Appunti di Teoria dei Controlli

Carmine Frascella

15 Giugno 2016

Indice

5 Introduzione alla teoria dei controlli
6 Controllabilità, stabilizzabilità, osservabilità, ottimalità
9 Un primo esempio pratico
11 Altri esempi
13 Relazioni con il Calcolo delle Variazioni
14 Controllabilità nel caso lineare
21 Condizione sul rango di Kalman
25 Osservabilità nel caso lineare
28 Stabilit per sistemi lineari
33 Stabilizzabilità nel caso lineare
45 Introduzione all'ottimalità
46 Coni normali e coni tangenti
50 Teorema di Lusternik
51 Teorema di Pontryagin
53 Osservazioni sul teorema di Lusternik
56 Applicazioni del teorema di Pontryagin al problema di Bolza
59 Duale delle funzioni continue
60 Applicazione del teorema di Pontryagin: conclusione
63 Teoremi di Kantorovich e Lusternik-Graves
71 Un altro esempio: un modello epidemico con vaccinazione
80 Esistenza del controllo ottimale: introduzione
87 Applicazione al caso del modello epidemico
90 Teoremi di esistenza del controllo ottimale per il problema di Bolza
95 Esempi e controesempi a riguardo
103 Teorema di Cesari
122 Introduzione alla teoria dei controlli in dimensione infinita
124 Teoria dei semigruppi
132 Stime asintotiche
136 Teorema di Hille-Yosida
141 Risoluzione del problema di Cauchy
147 Semigruppi in spazi di Hilbert
154 Applicazione ai problemi di Dirichlet
159 Teoria dei controlli in dimensione infinita
161 Immersione in un campo di soluzioni
166 Principio di ottimalità di Bellman ed equazione di Bellman
171 Equazione di Riccati
176 Unicità per l'equazione di Riccati
185 Teoria dei controlli con orizzonte infinito
191 Esponenziale stabilizzabilità ed esponenziale rilevabilità
194 Teoria dei controlli nel caso lineare convesso
198 Sottogradienti e sottodifferenziale
203 Funzione polare e funzione bipolare
205 Ritorno al problema di minimo
208 Stime su V, $u^*_{0,x}$, $y^*_{0,x}$,$p^*_{0,x}$
211 Equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman
215 Introduzione alle soluzioni di viscosità
217 Un esempio
219 Ritorno all'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI CONTROLLI

Il punto di partenza per la teoria dei controlli è un'equazione differenziale del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \quad , t \geq 0 \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

con:

- $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$;
- $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^m$,

di cui si cercano soluzioni $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$.

La funzione u rappresenta un CONTROLLO, ed è solitamente a valori in un sottoinsieme $U \subseteq \mathbb{R}^m$, solitamente deducibile dal problema che si sta trattando: esso è detto INSIEME DEI PARAMETRI DI CONTROLLO.
L'insieme U può essere, ad esempio, limitato, o anche compatto.

È chiaro, dunque, che nei problemi trattati nell'ambito della teoria dei controlli il controllo u riveste un ruolo fondamentale.

Vi sono controlli di due tipi:

- Controlli CLOSED - LOOP ;
- Controlli OPEN - LOOP.

Si parla di CONTROLLO CLOSED - LOOP quando esiste una mappa $k : \mathbb{R}^n \to U$ tale che il seguente sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), k(y(t))) \quad , t \geq 0 \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

ha una ben definita soluzione. In tal caso, la funzione $k : \mathbb{R}^n \to U$ è detta FUNZIONE DI FEEDBACK.

I controlli che non sono di questo tipo, invece, sono detti CONTROLLI OPEN - LOOP.

CONTROLLABILITÀ, STABILIZZABILITÀ, OSSERVABILITÀ, OTTIMALITÀ

Spesso i controlli vengono detti anche STRATEGIE, e le soluzioni corrispondenti OUTPUT del sistema.
L'obiettivo è allora quello di determinare una strategia (cioè un controllo) tale che le soluzioni corrispondenti abbiano determinate proprietà, che vedremo in questo paragrafo.

Diciamo che uno stato $z \in \mathbb{R}^n$ è RAGGIUNGIBILE da $x \in \mathbb{R}^n$ in un tempo $T > 0$ se esiste un controllo open-loop u tale che l'output corrispondente verifichi (oltre all'equazione di stato):

$$\begin{cases} y(0) = x \\ y(T) = z \end{cases}$$

Il sistema si dice CONTROLLABILE se ogni stato $z \in \mathbb{R}^n$ è raggiungibile da ogni stato iniziale $x \in \mathbb{R}^n$ in un tempo $T = T(x, z) > 0$.

