale, per ogni punto avessimo considerato una parabola tangente al piano in quel punto, sarebbe stato indifferente.

SERIE FORMALI

Sia $\mathbb{K}$ un campo.

Definiamo allora l'ANELLO DEI POLINOMI:

$$\mathbb{K}[x] = \left\{ \sum_{n=0}^{k} a_n x^n \;\middle|\; \forall\, n = 0, \dots, k : a_n \in \mathbb{K} \right\}$$

È immediato notare che $\mathbb{K}[x]$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ non finitamente generato, ma anche un'algebra, ove:

- $\sum_{n=0}^{k} a_n x^n + \sum_{n=0}^{k} b_n x^n \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=0}^{k} (a_n + b_n) x^n$;
- $\left(\sum_{n=0}^{k} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{h} b_n x^n \right) \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{k+h} \left[\sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j} \right] x^i$.

(Nel primo caso, alcuni coefficienti sono eventualmente nulli).

Le operazioni di somma e prodotto sono:

- associative;
- commutative;
- rispettanti la proprietà distributiva.

Definiamo ora l'ANELLO DELLE SERIE FORMALI:

$$\mathbb{K}[[x]] = \left\{ \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \;\middle|\; \forall\, k \in \mathbb{N} : a_k \in \mathbb{K} \right\}$$

Anche in questo caso, si definiscono le operazioni in modo naturale:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$
- $\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\sum_{h=0}^{p} a_h b_{p-h} \right] x^p$.

Anche in questo caso, somma e prodotto sono associative, commutative, rispettanti la proprietà distributiva.

Chiaramente, vale $\mathbb{K}[x] \subseteq \mathbb{K}[[x]]$.

D'ora in poi, sia:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

una generica serie formale.

Definiamo allora l'ORDINE di S:

- se $S \neq 0$, $\omega(S) \overset{\text{def}}{=} \min \{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq 0 \}$;
- se $S = 0$, $\omega(S) = +\infty$ per definizione.

OSSERVAZIONE

Poniamo dire che S ha ordine $\omega(S) \geq k$ se e solo se:
$\forall\, n < k : a_n = 0$

Dato $k \in \mathbb{N}$, l'insieme delle serie formali aventi ordine $\omega(S) \geq k$ è un sotto spazio vettoriale di $\mathbb{K}[[x]]$.

OSSERVAZIONE

Si ha:

- $\omega(S+T) \geq \min \{ \omega(S), \omega(T) \}$;
- $\omega(S \cdot T) = \omega(S) + \omega(T)$ (in particolare, $\mathbb{K}[[x]]$ è un dominio).

Una famiglia di serie formali $(S_i)_{i \in I}$ è detta SOMMABILE se e solo se (ove $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} x^j$):
$\forall\, j \in \mathbb{N} : \left| \{ S_k \in (S_i)_{i \in I} \mid a_{k,j} \neq 0 \} \right| < +\infty$.
Equivalentemente, se e solo se:
$\forall\, j \in \mathbb{N} : \left| \{ S_k \in (S_i)_{i \in I} \mid \omega(S_k) < j \} \right| < +\infty$.

Allora, in questo caso, è ben definita la SOMMA:

$$S = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{i \in I} a_{i,p} \right) x^p$$

Ad esempio, se definiamo il MONOMIO di grado p come la serie formale $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ ove $a_k = 0 \ \forall\, k \neq p$ (ovvio $S = a_p x^p$), la successione $(a_p x^p)_{p \in \mathbb{N}}$ è sommabile, e si ha:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_p x^p \in \mathbb{K}[[x]]$$

SOSTITUZIONE DI SERIE FORMALI

Consideriamo due serie formali:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n X^n \qquad T = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n X^n$$

Poiché è ben definita:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}: \quad c_n \overset{\text{def}}{=} a_n (T)^n$$

Supponiamo che $b_0 = 0$, cioè $\omega(T) \geq 1$. Poiché si ha:

$$\omega(c_n) = \omega(a_n T^n) \geq n,$$

la $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ è una famiglia sommabile, ed è dunque ben definita:

$$S \circ T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n T^n$$

Valgono le seguenti proprietà:

- $(S_1 + S_2) \circ T = S_1 \circ T + S_2 \circ T$;
- $(S_1 S_2) \circ T = (S_1 \circ T)(S_2 \circ T)$.

In generale, invece, non vale:

$$S \circ (T_1 + T_2) = S \circ T_1 + S \circ T_2$$

In generale, se $(S_i)_{i\in I}$ è sommabile, e T è tale che $\omega(T) \geq 1$, allora:

$$\left(\sum_{i\in I} S_i\right) \circ T = \sum_{i\in I} (S_i \circ T)$$

Infatti:

- $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} X^j \Rightarrow \sum_{i\in I} S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) X^j \Rightarrow$
$\Rightarrow \left(\sum_{i\in I} S_i\right) \circ T = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{i\in I} a_{i,j}\right) T^j$;
- $S_i = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} X^j \Rightarrow S_i \circ T = \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} T^j \Rightarrow$
$\Rightarrow \sum_{i\in I} (S_i \circ T) = \sum_{i\in I} \left(\sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j} T^j\right)$.

La due scritture sono uguali poiché per ogni $p \in \mathbb{N}$, il coefficiente di T^p nella prima scrittura è uguale a quello nella seconda scrittura è uguale.

ELEMENTI INVERTIBILI IN $\mathbb{K}[[x]]$

Innanzitutto, ricordiamo che:

$$(1-x)\sum_{j=0}^{+\infty} x^j = 1$$

Dunque in $\mathbb{K}[[x]]$:

$$(1-x)^{-1} = \sum_{j=0}^{+\infty} x^j$$

PROPOSIZIONE

Sia $S \in \mathbb{K}[[x]]$. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $\omega(S) = 0$;
- $\exists\, T \in \mathbb{K}[[x]]$ s.t. $S \cdot T = T \cdot S = 1$

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione, del tutto banale. Detto che:

$$S \cdot T = 1,$$

allora:

$$\omega(S) + \omega(T) = \omega(1) = 0,$$

da cui $\omega(S) = 0$. Equivalentemente:

$$S = \sum_{m=0}^{+\infty} a_m x^m, \quad T = \sum_{m=0}^{+\infty} b_m x^m, \quad S \cdot T = a_0 b_0 + \dots \Rightarrow$$

$$a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0 \neq 0.$$

Dimostriamo ora l'implicazione opposta. Sia dunque $a_0 \neq 0$. Sia:

$$S_1(x) = a_0^{-1} S(x).$$

Allora, se $T_1 \cdot S_1 = S_1 \cdot T_1 = 1$, allora $a_0^{-1} T_1 \overset{\text{def}}{=} T$ è l'inverso di S. Dunque:

$$S_1(x) = 1 - u(x), \quad \omega(u) \geq 1$$

Allora è ben definita:

$$T_1(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} u(x)^j \in \mathbb{K}[[x]],$$

tale che:

$$(1 - u(x))\, T_1(x) = 1$$

Allora $T = a_0^{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} u(x)^j$ è l'inverso di S, c.v.d.

OSSERVAZIONE

In conclusione:

$$\mathbb{K}[[x]]^* = \{ S \in \mathbb{K}[[x]] \mid \omega(S) = 0 \}$$

Vediamo ora la potenza di composizione. Notiamo che la serie seguente:

$$\mathbb{I} \overset{def}{=} \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i \quad , \quad a_i = 0 \ \forall i \neq 1, \ a_1 = 1$$

è tale che:

$$\forall S \in \mathbb{K}[[x]] : \quad S \circ \mathbb{I} = \mathbb{I} \circ S = S$$

Infatti $\mathbb{I}(x) = x$ è l'elemento neutro per la composizione.

Vogliamo adesso capire quando, data $S \in \mathbb{K}[[x]]$, esiste $T \in \mathbb{K}[[x]]$ tale che:

$$S \circ T = \mathbb{I}(x)$$

E T esiste, ovviamente:

- $\omega(T) \geq 1$, perché altrimenti non si può operare la sostituzione della serie formale;
- $\omega(T) \neq 1$, perché altrimenti non comparirebbero termini di grado 1.

Dunque $\omega(T) = 1$ è una condizione necessaria.

PROPOSIZIONE

La serie $S = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i x^i$ ha una serie reciproca a destra T, tale che:

- $\omega(T) = 1$;
- $S \circ T = \mathbb{I}(x)$,

se e solo se $\omega(S) = 1$.

In tale caso, si ha:

$$T \circ S = \mathbb{I}(x) = x$$

Dim.

Supponiamo che T esista. Allora:

$$S \circ T = a_0 + a_1 b_1 x + \dots = x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_0 = 0 \ , \ a_1 b_1 = 1 \Rightarrow a_1 \neq 0,$$

da cui $\omega(S) = 1$.

Ricordiamo che $w(S) = 1$, cioè $a_0 \neq 0$ e $a_1 \neq 0$, allora possiamo calcolare ricorsivamente i coefficienti di T:

- $b_0 \overset{\text{def}}{\neq} 0$;
- $a_1 b_1 = 1 \Rightarrow b_1 \overset{\text{def}}{=} a_1^{-1}$;
- $a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \Rightarrow b_2 \overset{\text{def}}{=} -a_1^{-1}(a_2 b_1)$;
- $b_n \overset{\text{def}}{=} -a_1^{-1}[a_n b_1 + \dots + a_2 b_{n-1}]$.

La prima parte del Teorema è dunque dimostrata.

In questo caso, si ha che:

$$\exists\, S_1 \in \mathbb{K}[[x]] \;:\; T \circ S_1 = \mathbb{I}(x)$$

Allora:

$$S_1 = \mathbb{I} \circ S_1 = (S \circ T) \circ S_1 = S \circ (T \circ S_1) = S \circ \mathbb{I} = S,$$

da cui:

$$S_1 = S \quad , \quad T \circ S = \mathbb{I}(x), \text{ c.v.d.}$$

DERIVATA DI UNA SERIE FORMALE

Sia:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Si definisce SERIE DERIVATA:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

Le derivate di ordine maggiore sono definite induttivamente.

Ad esempio:

$$S''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Notiamo che:

$$S'(0) = a_1$$

e in generale:

$$S^{(n)}(0) = n! \, a_n$$

SERIE CONVERGENTI IN $\mathbb{C}[[x]]$:
RAGGIO DI CONVERGENZA DI UNA SERIE

Sia:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$$

Introduciamo una variabile $r \geq 0$ $(r \in \mathbb{R})$, e consideriamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$$

Essa è detta SERIE ASSOCIATA di S. È ben definita la somma di questa serie, appartenente a $[0, +\infty]$.

Si consideri l'insieme:

$$D \overset{\text{def}}{=} \left\{ r \in \mathbb{R} \mid \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n < +\infty \right\} \neq \emptyset$$

$(0 \in D)$ è un intervallo del tipo $[0, \rho[$ o $[0, \rho]$ (eventualmente aperto $\rho = 0$, per cui si ha $\{0\}$). In ogni caso:

$$\rho = \sup D$$

è detto RAGGIO DI CONVERGENZA di S. Si ha sempre:

$$0 \leq \rho \leq +\infty$$

Si definisce poi DISCO DI CONVERGENZA:

$$B(0, \rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \}$$

$(B(0, 0) = \emptyset)$.

Una serie si dice CONVERGENTE se $\rho > 0$.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Per ogni $r < \rho$, la serie $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ converge totalmente per $|z| \leq r$. In particolare, la serie converge assolutamente per $|z| < \rho$. Infine la serie diverge per $|z| > \rho$ (nulla si può dire nel caso in cui $|z| = \rho$). Infine, $S(z)$ è una funzione continua su $\{|z| < \rho\}$

LEMMA (FORMULA DI HADAMARD)

Vale la formula:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Définissons $V_n \overset{\text{def}}{=} |a_n| r^n$. Si $r \geq 0$:

$$\limsup_{n\to+\infty} (V_n)^{\frac{1}{n}} = r \limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}},$$

de sorte que :

- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n$ converge pour $r < \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$;
- la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$ diverge pour $r > \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$.

Posons :

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{c.v.d.}$$

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n\to+\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

PROPOSITION

Soient :

$$A(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

$\in \mathbb{C}[[x]]$. Si $\rho \neq 0$ tels que $\rho(A), \rho(B) \geq \rho$. Posons :

- $S(x) \overset{\text{def}}{=} A(x) + B(x)$ la somme de convergence $\rho(S) \geq \rho$;
- $P(x) \overset{\text{def}}{=} A(x) \cdot B(x)$ le produit de convergence $\rho(P) \geq \rho$;
- Pour $|z| < \rho$, notons $S(z) = A(z) + B(z)$ et $P(z) = A(z) \cdot B(z)$.

Soient :

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n \quad , \quad P(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} d_n x^n$$

Soient $n \in \mathbb{N}$: $\alpha_n \overset{\text{def}}{=} |a_n| + |b_n|$, $S_n \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{n} |a_k| |b_{n-k}|$

Posons :

$\forall n \in \mathbb{N}$: $|c_n| \leq \alpha_n$, $|d_n| \leq S_n$. Donc alors, pour $r < \rho$, si on a :

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| r^n\right) < +\infty$;
- $\sum_{n=0}^{+\infty} S_n r^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} |b_n| r^n\right) < +\infty$;

convergence car $\rho(S), \rho(P) \geq \rho$.

A questo punto, l'ultima affermazione è una diretta conseguenza del fatto che le serie $S(x)$ e $P(x)$ sono assolutamente convergenti per $|z| < \rho$, c.v.d.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Sia $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie avente raggio di convergenza $\rho \neq 0$, tale che esista $T \in \mathbb{C}[[x]]$ tale che $S \cdot T = T \cdot S = 1$, allora:

$$\rho(T) \neq 0$$

Consideriamo ad esempio:

$$A(x) = 1 - x$$

Si ha $\rho(A) = +\infty$, da cui l'inverso di $(1-x)$ ha raggio di convergenza $\rho(B) \neq 0$. In fatti l'inverso di A è:

$$B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n,$$

che ha raggio di convergenza $\rho(B) = 1$.

PROPOSIZIONE

Sia $S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ una serie formale e sia:

$$S' = \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

la serie derivata. Allora, S e S' hanno lo stesso raggio di convergenza. In fatti, se tale numero reale è diverso da 0, allora, dato:

$$B(0,\rho) = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < \rho \},$$

si ha che S è derivabile in $B(0,\rho)$.

Dim.

Siano ρ e ρ' i due raggi di convergenza, e sia $\alpha_n \overset{\text{def}}{=} |a_n|$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Allora:

- se $r < \rho'$, si ha:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n r^n = r \sum_{n=0}^{+\infty} n\, \alpha_n r^{n-1} < +\infty,$$

da cui $r < \rho$;

- se $r < \rho$, esiste r' tale che $r < r' < \rho$, dato che:

$$n\, \alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'} \alpha_n r'^n \, n \left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$$

Dato che $r < \rho$ - scelto $\lambda > 0$ tale che $a_{3k-3} \leq \lambda^{3k-3}$ $\forall k \in \mathbb{N}$ - da cui:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k} r^{3k} \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^{3k} r^{3k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\lambda^3 r^3\right)^k < +\infty,$$

poiché, detto $\alpha = \lambda^3 r^3$, $\alpha < 1$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha} < +\infty$.

Scelto $\rho = \rho'$.

Sia ora $|z| < r < \rho$, e sia $0 < |h| \leq r - |z|$. Allora si ha:

$$\frac{S(z+h) - S(z)}{h} - S'(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} a_{3k} \frac{(z+h)^{3k} - z^{3k}}{h} - 3kz^{3k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty} a_{3k} \varphi_{3k}(z,h),$$

dove:

$$\varphi_{3k}(z,h) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{(z+h)^{3k} - z^{3k}}{h} - 3kz^{3k-1} = \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - 3khz^{3k-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1} + (z+h)^{3k-1} - z^{3k-1} - 3khz^{3k-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k-1} - z^{3k-1} - 3khz^{3k-1}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k-1} - z^{3k-1} - (3k-1)hz^{3k-2} - hz^{3k-2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \varphi_{3k-1}(z,h) - z^{3k-2}.$$

Dato che $r < \rho$, sappiamo che $\sum_{k=0}^{+\infty} a_{3k} r^{3k} < +\infty$, da cui $\exists M > 0$ tale che $|a_{3k} r^{3k}| \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N}$.

Sappiamo per ogni $\varepsilon > 0$:

- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\sum_{k=n_0}^{+\infty} |a_{3k}| r^{3k} < \frac{\varepsilon}{3}$;
- $\exists \eta > 0$ t.c. $\forall |h| < \eta$ $\left|\sum_{k=0}^{n_0} a_{3k} \varphi_{3k}(z,h)\right| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Sappiamo anche che:

$$\varphi_{3k}(z,h) = \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \varphi_{3k-1}(z,h) - z^{3k-2} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k-2} - z^{3k-2} - (3k-2)hz^{3k-3} - hz^{3k-3}\right\} + \varphi_{3k-2}(z,h) - z^{3k-3} =$$

$$= \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k} - z^{3k} - (z+h)^{3k-1} + z^{3k-1}\right\} + \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k-2} - z^{3k-2} - (3k-2)hz^{3k-3} - hz^{3k-3}\right\} + \frac{1}{h}\left\{(z+h)^{3k-3} - z^{3k-3} - (3k-3)hz^{3k-4} - hz^{3k-4}\right\} + \varphi_{3k-3}(z,h)

ESPONENZIALE E LOGARITMO COMPLESSO

La seguente serie formale:

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \in \mathbb{C}[[z]]$$

ha raggio di convergenza $\rho = +\infty$: ciò però avviene facilmente poiché usando il criterio del rapporto, per $z \in \mathbb{C}$, otteniamo subito:

$$\lim_{n} \left| \frac{1}{(n+1)!} z^{n+1} \cdot n! \frac{1}{z^n} \right| = \lim_{n} \frac{|z|}{n+1} = 0 < 1$$

Definizione:

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n$$

Da cui:

$$\frac{d}{dz} e^z = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!} n z^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = e^z$$

Inoltre:

$$e^z e^w = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} w^n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!(n-p)!} z^p w^{n-p} \right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (z+w)^n = e^{z+w}$$

Come conseguenze:

- $e^0 = 1$;
- $e^z \neq 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$;
- $\forall x \in \mathbb{R}: \; e^x = (e^{x/2})^2 > 0$;
- $(e^z)^{-1} = e^{-z}$.

Se ora $z = x + iy$, si ha:

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy}$$

In particolare:

- e^x è $E(x)$, ove $E: \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è il ben noto esponenziale reale;
- $(e^{iy})^{-1} = e^{-iy} = \overline{e^{iy}}$, da cui $|e^{iy}| = 1$

In particolare, se sappiamo già che:

- $\sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$;
- $\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$,

allora:

$$e^{iy} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(iy)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} =$$

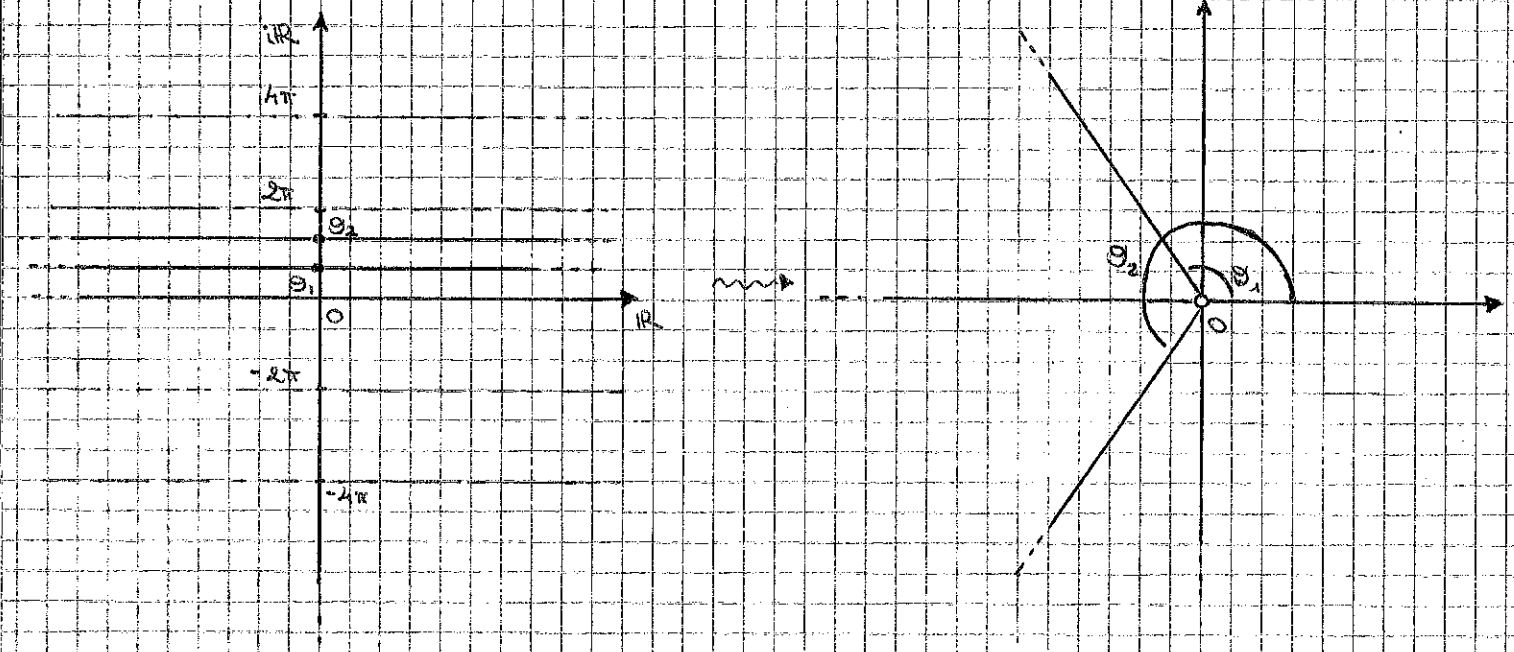
$$= \cos y + i \sin y$$

Sia pertanto ω, abbiamo definito una funzione:

$$e^z : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$$

suriettiva e periodica di periodo $2\pi i$. Essa è localmente invertibile perché la derivata (essa stessa) non si annulla mai.

La funzione manda rette orizzontali del piano in rette circolari:



Osserviamo ora che $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ è un rivestimento. Si ha:

$$\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^+ \times S^1,$$

e:

$$e^z : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \times S^1 \cong \mathbb{C}^*$$
$$(x, y) \to e^x e^{iy} \cong e^{x+iy}$$

Essendo $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^2$ semplicemente connesso, questo è il rivestimento universale.

Le funzioni logaritmi sono i LOGARITMI COMPLESSI, che sono ben definiti fin quando riguarda la parte reale. Se:

$$\omega = e^{a+ib},$$

allora:

$$\omega = e^{a+i(b+2k\pi)}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Dunque è Ro:

$$a = \log |w|,$$

e b è un argomento di w, definito (mod 2π).

È ricordiamo Ro diverge grado infinito.

Consideriamo infatti $\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$.

Dato che $\mathbb{C}^* \cong \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, si Ro facilmente $\pi_1(\mathbb{C}^*) = \mathbb{Z}$.

Vediamo ora che per ogni $H < \mathbb{Z}$ ($H = d\mathbb{Z}$) si Ro un rivestimento $u_d : E \to X$ tale che $u_{d*}[\pi_1(E)] = H$. Consideriamo infatti:

$$u_d : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^*$$
$$z \to z^d$$

di Ro ovvero:

$$u_{d*}[\pi_1(\mathbb{C}^*)] = d\mathbb{Z},$$

dato che:

$$u_{d*}[1] = [d]$$

Le radici d-esime di un numero complesso, in particolare, formano un d-agono regolare.

DETERMINAZIONI DEL LOGARITMO

Sia $D \subseteq \mathbb{C}^*$ un aperto connesso. Una funzione continua $f: D \to \mathbb{C}$ si dice DETERMINAZIONE DEL LOGARITMO se:

$$\forall\, t \in D: \quad e^{f(t)} = t$$

In altre parole, f è una determinazione del logaritmo se è inversa locale dell'esponenziale in $D \subseteq \mathbb{C}^*$. Per ogni $t \in D$, $f(t)$ è uno dei possibili valori di $\log t$.

PROPOSIZIONE

Sia $f(t)$ una determinazione del logaritmo su D. Allora:

- $\forall\, k \in \mathbb{Z}$: $f(t) + 2k\pi i$ è una determinazione del log t;
- ogni determinazione di $\log$ su D è della forma $f(t) + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

Dimostrazione:

Che ogni funzione della forma $f(t) + 2k\pi i$ sia una determinazione, è ovvio.

Viceversa, se $g(t)$ è una determinazione su D, allora la funzione:

$$h(t) = \frac{f(t) - g(t)}{2\pi i}$$

è a valori interi. Dato che D è connesso (dunque $h(D)$ è connesso), $h(t)$ deve assumere necessariamente un valore $k \in \mathbb{Z}$. Di qui la tesi, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $f(t)$ una determinazione del logaritmo su $D \subseteq \mathbb{C}^*$ aperto connesso, allora:

$$f'(t) = \frac{1}{t}$$

Dimostrazione:

Consideriamo il limite del rapporto incrementale

$$f'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{e^{f(t+h)} - e^{f(t)}}$$

Definendo:

$$z_h = f(t+h), \quad z = f(t),$$

si ha:

$$f'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{e^{f(t+h)} - e^{f(t)}} = \lim_{z_h \to z} \frac{z_h - z}{e^{z_h} - e^{z}},$$

da cui $f'(t)$ è l'inverso della derivata dell'esponenziale nel punto $z = f(t)$. Allora:

$$f'(t) = \frac{1}{e^z} = e^{-z} = \left[e^{f(t)}\right]^{-1} = \frac{1}{t}, \text{ c.v.d.}$$

Con questa precisazione possiamo determinare lo sviluppo in serie di potenze di $\log t$. Innanzitutto, ponendo $t = 1+u$:

$$\frac{1}{1+u} = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m u^m,$$

il cui raggio di convergenza è $\rho = 1$. Per $|u| < 1$, allora, integrando termine a termine si ha:

$$\log(1+u) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{u^{m+1}}{(m+1)}$$

Allora la funzione:

$$T(u) = \sum_{m=0}^{+\infty} (-1)^m \frac{u^{m+1}}{m+1}$$

è la DETERMINAZIONE PRINCIPALE DEL LOGARITMO, ossia la determinazione che vale 0 in 1 (ossia per $u = 0$).

FUNZIONI ANALITICHE

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, e sia $f(z)$ una funzione definita in un intorno di z_0.

La funzione $f(z)$ si dice SVILUPPABILE IN SERIE DI POTENZE in z_0 se esiste:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{K}[[x]]$$

con raggio di convergenza $\rho(S) > 0$, tale che:

$$\exists \eta > 0 \quad \exists' \quad f(z) = S(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \ |z - z_0| < \eta$$

Una funzione $f(z)$ definita in un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$ è ANALITICA in D se ogni è sviluppabile in serie di Taylor in ogni $z_0 \in D$.

OSSERVAZIONE

È evidente notare che ogni funzione analitica in $D \subseteq \mathbb{C}$ è infinitamente derivabile in D, e tutte le sue derivate sono analitiche in D.

OSSERVAZIONE

L'insieme $\mathcal{O}(D)$ delle funzioni analitiche su D forma un'algebra.

PROPOSIZIONE

Sia $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{C}[[x]]$ una serie di potenze con raggio di convergenza $\rho > 0$. Allora, se $|x_0| < \rho$, la SERIE DI TAYLOR:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0) x^n$$

ha raggio di convergenza $\rho_{x_0} \geq \rho - |x_0|$, e inoltre:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} S^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n,$$

per $|x - x_0| < \rho - |x_0|$.

Come conseguenza, se $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ è la somma della serie per $|x| < \rho$, $S(x)$ è una funzione analitica nel suo disco di convergenza.

Sia

Poniamo:

- $r_0 = |x_0|$;
- $a_n = |a_n| \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

Allora:

$$S^{(p)}(x_0) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q$$

$$|S^{(p)}(x_0)| \leq \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} r_0^q$$

Se r è tale che $r_0 \leq r < \rho$, allora:

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)| (r - r_0)^p \leq \sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} a_{p+q} (r_0)^q (r - r_0)^p =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (r - r_0)^p r_0^{n-p} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \qquad r < \rho$$

Allora, per l'arbitrarietà di r, la serie di Taylor ha raggio di convergenza $\rho_{x_0} \geq \rho - r_0 = \rho - |x_0|$.

Sia ora $|x - x_0| < \rho - |x_0|$. Per l'assoluta convergenza della serie, si può usare la proprietà associativa in modi differenti. Si ha dunque:

- $$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} (x_0)^q (x - x_0)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{n!}{p!\,(n-p)!} (x - x_0)^p x_0^{n-p} \right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = S(x);$$

- $$\sum_{p,q} \frac{(p+q)!}{p!\,q!} (x_0)^q (x - x_0)^p = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^p}{p!} \left[\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(p+q)!}{q!} a_{p+q} x_0^q \right] =$$

$$= \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(x - x_0)^p}{p!} S^{(p)}(x_0).$$

La conclusione della proposizione è ora una banalità, avendo mostrando esplicitamente una serie di potenze adatta, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Il raggio di convergenza delle serie di Taylor notevoli coincide strettamente maggiore di $\rho \cdot |x_0|$.

OSSERVAZIONE

Sia $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \in \mathbb{R}[[x]]$ una serie convergente. Allora, per quanto visto, possiamo definire:

$$\forall\, 0 < c < \rho : \quad A(c) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| c^n < +\infty$$

Se ora abbiamo:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{p!} |S^{(p)}(x_0)| (c - x_0)^p = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| c^n = A(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{p!} S^{(p)}(x_0) \right| \leq \frac{A(c)}{(c - x_0)^p} \overset{\text{def}}{=} M \cdot t^p,$$

con:

- $M = A(c)$;
- $t = (c - x_0)^{-1}$,

per ogni $p \in \mathbb{N}$ e ogni x_0 tale che $|x_0| \leq t < c < \rho$.

Allora:

$$|S^{(p)}(x_0)| \leq p! \cdot M \cdot t^p$$

Si può dimostrare che una funzione reale, infinitamente derivabile in $D \subseteq \mathbb{R}$ aperto, è analitica in D se e solo se per ogni $x_0 \in D$ esiste V intorno di x_0 tale che:

$$\exists\,]-r, +r[=]0, +\infty[\;\exists' \; \forall\, x_0 \in V, \; \forall\, p \in \mathbb{N} :$$

$$\left| \frac{1}{p!} S^{(p)}(x_0) \right| \leq M \cdot t^p$$

PROLUNGAMENTO ANALITICO

TEOREMA

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso, e sia $z_0 \in D$. Sia f una funzione analitica in D. Allora le seguenti affermazioni sono equivalenti:

- $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall\, n \geq 0$;
- $f \equiv 0$ in un intorno di z_0;
- $f \equiv 0$ in D.

Dimo.

Supponiamo che sia $f^{(n)}(z_0) = 0 \quad \forall\, n \geq 0$ ($f^{(0)} \equiv f$ per convenzione). La serie di Taylor di f centrata in z_0 è la serie nulla. Essendo f analitica, $f \equiv 0$ in un intorno di z_0.

Supponiamo ora che $f \equiv 0$ in un intorno di z_0. Definiamo:

$$D' = \{ z \in D \mid f \equiv 0 \text{ in un intorno di } z \}$$

Tale insieme è:

- non vuoto: $z_0 \in D'$;
- aperto: discende immediatamente dalla definizione;
- chiuso: per la continuità di $f^{(n)}$ (per ogni $n \in \mathbb{N}$), si ha: $\forall\, z \in D' : f^{(n)}(z) = 0$, da cui, per l'implicazione precedente, $z \in D'$.

Essendo D connesso, si ha dunque $D' = D$.

Infine, se $f \equiv 0$ in D, la prima affermazione ne è una banale conseguenza, c.v.d.

COROLLARIO

Se f e g sono funzioni analitiche in $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, ed esse coincidono in un intorno di $z_0 \in D$, allora $f \equiv g$ in D.

Dimo.

Evidente conseguenza del teorema dimostrato, considerando

$h \overset{\text{def}}{=} g \cdot f$, nulla in un intorno di $z_0 \in \Delta$, c.v.d.

COROLLARIO

Sia $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ un aperto connesso. Allora $\mathcal{O}(\Delta)$ è un dominio di integrità.

Dim.

Sia $fg \equiv 0$ in Δ. Dato che l'anello delle serie formali è un dominio di integrità, allora o f o g deve annullarsi in un intorno di $z_0 \in \Delta$, da cui $f \equiv 0$ in Δ o $g \equiv 0$ in Δ per il teorema dimostrato, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Gli elementi invertibili in $\mathcal{O}(\Delta)$ sono tutte e sole le funzioni analitiche mai nulle in Δ.

OSSERVAZIONE

Siano Δ e Δ' aperti connessi in $\mathbb{C}$, con $\Delta \subseteq \Delta'$. Se $f \in \mathcal{O}(\Delta)$, $g \in \mathcal{O}(\Delta')$, e $g|_{\Delta} = f$, allora g è unica: se dunque esiste un prolungamento analitico, esso è unico.

ZERI DI FUNZIONI ANALITICHE

Sia $f(x)$ una funzione analitica in un intorno di x_0, e sia:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n, \quad |x - x_0| < \rho$$

Supponiamo che $f(x)$ non sia identicamente nulla in un intorno di x_0, e che $f(x_0) \neq 0$. dunque $a_0 \neq 0$.

Sia $k \in \mathbb{N}^+$ il minimo naturale per cui $a_k \neq 0$. Allora, in un intorno di x_0, si ha:

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x), \quad g(x_0) \neq 0,$$

$$g(x) \overset{\text{def}}{=} \sum_{n=k}^{+\infty} a_n (x - x_0)^{n-k}$$

L'intero $k > 0$ è detto MOLTEPLICITÀ ALGEBRICA di x_0:

- se $k = 1$, x_0 è uno ZERO SEMPLICE;
- se $k > 1$, x_0 è uno ZERO MULTIPLO.

Si ha:

- $f^{(n)}(x_0) \neq 0 \quad \forall n < k$;
- $f^{(k)}(x_0) \neq 0$.

Dato che $g(x)$ è continua

$$\exists \varepsilon > 0 \ : \ 0 \leq |x - x_0| < \varepsilon \ \Rightarrow \ g(x) \neq 0.$$

Allora, dato che, per $\delta \leq \varepsilon$ sufficientemente piccolo:

$$f(x) = (x - x_0)^k g(x),$$

si ha:

$$\forall \ 0 < |x - x_0| < \delta \ : \ f(x) \neq 0$$

Dunque esiste un intorno aperto in cui x_0 è l'unico zero di f. Abbiamo dimostrato la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Se f è una funzione analitica in $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso, e $f \not\equiv 0$ in D, allora gli zeri di f in D formano un insieme discreto.

FUNZIONI MEROMORFE

Siano $f, g \in \mathcal{O}(D)$, con $D \subseteq \mathbb{C}$ aperto connesso. Supponiamo che $g \not\equiv 0$ in D. Consideriamo allora:

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)},$$

definita in $D \setminus Z$, ove $Z = \{ z \in D \mid g(z) = 0 \}$.

In particolare:

$$h(z) \in \mathcal{O}(D \setminus Z)$$

Supponiamo che anche f non sia identicamente nulla in D. Sia $z_0 \in Z$. Allora:

- $f(z_0) = (z - z_0)^h f_1(z)$, $f_1(z_0) \neq 0$,
- $g(z_0) = (z - z_0)^k g_1(z)$, $g_1(z_0) \neq 0$.

In particolare, per quanto supposto, vale $h \geq 0$, $k > 0$.

Osserviamo che:

- f_1 e g_1 sono analitiche in un intorno di z_0, con $f_1(z_0) \neq 0$, $g_1(z_0) \neq 0$;
- $h_1(z) \overset{\text{def}}{=} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ è analitica in un intorno di z_0, con $h_1(z_0) \neq 0$;
- in un intorno di z_0:

$$\frac{f(z)}{g(z)} = (z - z_0)^{h-k} \frac{f_1(z_0)}{g_1(z_0)}$$

Vi sono allora due casi:

- $h \geq k$: in questo caso $(z - z_0)^{h-k} \frac{f_1(z)}{g_1(z)}$ è analitica in un intorno di z_0, e il prolungamento di $h(z)$ in z_0 coincide in tale intorno con tale funzione. In particolare $h(z_0) = 0$ se e solo se $h > k$;
- $h < k$: in tal caso $h(z)$ non è analitica in z_0. Il punto z_0 è allora detto POLO di $h(z)$ di ORDINE $(k - h)$. In particolare, se $f(z)$ è analitica e z_0 è uno zero di molteplicità $k > 0$, allora $\frac{1}{f(z)}$ ammette z_0 come polo di ordine $k > 0$.

Una funzione f si dice MEROMORFA se è analitica in $\Omega' = \Omega \setminus Y$, dove Y è un insieme di punti isolati, ciascuno dei quali è un Polo per f.

OSSERVAZIONE

Si ha banalmente $\mathcal{O}(\Omega) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$, ove Ω è connesso (aperto), e $\mathcal{M}(\Omega)$ indica l'insieme delle funzioni meromorfe su Ω.

OSSERVAZIONE

$\mathcal{M}(\Omega)$ è un CAMPO. Infatti, presa $f \in \mathcal{M}(\Omega)$ non identicamente nulla, allora esse ha una quantità discreta di zeri, e una quantità discreta di poli: resta a questi punti tolti infine che $\frac{1}{f} \in \mathcal{M}(\Omega)$ perché poli e zeri si "scambiano i ruoli", da cui ed funzione è comunque meromorfa.

Se indichiamo con $\mathrm{Frac}(A)$ il campo dei quozienti di un anello, allora:

$$\mathrm{Frac}(\mathcal{O}(\Omega)) \subseteq \mathcal{M}(\Omega)$$

ESERCIZIO

Dato un campo $\mathbb{K}$ sia $E = \mathbb{K}[[x]]$ l'insieme delle serie formali.

Dati $S, T \in E$, definiamo la seguente applicazione:

$$d : \mathbb{K}[[x]] \times \mathbb{K}[[x]] \to [0, +\infty[$$

$$d(S,T) = \begin{cases} 0 & , S = T \\ e^{-k} & , S \neq T,\ \omega(S-T) = k \end{cases}$$

(Ricordiamo che $\omega(P) = h$ significa che $a_h \neq 0$, $a_k = 0\ \forall k < h$)

Allora d è una distanza:

- l'esponenziale è strettamente positivo, da cui:
  $d(S,T) \geq 0$, $d(S,T) = 0 \Leftrightarrow S = T$;
- evidentemente $d(S,T) = d(T,S)$;
- la disuguaglianza triangolare sussiste in una forma più forte. Dati $A, B, C \in \mathbb{K}[[x]]$, siano $d(A,B) = e^{-h}$, $d(B,C) = e^{-k}$ allora:
  $\forall \ell < \min\{h,k\}: a_\ell = b_\ell = c_\ell \Rightarrow d(A,C) \leq \max\{e^{-h}, e^{-k}\}$

In questo caso lo spazio si dice ULTRAMETRICO.

Notiamo anche che:

$\forall S = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \bar{n} \in \mathbb{N}$ s.t. $e^{-\bar{n}} < \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists P = \sum_{k=0}^{\bar{n}} a_k x^k \in \mathbb{K}[x]$ s.t. $d(S,P) < \varepsilon$,

da cui si ha che $\overline{\mathbb{K}[x]} = \mathbb{K}[[x]]$, con questa distanza i polinomi, dunque, sono densi in $\mathbb{K}[[x]]$.

Con questa metrica, le funzioni:

$$+ : (S,T) \to S+T$$

$$\cdot : (S,T) \to S \cdot T$$

sono continue.

Infatti, se ad esempio dotiamo $\mathbb{K}[[x]] \times \mathbb{K}[[x]]$ della distanza:

$$\delta((A,B),(A_1,B_1)) \overset{\text{def}}{=} \max\{d(A,A_1), d(B,B_1)\},$$

si ha:

- $\delta((A,B),(A_1,B_1)) = e^{-t} \Rightarrow d(A,A_1) \leq e^{-t}$, $d(B,B_1) \leq e^{-t} \Rightarrow$
  $\Rightarrow d(A+B, A_1+B_1) \leq e^{-t}$;

- $\delta((A,B),(A_1,B_1)) \leq e^{-k} \Rightarrow d(A,A_1) \leq e^{-k}$, $d(B,B_1) \leq e^{-k} \Rightarrow$
$\Rightarrow d(AB, A_1B_1) \leq e^{-k}$,

dato che, se:

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad , \quad B = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k \quad ,$$

allora:

$$A+B = \sum_{k=0}^{+\infty} (a_k + b_k) x^k \quad , \quad A \cdot B = \sum_{p=0}^{+\infty} \left[\sum_{q=0}^{p} a_q b_{p-q} \right] x^p \quad ,$$

e le distanze impongono l'uguaglianza dei primi coefficienti. Notiamo anche che, se A e B sono come prima e distano, ad esempio, e^{-k}, allora:

$$d(A', B') = e^{-(k-1)} \quad ,$$

da cui la mappa:

$$\Phi : S \to S'$$

è continua, infatti nota:

$$A = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \Rightarrow A' = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) a_{k+1} x^k$$

Per concludere, dimostriamo che $(\mathbb{K}[[x]], d)$ è completo.

Sia dunque $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione di Cauchy. Allora:

$$\forall k \in \mathbb{N} \ \exists \ m_k \in \mathbb{N} \ : \ \forall p, q \geq m_k : d(S_p, S_q) \leq e^{-k}$$

Consideriamo la sottosuccessione $(S_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} \subseteq (S_m)_{m \in \mathbb{N}}$. Costruiamo la seguente serie formale:

$$L = \sum_{k=0}^{+\infty} v_k x^k \in \mathbb{K}[[x]]$$

ove:

- $\forall k \in \mathbb{N} : S_{m_k} \overset{\text{def}}{=} \sum_{h=0}^{+\infty} a_{k,h} x^h$;
- $\forall k \in \mathbb{N} : v_k = a_{k,k}$.

Allora, per costruzione, $(S_{m_k})_{k \in \mathbb{N}} \to L$, e dato che la successione è di Cauchy, $(S_m)_{m \in \mathbb{N}} \to L$, da cui $(\mathbb{K}[[x]], d)$ è completo.

FORME DIFFERENZIALI

Si dice ARCO DIFFERENZIABILE una mappa:

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^2,$$

tale che le funzioni marginali:

$$\alpha_x \overset{def}{=} \pi_x \circ \alpha \quad , \quad \alpha_y \overset{def}{=} \pi_y \circ \alpha$$

sono funzioni continue e differenziabili.

Si chiama PUNTO INIZIALE $\alpha(a)$; si chiama PUNTO FINALE $\alpha(b)$.

Se $D \subseteq \mathbb{R}^2$ è un aperto, e $\gamma : [a,b] \to D$ è un arco differenziabile, allora γ si dice "arco differenziabile in D".

Sia dunque $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto.

Una FORMA DIFFERENZIALE in D è un'espressione del tipo:

$$\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$

ove P e Q sono funzioni continue e reali o complesse, definite in D.

Siano ora $\gamma : [a,b] \to D$ un arco differenziabile in D, della forma $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, e ω una forma differenziabile in D. Allora possiamo definire l'INTEGRALE CURVILINEO:

$$\int_\gamma \omega \overset{def}{=} \int_a^b \left[P(x(t), y(t))\, x'(t) + Q(x(t), y(t))\, y'(t) \right] dt$$

OSSERVAZIONE

Consideriamo una funzione continua e differenziabile $\tau : [a,b] \to [a_1, b_1]$, con $\tau = \tau(u)$, tale che $\tau'(u) > 0$ in $[a,b]$, tale che cioè $\tau(a) = a_1$ e $\tau(b) = b_1$. Definiamo allora:

$$\gamma_1 : [a_1, b_1] \to D$$
$$\gamma_1 \overset{def}{\equiv} \gamma \circ \tau$$

Abbiamo in sostanza operato un cambio di parametri. Se consideriamo $\omega \sim \omega(t)\,dt$, ci ha, cambiando i parametri:

$$\omega \circ \gamma(t(u))\, t'(u)\, du$$

Si ha allora:

$$\int_\gamma \omega = \int_{a_1}^{b_1} \omega(\gamma(t))\, dt = \int_a^b \omega(\gamma(t(u)))\, t'(u)\, du = \int_{\gamma_1} \omega$$

Similmente, se $t'(u) < 0$ in $[a,b]$, allora:

$$\int_{\gamma_1} \omega = -\int_\gamma \omega$$

OSSERVAZIONE

Supponiamo ora che sia:

$$[a,b] = [a, t_1] \cup [t_1, t_2] \cup \dots \cup [t_n, b],$$

e che γ sia differenziabile in ciascuno di questi intervalli e continua in generale. Allora, definendo:

$$\gamma_i \overset{\text{def}}{=} \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \quad \forall\, i = 0, \dots, n$$

(con $t_0 \overset{\text{def}}{=} a$, $t_{n+1} \overset{\text{def}}{=} b$), si ha:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=0}^{n} \int_{\gamma_i} \omega$$

OSSERVAZIONE

Supponiamo che $F : D \to \mathbb{R}$ sia tale che:

$$dF = \omega$$

Allora, data un arco differenziabile γ, si ha:

$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)),$$

e in particolare l'integrale dipende solo dalle posizioni iniziale e finale, e non dal cammino scelto.

OSSERVAZIONE

Se $D \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto connesso, allora D è connesso per archi generici, e più in generale è connesso per archi C^1 a tratti.

Se $\omega = dF$, allora:

- F è una PRIMITIVA di ω;
- ω è una forma differenziale ESATTA.

Se $A \subseteq \mathbb{C}$ è connesso, e ω è una forma esatta con primitiva F, allora le primitive di ω sono tutte e sole quelle della forma:

$$G = F + c, \quad c \in \mathbb{C}$$

Vogliamo adesso capire quando una forma differenziale:

$$\omega(x,y) = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$$

ammette una primitiva.

OSSERVAZIONE

Se ω è esatta e C^1, cioè $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ sono funzioni di classe C^1, allora F, se esiste, è di classe C^2, e per il Teorema del differenziale secondo, la matrice Hessiana è simmetrica. Una condizione necessaria, nel caso di forma di classe C^1, è allora la seguente:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}$$

PROPOSIZIONE

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ connesso, e sia ω una forma differenziale definita in A, a valori in $\mathbb{R}^2$.

Allora ω è una forma esatta se e solo se per ogni cammino chiuso γ differenziabile a tratti in A, vale:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Dim.

Un'implicazione è ovvia. Se F è una primitiva di ω e γ è un cammino chiuso e differenziabile a tratti, allora, scelto un insieme finito di punti $t_0, \dots, t_n$ tale che γ sia di classe C^1 in ogni sotto-intervallo, si ha:

$$\int_\gamma \omega = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{\gamma_i} \omega = \sum_{i=1}^{n-1} F(\gamma_i(t_{i+1})) - F(\gamma_i(t_i)) =$$

$$= F(\gamma_{n-1}(t_{n-1+1})) - F(\gamma_1(t_1)) = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)) =$$

$$= 0,$$

perché $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Vediamo che la condizione è non solo necessaria, ma anche sufficiente. Sia $(x_0, y_0) \in D$: per ogni $(x, y) \in D$ esiste un arco γ differenziabile a tratti, con $\gamma(a) = (x_0, y_0)$, $\gamma(b) = (x, y)$.

Definiamo:

$$F(x, y) \overset{\text{def}}{:=} \int_\gamma \omega$$

La definizione è buona perché, per ipotesi, tale integrale non dipende dal cammino scelto. Infatti, se γ' è un altro arco, allora $\int_\gamma \omega = \int_{\gamma'} \omega$ perché $\int_{\gamma * \gamma'^{-1}} \omega = 0$ in quanto $\gamma * \gamma'^{-1}$ è un arco chiuso.

Vogliamo provare che F è differenziabile, con $dF = \omega$.

Consideriamo un piccolo incremento h, e consideriamo i punti (x, y) e $(x+h, y)$. Allora:

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} P(\xi, y)\, d\xi,$$

da cui:

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} P(\xi, y)\, d\xi = P(x, y),$$

usando il teorema della media integrale. Dunque:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right| = P(x, y)$$

Analogamente:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right| = Q(x, y),$$

da cui si ha la tesi, c.v.d.

Consideriamo in particolare i rettangoli contenuti in Δ con i lati paralleli agli assi. Sia γ il bordo di uno di questi. Allora, affinché ω sia esatta, deve essere:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

La condizione non è sufficiente: vedremo un controesempio più avanti.

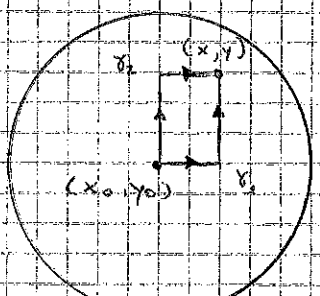
PROPOSIZIONE

Sia $\Delta \subseteq \mathbb{C}$ un disco aperto. Allora ω è esatta se e solo se per ogni rettangolo $R \subseteq \Delta$ con i lati paralleli agli assi, denotato con γ il bordo di R, si ha:

$$\int_\gamma \omega = 0$$

Dim

Sia (x_0, y_0) il centro di Δ, e sia $(x, y) \in \Delta$: esiste un rettangolo (eventualmente degenere) che ha (x_0, y_0) e (x, y) come vertici opposti:



Il bordo γ può essere diviso in due archi γ_1 e γ_2 con punto iniziale (x_0, y_0) e punto finale (x, y). Per ipotesi:

$$\int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$$

Definiamo allora:

$$F(x, y) = \int_{\gamma_1} \omega$$

Basta, come prima, ci dimostra che $dF = \omega$, c.v.d.

FORMULA DI GREEN - RIEMANN

Sia A un rettangolo con i lati paralleli agli assi, γ la sua frontiera; siano $P(x,y)$ e $Q(x,y)$ funzioni continue definite in un intorno D di A.

PROPOSIZIONE

Vale la FORMULA DI GREEN - RIEMANN:

$$\int_\gamma P\,dx + Q\,dy = \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$

Dim.

Si ha:

$$\int_\gamma P\,dx + \int_\gamma Q\,dy = \int_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy - \int_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy$$

Proviamo ad esempio che vale:

$$\int_\gamma Q\,dy = \int_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy$$

Si ha:

$$\int_A \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{b_1}^{b_2} dy \left(\int_{a_1}^{a_2} \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \right) =$$

$$= \int_{b_1}^{b_2} Q(a_2, y) - Q(a_1, y)\,dy = \int_\gamma Q\,dy$$

Analogamente:

$$\int_A \frac{\partial P}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{a_1}^{a_2} dx \left(\int_{b_1}^{b_2} \frac{\partial P}{\partial y}\,dy \right) =$$

$$= \int_{a_1}^{a_2} P(x, b_2) - P(x, b_1)\,dx = -\int_\gamma P\,dx \text{, c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Sia $\omega = P\,dx + Q\,dy$ una forma differenziale in un aperto connesso D, e supponiamo che esistano e siano continue $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Allora, se ω è esatta, si ha:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

La condizione è sufficiente se D, ad esempio, è un disco aperto.

FORME DIFFERENZIALI CHIUSE

Una forma differenziale $\omega = P\,dx + Q\,dy$ (con P, Q continue) in un aperto A è CHIUSA se ogni punto $(x_0, y_0) \in A$ possiede un intorno aperto in cui ω ha una primitiva. Senza perdere di generalità, l'intorno può essere un disco aperto centrato in (x_0, y_0).

Segue immediatamente la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Condizione necessaria e sufficiente affinché una forma differenziale ω sia chiusa è che valga $\int_\gamma \omega = 0$ su ogni arco chiuso γ bordo di un rettangolo interamente contenuto nell'aperto in cui ω è definita con i lati paralleli agli assi. Nel caso in cui $\frac{\partial P}{\partial y}$ e $\frac{\partial Q}{\partial x}$ sono continue, allora è necessario e sufficiente che sia

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

OSSERVAZIONE

Non tutte le forme chiuse sono esatte. Consideriamo:

$$\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$$

$$\omega = \frac{x}{x^2+y^2}\,dx - \frac{x}{x^2+y^2}\,dy$$

Poiché:

- $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$;
- $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{x^2+y^2}\right) = -\frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$.

Allora ω è chiusa. Tuttavia, se γ è la circonferenza unitaria percorsa in senso antiorario:

$$\int_\gamma \omega = \int_0^{2\pi} -\sin^2\theta\,d\theta + \cos^2\theta\,d\theta = \int_0^{2\pi} -d\theta = -2\pi \neq 0,$$

da cui ω non è esatta.

PRIMITIVA DI ω LUNGO UN CAMMINO

Sia ω una forma chiusa in A.

Una PRIMITIVA DI ω LUNGO $\gamma : [a,b] \to A$ è una funzione continua che soddisfa la seguente condizione:

$\forall\, t_0 \in [a,b]\ \exists\, U \in \mathcal{I}(t_0)\ \left(U = \left] t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon \right[\cap [a,b] \right)$ t.c.

$\forall\, t \in [a,b] : |t - t_0| < \varepsilon \Rightarrow f(t) - F(\gamma(t))$,

con F primitiva locale di ω.

PROPOSIZIONE

Sia ω chiusa in A, e γ un cammino continuo in A. Allora esiste $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ primitiva di ω lungo γ: essa è unica a meno di una costante.

Dim:

Se f_1 e f_2 sono due primitive, allora $f_1(t) - f_2(t) = F_1(\gamma(t)) - F_2(\gamma(t))$ in ogni intorno tra quelli scelti nella definizione. Allora, essendo F_1 e F_2 primitive locali di ω, la differenza è localmente costante, e dato che $[a,b]$ è connesso e la funzione è continua, essa è costante.

Resta da provare l'esistenza.

Per ipotesi, esiste un ricoprimento aperto di A $\mathcal{U} = (V_i)_{i \in I}$ tale che su ogni V_i ω ha una primitiva locale.

Usando il lemma di Lebesgue, possiamo suddividere $[a,b]$ in un insieme finito di sottointervalli di estremi:

$$a = t_0 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_n = b,$$

in modo che:

$\forall\, i = 0 \dots n-1\ \exists\, j \in I$ t.c. $\gamma([t_i, t_{i+1}]) \subseteq V_j$

Sia F_0 una primitiva locale di ω su V_0. Allora:

$\forall\, t \in [a, t_1] : f(t) \overset{\text{def}}{=} F_0(\gamma(t))$

Sia ora F_1 una primitiva locale di ω su V_1. Allora, a meno di una costante, possiamo imporre $F_0(\gamma(t_1)) = F_1(\gamma(t_1))$. Definiamo allora:

$\forall\, t \in [t_1, t_2] : f(t) \overset{\text{def}}{=} F_1(\gamma(t))$

Si può iterare il procedimento, e dunque ottenere una primitiva di ω lungo γ, tra z e w.

PROPOSIZIONE

Siano γ e γ_1 due cammini omotopi, con un'omotopia:

$$G : [a,b] \times [0,1] \to \Delta$$

Siano:

- f_1 una primitiva di ω lungo γ;
- f_2 una primitiva di ω lungo γ_1,

tali che $f_1(a) = f_2(a)$. Allora $f_1(b) = f_2(b)$.

Dim.:

OSSERVAZIONE

Con tale ipotesi, si può definire $\int_\gamma \omega$, con ω forma chiusa, e γ cammino continuo, ponendo:

$$\int_\gamma \omega = f(b) - f(a),$$

con f primitiva di ω lungo γ.

Tale integrale:

- non dipende da f;
- dipende solo dalla classe di omotopia di γ.

Costruiamo una primitiva di ω lungo l'omotopia G, cioè una funzione continua:

$$F : [a,b] \times [0,1] \to \mathbb{C}$$

tale che:

$$F(t,s) = F(G(t,s)),$$

ove F è una primitiva locale di ω.

Innanzitutto, Δ è ricoperto da un ricoprimento aperto, in ogni aperto del quale ω è integrabile.

Usando il lemma del numero di Lebesgue, poniamo la seguente suddivisione:

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_n < t_{n+1} = b$$
$$0 = s_0 < s_1 < \dots < s_m < s_{m+1} = 1,$$

Tale che
$\forall i = 0, \dots, n, \forall j = 0 \dots m$: $G([t_i, t_{i+1}] \times [u_j, u_{j+1}]) \subseteq U_{ij}$,
con U_{ij} aperto del ricoprimento di Ω considerato.
Si ha ad:

$$G(t_{i+1}, u_j) \in U_{ij} \cap U_{i+1,j},$$

da cui:

$$U_{ij} \cap U_{i+1,j} \neq \emptyset$$

Poiché l'intersezione è connessa, fissato j e facendo variare i, possiamo (a meno di somme per una costante, in pratica $F_{ij} = F_{i+1,j}$ in $U_{ij} \cap U_{i+1,j}$.
Per quanto detto, possiamo definire f_j primitiva di ω lungo σ_j ponendo:

$$[t_i, t_{i+1}] \times [u_j, u_{j+1}]$$

Consideriamo ora f_j e f_{j+1}, $\forall j = 0 \dots m-1$. La funzione:

$$h_j \overset{\text{def}}{=} f_j - f_{j+1}$$

è una funzione continua nell'intersezione delle strisce $[a,b] \times [u_j, u_{j+1}]$ e $[a,b] \times [u_{j+1}, u_{j+2}]$, ed è costante.
Essendo l'intersezione connessa, h_j è costante, e a meno di sommare una costante a f_{j+1}, si può imporre $h_j = 0$.
Allora n è indefinito, e $f(t,u)$ è una primitiva di ω lungo G, tale che:

- $f(t,0)$ è una primitiva di ω lungo γ;
- $f(0,s)$ è una primitiva di ω lungo γ_1.

La primitiva è unica, una volta che si fissa $c = f(0,0) = f(0,1)$. La primitiva di ω lungo $G(1,s)$ è costante, perché G è omotopia e gli estremi fissati, da cui:

$$\int_{G(1,s)} \omega = f_2(b) - f_1(b) = 0,$$

da cui $f_2(b) = f_1(b)$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Dunque $\int_\gamma \omega$ dipende soltanto dalla classe di omotopia di γ.

Se dunque D è semplicemente connesso, ogni forma chiusa è esatta, perché $\int_\gamma \omega = 0$ per ogni cammino chiuso in D.

OSSERVAZIONE

Sia $D = \mathbb{C}^*$, e sia γ la circonferenza di centro 0 e raggio 1, percorsa nel senso antiorario. Si ha allora:

$$\int_\gamma \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} i \, dt = 2\pi i$$

Infatti, considerando $\mathbb{C}$ come $\mathbb{R}^2$:

$$z = e^{it}, \quad dz = ie^{it}$$

$$\frac{dz}{z} = i,$$

si ottiene la tesi.

INDICE DI CAUCHY

Sia γ un cammino chiuso in $\mathbb{C}$:

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$$

Sia $z \notin \mathrm{Im}(\gamma)$. Definiamo allora l'INDICE DI CAUCHY di γ rispetto a z:

$$I(\gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z}$$

Per la proposizione dimostrata precedentemente:

- la applicazione $\gamma \to I(\gamma, a)$ passa al quoziente per omotopia;
- $I(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$. Infatti, se γ è la circonferenza di centro a e raggio 1, percorsa in senso antiorario:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} i\, dt = \frac{2\pi i}{2\pi i} = 1$$

Consideriamo allora:

$$\Phi : \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\}) \to \mathbb{Z}$$
$$[\gamma] \to I(\gamma, a)$$

Essa è un omomorfismo di gruppi. Infatti:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1 * \gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta - a} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta - a},$$

da cui:

$$\Phi([\gamma_1][\gamma_2]) + \Phi([\gamma_1 * \gamma_2]) = \Phi([\gamma_1]) + \Phi([\gamma_2])$$

Dunque Φ è un omomorfismo da $\mathbb{Z} = \pi_1(\mathbb{C} \setminus \{a\})$ in $\mathbb{Z}$ stesso: da qui si deduce facilmente anche l'iniettività. Se infatti $H < \mathbb{Z}$ è il nucleo di Φ, non può essere

$$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z},$$

mentre deve essere $\mathbb{Z}/\ker\Phi \cong \mathbb{Z}$ per il teorema di omomorfismo.

OSSERVAZIONE

Per ogni $m \in \mathbb{N}$, l'applicazione:

$$\begin{aligned} p: \mathbb{C}^* &\to \mathbb{C}^* \\ z &\to z^m \end{aligned}$$

induce un'applicazione indotta:

$$p_*: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},$$

che induce una proiezione:

$$p_{**}: \mathbb{Z} \to m\mathbb{Z}$$

Vediamo ora alcune proprietà degli indici di Cauchy.

Innanzitutto, cammini omotopi in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$ hanno lo stesso indice $I(\gamma, a)$: ciò discende da quanto già visto.

Fissato un cammino chiuso γ, $I(\gamma, a)$ è costante sulle componenti connesse di $\mathbb{C} \setminus \gamma(I)$.

Se in particolare $\gamma(I) \subseteq A \subseteq \mathbb{C} \setminus \{a\}$, con A semplicemente connesso, allora $I(\gamma, a) = 0$.

Considerando in particolare il cammino che percorre n volte la circonferenza in $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, allora:

- se a è interno alla circonferenza, $I(\gamma, a) = 1$;
- se a è esterno alla circonferenza, $I(\gamma, a) = 0$.

PROPOSIZIONE

Sia $f: B(0, r) \to \mathbb{R}^2$ una funzione continua, e sia $\gamma \overset{\text{def}}{=} f|_{\partial B}$. Se $a \notin \operatorname{Im}(f|_{\partial B})$ e $I(\gamma, a) \neq 0$, allora $a \in \operatorname{Im}(f)$.

Dim:

Supponiamo per assurdo che $a \notin \operatorname{Im} f$. Allora la restrizione di f a cerchi concentrici di centro 0 formano un omotopia tra γ e il cammino costante $f(0)$.

Dunque avremmo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a} = 0,$$

contro l'ipotesi. c.v.d.

PROPOSIZIONE

Siano γ_1 e γ_2 due cammini chiusi in $\mathbb{C}^*$. Allora il cammino $\gamma(t) \overset{\text{def}}{=} \gamma_1(t)\,\gamma_2(t)$ non passa per il punto 0, e si ha:

$$I(\gamma, 0) = I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0)$$

Dim.

Siano $f_1(t)$ e $f_2(t)$ due primitive di $\frac{d\gamma}{\gamma}$ lungo γ_1 e γ_2. Allora:

$$e^{f_1(t)} = \gamma_1(t), \quad e^{f_2(t)} = \gamma_2(t), \quad e^{f_1(t)+f_2(t)} = \gamma_1(t)\gamma_2(t)$$

In particolare, $f_1(t) + f_2(t)$ è una primitiva di $\frac{d\gamma}{\gamma}$ lungo $\gamma_1 * \gamma_2$. Allora ($f(t) \overset{\text{def}}{=} f_1(t) + f_2(t)$):

$$I(\gamma, 0) = \frac{f(1) - f(0)}{2\pi i} = \frac{f_1(1) - f_1(0)}{2\pi i} + \frac{f_2(1) - f_2(0)}{2\pi i} =$$

$$= I(\gamma_1, 0) + I(\gamma_2, 0), \text{ c.v.d.}$$

PROPOSIZIONE

Siano γ, γ_1 cammini chiusi in $\mathbb{C}$, $1 \neq 0$, tali che:

- γ non passa da 0;
- $|\gamma_1(t)| < |\gamma(t)|$

Allora la funzione

$$t \to \gamma(t) + \gamma_1(t)$$

non passa da 0, e:

$$I(\gamma + \gamma_1, 0) = I(\gamma, 0)$$

Dim.

Si ha:

$$\gamma(t) + \gamma_1(t) = \gamma(t)\left(1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right),$$

da cui, essendo $|\gamma(t)| > |\gamma_1(t)|$, vale:

$$\frac{|\gamma_1(t)|}{|\gamma(t)|} < 1 \Rightarrow 0 \notin \operatorname{Im}(\gamma + \gamma_1)$$

Inoltre, $\left(1 + \frac{\gamma_1(t)}{\gamma(t)}\right)$ è un cammino chiuso inverso in $B(1,1)$, che è semplicemente connesso. Per la proposizione precedente:

$$I\left(\gamma_1 + \frac{\gamma_2(t)}{\gamma(t)}, 0\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I(\gamma_1, \gamma_2, 0) = I(\gamma, 0) \quad \text{c.v.d.}$$

BORDO ORIENTATO DI UN COMPATTO

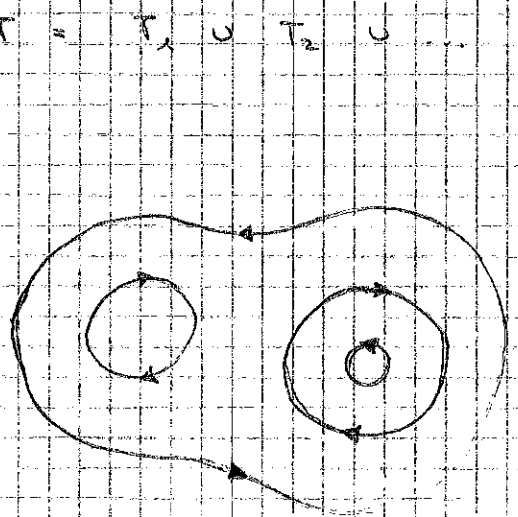
Sia $K \subseteq \mathbb{C}$ un compatto avente frontiera differenziabile a tratti; sia $\Gamma = \{\Gamma_i \mid i \in I\}$ un insieme finito di cammini chiusi differenziabili a tratti.

Γ è il BORDO ORIENTATO del compatto K se:

- ogni mappa:
$$\Gamma_i : t \to \Gamma_i(t)$$
è iniettiva (eccetto in al più il punto iniziale e quello finale), e inoltre:
$$\forall i \neq j : \operatorname{Im}\Gamma_i \cap \operatorname{Im}\Gamma_j = \emptyset$$
(cioè ciascuna parametrizzi una sola componente connessa di ∂K);
- se γ è un cammino differenziabile inglobato in una qualche Γ_i, allora $\gamma'(t) \neq 0$;
- quando t cresce da 0 a 1, intuitivamente Γ compatto rimane sempre "a sinistra".

Si ha inoltre:
$$\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \dots \cup \Gamma_m = \partial K$$

Ad esempio:



Sotto le giuste ipotesi, allora, se $\omega = P\,dx + Q\,dy$, vale ancora la formula di Green-Riemann:
$$\int_\Gamma P\,dx + Q\,dy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\,dy$$
In particolare, se ω è esatta:
$$\int_\Gamma \omega = 0$$

FUNZIONI OLOMORFE

Sia $A \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, e sia $f: A \to \mathbb{C}$. Sia $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$.

f si dice olomorfa in $z_0 \in A$ se esiste il seguente limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = c \in \mathbb{C}$$

f si dice olomorfa in A se essa è olomorfa in ogni $z_0 \in A$.

Equivalentemente, f è olomorfa in z_0 se vale lo sviluppo:

$$f(z_0 + u) = f(z_0) + cu + \alpha(u)|u|,$$

con:

$$\lim_{u \to 0} \alpha(u) = 0$$

Se poi $c = f'(z_0)$. Se $u = h + ik$, allora:

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + c(h + ik) + \alpha(h,k)\sqrt{h^2 + k^2},$$

con:

$$\lim_{(h,k) \to (0,0)} \alpha(h,k) = 0$$

Se dunque f è olomorfa in z_0, $f(x,y)$ è differenziabile in (x_0, y_0), e il suo differenziale è $\mathbb{C}$-lineare:

$$f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C} \cong \mathbb{R}^2$$

In particolare:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = c, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = ic,$$

da cui:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

Più esplicitamente, ponendo:

$$f(x,y) = P(x,y) + i\,Q(x,y),$$

si ha:

- $f_x(x,y) = P_x(x,y) + i\,Q_x(x,y)$;
- $f_y(x,y) = P_y(x,y) + i\,Q_y(x,y)$,

e imponendo $f_x + i f_y = 0$, si hanno le uguaglianze CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN:

$$P_x(x,y) + iQ_x(x,y) + iP_y(x,y) - Q_y(x,y) = 0$$

$$\begin{cases} P_x(x,y) = Q_y(x,y) \\ P_y(x,y) = -Q_x(x,y) \end{cases}$$

Una funzione differenziabile

$$\varphi: U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$(x,y) \longrightarrow (P(x,y), Q(x,y))$$

si dice olomorfa, o anche come funzione $\varphi: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, in $(x_0 + iy_0)$ se e solo se il suo differenziale calcolato in tale punto è $\mathbb{C}$-lineare, ovvia se e solo se la coppia $(P(x,y), Q(x,y))$ verifica le condizioni di Cauchy-Riemann:

$$\begin{cases} P_x(x_0,y_0) = Q_y(x_0,y_0) \\ P_y(x_0,y_0) = -Q_x(x_0,y_0) \end{cases}$$

APPLICAZIONI $\mathbb{R}$-LINEARI E $\mathbb{C}$-LINEARI

Un'applicazione $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^m$ si dice $\mathbb{C}$-LINEARE se:

- $\forall\, v, w \in \mathbb{C}^n : \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$;
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{C}, \forall\, v \in \mathbb{C}^n : \varphi(\lambda v) = \lambda\, \varphi(v)$.

Un'applicazione $\varphi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^h$ si dice invece $\mathbb{R}$-LINEARE se:

- $\forall\, v, w \in \mathbb{R}^k : \varphi(v+w) = \varphi(v) + \varphi(w)$;
- $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \forall\, v \in \mathbb{R}^k : \varphi(\lambda v) = \lambda\, \varphi(v)$.

Le applicazioni $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\mathbb{C}$-lineari sono tutte e sole della forma:

$$\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$$
$$z \to az,$$

con $a \in \mathbb{C}$.

Ciascuna di esse induce un'applicazione $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineare. Se $a = \alpha + i\beta$, $z = x + iy$, allora:

$$az = (\alpha + i\beta)(x + iy) = (\alpha x - \beta y) + i(\beta x + \alpha y),$$

da cui:

$$\tilde{\varphi}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha x - \beta y \\ \beta x + \alpha y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$

da cui a $\tilde{\varphi}$ è associata una matrice:

$$A_{\tilde{\varphi}} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Notiamo che:

- $1 \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$;
- $i \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I$. Sia $J = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;
- in generale, $a = \alpha + i\beta \rightsquigarrow \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \alpha I + \beta J$.

Dunque ogni applicazione $\mathbb{C}$-lineare $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ induce un'applicazione $\mathbb{R}$-lineare $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$. Inoltre la matrice associata a $\tilde{\varphi}$ è generata da I e J.

Il viceversa, in generale, non è vero. Perché un'applicazione $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ $\mathbb{R}$-lineare induca un'applicazione $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$\mathbb{C}$-lineare è necessario (e sufficiente) che:

- $\forall \lambda \in \mathbb{C} : \lambda A z = A \lambda z$

e dunque $A_\beta = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \lambda = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$, è necessario e sufficiente che:

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a - \beta c & \alpha b - \beta d \\ \beta a + \alpha c & \beta b + \alpha d \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a\alpha + b\beta & -a\beta + b\alpha \\ c\alpha + d\beta & -c\beta + d\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

Bisogna dunque imporre $b = -c$, $d = a$. È dunque necessario e sufficiente che:

$$A_{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} a & -c \\ c & a \end{bmatrix}$$

Dato che ogni Jacobiano di un'applicazione lineare è l'applicazione stessa, è necessario e sufficiente, dunque, che l'applicazione rispetti le CONDIZIONI DI CAUCHY-RIEMANN:

$$\begin{cases} P_x(x,y) = Q_y(x,y) \\ P_y(x,y) = -Q_x(x,y) \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Era necessario e sufficiente porre l'uguaglianza $AJ = JA$.

Notiamo che $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ sono isomorfi, ma differenti: $\mathbb{C}$, a differenza di $\mathbb{R}^2$, è un campo. In esso, è definito un PRODOTTO (da non confondere con il prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$).

Si vuole dunque definire un prodotto su:

- $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{R}^2 \cong \mathbb{C}$ (non vi è un ordinamento totale, come in $\mathbb{R}$);
- $\mathbb{R}^4$, isomorfo ai cop. dei QUATERNIONI (il prodotto non è più commutativo);
- $\mathbb{R}^8$, isomorfo agli elementi degli OTTETTI DI CAYLEY (il prodotto non è più associativo).

Una funzione OLOMORFA, allora, è una funzione differenziabile in senso complesso.

INTRODUZIONE ALLE VARIABILI COMPLESSE

Sia f una funzione, a valori reali o complessi, differenziabile. Consideriamo:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

Definiamo ora:

- $z \overset{\text{def}}{=} x + iy$;
- $\bar{z} = x - iy$.

Segue ai fatti:

$$dz = dx + i\,dy \quad , \quad d\bar{z} = dx - i\,dy \,,$$

da cui:

$$dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) \quad , \quad dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$$

Si ottiene dunque:

$$df = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right)d\bar{z} \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} \,,$$

avendo posto:

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\,\frac{\partial}{\partial y}\right) \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\,\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

Dato che una funzione olomorfa soddisfa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \,,$$

si ha che, se f è olomorfa:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Tale condizione è, ovviamente, necessaria e sufficiente.

PROPOSIZIONE

Sia f una funzione olomorfa in un aperto connesso A; se:

$$\operatorname{Re} f = \frac{1}{2}(f + \bar{f})$$

è costante, allora f è costante.

Dunque

Per ipotesi:

$$d(f + \bar{f}) = 0$$

in b. Dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = 0$$

Sotto che f è olomorfa:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$$

Per passaggio al complesso coniugato, si ha:

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = 0$$

Dunque:

$$\frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\,d\bar{z} = 0$$

Un'espressione del tipo $a\,dz + b\,d\bar{z}$ è identicamente nulla se e solo se $a = 0$, $b = 0$. Dunque $df = 0$, e f è costante, c.v.d.

COROLLARIO

Sia f una funzione olomorfa in un aperto connesso D. Se $\log|f(z)|$ è costante, allora $f(z)$ è costante.

Dim.

Si ha:

$$\log f(z) = \log|f(z)| + i \arg f(z)$$

Se $\log|f(z)| = \operatorname{Re} \log f(z)$ è costante, allora $\log f(z)$ è costante, dunque $f(z)$ è costante, c.v.d.

TEOREMA DI CAUCHY

TEOREMA (DI CAUCHY)

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$, allora la forma differenziale $f(z)\,dz$ è chiusa in D. Equivalentemente, se $R \subseteq D$ è un rettangolo, allora:

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

Dim.

Supponiamo che le derivate parziali $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ siano continue in D, allora è sufficiente verificare, per la formula di Green-Riemann, che, se:

$$df = \frac{\partial}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy$$

allora:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = i\,\frac{\partial f}{\partial x}$$

Ma data che f è olomorfa:

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad i\,\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

e il Teorema è dimostrato.

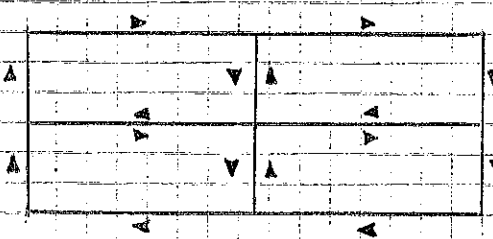
Vogliamo ora dimostrare il Teorema senza l'ipotesi aggiuntiva, provando che, se $R \subseteq D$ è un rettangolo, allora:

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

A priori:

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = \alpha(R)$$

Dividiamo il rettangolo in quattro parti uguali, come in figura:



Siano $\alpha(R_i)$, $i = 1, \dots, 4$ gli integrali di $f(z)$ calcolati lungo i bordi dei rettangoli, percorsi nel medesimo senso (come in figura). Dato che i contributi interni si elidono, si ha:

$$\alpha(R) = \int_{\partial R} f(z)\,dz = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial R_i} f(z)\,dz \le \sum_{i=1}^{4} \alpha(R_i)$$

È ovvio che esiste R_i, $i = 1 \dots 4$ tale che $\alpha(R_i) \ge \frac{1}{4}\alpha(R)$. Sia $R^{(1)}$ tale rettangolo.

Iteriamo il processo, e determiniamo $R^{(2)}$ con $\alpha(R^{(2)}) \ge \frac{1}{4}\alpha(R^{(1)})$. In maniera ricorsiva, si genera allora una successione $(R^{(j)})_{j\in\mathbb{N}}$ tale che:

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \quad \alpha(R^{(j)}) \ge \frac{1}{4^j}\alpha(R)$$

Per criterio di convergenza noto, esiste unico un punto $z_0 \in \bigcap_{j\in\mathbb{N}} R^{(j)}$. Sia $z_0 \in \Delta$, da cui, essendo $f(z)$ olomorfa in z_0:

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \varepsilon(z)\,|z - z_0|,$$

con:

$$\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$$

Dunque:

$$\int_{\partial R^{(k)}} f(z)\,dz = f(z_0)\int_{\partial R^{(k)}} dz + f'(z_0)\int_{\partial R^{(k)}} (z - z_0)\,dz + \int_{\partial R^{(k)}} \varepsilon(z)\,|z - z_0|\,dz$$

I primi due integrali sono integrali di forme esatte lungo cammini chiusi, dunque sono nulli. Pertanto, indicando con $\mathcal{P}(R^{(k)})$ il perimetro di $R^{(k)}$:

$$\alpha(R^{(k)}) = \int_{\partial R^{(k)}} \varepsilon(z)\,|z - z_0|\,dz \le \sup_{z \in \partial R^{(k)}} \varepsilon(z)\,|z - z_0| \cdot \mathcal{P}(R^{(k)})$$

La seguente catena di disuguaglianze è del tutto ovvia:

$$\forall\, z \in \partial R^{(k)}: \quad |z - z_0| \le \mathrm{Diag}(R^{(k)}) \le \frac{1}{2}\mathcal{P}(R^{(k)}),$$

ove $\mathrm{Diag}(R^{(k)})$ è la diagonale di $R^{(k)}$.

Inoltre:

$$\mathcal{P}(R^{(k)}) = \frac{1}{2^k}\mathcal{P}(R),$$

da cui:

$$\alpha(R^{(k)}) \le \sup_{z \in \partial R^{(k)}} \varepsilon(z) \cdot \frac{1}{2}\mathcal{P}(R^{(k)})^2 = \sup_{z \in \partial R^{(k)}} \varepsilon(z)\,\frac{1}{4^k}\mathcal{P}(R)^2$$

Dato che $\alpha(R^{(k)}) \ge \frac{1}{4^k}\alpha(R)$:

$$\alpha(R) \le \sup_{z \in \partial R^{(k)}} \varepsilon(z)\,\mathcal{P}(R)^2,$$

da cui:

$$\lim_{k \to +\infty} \alpha(R) = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha(R) = 0,$$

da cui la tesi, c.v.d.

COROLLARIO (SOLO ENUNCIATO)

Se f è olomorfa in Δ, e γ è un cammino chiuso omotopo a un punto in Δ, allora:

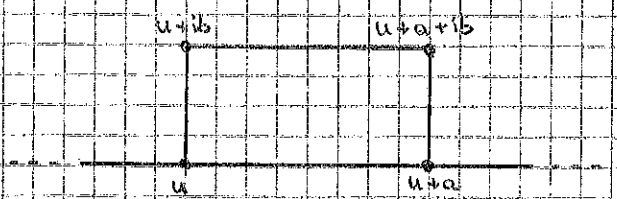
$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0$$

TEOREMA

Sia $f(z)$ una funzione continua in un aperto Δ, olomorfa in $\Delta \setminus \Delta$, dove Δ è una retta parallela all'asse x. Allora $f(z)\, dz$ è chiusa.

Dim.

Dobbiamo dimostrare, in sostanza, che $\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0$, dove R è un rettangolo con un lato su Δ:



Poniamo considerare una successione di rettangoli $(R_j)_{j \in \mathbb{N}}$ di vertici:

$$u + ib \qquad u + a + ib \qquad u + i\frac{\varepsilon}{j}, \qquad u + i\frac{\varepsilon}{j} + a,$$

con $0 < \varepsilon < b$

Allora:

$$\forall\, j \in \mathbb{N}: \int_{\partial R_j} f(z)\, dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{j \to +\infty} \int_{\partial R_j} f(z)\, dz = \int_{\partial R} f(z)\, dz = 0,$$

c.v.d.

FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

TEOREMA

Sia f una funzione olomorfa in un aperto D, sia $a \in D$. Sia γ un cammino chiuso in D non passante per a e omotopo a un punto in D. Allora:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = I(\gamma, a) f(a),$$

dove $I(\gamma, a)$ è, ovviamente, l'indice di γ rispetto ad a.

Sia:

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(a)}{z-a} & , z \neq a \\ f'(a) & , z = a \end{cases}$$

Per definizione di derivata, g è continua. Inoltre essa è olomorfa in $D \setminus \{a\}$. Per il Teorema dimostrato precedentemente, allora:

$$\int_\gamma \frac{f(z) - f(a)}{z-a}\, dz = 0$$

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\, dz = f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} =$$

$$= 2\pi i\, I(\gamma, a) f(a) \quad \text{c.v.d.}$$

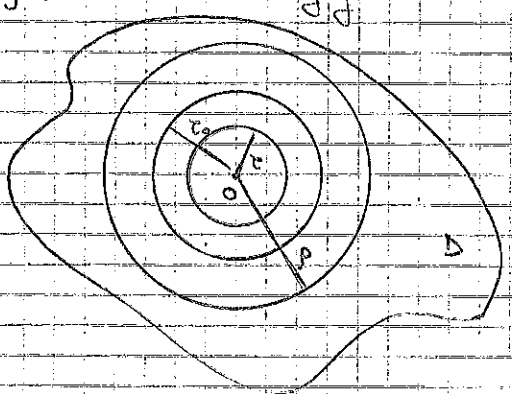
SERIE DI TAYLOR DI UNA FUNZIONE OLOMORFA

TEOREMA

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel disco $B(0,\rho)$ (dunque per $|z|<\rho$): allora $f(z)$ è analitica in tale disco, ha cioè, cioè esiste una serie di potenze $S(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ il cui raggio di convergenza è maggiore o uguale a ρ, con $S(x)=f(z)$ per $|z|<\rho$.

Dim.

Siano $r<r_0<\rho$, come in figura:



Sia γ la frontiera del cerchio di raggio r_0, percorso in senso orario. Per il Teorema precedente:

$$\forall\, |z|\le r: \quad f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$$

Dato che $|z|<|t|$, possiamo usare la seguente espansione in serie di potenze:

$$\frac{1}{t-z}=\frac{1}{t}\,\frac{1}{1-\frac{z}{t}}=\frac{1}{t}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{t}\right)^n=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}},$$

da cui:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}\,f(t)\,dt$$

La serie converge totalmente per $|z|\le r$ e $t=r_0$, da cui si può integrare termine a termine:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{t^{n+1}}\,f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n}{t^{n+1}}\,f(t)\,dt=\sum_{n=0}^{+\infty}a_n z^n,$$

dove:

$$a_n \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(t)}{t^{n+1}}\,dt$$

Dunque la tesi, c.v.d.

DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY

Abbiamo visto che, se $f(z)$ è olomorfa in un disco aperto D, allora $f(z)$ è analitica in D, cioè:

$$\forall z \in D : f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Si ha:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0),$$

da cui:

$$f(z) = S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n$$

Questa serie che è la serie di Taylor di f centrata in 0, è detta SERIE DI TAYLOR di $f(z)$.

Sia ora $z = re^{i\theta}$, con $0 \le r < \rho$, $\theta \in [0, 2\pi]$ $(D = B(0,\rho))$.

Allora:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{in\theta}$$

Tale serie converge assolutamente quando r è fissato e θ varia.

Dunque:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_k r^k e^{i(k-m)\theta}\, d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} a_m r^m\, d\theta = a_m r^m,$$

perché tutti gli altri integrali si annullano. Infatti:

$$e^{i(k-m)\theta} = i \sin[(k-m)\theta] + \cos[(k-m)\theta],$$

da cui banalmente:

$$\int_0^{2\pi} e^{i(k-m)\theta} = 0,$$

se $k \neq m$.

Dunque:

$$a_m r^m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta$$

Sia ora:

$$M(r) = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(re^{i\theta})| = \max_{\theta \in [0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|$$

Allora:

$$|a_m r^m| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, d\theta = M(r)$$

$$|a_m| = \frac{M(r)}{r^m}$$

Tale disuguaglianza è nota come DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY.

Si ha dunque:

$$|f^{(n)}(0)| \leq \frac{M_f(r)}{r^n}\, n!$$

Dunque:

$$\forall\, n \geq 0 : |f^{(n)}(0)| \leq n!\, C^n\, C_f,$$

ove:

- C è una costante (nel nostro caso, $\frac{1}{r}$);
- C_f è una costante dipendente da f (nel nostro caso, $M_f(r)$).

In generale, sia $m = (m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una successione.

Diremo che lo spazio di funzioni C^m è formato da tutte le funzioni C^∞ tali che:

$$\forall\, n \geq 0 : |\varphi^{(n)}(0)| \leq n!\, C^n\, B_\varphi\, m_n,$$

ove:

- C è una costante positiva;
- B_φ è una costante dipendente da φ.

Se in particolare $m_n = 1$ per ogni $n \geq 0$, allora la funzione è analitica: infatti il resto della serie di Taylor in forma integrale tende a 0 per $n \to +\infty$.

Sia dunque f una funzione C^∞ tale che:

$$\forall\, n \geq 0 : |f^{(n)}(0)| \leq n!\, \beta_f\, B^n$$

Consideriamo la serie di Taylor con resto in forma integrale di f:

$$f = P_{n-1} + R_n,$$

$$R_n = \int_{x_0}^{x} \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!} (x-t)^n\, dt,$$

da cui si ha:

$$\lim_{n \to +\infty} |R_n| \leq \lim_{n \to +\infty} \left| \int_{x_0}^{x} (n+1)\, B^{n+1}\, \beta_f\, (x-t)^n\, dt \right| \leq$$

$$\leq \lim_{n \to +\infty} B^{n+1}\, \beta_f\, |x - x_0|^{n+1} = 0,$$

per $|x - x_0| < \frac{1}{B}$.

TEOREMA (DI MORERA)

Sia $f(z)$ una funzione continua in un aperto D di $\mathbb{C}$ la cui forma differenziale $f(z)\,dz$ è chiusa, allora $f(z)$ è olomorfa in D.

Dim.

f ha localmente una primitiva g, che è olomorfa. Dato che $f = g'$, f è anch'essa olomorfa, perché derivata di una funzione olomorfa.

COROLLARIO

Se $f(z)$ una funzione continua in D e olomorfa in $D \setminus \Delta$, con Δ retta, allora $f(z)$ è olomorfa in D.

Dim.

Senza perdere di generalità, sia Δ parallela all'asse reale. Per un teorema precedente, $f(z)\,dz$ è una forma chiusa. Allora, per il teorema di Morera, $f(z)$ è olomorfa in D.

OSSERVAZIONE

Le ultime proposizioni portano anche a comprendere meglio ciò si nota che:

- una funzione olomorfa $f(z)$ in $D \subseteq \mathbb{C}$ ha localmente una primitiva g, che è olomorfa. L'esistenza è garantita dal fatto che $f(z)\,dz$ è chiusa, mentre g è olomorfa semplicemente perché ha f come derivata;
- per quanto di una variabile complessa, ogni funzione olomorfa in $D \subseteq \mathbb{C}$ è analitica in D, per il teorema dimostrato precedentemente, e ogni funzione analitica (dato che è derivabile in senso complesso) è olomorfa. Le funzioni olomorfe sono dunque tutte e sole quelle analitiche: da qui otteniamo che una funzione olomorfa in $D \subseteq \mathbb{C}$ è infinitamente derivabile in D, e che, dato f olomorfa in D, ha primitive m-esime e ha derivate m-esime come anch'esse olomorfe.

FORMA ALTERNATIVA DELLA FORMULA INTEGRALE DI CAUCHY

TEOREMA

Sia Γ il bordo orientato di un compatto $K \subseteq \Delta$, con Δ aperto. Sia $f(z)$ una funzione olomorfa in Δ. Allora

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Se inoltre a è punto interno di K, allora:

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot f(a)$$

Dim.

Se $f(z)$ è olomorfa in Δ, allora $f(z)\,dz$ è chiusa, dunque, per un risultato precedente, si ha:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

Diverso dalla seconda tesi, sia S un disco in K centrato in a.

Il bordo orientato di $K \setminus S$ è composto da Γ e da ∂S percorsa in senso inverso. Si ha, considerando la funzione $\frac{f(z)}{z-a}$:

$$\int_{\Gamma \cup \partial S^-} \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz + \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 0$$

$$\int_\Gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz,$$

e sappiamo già che:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} f(a) \int_\gamma \frac{dz}{z-a} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} f(a)\, I(\gamma, a),$$

con $I(\gamma, a) = 1$, per una delle proprietà di $I(\gamma, a)$, c.v.d.

PRINCIPIO DI SIMMETRIA DI SCHWARZ

Consideriamo un aperto connesso (non vuoto) D, simmetrico rispetto all'asse x (e' asse reale $\mathbb{R}$). Siano:

$$\begin{cases} D' = D \cap \{y > 0\} \\ D'' = D \cap \{y < 0\} \end{cases}$$

Sia f continua su D', e valori reali su $D' \cap \mathbb{R}$, olomorfa in $D' \setminus \mathbb{R}$.

Allora esiste una funzione g olomorfa in D che estende f.

Definiamo, in modo del tutto naturale:

$$g(z) = \begin{cases} f(z), & z \in D' \\ \overline{f(\bar{z})}, & z \in D'' \end{cases}$$

Tale funzione è continua in D ed è olomorfa sia in D' che in D''. Per un teorema visto precedentemente, essa è olomorfa in D.

Tale teorema è facilmente generalizzabile al caso di domini simmetrici rispetto a rette qualsiasi.

Il teorema è facilmente generalizzabile anche al caso di domini simmetrici rispetto ad una circonferenza unitaria, nel senso che ($\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$):

$$z \in D \Leftrightarrow \frac{1}{\bar{z}} \in D,$$

considerando:

$$g(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

ESERCIZI VARI

1. Sia f una funzione olomorfa su un dominio D simmetrico rispetto all'asse reale.
Esistono due (e sono uniche) due funzioni $g_1(z)$ e $g_2(z)$, olomorfe su D e a valori reali sull'asse reale, tali che:

$$f(z) = g_1(z) + i\, g_2(z)$$

Notiamo che:

- sull'asse reale, $f(z) + \overline{f(z)} = f(z) + \overline{f(z)}$ è reale;
- sull'asse reale, $f(z) - i\overline{f(z)} = f(z) - \overline{f(z)}$ è immaginario puro (dunque $i(f(z) - \overline{f(z)})$ è reale sull'asse reale).

Definiamo:

$$h_1(z) \overset{\text{def}}{=} f(z) + \overline{f(\bar{z})}$$
$$h_2(z) \overset{\text{def}}{=} -i(f(z) - \overline{f(\bar{z})})$$

Segue:

- $\overline{h_1(\bar{z})} = \overline{f(\bar{z})} + f(z) = h_1(z)$;
- $\overline{h_2(\bar{z})} = -i(\overline{f(\bar{z})} - f(z)) = h_2(z)$;
- $h_1(z) + i h_2(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})} + f(z) - \overline{f(\bar{z})} = 2f(z)$

Si conclude allora considerando $g_1 \overset{\text{def}}{=} \frac{h_1}{2}$, $g_2 \overset{\text{def}}{=} \frac{h_2}{2}$.

2. Sia:

$$P(t) = t^3 + \sum_{i=1}^{3} a_i t^{3-i}$$

Dato $R > 0$, sia γ la parametrizzazione della circonferenza di centro 0 e raggio R. Sia poi:

$$\gamma_R \overset{\text{def}}{=} P(\gamma(t))$$

Dimostriamo che, per R abbastanza grande, γ_R non passa per l'origine. Per tale R, dimostriamo che:

$$I(\gamma_R, 0) = 3.$$

Considerando $P(t)$ come un polinomio su $\mathbb{R}$, si ha $\lim_{t\to+\infty} P(t) = +\infty$, da cui:

$$\exists R > 0 \text{ t.c. } \forall x > R : x^m > \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| x^{m-i}$$

Considerando γ come da definizione, si ha:

$$\forall t \in [0, 2\pi] : |\gamma(t)|^m = R^m > \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| R^{m-i} = \sum_{i=1}^{m-1} |a_i| |\gamma(t)|^{m-i} \geq$$

$$\geq \left| \sum_{i=1}^{m-1} a_i \gamma(t)^{m-i} \right|,$$

da cui γ_R non passa dall'origine. Si ha poi $\gamma_R = \gamma_1 + \gamma_2$, con $\gamma_1(t) = t^m$, $\gamma_2(t) = \sum_{i=1}^{m-1} a_i x^{m-i}$. Dato che $|\gamma_1| > |\gamma_2|$, allora: $I(\gamma_R, 0) = I(\gamma_1, 0) = I(t^m, 0)$. Si ha allora:

$$I(\gamma_R, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{mre^{i\theta} i}{re^{i\theta}} d\theta = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi m} i\, d\theta = \frac{2\pi i m}{2\pi i} = m$$

3. Sia f una funzione analitica su tutto $\mathbb{R}$, maggiore o uguale di 0 in $\mathbb{R}$. Dimostrare che f è un quadrato, ossia esiste g tale che:

$$f = g^2$$

Se $f \equiv 0$, allora l'esercizio è risolto con $g \equiv 0$.

Se $f \neq 0$, allora essa ha un insieme discreto (dunque al più numerabile) di zeri. Sia $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ la successione degli zeri di f.

PROPRIETÀ DELLA MEDIA

Sia f una funzione olomorfa in un aperto $\Delta \subseteq \mathbb{C}$. Allora (supponiamo $\Delta = B(0,r)$) f è sviluppabile in serie di:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$

Con la notazione $z = re^{i\vartheta}$, si ha dunque:

$$a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\vartheta} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

In particolare:

$$f(0) = a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

Quindi $f(0)$ è la media integrale su $\partial B(0,r)$.

Diciamo in generale che una funzione continua f, a valori reali o complessi, definita in un aperto Δ ha la PROPRIETÀ DELLA MEDIA se, per ogni $a \in \Delta$ e per ogni $r > 0$ con $B(a,r) \subseteq \Delta$, è:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

Le funzioni che hanno tale proprietà sono tutte e sole le FUNZIONI ARMONICHE.

Una funzione olomorfa in Δ, in particolare, ha la proprietà della media.

Se consideriamo una funzione olomorfa a valori complessi, cioè:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

$$\operatorname{Re} f(z_0) + i \operatorname{Im} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\vartheta}) + i \operatorname{Im} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta,$$

da cui, per ciascun indifferentemente di r e i:

- $\operatorname{Re} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Re} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$;
- $\operatorname{Im} f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{Im} f(re^{i\vartheta})\, d\vartheta$.

Tali funzioni hanno la proprietà della media, dunque.

PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO

Tale principio vale per funzioni a valori reali o complessi che hanno la proprietà della media (tali funzioni sono dette ARMONICHE).

TEOREMA (PRINCIPIO DEL MASSIMO MODULO)

Sia f una funzione a valori complessi, continua in un aperto $A \subseteq \mathbb{C}$, se f ha la proprietà della media, e se $|f|$ ha un massimo relativo in $z_0 \in A$ ($|f(z)| \leq |f(z_0)|$ in un intorno di z_0), allora f è costante in un intorno di z_0.

Se $f(z_0) = 0$, la funzione è costantemente nulla, e il teorema è dimostrato. Sia dunque $f(z_0) \neq 0$.

Moltiplicando f per una costante complessa, possiamo supporre $f(z_0) \in \mathbb{R}$, $f(z_0) > 0$ (ad esempio, per $\frac{1}{f(z_0)}$).

Per $r \geq 0$ sufficientemente piccolo:

$$M(r) = \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + re^{i\theta})|$$

$$M(r) \leq f(z_0),$$

per ipotesi.

Per la proprietà della media, inoltre:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta,$$

da cui:

$$M(r) \geq f(z_0) \geq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, d\theta = M(r)$$

$$f(z_0) = M(r)$$

Si ha poi:

$$f(z_0) = \operatorname{Re} f(z_0) = |f(z_0)| \geq |f(z)| \geq \operatorname{Re} f(z),$$

da cui:

$$g(z) = \operatorname{Re}(f(z_0) - f(z)) \geq 0$$

in $|z - z_0| = r$. Inoltre:

$$g(z) = 0 \iff f(z) = f(z_0),$$

dato che $\operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} f(z_0)$, e $|f(z)| \leq |f(z_0)| = \operatorname{Re} f(z_0)$.

Da queste relazioni, infatti $f(z)$ non può avere parte immaginaria non nulla, e dunque coincide con $f(z_0)$.

Se $f(z)$ ha la proprietà della media, anche $(f(z_0) - f(z))$ ha la proprietà della media. Dunque anche:

$$g(z) = \mathrm{Re}\,(f(z_0) - f(z))$$

ha la proprietà della media. Dunque:

$$g(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z_0 + \rho e^{i\vartheta})\, d\vartheta = 0,$$

da cui, essendo $g \geq 0$, $g \equiv 0$ sul bordo di $B(z_0, r)$. Dunque $f(z_0) = f(z)$ su $\partial B(z_0, r)$, e per l'arbitrarietà di r, $f(z)$ è costante in un intorno di z_0, c.v.d.

COROLLARIO

Sia D un aperto connesso e limitato in $\mathbb{C}$. Sia f una funzione a valori complessi definita e continua in $\bar{D}$, avente la proprietà della media in D. Sia:

$$M = \sup_{z \in \partial D} |f(z)|$$

Allora:

- $|f(z)| \leq M \quad \forall\, z \in D$;
- se esiste $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| = M$, allora f è costante.

Sia

$$M_1 = \sup_{z \in \bar{D}} |f(z)| = \max_{z \in \bar{D}} |f(z)|$$

per cui vale che:

- se esiste $z_0 \in D$ tale che $|f(z_0)| = M_1$, allora, per il principio del massimo modulo, f risulta costante in un intorno di z_0 (precisamente chiuso e non vuoto, ma anche aperto: (e per comodità) f è costante in D, dunque in $\bar{D}$ per continuità;
- se ogni $z_0 \in D$ con $|f(z_0)| = M_1$ appartiene a ∂D, allora per due tali punti passa banalmente una (e quindi infinite) retta γ, c.v.d.

LEMMA DI SCHWARZ

TEOREMA (LEMMA DI SCHWARZ)

Sia $f(z)$ una funzione olomorfa nel disco $\{|z|<1\}$, e supponiamo che:

- $f(0)=0$;
- $|f(z)|<1 \quad \forall\ |z|<1$.

Allora:

- $|f(z)| \le |z| \quad \forall\ |z|<1$;
- se esiste z_0 $(|z_0|<1)$ tale che $|f(z_0)| = |z_0|$, allora:
$$f(z) = \lambda z, \qquad |\lambda| = 1$$
è una rotazione.

Dim.

Consideriamo la serie di Taylor:
$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$$
In realtà:
$$f(0)=0 \ \Rightarrow\ a_0 = 0$$
Dunque $\frac{f(z)}{z}$ è olomorfa per $|z|<1$. Poiché $|f(z)|<1$ in $\{|z|<1\}$, si ha:
$$\forall\ |z| = r: \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| = \frac{|f(z)|}{|z|} < \frac{1}{r}$$
Tale condizione vincola per ogni $r<1$. In realtà, per il corollario visto:
$$\forall\ |z| \le r: \quad \left|\frac{f(z)}{z}\right| < \frac{1}{r} \ \Rightarrow\ |f(z)| < \frac{|z|}{r}$$
Passando al limite, si ha $|f(z)| \le |z| \ \forall\ |z|<1$.

Per il corollario visto, se esiste $|z_0|<1$ con $\left|\frac{f(z_0)}{z_0}\right| = 1$, allora $\frac{f(z)}{z} = \lambda$ in $\{|z|<r\}$, con $|\lambda|=1$.

Dunque si ha la tesi, c.v.d.

SERIE DI LAURENT

Consideriamo una serie del tipo:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n$$

A questa serie sono associate due serie famose (indicizzate in $\mathbb{N}$):

- $S_1(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$;
- $S_2(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{-n}$.

Siano ρ_1 e $\frac{1}{\rho_2}$ i rispettivi raggi di convergenza.

Consideriamo le serie complesse:

- $f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, per $|z| < \rho_1$;
- $f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^{-n}$, per $|z| > \rho_2$.

Si ha che f_1 è olomorfa in tale disco. Anche f_2 è olomorfa in $|z| > \rho_2$. Consideriamo la mappa, ben definita e olomorfa per $|z| > \rho_2$:

$$w \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{z} \quad \left(z = \frac{1}{w}\right)$$

La funzione composta:

$$g(w) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n w^{-n}$$

è olomorfa per $|w| < \frac{1}{\rho_2}$, ossia $f_2(z)$ è olomorfa per $|z| > \rho_2$.

La sua derivata è:

$$f_2'(z) = -g'\left(\frac{1}{z}\right)\frac{1}{z^2} = -\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n \left(\frac{1}{z}\right)^{n-1}\frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z^{-n-1}$$

Sia ora $\rho_2 < \rho_1$. Nella corona circolare $\rho_2 < |z| < \rho_1$, la somma delle serie:

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

è olomorfa, e la sua derivata è:

$$[f_1(z) + f_2(z)]' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n a_n z^{n-1},$$

ottenuta differenziando termine a termine.

ESPANSIONE DI LAURENT DI UNA FUNZIONE OLOMORFA IN UNA CORONA

Data una corona circolare $\rho_2 < |z| < \rho_1$, una funzione più di finita ha una ESPANSIONE IN SERIE DI LAURENT:

$$S(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

se esiste una serie di Laurent convergente, tale che $f(z) = S(z)$ nella corona circolare.

OSSERVAZIONE

Dato $r \in]\rho_2, \rho_1[$, poniamo $z = re^{i\theta}$. Si ha allora:

$$f(re^{i\theta}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n r^n e^{in\theta}$$

Integrando termine a termine rispetto a θ, tra 0 e 2π:

$$\forall n \in \mathbb{Z}: \quad a_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta})\, d\theta,$$

da cui i coefficienti sono univocamente determinati. La serie, dunque, se esiste è unica, ed è detta l'espansione di Laurent di f.

Dimostriamo ora l'esistenza.

Siano r_1, r_2 tali che:

$$\rho_2 < r_2 < r_1 < \rho_1$$

Mostreremo che esiste una serie di Laurent che converge assolutamente nella corona $r_2 \le |z| \le r_1$, la cui somma è, nella corona, uguale a $f(z)$. Per l'unicità appena dimostrata, tale serie di Laurent non dipenderà da r_2 e r_1, da cui la serie di Laurent converge nella corona $\rho_2 < |z| < \rho_1$ (cioè ci tende).

Siano r_1' e r_2' tali che:

$$\rho_2 < r_2' < r_2 < r_1 < r_1' < \rho_1$$

Consideriamo la corona circolare:

$$r_2' \le |z| \le r_1'$$

Siano poi:

- $\gamma_1(t) = r_1 e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$;
- $\gamma_2(t) = r_2 e^{-it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Sia dunque C_{r_1, r_2} la corona circolare delimitata da $\gamma_1(t)$ (percorsa in senso antiorario) e $\gamma_2(t)$ (percorsa in senso orario).

Per la formula integrale di Cauchy si ha, per $r_2 < |z| < r_1$:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t - z}\, dt - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t - z}\, dt$$

Consideriamo il primo integrale. Dato che:

- $\forall t \in \gamma_1 : |t| = r_1$;
- $|z| < r_1 < |t|$;

si ha $\left|\frac{z}{t}\right| < 1$, da cui:

$$\frac{1}{t - z} = \frac{1}{t}\left(\frac{1}{1 - \frac{z}{t}}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{t^{n+1}},$$

e ci si aspetta, almeno, sostituendo e integrando termine a termine:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z)}{t - z}\, dt = \sum_{n \geq 0} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt, \quad n \geq 0$$

Consideriamo ora il secondo integrale. Si ha $|t| = r_2$ (γ_2) e $|z| \geq r_2 > r_2'$, da cui:

$$\frac{1}{t - z} = -\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1 - \frac{t}{z}} = -\sum_{n \geq 0} \frac{t^n}{z^{n+1}} = -\sum_{n < 0} \frac{z^n}{t^{n+1}}$$

da cui:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t - z}\, dt = \sum_{n < 0} a_n z^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(t)}{t^{n+1}}\, dt, \quad n < 0$$

Dunque si ha la tesi:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n, \quad r_2 < |z| < r_1$$

e la serie non dipende dai r_1 e r_2 fissati, c.v.d.

DECOMPOSIZIONE DI UNA FUNZIONE OLOMORFA IN UNA CORONA

PROPOSIZIONE

Data una funzione olomorfa $f(z)$ in una corona $\rho_2 < |z| < \rho_1$, allora:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

ove:

- $f_1(z)$ è olomorfa in $|z| < \rho_1$;
- $f_2(z)$ è olomorfa in $|z| > \rho_2$.

Tale decomposizione è unica, se imponiamo:

$$\lim_{|z| \to +\infty} f_2(z) = 0$$

Dim.

Poniamo l'esistenza. Sia $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$, con $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$ la serie di Laurent di $f(z)$. Allora basta considerare:

- $f_1(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$, olomorfa in $|z| < \rho_1$;
- $f_2(z) = \sum_{n < 0} a_n z^n$, olomorfa in $|z| > \rho_2$.

Si ha chiaramente:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

e inoltre $|f_2(z)| \xrightarrow{|z| \to +\infty} 0$.

Proviamo ora l'unicità. Sia:

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = g_1(z) + g_2(z)$$

È dunque ben definita la funzione (olomorfa nel piano):

$$h(z) = \begin{cases} f_1(z) - g_1(z), & |z| < \rho_1 \\ g_2(z) - f_2(z), & |z| > \rho_2 \end{cases}$$

Si ha chiaramente:

$$\lim_{|z| \to +\infty} h(z) = 0,$$

e per il principio del massimo modulo, h è identicamente nulla, c.v.d.

DISUGUAGLIANZE DI CAUCHY

Sia f una funzione olomorfa nel disco bucato:

$$\{0 < |z| < \rho\} = B(0,\rho) \setminus \{0\}$$

Vogliamo capire se è possibile estendere f ad una funzione olomorfa in $B(0,\rho)$ (almeno anche in 0). Per la continuità della funzione tale prolungamento, se esiste, è unico.

Ricordiamo che, se denotiamo con $M(r) = \sup_{\theta \in [0,2\pi]} |f(re^{i\theta})|$, si ha:

$$|a_n| r^n = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f(re^{i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M(r)\, d\theta$$

$$|a_n| \leq \frac{M(r)}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

PROPOSIZIONE

La funzione f si prolunga in 0 se e solo se M è limitata in un intorno di 0.

Dim:

Chiaramente, se f si prolunga in 0, allora è limitata in un suo intorno. Viceversa, se esiste M tale che $|f| \leq M$ in un intorno di 0, allora per le disuguaglianze di Cauchy:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} \quad \forall n \in \mathbb{Z},$$

da cui, per $n < 0$ e $r \to 0$:

$$|a_n| \leq \frac{M}{r^n} = M r^{-n} \to 0,$$

da cui $a_n = 0$. Dunque la serie di Laurent si riduce ad una serie di Taylor, da cui si ha il prolungamento in 0, con $f(0) = a_0$ per continuità. c.v.d.

TEOREMI DI WEIERSTRASS E PICARD

Le singolarità analizzate nel paragrafo precedente sono dette SINGOLARITÀ ELIMINABILI: in questi casi, la serie di Laurent centrata in quel punto si riduce ad una serie di Taylor:

$$\forall\, n < 0 : a_n = 0$$

Abbiamo visto che, perché un punto singolare sia una singolarità eliminabile, è necessario e sufficiente che la funzione sia definita su un disco "bucato" in z_0 ($B(z_0, \rho) \setminus \{z_0\}$) e lì limitata in un intorno di z_0. In questo caso:

$$\exists \lim_{z \to z_0} f(z)$$

Se z_0 non è una singolarità eliminabile (cioè esiste $n < 0$ con $a_n \neq 0$ nella serie di Laurent centrata in z_0), z_0 è una SINGOLARITÀ ISOLATA. In questi casi, il precedente teorema non è sufficiente. Ci sono due casi:

- $\exists\, n_0 < 0$ t.c. $\forall\, n < n_0 : a_n = 0$;
- $\forall\, n < 0 \;\exists\, n < n_0$ t.c. $a_n \neq 0$.

Nel primo caso, z_0 è un POLO per f. In effetti f è meromorfa in z_0, e:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = +\infty$$

Infatti $(z - z_0)^n f(z) \overset{\text{def}}{=} g(z)$ è una funzione olomorfa in un intorno di z_0, da cui:

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^n}$$

è meromorfa in un intorno di z_0.

Nel secondo caso:

$$\nexists \lim_{z \to z_0} f(z),$$

e z_0 è una SINGOLARITÀ ESSENZIALE.

Prima di parlare di singolarità essenziali, analizziamo i poli, senza perdere di generalità, ($z_0 = 0$).

Se f è una funzione olomorfa in $\{0 < |z| < \rho\}$ allora è sviluppabile in serie di Laurent, cioè:

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n z^n = z^{n_0} \sum_{n \geq n_0} a_n z^{n - n_0}$$

$(n_0 < 0)$, allora:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z^{-n_0}},$$

con g olomorfa in 0. Supponiamo che f sia meromorfa in 0, e 0 è un polo di molteplicità:

$$k \overset{\text{def}}{=} \min \{ n \in \mathbb{N} \mid \exists\, a_n \neq 0 \ldots a_{n+k} = 0 \}$$

Viceversa, se f è una funzione olomorfa in $\{0 < |z| < \rho\}$ e meromorfa in 0, con 0 polo di molteplicità k, allora

$$f(z) = \frac{g(z)}{h(z)} = \frac{g(z)}{h_1(z) z^k},$$

con $g(0) \neq 0$, $h_1(0) \neq 0$. Allora f si scrive in serie di Laurent come:

$$\frac{1}{z^k} \sum_{n \geq 0} a_n z^n = \sum_{n \geq 0} a_n z^{n-k} = \sum_{n \geq -k} a_{n+k} z^n = \sum_{n \geq -k} b_n z^n,$$

con $b_n \overset{\text{def}}{=} a_{n+k} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$.

Parliamo ora di singolarità essenziale. In questo caso, ci sono due importanti teoremi a riguardo.

TEOREMA (DI WEIERSTRASS)

Sia 0 una singolarità essenziale di una funzione f olomorfa in $0 < |z| < \rho$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'immagine del disco bucato $0 < |z| < \varepsilon$ è densa in $\mathbb{C}$.

Idea:

Per assurdo, sia $U \in \mathcal{J}(0)$ un intorno tale che $\overline{f(U \setminus \{0\})} \neq \mathbb{C}$.

Vogliamo dimostrare che allora f è meromorfa in 0. Se $f(U \setminus \{0\})$ non è densa in $\mathbb{C}$, esiste $B(a, r) \subseteq \mathbb{C}$ con:

$$B(a, r) \cap f(U \setminus \{0\}) = \emptyset$$

Dunque:

$$\forall\, 0 < |z| < \varepsilon \ldots : \quad |f(z) - a| \geq r$$

(abbiamo supposto $U = B(0, \varepsilon)$, senza perdita di generalità).

La funzione seguente è dunque olomorfa e limitata in $U \setminus \{z_0\}$:

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - a}$$

$$|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - a|} \leq \frac{1}{r}$$

Allora g si estende a una funzione olomorfa in U: sia essa $h(z)$.

Allora $\frac{1}{h(z)}$ è meromorfa in U, da cui:

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} + a$$

è meromorfa in U: ciò è assurdo, c.v.d.

TEOREMA (DI PICARD) (SOLO ENUNCIATO)

Sia 0 una singolarità essenziale di una funzione f olomorfa in $0 < |z| < \rho$. Allora, per ogni $\varepsilon > 0$, l'immagine del disco "bucato" $0 < |z| < \rho$ è uguale a $\mathbb{C}$, oppure a $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$, con $z_0 \in \mathbb{C}$.

Ex. La funzione:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{1}{z^n},$$

definita in $\mathbb{C}^*$, è olomorfa in $\mathbb{C}^*$, ha 0 come singolarità essenziale. Infatti:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(-n)!} \cdot z^n$$

$$a_n \neq 0 \quad \forall n < 0$$

In effetti, in ogni intorno della origine tale funzione assume tutti i valori complessi, tranne lo 0.

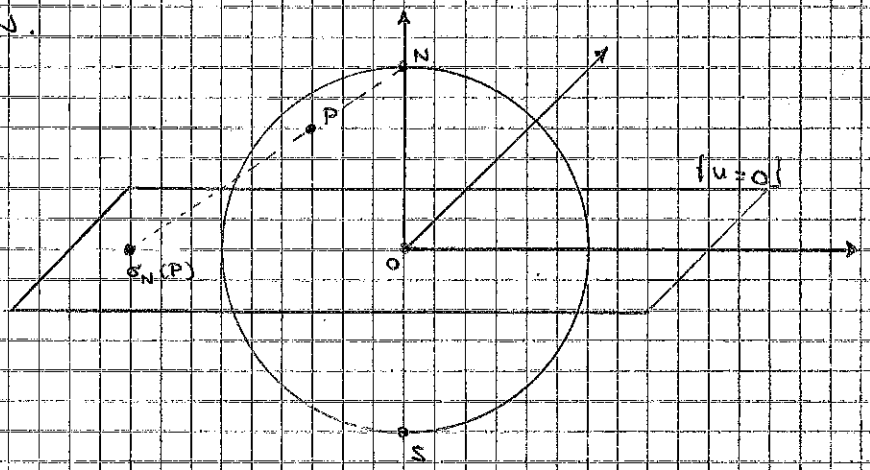
SFERA DI RIEMANN

Consideriamo la sfera unitaria in $\mathbb{R}^3$:

$$S^2 = \{ x^2 + y^2 + u^2 = 1 \}$$

siano $N = (0,0,1)$, $S = (0,0,-1)$.

Consideriamo la proiezione stereografica dal polo N: essa associa ad un punto $P \in S^2 \setminus N$ il punto $\sigma_N(P) \in \{u = 0\}$ tale che P e N.



se $P = (x, y, u)$, si può dimostrare (è stato fatto in precedenza, tale calcolo) che:

$$\sigma_N(P) = \left(\frac{x}{1-u}, \frac{y}{1-u}, 0 \right),$$

o, in coordinate complesse:

$$\sigma_N(P) = \frac{x + iy}{1-u}$$

se invece consideriamo la proiezione stereografica dal polo S, al punto $P \in S^2 \setminus S$ è associato $\sigma_S(P) \in \{u = 0\}$ avente coordinate complesse:

$$\sigma_S(P) = \frac{x + iy}{1+u}$$

Posto ora $z = \sigma_N(P)$, $z' = \sigma_S(P)$ $(P \in S^2 \setminus \{N, S\})$, si ha:

$$zz' = \frac{(x+iy)}{(1-u)} \cdot \frac{(x-iy)}{(1+u)} = \frac{x^2 + y^2}{1-u^2} = \frac{1-u^2}{1-u^2} = 1$$

$$zz' = 1$$

Le mappe seguenti:

$$\Phi : S^2 \setminus N \to \mathbb{C} \qquad \Psi : S^2 \setminus S \to \mathbb{C}$$

$$P = (x, y, u) \mapsto \sigma_N(P) \qquad P = (x, y, u) \mapsto \overline{\sigma_S(P)}$$

definiscono due carte (di $S^2 \setminus N$ e $S^2 \setminus S$ rispettivamente) in

c) Le cui formule del cambiamento di carte, definite su $S^2 \setminus \{N, S\}$ è olomorfa e biolomorfa:

$$z' = \frac{1}{z}$$

S^2 con queste due carte, dunque, è una varietà analitica complessa: essa è detta SFERA DI RIEMANN. Essa è una varietà di dimensione 1.

OSSERVAZIONE

Consideriamo:

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \frac{\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}}{\sim}$$

In questo caso:

- $\phi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{[0,1]\} \to \mathbb{C}$, $\phi([z_1, z_2]) = \frac{z_2}{z_1}$ è un omeomorfismo;
- $\psi : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{[1,0]\} \to \mathbb{C}$, $\psi([z_1, z_2]) = \frac{z_1}{z_2}$ è un omeomorfismo.

Poi, il cambiamento di carte è il seguente:

$$z_2 \longrightarrow [z_1, z_2] = \left[1, \frac{1}{z_1}\right] \longrightarrow \frac{1}{z_1} = z_2,$$

dunque anche in questo caso

$$z_1 z_2 = 1$$

È dunque evidente l'analogia tra S^2 e $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, infatti è una varietà analitica complessa.

Sia ora $\Omega = S^2$ un aperto (con la topologia euclidea). Una funzione definita in Ω è OLOMORFA in Ω se:

- per ogni $p \in \Omega$, $p \neq N$, esiste un intorno in cui $f|_U$ (U intorno) può essere espressa con una funzione olomorfa nella variabile z;
- per ogni $p \in \Omega$, $p \neq S$, esiste un intorno in cui $f|_V$ (V intorno) può essere espressa con una funzione olomorfa nella variabile z'.

Dalla relazione $z z' = 1$, si ha che se $N \neq \infty$, $N \neq 0$, allora (preso un intorno disgiunto da N e 0) ogni funzione olomorfa in z è anche olomorfa in z', e viceversa.

Identifichiamo ora $\mathbb{C}$ con $S^2 \setminus N$. Allora S^2 (compattificazione di Alexandroff di $\mathbb{C}$) è ottenuto da $\mathbb{C}$ aggiungendo un PUNTO ALL'INFINITO N.

Un sistema fondamentale di intorni di N è dunque dato da gli intorni del tipo $\{|z| > r\}$. In questo caso, effettuando il cambio di variabile $z' = \frac{1}{z}$, tali intorni vengono mappati in dischi del tipo $\{|z'| < r\}$.

Dato $D \subseteq S^2$ aperto, f è dunque olomorfa su D se f è olomorfa in $D \cap (S^2 \setminus N)$ nel senso dato precedentemente, e in più f è olomorfa in z ($z = \frac{1}{w}$) se in un intorno del tipo $\{|z| > r\}$ f è espressa con una funzione olomorfa in z' ($z' = \frac{1}{z}$) in $\{|z'| < r\}$ (anche se funzione è olomorfa in $z' = 0$).

Similmente f è MEROMORFA ALL'INFINITO se, quando espressa in un intorno del tipo $\{|z| > r\}$ come una funzione in z', essa è meromorfa in un intorno di $z' = 0$.

Infine, una funzione olomorfa in $\{|z| > r\}$ ha nell'infinito una singolarità essenziale se $f\left(\frac{1}{z'}\right)$ ha nell'origine una singolarità essenziale.

Sia ora:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n$$

la serie di Laurent di f per $|z| > r$. Ricordando le analisi fatte precedentemente:

- f è olomorfa in $\infty \Leftrightarrow a_n = 0 \ \forall n > 0$;
- f è meromorfa in $\infty \Leftrightarrow \exists n_0 > 0$ t.c. $a_n = 0 \ \forall n > n_0$;
- f ha una singolarità essenziale in $\infty \Leftrightarrow a_n \neq 0$ frequentemente.

Effettuiamo ora alcune osservazioni:

- se f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, ed è olomorfa anche in ∞, allora f è costante. Essendo $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ un compatto, $|f|$ ammette massimo su S^2. Usando il principio del massimo modulo, f risulta allora costante su S^2;
- se f è olomorfa su tutto $\mathbb{C}$, ed è meromorfa in ∞, allora f è un polinomio. Infatti f è sviluppabile in serie di Taylor in tutto $\mathbb{C}$, e tale serie è un polinomio perché f è meromorfa in ∞, se è polinomio è di grado n:

$$p(z) = z^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n} \right) =$$
$$= \frac{1}{z^n} \left(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 z^0 \right),$$

da cui ∞ è un polo di molteplicità n;

- se f non è un polinomio, ∞ è una singolarità essenziale.

Le funzioni olomorfe su S^2 sono solo le costanti, perciò studieremo dunque le funzioni meromorfe su S^2.

Immaginiamo una funzione meromorfa su S^2 ha un numero finito di poli (l'insieme dei poli è discreto, e S^2 è compatto). Uno di questi può essere ∞, ma concentriamoci sui poli in $\mathbb{C}$:

$$z_1, \dots, z_k$$

con molteplicità:

$$m_1, \dots, m_k$$

Il polinomio seguente:

$$p(z) = (z - z_1)^{m_1} \dots (z - z_k)^{m_k}$$

ha come zeri i poli di f, con uguale molteplicità. Similmente $p(z)$ è una funzione meromorfa su S^2. La funzione:

$$q(z) = f(z)\, p(z)$$

è dunque meromorfa su S^2, ed è olomorfa su $\mathbb{C}$ perché i poli di f sono stati "annullati" da p (tutti tran-

ne ∞). Allora ciò è un polinomio:

$$q(z) = f(z)\,p(z) \in \mathbb{C}[z]$$

$$f(z) = \frac{q(z)}{p(z)} \in \mathbb{C}(z)$$

Le uniche funzioni olomorfe su S^2, dunque, sono le funzioni razionali.

Vogliamo ora analizzare il comportamento all'infinito di f. Tale comportamento dipende dai gradi di p e q. Siano:

$$m = \deg q \qquad n = \deg p$$

Bisogna:

- se $m = n$, f è olomorfa in ∞, e l'immagine è il rapporto dei coefficienti direttivi, cioè non nullo;
- se $n > m$, f ha uno zero in ∞, di molteplicità $(n - m)$;
- se $m > n$, f ha un polo in ∞, di molteplicità $(m - n)$.

TEOREMA DEI RESIDUI

Sia f una funzione olomorfa in $\rho_2 < |z| < \rho_1$.

Poi $\rho_2 < r < \rho_1$, si ha:

$$\int_{|z|=r} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} \frac{a_{-1}}{z}\,dz + \int_{|z|=r} g(z)\,dz,$$

con:

$$g(z) = \sum_{n \neq -1} a_n z^n,$$

nel caso in cui:

$$f(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n z^n = g(z) + \frac{a_{-1}}{z}$$

$g(z)\,dz$ è una forma esatta, dato che ha come primitiva:

$$G(z) = \sum_{n \neq -1} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$$

Dunque:

$$\int_{|z|=r} g(z)\,dz = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{|z|=r} f(z)\,dz = \int_{|z|=r} \frac{a_{-1}}{z}\,dz =$$

$$= a_{-1} \int_{|z|=r} \frac{1}{z}\,dz = a_{-1}\, 2\pi i\, I(\gamma, 0),$$

ove γ è il cammino che parametrizza la circonferenza di raggio r. Dunque:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma f(z)\,dz = I(\gamma, 0)\, a_{-1}$$

Se in particolare γ è la circonferenza centrata in 0 e di raggio ε, tale che f ha una singolarità isolata solo in 0, si ha:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

Si definisce allora, data f olomorfa in un disco di centro z_0, tranne in z_0, il RESIDUO di f in z_0:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) \overset{\text{def}}{=} a_{-1},$$

ove a_{-1} è il coefficiente associato a $\frac{1}{z - z_0}$ nello sviluppo di Laurent.

Se invece $z_0 = \infty$, si ha una definizione differente. Sia f olomorfa in $|z| > r$, e cioè ha una singolarità isolata

Mediante la sostituzione $z' = \frac{1}{z}$, si ha:

$$dz = -\frac{1}{z'^2}\, dz',$$

da cui $f(z)\,dz = -\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) dz'$, da cui si definisce:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Res}\left(-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right), 0\right)$$

Se dunque $f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^m$ in un intorno di ∞, si ha:

$$-\frac{1}{z'^2} f\left(\frac{1}{z'}\right) = -\frac{1}{z'^2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{-m} z'^{-m} =$$

$$= -\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_{-m} z'^{m-2},$$

da cui:

$$\operatorname{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$$

TEOREMA (DEI RESIDUI)

Sia $D = S^2$, e sia f olomorfa su $D \setminus \Delta$, ove Δ è un insieme discreto. Sia $K \subseteq D$ un compatto, con frontiera Γ differenziabile a tratti, tale che $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$. Allora:

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 2\pi i \sum_{z_k \in K \cap \Delta} \operatorname{Res}(f, z_k)$$

Dim.

Dividiamo la dimostrazione in due casi:

- supponiamo che $\infty \notin K$; allora K è compatto in $\mathbb{C}$. Sia, per ogni k, Δ_k un disco in K disgiunto da tutti gli altri, contenuto in K, contenente soltanto z_k come punto di singolarità. Sia $\gamma_i = \partial \Delta_i$ per ogni i (presa nel senso positivo). Consideriamo allora:

$$K' = K \setminus \bigcup_i \Delta_i,$$

con frontiera:

$$\partial K' = \Gamma' = \Gamma - \bigcup_i \gamma_i,$$

ove il segno è da interpretare così: la circonferenza va percorsa in senso negativo, e Γ è il bordo orientato di K'. Dunque:

$$0 = \int_{\partial K'} f(z)\, dz = \int_\Gamma f(z)\, dz - \sum_i \int_{\gamma_i} f(z)\, dz =$$

$$= \int_\Gamma f(z)\,dz - 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i),$$

da cui:

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_i \operatorname{Res}(f, z_i);$$

- supponiamo che $\infty \in \mathbb{K}$: sia $r \in \mathbb{R}$ tale che $\{|z| = r\}$ isola il punto ∞. In altre parole, siano le singolarità tutte interne in $|z| < r$ (ad eccezione di ∞): interpretiamo $\mathbb{K}$ con $\{|z| \le r\} = \mathbb{K}'$. Si ha:

- $\int_{|z|=r} f(z)\,dz = -2\pi i \operatorname{Res}(f, \infty)$;

- $\int_{|z|=r} f(z)\,dz + \int_\Gamma f(z)\,dz = 2\pi i \left(\sum_i \operatorname{Res}(f, z_i)\right)$;

da cui la tesi. c.v.d.

COROLLARIO (SOLO ENUNCIATO)

Sia f olomorfa in $\mathbb{S}^2 \setminus \{z_1, \dots, z_k\}$. Data che la sua fonte è nulla, si ha immediatamente:

$$\sum_i \operatorname{Res}(f, z_i) = 0$$

CALCOLO DEI RESIDUI

Studiamo il caso in cui f ha un polo semplice in $z_0 \neq \infty$.
Allora:

$$f(z) = \frac{g(z)}{z - z_0}, \quad g(z_0) \neq 0$$

se $g(z) = \sum_{n \geq 0} c_n (z - z_0)^n$ ($g(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0),
la serie di Laurent di $f(z)$ è:

$$f(z) = \sum_{n \geq -1} a_{n+1} (z - z_0)^n,$$

da cui:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = a_0 = g(z_0) = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0)$$

Se f è meromorfa su S^2, cioè:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \in \mathbb{C}(z),$$

e z_0 è tale che:

- $P(z_0) \neq 0$;
- $Q(z_0) = 0$;
- $Q'(z_0) \neq 0$,

allora:

$$P(z) = a_0 + a_1 (z - z_0) + \dots$$
$$Q(z) = b_1 (z - z_0) + b_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

Segue:

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{a_0}{b_1} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

Ex. tipo:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}$$

La funzione ha due poli semplici $\{i, -i\}$. Si ha:

$$\frac{P(i)}{Q'(i)} = \frac{e^{-1}}{2i} = -\frac{i}{2e}$$

$$\frac{P(-i)}{Q'(-i)} = -\frac{e}{2i} = \frac{ie}{2}$$

Analizziamo ora il caso dei poli multipli. Sia:

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k} g(z),$$

con $g(z)$ olomorfa in un intorno di z_0, con $g(z_0) \neq 0$.

Allora il residuo di f in z_0 è uguale al coefficiente di $(z-z_0)^{k-1}$ nello sviluppo in serie di Taylor di $g(z)$ centrata in z_0.

Es. Sia:

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$$

Calcoliamo il residuo nel polo doppio $z_0 = i$. Si ha:

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)^2} g(z), \quad g(z) = \frac{e^{iz}}{z(z+i)^2}$$

Ponendo $z = i+t$, si ha:

$$h(t) = \frac{e^{i(i+t)}}{(i+t)(2i+t)^2},$$

e dobbiamo calcolare il termine di grado 1. Si ha:

- $e^{i(i+t)} = e^{-1} e^{it} = e^{-1}\left(1 + it + \dots\right)$;
- $\frac{1}{i+t} = \frac{1}{i} \frac{1}{1 - it} = -i\left(1 + it + \dots\right)$;
- $\frac{1}{(2i+t)^2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\left(1 - \frac{it}{2}\right)^2} = -\frac{1}{4}\left(1 + \frac{it}{2} + \dots\right)\left(1 + \frac{it}{2} + \dots\right) = -\frac{1}{4}\left(1 + it + \dots\right)$.

Segue:

$$h(t) = \frac{1}{4e} i \left(1 + 3it + \dots\right),$$

da cui:

$$\operatorname{Res}(f, i) = -\frac{3}{4e}$$

FUNZIONI OLOMORFE NON COSTANTI

TEOREMA

Sia $D \subseteq \mathbb{C}$ un aperto, e sia $f: D \to \mathbb{C}$ una funzione olomorfa non costante. Allora f è una mappa aperta.

Dim

Basta provare la proprietà per un generico intorno di un punto $z_0 \in D$ di cui sono due:

- $f'(z_0) \neq 0$;
- $f'(z_0) = 0$.

Se $f'(z_0) \neq 0$, allora f è localmente in z_0 un diffeomorfismo, dunque in particolare è una mappa aperta.

Se $f'(z_0) = 0$, possiamo, senza perdere di generalità, considerare:

$$g(z) = f(z) - f(z_0)$$

Si ha:

$$g(z_0) = g'(z_0) = 0,$$

cioè z_0 è uno zero non semplice. Sia dunque:

$$g(z) = a_k (z - z_0)^k \, g_1(z)$$

Esiste una $h(z)$ funzione olomorfa in un intorno di z_0 tale che:

$$\left[h(z) \right]^k = g_1(z)$$

Dunque:

$$g(z) = \left[b_k (z - z_0) h(z) \right]^k,$$

ESERCIZI VARI

Consideriamo due interi $p, q \geq 1$. Sia:

$$S_1(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \in \mathbb{K}[[x]],$$

e sia:

$$S_p(x) = (S_1(x))^p$$

Per induzione su n, si può immediatamente dimostrare che:

$$1 + p + \frac{p(p+1)}{2!} + \ldots + \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{n!} = \frac{(p+1)\ldots(p+n)}{n!}$$

Se non sbaglio è ovvio:

$$1 + p = \frac{1+p}{1!}$$

Quindi se basta induttivo:

$$1 + p + \ldots + \frac{p\ldots(p+n-1)}{n!} + \frac{p\ldots(p+n)}{(n+1)!} = \frac{(p+1)\ldots(p+n)}{n!} + \frac{p\ldots(p+n)}{(n+1)!} =$$

$$= \frac{(p+1)\ldots(p+n)}{(n+1)!}\left[n+1+p\right] = \frac{(p+1)\ldots(p+n+1)}{(n+1)!}$$

Da qui si può dimostrare, per induzione su p, che:

$$S_p(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{p+n-1}{n} x^n$$

Per $p=1$ ciò dimostrazione è banale. Poi:

$$S_{p+1}(x) = S_p(x)\,S_1(x) = \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n-1}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n\right) =$$

$$= \sum_{t=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{t}\binom{p+n-1}{n}\right)x^t = \sum_{t=0}^{+\infty}\binom{p+t}{t}x^t = \sum_{t=0}^{+\infty}\binom{(p+1)+t-1}{t}x^t$$

Ora, dato che $S_p(x)\,S_q(x) = S_{p+q}(x)$, si ottiene subito:

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n-1}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\binom{q+n-1}{n}x^n\right) = \sum_{d=0}^{+\infty}\left(\sum_{e=0}^{d}\binom{p+e-1}{e}\binom{q+d-e-1}{d-e}\right)x^d =$$

$$= \sum_{d=0}^{+\infty}\binom{p+q+d-1}{d}x^d,$$

da cui si ottiene l'uguaglianza:

$$\sum_{e=0}^{d}\binom{p+e-1}{e}\binom{q+d-e-1}{d-e} = \binom{p+q+d-1}{d}$$

Consideriamo due serie formali:

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \qquad T(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n, \quad b_n \neq 0$$

Siano:

$$U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^p x^n \qquad V(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n x^n \qquad W(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{b_n} x^n$$

Allora:

$$\rho(S)^p = \rho(U)$$

$$\rho(V) \leq \rho(S) \cdot \rho(T)$$

$$\rho(W) \leq \frac{\rho(S)}{\rho(T)}, \quad \rho(T) > 0$$

Applichiamo le precedenti:

- per ipotesi, si ha:

$$\rho = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

allora:

$$\rho^p = \left(\frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \right)^p = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \left(\sqrt[n]{|a_n|}\right)^p} = \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n^p|}},$$

da cui la tesi;

- si applica:

$$\frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n b_n|}} \leq \frac{1}{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|b_n|}} = \rho(S)\rho(T);$$

- nella formula, si suppone $\rho(T) > 0$. Per il punto precedente:

$$\rho(S) \leq \rho(T)\rho(W) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho(W) \leq \frac{\rho(S)}{\rho(T)}.$$

Determiniamo ora il raggio di convergenza di alcune serie:

- $\sum_{n=0}^{+\infty} q^{n^2} z^n$, $|q|<1$. In questo caso, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|q|^{(n+1)^2}|z|^{n+1}}{|q|^{n^2}|z|^n} = \lim_{n\to+\infty} |q|^{2n+1}|z| = 0,$$

da cui il raggio di convergenza è $+\infty$;

- $\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n z^{n!}$. In questo caso (dato che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$ per il noto fatto):

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{2^n} = \lim_{n\to+\infty} (\sqrt[n]{2})^n = 1,$$

da cui il raggio di convergenza è 1;

- $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, con $a_{2n+1} = t^{2n+1}$, $a_{2n} = s^{2n}$, con $0<t<1$, $0<s<1$.

In questo caso è evidente che:

$$\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\{s,t\},$$

da cui il raggio di convergenza è:

$$\frac{1}{\max\{s,t\}}$$

STUDIO DELL'ESPONENZIALE COMPLESSO

Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora:

$$|e^z - 1| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} - 1 \right| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = \left| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{n+1}}{(n+1)!} \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} = |z| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{|z|^n}{n!} = |z| e^{|z|},$$

da cui:

$$|e^z - 1| = e^{|z|} - 1 \leq |z| e^{|z|}$$

Studiamo ora, per varie $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Si ha:

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{z^k}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{z^k}{k!}$$

Ora, si ha banalmente:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = 1$$

Per un Teorema, detto di CONVERGENZA DOMINATA, si ha in questo caso:

$$e^z = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

STUDIO DELLE FUNZIONI TRIGONOMETRICHE

Definiamo ora, per $z \in \mathbb{C}$:

$$\cos z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin z \overset{\text{def}}{=} \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Tali funzioni sono chiaramente analitiche in tutto $\mathbb{C}$. Si ha:

$\forall\, x \in \mathbb{R}$:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n x^n}{n!} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-i)^n x^n}{n!}\right) =$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}(-1)^n$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} i^n + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-x)^n}{n!} i^n\right) =$$

$$= \frac{1}{2i} \cdot 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}(-1)^n$$

da cui $\cos z$ e $\sin z$ sono i prolungamenti analitici su $\mathbb{C}$ delle funzioni $\sin x$ e $\sin x$, definite su $\mathbb{R}$.

Siano ora $z, z' \in \mathbb{C}$. Allora:

- $\cos z \cos z' - \sin z \sin z' = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'})}{4} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'})}{4} =$

$$= \frac{e^{iz}e^{iz'} + e^{iz}e^{-iz'} + e^{-iz}e^{iz'} + e^{-iz}e^{-iz'} + e^{iz}e^{iz'} - e^{iz}e^{-iz'} - e^{-iz}e^{iz'} + e^{-iz}e^{-iz'}}{4} =$$

$$= \frac{e^{iz}e^{iz'} + e^{-iz}e^{-iz'}}{2} = \cos(z + z');$$

- $\sin z \cos z' + \cos z \sin z' = \frac{(e^{iz} - e^{-iz})(e^{iz'} + e^{-iz'})}{4i} + \frac{(e^{iz} + e^{-iz})(e^{iz'} - e^{-iz'})}{4i} =$

$$= \frac{e^{iz}e^{iz'} + e^{iz}e^{-iz'} - e^{-iz}e^{iz'} - e^{-iz}e^{-iz'} + e^{iz}e^{iz'} - e^{iz}e^{-iz'} + e^{-iz}e^{iz'} - e^{-iz}e^{-iz'}}{4i} =$$

$$= \frac{e^{iz}e^{iz'} - e^{-iz}e^{-iz'}}{2i} = \sin(z + z');$$

- $\cos^2 z + \sin^2 z = \frac{(e^{iz} + e^{-iz})^2}{4} - \frac{(e^{iz} - e^{-iz})^2}{4} =$

$$= \frac{e^{iz}e^{iz} + 2 + e^{-iz}e^{-iz} - e^{iz}e^{iz} + 2 - e^{-iz}e^{-iz}}{4} = \frac{4}{4} = 1;$$

Dimostriamo ora che valgono le seguenti uguaglianze:

- $\sum_{p=0}^{m} \sin(px+y) = \sin\left(\frac{m}{2}x+y\right)\frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$;
- $\sum_{p=0}^{m} \cos(px+y) = \cos\left(\frac{m}{2}x+y\right)\frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}$.

Si ha infatti:

$$\cos(px+y) + i\sin(px+y) = e^{i(px+y)} = (e^{ix})^p (e^{iy}),$$

da cui:

$$\sum_{p=0}^{m}(e^{ix})^p(e^{iy}) = \frac{(e^{ix})^{m+1}-1}{e^{ix}-1}(e^{iy}) = \frac{e^{i\frac{x}{2}m+1}\left(e^{i\frac{x}{2}m+1} - e^{-i\frac{x}{2}m+1}\right)}{e^{\frac{ix}{2}}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)}(e^{iy}) =$$

$$= \frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} e^{i\frac{x}{2}m} e^{ix} e^{iy} = \frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} e^{i\left(\frac{m}{2}x+y\right)} =$$

$$= \frac{\sin\frac{m+1}{2}x}{\sin\frac{x}{2}}\left[\cos\left(\frac{m}{2}x+y\right) + i\sin\left(\frac{m}{2}x+y\right)\right],$$

da cui la tesi, eguagliando le parti reale e immaginaria.

ESERCIZI SULLE FORME DIFFERENZIALI

Sia γ un cammino continuo e c.d.c. tratti, e sia $\bar{\gamma}$ l'immagine tramite il coniugio. Sia $f(z)$ continua su γ, allora $\overline{f(z)}$ è continua su $\bar{\gamma}$. Infatti, se per ipotesi f è continua su γ, allora:

$$g : z \longrightarrow \overline{f(\bar{z})}$$

$$g = c \circ f \circ c,$$

dove c è il coniugio. Infatti:

$$z \in \bar{\gamma} \longrightarrow \bar{z} \in \gamma \xrightarrow{f} f(\bar{z}) \xrightarrow{c} \overline{f(\bar{z})},$$

e g è continua perché composizione di funzioni continue. Si ha anche:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})}\,dz$$

Infatti:

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,dz} = \sum_{i=1}^{3} \overline{\int_{\gamma_i} f(z)\,dz} = \sum_{i=1}^{3} \overline{\int_{a_i}^{b_i} f(\gamma_i(t))\,\gamma_i'(t)\,dt} =$$

RESIDUO DELLA DERIVATA LOGARITMICA

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa in un intorno di z_0.

Intendiamo determinare il residuo della derivata logaritmica $\frac{f'}{f}$ in z_0. Se ha:

$$f(z) = (z - z_0)^k \, g(z)$$

- g olomorfa in z_0;
- $g(z_0) \neq 0$;
- $k \geq 0$ se f è olomorfa in z_0;
- $k < 0$ se z_0 è un polo di f di ordine k.

Si ha:

$$f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} g(z) + (z - z_0)^k g'(z)$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)},$$

da cui si ha che (supponiamo $k \neq 0$):

- z_0 è polo semplice per $\frac{f'}{f}$;
- $\operatorname{Res}\left(\frac{f'}{f}, z_0\right) = k$ ($k \neq 0$ se z_0 è uno zero, $k < 0$ se z_0 è polo).

ZERI E POLI DI UNA FUNZIONE MEROMORFA

PROPOSIZIONE

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa non costante in un aperto $D \subseteq \mathbb{C}$, e sia Γ il bordo orientato di un compatto $K \subseteq D$. Supponiamo che f non abbia poli su Γ, e che $a \notin f(\Gamma)$. Allora:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} \, dz = Z - P,$$

ove:

- Z è la somma delle molteplicità delle radici dell'equazione $f(z) - a = 0$ in K;
- P è la somma delle molteplicità dei poli di f contenuti in K.

Dim.

Applicando il Teorema dei residui:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = \sum_{K \setminus \Gamma} \operatorname{Res}\left(\frac{f'(z)}{f(z) - a}, z_j \right),$$

ove z_j sono i poli di $\frac{f'}{f - a}$, ovvero gli zeri di $f - a$ e i poli di f, contati con la loro molteplicità con segno, c.v.d.

In particolare, se f è olomorfa:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} dz = Z,$$

ossia il numero degli zeri di $f(z) - a$ in K, ognuno contato con la sua molteplicità.

PROPOSIZIONE

Sia z_0 una radice di molteplicità k di $f(z) - a = 0$, con f olomorfa e non costante in un intorno di z_0. Per un intorno qualunque V di z_0 e un $b \neq a$ sufficientemente "vicino" ad a (ossia per $|b - a| < \varepsilon$, ε sufficientemente piccolo), l'equazione $f(z) - b = 0$ ha esattamente k zeri semplici in V.

Sia U l'intorno di z_0 nel quale f è olomorfa non costante.

Sia ε_1 tale che in $\overline{B(z_0, \varepsilon_1)}$ contiene solo z_0 come soluzione dell'equazione $f(z) = a$: ciò è possibile perché, se f non è costante, $Z_a = \{z \in U \mid f(z) = a\}$ è discreto.

Se f non è costante in tale disco f' è olomorfa non identicamente nulla, da cui gli zeri di f' formano un discreto. È dunque possibile scegliere $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ tale che $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$:

- z_0 è unica soluzione di $f(z) = a$ in $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$;
- z_0 è unica soluzione di $f'(z) = 0$ in $\overline{B(z_0, \varepsilon)}$ (eventualmente) z_0.

Sia γ una parametrizzazione di $\partial B(0, \varepsilon)$. Consideriamo:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - b} \, dz$$

Tale quantità rimane costante nelle componenti connesse di $f(\gamma)^c$. Per b sufficientemente vicino ad a, diciamo $(b \in B(a, \varepsilon))$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - b} \, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a} \, dz = k,$$

da cui l'equazione $f(z) = b$ ha k radici, contate con la loro molteplicità. Ma in $B(z_0, \varepsilon)$ $f'(z) \neq 0 \ \forall z \neq z_0$: da qui si ha che le k radici sono distinte, c.v.d.

FUNZIONI DOPPIAMENTE PERIODICHE

Siano e_1 e e_2 due numeri complessi, entrambi non nulli, linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$ (ossia $\frac{e_1}{e_2} \notin \mathbb{R}$).

Se consideriamo $\mathbb{C}$ come gruppo additivo, un suo sottogruppo Ω è formato da tutti i numeri del tipo:

$$z = e_1 m_1 + e_2 m_2 \,, \quad m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$$

Diremo che una funzione definita su $\mathbb{C}$ ha Ω come GRUPPO DI PERIODO se:

$$f(z + e_1 m_1 + e_2 m_2) = f(z)$$

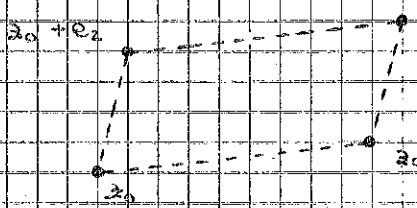
per ogni $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, o equivalentemente:

$$f(z + e_1) = f(z) \quad ; \quad f(z + e_2) = f(z)$$

Dato $z_0 \in \mathbb{C}$, consideriamo tutti i punti della forma:

$$z = z_0 + t_1 e_1 + t_2 e_2 \,, \quad 0 \le t_1 \le 1 \,, \quad 0 \le t_2 \le 1$$

Essi è il parallelogrammo di vertici:



Tale figura sarà detta PARALLELOGRAMMA DEL PERIODO, con primo vertice z_0.

Sia ora f una funzione meromorfa su $\mathbb{C}$ che ha Ω come gruppo di periodi. Sia $z_0 \in \mathbb{C}$ tale che il bordo γ del parallelogrammo del periodo di primo vertice z_0 non contenga poli di f. Dunque, chiaramente:

$$\int_\gamma f(z)\, dz = 0 \,,$$

per la periodicità. Dunque:

$$0 = \int_\gamma f(z)\, dz = \int_0^1 \left[f(z_0 + t e_1) - f(z_0 + e_2 + t e_1) \right] dt +$$

$$+ \int_0^1 \left[f(z_0 + e_1 + t e_2) - f(z_0 + t e_2) \right] dt$$

PROPOSIZIONE

Sia $f(z)$ una funzione meromorfa e non costante su $\mathbb{C}$, che ha come gruppo di periodi Ω. Allora, dato un parallelogrammo γ dei periodi tale che il suo bordo $\partial\gamma$ non incontri zeri né poli di f, in tale parallelogrammo il numero degli zeri di f è uguale al numero dei poli di f, contati con molteplicità.

Dim.

Sia $a \notin f(\partial\gamma)$. Allora:

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(z_0 + te_1)\,e_1}{f(z_0 + te_1) - a}\,dt - \int_0^1 \frac{f'(z_0 + e_2 + te_1)\,e_1}{f(z_0 + e_2 + te_1) - a}\,dt = 0$;
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{f'(z_0 + te_2)\,e_2}{f(z_0 + te_2) - a}\,dt - \int_0^1 \frac{f'(z_0 + e_1 + te_2)\,e_2}{f(z_0 + e_1 + te_2) - a}\,dt = 0$,

da cui:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z) - a}\,dz = 0 = 2 - P, \text{ c.v.d.}$$

COROLLARIO

Una funzione olomorfa in $\mathbb{C}$ che ha Ω come gruppo dei periodi è costante.

Dim.

La funzione $|f|$ è continua su un qualsiasi parallelogrammo dei periodi (da cui discende è compatto). Esiste dunque un punto di massimo assoluto z_0, che per la periodicità di $|f|$ è punto di massimo assoluto in $\mathbb{C}$. Considerando uno di tali parallelogrammi dei periodi, tale che z_0 è punto interno, si deduce che f è costante per un corollario del principio del massimo modulo, c.v.d.

Sia ora γ un certo, il bordo di un parallelogrammo dei periodi. Consideriamo il seguente integrale:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\,f'(z)}{f(z) - a}\,dz, \quad a \notin f(\partial\gamma)$$

Si ha:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\,f'(z)}{f(z)-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(z_0+te_1)f'(z_0+te_1)\,e_1}{f(z_0+te_1)-a}\,dt +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(z_0+e_1+te_2)f'(z_0+e_1+te_2)\,e_2}{f(z_0+e_1+te_2)-a}\,dt - \frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(z_0+e_2+te_1)f'(z_0+e_2+te_1)e_1}{f(z_0+e_2+te_1)-a}\,dt +$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_0^1 \frac{(z_0+te_2)f'(z_0+te_2)\,e_2}{f(z_0+te_2)-a}\,dt =$$

$$= -\frac{e_2}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz + \frac{e_1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz,$$

dove γ_1 è il lato del parallelogrammo di vertici z_0 e z_0+e_1, e γ_2 è il lato del parallelogrammo di vertici z_0 e z_0+e_2.

Gli integrali seguenti:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_1}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_2}\frac{f'(z)}{f(z)-a}\,dz,$$

uguali a:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma_1)}\frac{1}{w-a}\,dw, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int_{f(\gamma_2)}\frac{1}{w-a}\,dw,$$

sono interi, dato che $f(\gamma_1)$ e $f(\gamma_2)$ sono curve chiuse.

Del resto l'integrale $\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z\,f'(z)}{f(z)-a}\,dz$ è uguale alla somma dei residui della funzione.

I suoi poli sono i poli di f e gli zeri di $f-a$:

- se β_i è polo per f di molteplicità k, allora:

$$f(z)-a = (z-\beta_i)^k g(z)$$

con $k<0$, e g olomorfa in un intorno di β_i, con $g(\beta_i)\neq 0$.

Inoltre:

$$z\,f'(z) = z\cdot k\,(z-\beta_i)^{k-1} g(z) + z\,(z-\beta_i)^k g'(z),$$

da cui:

$$\frac{z\,f'(z)}{f(z)-a} = \frac{z\cdot k}{(z-\beta_i)} + z\,\frac{g'(z)}{g(z)},$$

da cui:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z\,f'(z)}{f(z)-a}, \beta_i\right) = -k\,\beta_i;$$

- se α_i è uno zero di $f(z) - a$ di molteplicità h, allora:

$$f(z) - a = (z - \alpha_i)^h g(z),$$

con $h > 0$, $g(z)$ olomorfa in un intorno di α_i, $g(\alpha_i) \neq 0$.

Dunque:

$$z f'(z) + z h (z - \alpha_i)^{h-1} g(z) + z (z - \alpha_i)^h g'(z),$$

da cui, come prima:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z f'(z)}{f(z) - a}, \alpha_i \right) = h \alpha_i.$$

Tenuto conto che per le osservazioni precedenti:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z f'(z)}{f(z) - a} dz \in \Omega,$$

si ha, in conclusione, per ogni $a \notin f(\gamma)$:

$$\sum_i \alpha_i \equiv \sum_j \beta_j \pmod{\Omega},$$

ove:

- α_i è uno zero di $f(z) - a$, contato senza molteplicità;
- β_j è un polo di f, contato senza molteplicità,

(contenuti nel parallelogrammo dei periodi considerato).

In particolare, la somma $\sum_i \alpha_i$, modulo Ω, non dipende da a.

VALUTAZIONE DI INTEGRALI CON IL METODO DEI RESIDUI

Vogliamo ora calcolare integrali definiti senza determinare una primitiva dell'integrale, ma ricondurremo il problema a un calcolo di residui.

Limiteremo il nostro studio ad alcuni casi tipici, studiandone uno per volta.

Iniziamo con un integrale del tipo:

$$I = \int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)\, dt,$$

con R funzione razionale senza poli sulla circonferenza unitaria.

Poniamo:

$$z = e^{it} \qquad dt = d\,\frac{1}{i}\log z = \frac{1}{iz}\,dz$$

Sempre I è uguale a $(2\pi i)$ volte la somma dei residui di:

$$\frac{1}{iz}\, R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right),$$

da cui:

$$I = 2\pi \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z} R\left(\frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)\right), z_k\right),$$

estesa ai poli z_k contenuti nel disco unitario.

Ex. Calcolare:

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a + \sin t}, \qquad a \in \mathbb{R},\ a > 1$$

Si ha:

$$I = 2\pi \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z}\,\frac{1}{a + \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)}, z_k\right) =$$

$$= 2\pi \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{2}{z^2 + 2aiz - 1}, z_k\right)$$

Si ha poi:

$$z^2 + 2aiz - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{-2ai \pm \sqrt{-4a^2 + 4}}{2} = -ai \pm i\sqrt{a^2 - 1},$$

da cui, dato che:

- $\left(a + \sqrt{a^2 + 1}\right) = a^2 + 2a\sqrt{a^2 - 1} + a^2 - 1 > 2a^2 - 1 > 1$;
- $\dfrac{d}{da}\left[a - \sqrt{a^2 - 1}\right] = -1 - \dfrac{2a}{2\sqrt{a^2 - 1}} < 0$, $\quad 1 - \sqrt{1 - 1} \neq 1$, $\quad \lim_{a \to +\infty} a - \sqrt{a^2 - 1} = 0$,

si ha che qualunque sia $a \in]1, +\infty[$, uno dei due poli è contenuto nel disco unitario, vale a dire:

$$z_0 = -i\,(a - \sqrt{a^2-1})$$

si ha dunque:

$$\mathrm{Res}\left(f, z_0\right) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)} = \frac{2i}{2z_0 + 2ai} =$$

$$= \frac{1}{-a + \sqrt{a^2-1} + a} = \frac{1}{\sqrt{a^2-1}},$$

da cui:

$$I = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-1}}$$

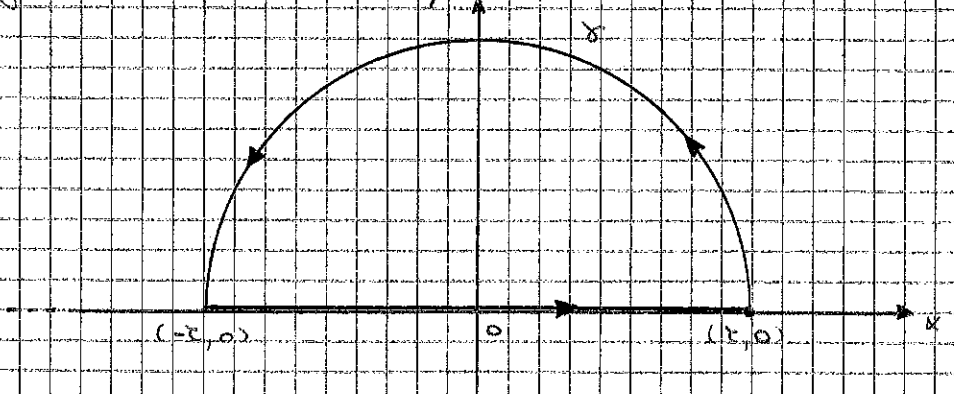
Consideriamo ora un integrale del tipo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx,$$

dove R è una funzione razionale priva di poli reali.

Sappiamo anzitutto che, perché l'integrale sia convergente, una condizione necessaria e sufficiente è che sia $\lim_{|x|\to+\infty} x\,R(x) = 0$.

Per calcolare tale integrale, prendiamo considerato γ, il bordo di un semidisco delimitato dalla circonferenza di centro 0 e raggio r e dal segmento reale $[-r, r]$. Per r sufficientemente grande, $R(z)$ è olomorfa su γ.



Se $\delta(r)$ denota la semicirconferenza, allora:

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx + \int_{\delta(r)} R(z)\,dz = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,(R(z)),$$

dove i poli interessati sono quelli di $R(z)$ nel semipiano positivo.

Per $r \to +\infty$:

$$\int_{-r}^{r} R(x)\,dx \longrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

se dimostriamo che:

$$\int_{\delta(r)} R(z)\,dz \to 0,$$

allora avremo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = 2\pi i \sum \text{Res}\,(R(z)),$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i poli di R del semipiano positivo. In alternativa:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx = -2\pi i \sum \text{Res}\,(R(z)),$$

ove la sommatoria è estesa a tutti i poli di R del semipiano negativo, dato che:

$$\sum_{\mathbb{C}} \text{Res}\,(R(z)) = 0,$$

essendo R olomorfa su $\mathbb{C} \setminus \mathcal{Z}$, con $\mathcal{Z}$ discreto.

Rimane da provare che $\int_{\delta(r)} R(z)\,dz$ tende a 0, per $r \to +\infty$.

LEMMA

Sia $f(z)$ una funzione continua nel settore $r \geq 0$, $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$. Se:

$$\lim_{|z| \to +\infty} z\, f(z) = 0, \quad \vartheta_1 \leq \arg z \leq \vartheta_2,$$

allora:

$$\int_{\substack{|z|=r \\ \arg z \in [\vartheta_1, \vartheta_2]}} f(z)\,dz \to 0, \quad |r| \to +\infty$$

Idea.

Sia $M(r) = \max_{\substack{|z| \geq r \\ \arg z \in [\vartheta_1, \vartheta_2]}} |f(z)|$. Allora:

$$\left| \int_{\substack{|z|=r \\ \arg z \in [\vartheta_1, \vartheta_2]}} f(z)\,dz \right| \leq M(r)\, r\, (\vartheta_2 - \vartheta_1),$$

da cui la tesi, c.v.d.

Grazie al lemma, è ora immediato che:

$$\int_{\delta(r)} R(z)\,dz \to 0, \quad |r| \to +\infty$$

Lemma

Sia f continua nel settore $r \geq 0$, $\theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$. Se:

$$\lim_{z \to 0} z f(z) = 0 \quad \text{, } \theta_1 \leq \arg z \leq \theta_2$$

allora:

$$\lim_{\substack{r \to 0 \\ \text{finito}}} \int_{\substack{|z|=r \\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2]}} f(z)\, dz = 0$$

Dim.

Analoga a quella del lemma precedente, c.v.d.

Es. Consideriamo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6}$$

La funzione $\frac{1}{1+z^6}$ ha tre poli nel semipiano positivo:

$$e^{i\frac{\pi}{6}}, \quad e^{i\frac{\pi}{2}}, \quad e^{i\frac{5\pi}{6}},$$

e tali poli sono semplici. Si ha dunque:

- $\operatorname{Res}\left(R, e^{i\frac{\pi}{6}}\right) = \frac{1}{6\left(e^{i\frac{\pi}{6}}\right)^5} = \frac{e^{i\frac{\pi}{6}}}{6}$,
- $\operatorname{Res}\left(R, e^{i\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{1}{6e^{i\frac{5\pi}{2}}} = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{6} = -\frac{i}{6}$,
- $\operatorname{Res}\left(R, e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) = \frac{1}{6e^{i\frac{25\pi}{6}}} = \frac{e^{-i\frac{5\pi}{6}}}{6}$.

Allora:

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \pi i \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{2}} + e^{i\frac{5\pi}{6}}\right) =$$

$$= \pi i \left(\cos\tfrac{\pi}{6} + i\sin\tfrac{\pi}{6} + i + \cos\tfrac{5\pi}{6} + i\sin\tfrac{5\pi}{6}\right) =$$

$$= \pi i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$$

Vogliamo ora studiare integrali del tipo:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ix}\, dx,$$

con $f(z)$ funzione olomorfa in un intorno di ogni punto del semipiano chiuso $\{\gamma \geq 0\}$, eccetto un numero finito di punti

Consideriamo prima il caso in cui le singolarità non sono sull'asse reale. Intanto è ben definito:

$$\int_{-c}^{c} f(x)\, e^{ix}\, dx ,$$

e si ha:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x)\, e^{ix}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}\, dx ,$$

ove supponiamo che l'integrale sia convergente.

PROPOSIZIONE

Se per $y \geq 0$ (ovvio z appartenente al semipiano complesso chiuso con parte immaginaria positiva) vale:

$$\lim_{|z| \to +\infty} f(z) = 0 ,$$

allora:

$$\lim_{c \to +\infty} \int_{-c}^{c} f(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,(f(z) e^{iz}) ,$$

ove la sommatoria è estesa alle singolarità di $f(z)$ contenute nel semipiano $\{y > 0\}$ (avendo supposto che le singolarità non si trovano sull'asse reale).

Dim.

OSSERVAZIONE

La proposizione ci dice che nel caso in cui $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ è convergente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\,(f(z) e^{iz})$$

si noti che non è richiesta l'assoluta convergenza (ovvio che $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx$ sia convergente).

OSSERVAZIONE

Si ha $|e^{iz}| \leq 1$ nel semipiano $\{y \geq 0\}$:

$$e^{iz} = e^{ix - y} = e^{-y} e^{ix}$$

Possiamo allora integrare, nel semipiano $\{y \geq 0\}$, come si è fatto per gli integrali del secondo tipo.

Con le stesse notazioni, vogliamo dimostrare che:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma(r)} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0 ,$$

e ciò proporzione discendere da ciò in maniera immediata. Non faremo però uso di quanto precedentemente, ove ci avremo l'ipotesi aggiuntiva:

$$\lim_{|z| \to +\infty} z\, f(z) = 0$$

LEMMA

Sia $f(z)$ una funzione definita in un settore dei semipiani $\{ \Im z \geq 0 \}$. Se:

$$\lim_{\substack{|z| \to +\infty \\ \theta \in [\theta_1, \theta_2]}} f(z) = 0$$

allora:

$$\lim_{\substack{r \to +\infty \\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2]}} \int_{\substack{|z| = r \\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2]}} f(z)\, e^{iz}\, dz = 0$$

Dimo.

Sia $z = r e^{i\theta}$. Sia $M(r) = \max_{[\theta_1, \theta_2]} |f(r e^{i\theta})|$

Allora:

$$\left| \int_{\substack{|z| = r \\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2]}} f(z)\, e^{iz}\, dz \right| \leq M(r) \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r \sin\theta}\, r\, d\theta ,$$

con:

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{-r \sin\theta}\, r\, d\theta = 2 \int_{\theta_1}^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin\theta}\, r\, d\theta ,$$

ove:

$$\forall\, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \forall\, r \geq 0 \qquad \frac{2}{\pi} \leq \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r \sin\theta}\, r\, d\theta \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\frac{2r}{\pi}\theta}\, r\, d\theta = \frac{\pi}{2} \left[-e^{-\frac{2r}{\pi}\theta} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-s}\, ds \leq$$

$$\leq \int_0^{+\infty} e^{-\frac{2r}{\pi}s}\, ds = \left[-e^{-\frac{2r}{\pi}s} \right]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2r}$$

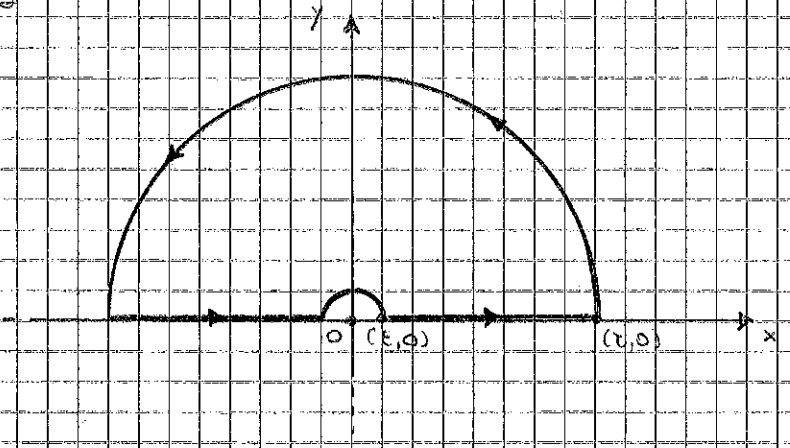
Dunque:

$$\left| \int_{\substack{|z| = r \\ \arg z \in [\theta_1, \theta_2]}} f(z)\, e^{iz}\, dz \right| \leq M(r)\, \pi ,$$

da cui, per Teo, c.v.d.

La tesi è dunque dimostrata c.v.d.

Studiamo ora il caso in cui $f(z)$ può avere singolarità sull'asse reale. Poniamo ad esempio il caso in cui f ha un polo semplice nell'origine. Consideriamo allora un arco come in figura:



LEMMA

Se 0 è un polo semplice di $g(z)$, allora:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} g(z)\,dz = \pi i \operatorname{Res}(g,0)$$

Dim.

Abbiamo:

$$g(z) = \frac{a}{z} + h(z),$$

con h olomorfa nell'origine. Si ha:

- $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} h(z)\,dz = 0$;
- $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{a}{z}\,dz = \pi i a = \pi i \operatorname{Res}(g,0)$, c.v.d.

Es: Calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+1}\,dx \right)$$

In questo caso, non abbiamo poli sull'asse reale (i poli sono i e $-i$). Si ha dunque:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{e^{ix}}{x^2+1}, i \right) = \frac{e^{ix}}{(x+i)} = \frac{1}{2ie},$$

da cui:

$$I = \frac{2\pi i}{2ie} = \frac{\pi}{e} \quad \Rightarrow \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{2e}$$

Es. Calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

In questo caso, si ha un polo nell'origine. Innanzitutto:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{1}{2} \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right),$$

ove dobbiamo assicurarci che esista il limite:

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx + \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{ix}}{x}\, dx \right) \overset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx$$

Si ha ora, dato che non ci sono poli in $\{\gamma > 0\}$, e dato che

$$\lim_{|z| \to +\infty} \frac{e^{iz}}{z} = 0,$$

si ha:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \pi i \operatorname{Res}\left(\frac{e^{iz}}{z}, 0 \right) = \pi i,$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2}$$

OSSERVAZIONE

Se l'integrale è della forma:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\, e^{-ix}\, dx,$$

bisogna integrare nel semipiano superiore $\{\gamma \geq 0\}$, per garantire la validità della relazione $|e^{-iz}| \leq 1$.

Si ricordi che le funzioni trigonometriche non sono limitate in nessun semipiano, dunque conviene sempre ricondursi all'esponenziale complesso.

Consideriamo ora un integrale della forma:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1,$$

con $R(x)$ funzione razionale senza poli nel semiasse reale positivo $[0, +\infty[$. Una condizione necessaria e sufficiente affinché l'integrale sia convergente è che sia:

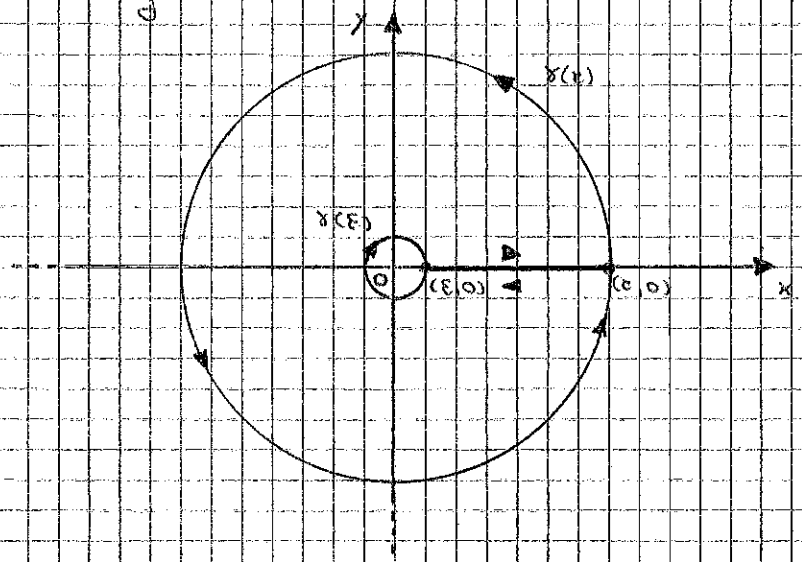
$$R(x) = O\left(\frac{1}{x^m} \right), \quad m > 1, \quad x \to +\infty$$

Per calcolare tale integrale consideriamo la funzione, definita in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$:

$$f(z) = \frac{R(z)}{z^\alpha}$$

sia $\Delta = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

Consideriamo il seguente cammino chiuso $\delta(\varepsilon, \varepsilon)$:



Si ha, per r sufficientemente grande, e ε sufficientemente piccolo:

$$\int_{\delta(r,\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + \int_{\chi(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz +$$

$$+ \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx - \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{e^{2\pi i\alpha} x^\alpha}\,dx =$$

$$= \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz + (1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_\varepsilon^r \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx$$

Ora, si ha:

- $\lim_{z \to 0} z f(z) = \lim_{z \to 0} z^{1-\alpha} R(z) = 0$;
- $\lim_{|z| \to +\infty} z f(z) = \lim_{|z| \to +\infty} z^{1-\alpha} R(z) = 0$,

da cui due termini precedenti sono infinitesimi. Si ha allora:

$$\lim_{r \to +\infty} \int_{\gamma(r)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\gamma(\varepsilon)} \frac{R(z)}{z^\alpha}\,dz = 0$$

$$(1 - e^{-2\pi i\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\,dx = 2\pi i \sum_k \operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_k\right)$$

Ex. Calcoliamo:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x)}\, dx, \quad 0 < \alpha < 1$$

L'unico polo da enucleare è (-1). Si ha:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, -1 \right) = \frac{1}{e^{i\pi\alpha}}$$

Dunque:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha (1+x)}\, dx = (1 - e^{-2\pi i \alpha})^{-1} \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha}} =$$

$$= \frac{2\pi i}{e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}} = \frac{\pi}{\operatorname{sin} \pi\alpha}$$

Consideriamo ora integrali della forma:

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log x\, dx,$$

ove $R(x)$ è una funzione razionale senza poli sul semiasse positivo, tale che:

$$\lim_{x \to +\infty} x\, R(x) = 0$$

(condizione equivalente alla convergenza dell'integrale).
Consideriamo, come primo, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, e la stessa area chiusa di prima. Integriamo poi la funzione $R(z) (\log z)^2$.

Anche in questo caso si fanno applicare i lemmi, da cui, notando che, per $z = e^{i\theta} x$, $\theta = 2\pi$:

$$\log z = \log e^{2i\pi} x =$$

$$= \log e^{2i\pi} + \log x =$$

$$= 2i\pi + \log x,$$

si ha:

$$\int_0^{+\infty} R(x) (\log x)^2\, dx - \int_0^{+\infty} R(x) (\log x + 2\pi i)^2\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(R(z) (\log z)^2 \right),$$

ove la sommatoria è estesa in D. Svolgendo i calcoli:

$$-\int_0^{+\infty} R(x)\, 4\pi i \log x\, dx + \int_0^{+\infty} 4\pi^2 R(x)\, dx = 2\pi i \sum \operatorname{Res}\left(R(z) (\log z)^2 \right)$$

$$-2 \int_0^{+\infty} R(x) \log x\, dx - 2\pi i \int_0^{+\infty} R(x)\, dx = \sum \operatorname{Res}\left(R(z) (\log z)^2 \right)$$

Supponendo che $R(x) \in \mathbb{R} \ \forall x \in \mathbb{R}^+$, e Razionale, dividendo la parte reale e immaginaria:

- $\int_0^{+\infty} R(x) \log x \, dx = -\frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\sum \left(R(z) (\log z)^2 \right) \right)$;
- $\int_0^{+\infty} R(x) \, dx = -\frac{1}{2\pi i} \mathrm{Im}\left(\sum (R(z) (\log z)^2) \right)$.

Es. Consideriamo l'integrale:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{(1+x)^3} \, dx$$

L'unica polo da considerare è $z_0 = -1$. Si Ha che il residuo di $(\log z)^2 (1+z)^{-3}$ in (-1) è il termine di grado 2 nello sviluppo di $(\log z)^2$ centrato in $(-1) = e^{i\pi}$. Si Ha dunque:

$$t = z + 1$$

$$z = -1 + t = (-1)(1-t) = e^{i\pi}(1-t)$$

$$(\log z)^2 = (\log e^{i\pi} + \log(1-t))^2 = (i\pi + \log(1-t))^2 =$$

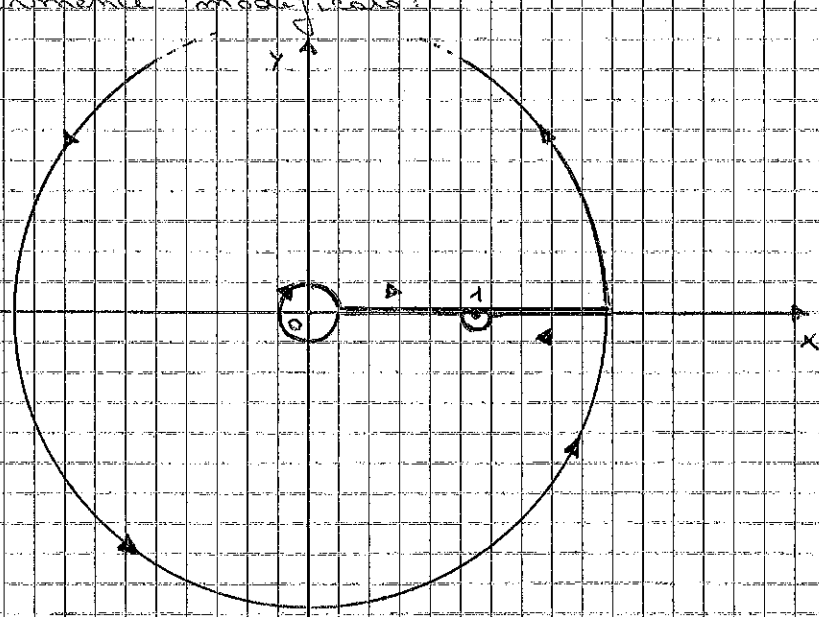
$$= \left(i\pi - t - \frac{t^2}{2} \right)^2 + \dots =$$

$$= 1 - i\pi,$$

da cui:

$$I = -\frac{1}{2} \mathrm{Re}(1 - i\pi) = -\frac{1}{2}$$

Il metodo può essere applicato nel caso in cui la funzione R ha un polo semplice in $z_0 = 1$: in tale caso l'integrale Ha ancora significato, perché $\log z = 0$ (1 uno zero semplice) e le cammino chiuso va leggermente modificato:



Si ha, supposto che R è una funzione reale per $x \in \mathbb{R}$, che:

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log(x)^2 \, dx - \int_0^{+\infty} R(x) (\log x + 2\pi i)^2 - \pi i \operatorname{Res}(f, 1) =$$

$$= 2\pi i \left(\sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \right),$$

ove $f = R \cdot \log^2$, e la sommatoria è estesa a tutti i poli di f, tranne 1. Si ha poi:

$$R(z) \log(z)^2 = \frac{S(z)}{z - 1} (\log z)^2,$$

da cui:

$$\operatorname{Res}(f, 1) = S(z_0) \log(z_0)^2 = S(z_0)(-4\pi^2) =$$

$$= -4\pi^2 \operatorname{Res}(R, 1)$$

Si ha dunque:

$$-\int_0^{+\infty} 4\pi i \log x \, R(x) \, dx + \int_0^{+\infty} R(x) \, 4\pi^2 \, dx =$$

$$= -4\pi^3 i \operatorname{Res}(R, 1) + 2\pi i \left(\sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \right),$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} R(x) \log(x) \, dx = \pi^2 \operatorname{Re}(\operatorname{Res}(R, 1)) - \frac{1}{2} \operatorname{Re}\left(\sum_k \operatorname{Res}(f, z_k) \right)$$

Es. Calcolare:

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} \, dx$$

Si ha:

- $\operatorname{Res}\left(\frac{1}{x^2 - 1}, 1 \right) = \frac{1}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$
- $\operatorname{Res}\left(\frac{(\log x)^2}{x^2 - 1}, -1 \right) = \frac{(i\pi)^2}{-2} = -\frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{2}$

Allora:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\log x}{x^2 - 1} \, dx = \pi^2 \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4}$$

ESERCIZI VARI

1. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-2x+2)}\,dx$$

Si ha immediatamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \operatorname{Im}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\pi x}}{x(x^2-2x+2)}\,dx\right)$$

I poli di tale funzione sono:

- $x = 0$;
- $x^2 - 2x + 2 = (x-1)^2 + 1 = 0 \Rightarrow (x-1)^2 = -1 \Rightarrow x - 1 = \pm i \Rightarrow$
  $\Rightarrow x = 1 \pm i$.

I poli sono tutti semplici.

Detto $z \in \mathbb{C}$, si ha:

$$e^{i\pi z} = e^{i\pi x + \pi y} = e^{i\pi x} e^{-y\pi},$$

da cui, me applicano Jordan:

$$\lim_{|z|\to+\infty} \frac{e^{i\pi z}}{z(z^2-2z+2)} = 0,$$

da cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \pi i\, \operatorname{Res}(f, 0) + 2\pi i\, \operatorname{Res}(f, 1+i)$$

Dunque:

- $\operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{2}$;
- $\operatorname{Res}(f, i+1) = \frac{e^{i\pi(1+i)}}{(i+2)(1+i-1+i)} = \frac{-e^{-\pi}(-i)}{2(i+1)} =$
  $= \frac{i e^{-\pi}(1-i)}{4} = \frac{i e^{-\pi}}{4} + \frac{e^{-\pi}}{4}$.

Dunque:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x(x^2-2x+2)}\,dx = \operatorname{Im}\left(\frac{\pi i}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-\pi} + \frac{\pi i}{4}e^{-\pi}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}e^{-\pi} = \frac{\pi}{2}(1 + e^{-\pi})$$

2. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2+2x+4}\,dx$$

Sia $z \in \mathbb{C}$. Allora

$$z^{\frac{1}{4}} = e^{\frac{1}{4}\log z} = e^{\frac{1}{4}\log(\rho e^{i\theta})} =$$

$$= e^{\frac{1}{4}\log\rho + \frac{1}{4}i\theta} =$$

$$= \rho^{\frac{1}{4}} e^{\frac{1}{4}i\theta}$$

Si ha:

$$\lim_{|z|\to+\infty} f(z) = 0,$$

per confronto tra i coefficienti direttivi.

Poi definita la funzione complessa:

$$x^2+2x+4 = x^2+2x+1+3 = (x+1)^2+3 = 0$$

$$(x+1)^2 = -3$$

$$(x+1) = \pm\sqrt{3}\,i$$

$$x = -1 \pm \sqrt{3}\,i$$

Si ha allora:

$$\frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2+2x+4} = \frac{x}{x^{\frac{3}{4}}(x^2+2x+4)},$$

da cui considerando $z \in \mathbb{C}$:

- $\lim_{z\to 0} z\, f(x) = \lim_{z\to 0} z^{\frac{1}{4}} R(z) = 0$;
- $\lim_{|z|\to+\infty} z\, f(z) = \lim_{|z|\to+\infty} z^{\frac{1}{4}} R(z) = 0$,

si ha:

$$\left(1 - e^{2\pi i \frac{1}{4}}\right)\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx = 2\pi i \left(\sum_k \operatorname{Res}(f, z_k)\right) \Rightarrow$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^{\frac{1}{4}}}\,dx = \frac{2\pi i}{(1-i)}\left[\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{(-1+\sqrt{3}i+1+\sqrt{3}i)} + \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{(-1-\sqrt{3}i+1-\sqrt{3}i)}\right] =$$

$$= \pi i (1+i)\left[\frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{6}}}{2\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}}{-2\sqrt{3}i}\right] =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}(1+i)\left[\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right] =$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}\sqrt{3}}(1+i)\cdot$$

$$\cdot\left[(1+i)\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{\sqrt{8}\cdot 2}\left(\sqrt{3}-1\right) = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}(\sqrt{3}-1)$$

3. Utilizzando il teorema dei residui, calcolare:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$$

Sia $z = x + iy$. Allora:

$$e^{2iz} = e^{2i(x+iy)} = e^{-2y} e^{2ix},$$

da cui $|e^{2iz}| \leq 1$ nel semipiano $\{y \geq 0\}$. Dunque, considerando che i poli degli integrandi sono:

$$x^4 + 5x^2 + 4 = 0 \Rightarrow (x^2)^2 + 5(x^2) + 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = (-1) \vee (x^2) = (-4) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \pm i \vee x = \pm 2i,$$

si ha:

- $\operatorname{Res}(f, i) = \dfrac{e^{2(-1)\cdot i}}{(i+i)(i^2+4)} = \dfrac{e^{-2}}{2i(3)} = -\dfrac{ie^{-2}}{6}$;
- $\operatorname{Res}(f, 2i) = \dfrac{e^{2i\cdot 2i}}{((2i)^2+1)(2i+2i)} = \dfrac{e^{-4}}{(-3)(4i)} = \dfrac{ie^{-4}}{12}$.

Allora:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx = 2\pi i \left(-\frac{ie^{-2}}{6} + \frac{ie^{-4}}{12} \right) =$$

$$= \pi \left[\frac{1}{e^2 3} - \frac{1}{e^4 6} \right] =$$

$$= \frac{\pi}{6e^4} \left(3e^2 - 1 \right)$$

1. Determinare il residuo di ciascuno dei poli di:

$$f(z) = \frac{z}{(1+z^4)^2},$$

e utilizzare il Teorema dei residui per calcolare:

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^4)^2}\,dx$$

Si ha:

$$z^4 = -1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}k}, \quad k = 0, 1, 2, 3,$$

e ogni polo ha molteplicità doppia.

Effettuiamo un discorso più generale. Sia:

$$f(z) = (z-a)^{-2} g(z)$$

in un intorno di a, con $g(a) \neq 0$ e g olomorfa in un intorno di a. Si ha allora:

$$\mathrm{Res}(f, a) = g'(a)$$

Nel nostro caso, notando che i poli sono $a_0 = \pm 1 \pm i$, tutti a uno di questi:

$$f(z) = \frac{1}{(z^4-a^4)^2} = (z-a)^{-2} \frac{1}{(z+a)^2(z^2+a^2)^2} =$$

$$= \frac{1}{(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3)^2},$$

con

$$g'(z) = -2 \frac{3z^2 + 2az + a^2}{(z^3 + az^2 + a^2 z + a^3)^3} \Rightarrow g'(a) = -\frac{16a^2}{64a^6} = -\frac{1}{64a} =$$

$$= -\frac{1}{16\sqrt[4]{2}}\, e^{-i\frac{3\pi}{4}} = \frac{1}{256}(1+i)$$

A questo punto, considerando il quarto di cerchio delimitato dalla circonferenza di raggio r, e dalle semirette positiva data dai semiassi positivi, si ha:

$$\int_{\partial\Sigma} f(z)\,dz = \int_0^{+\infty}$$