Se un sistema è controllabile, dunque, comunque si fissano $x, z \in \mathbb{R}^n$ esiste un tempo $T(x, z) > 0$ ottenuto e una soluzione dell'equazione tale che:

$$\begin{cases} y(0) = x \\ y(T(x, z)) = z \end{cases}$$

Si dice poi che il sistema è CONTROLLABILE AL TEMPO T_0 se è controllabile, e per ogni $x, z \in \mathbb{R}^n$ vale:

$$T(x, z) \leq T_0$$

Supponiamo ora che esistano $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ e $\underline{u} \in U$ tali che:

$$f(\underline{x}, \underline{u}) = 0$$

Una funzione $k : \mathbb{R}^n \to U$ tale che $k(\underline{x}) = \underline{u}$ è

detta FEEDBACK STABILIZZANTE se $\underline{x}$ è un punto di equilibrio stabile (nel senso dei sistemi dinamici) per il sistema:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), k(y(t))), & t \geq 0 \\ y(0) = x \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

ovvia se per ogni intorno V_1 di $\underline{x}$ esiste un intorno $V_2 \subseteq V_1$ di $\underline{x}$ tale che se $x \in V_2$, allora $y(t) \in V_1$ per ogni $t \in [0, +\infty[$.

Diremo allora che il sistema è STABILIZZABILE in $\underline{x}$ se esiste un feedback stabilizzante.

Chiaramente si può specializzare la nozione di stabilità. Ad esempio, un sistema si dice ESPONENZIALMENTE STABILIZZABILE se esiste un feedback $k: \mathbb{R}^n \to U$ tale che $k(\underline{x}) = \underline{u}$ ESPONENZIALMENTE STAB, ovvia tale che $\underline{x}$ è un punto di equilibrio esponenzialmente stabile per il sistema scritto sopra, ovvia tale che esistono $C > 0$, $\alpha < 0$ e un intorno V di $\underline{x}$ tali che se $y(0) = z \in V$ allora per ogni $t \in [0, +\infty[$ vale la seguente stima in norma:

$$|y(t) - \underline{x}| \leq C e^{\alpha t} |z - \underline{x}|$$

Parliamo ora di OSSERVABILITÀ. In molte situazioni pratiche non si riesce a osservare direttamente lo stato $y(t)$, ma una sua funzione $w(t) = h(y(t))$, per $t \geq 0$.

Si vuole allora analizzare il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)) \\ y(0) = x \\ w(t) = h(y(t)) \end{cases}$$

L'ultima relazione è detta FUNZIONE DI OSSERVAZIONE. Il sistema è OSSERVABILE se, noti il controllo u e la funzione di osservazione w, è possibile determi-

mare univocamente la condizione iniziale $y(0) = x$ (e quindi ricostruire, tramite il sistema, l'intera soluzione).

Concludiamo parlando di OTTIMALITÀ. Spesso infatti si è interessati a questioni, per l'appunto, di ottimalità.

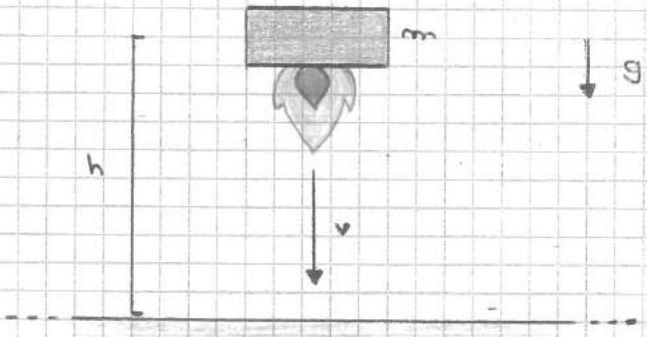
Ad esempio:

- Nel PROBLEMA DEL TEMPO OTTIMO si cerca un controllo u tale che lo stato associato sia tale che (fissati a priori $x, z \in \mathbb{R}^n$):
$$\begin{cases} y(0) = x \\ y(T) = z \end{cases},$$
con T minimo tempo (quindi si cerca di minimizzare il tempo di trasferimento);
- Nel PROBLEMA DEL COSTO OTTIMO, invece, il tempo $T_0 > 0$ è fissato, e si cerca un controllo u tale che:
$$\begin{cases} y(0) = x \\ y(T_0) = z \end{cases}$$
e che minimizzi il COSTO (o massimizzi l'UTILITÀ), che tipicamente è un funzionale della forma:
$$J(y(t), u(t)) = \int_0^T g(y(t), u(t))\, dt + G(y(T))$$
Questo è detto PROBLEMA DI BOLZA. Si parla invece di PROBLEMA DI LAGRANGE se:
$$J(y(t), u(t)) = \int_0^T g(y(t), u(t))\, dt,$$
e di PROBLEMA DI MAYER se:
$$J(y(t), u(t)) = G(y(T)).$$

UN PRIMO ESEMPIO PRATICO

Vediamo ora un esempio classico nell'ambito della controllabilità: l'ATTERRAGGIO MORBIDO sulla Terra.

Consideriamo una navicella spaziale di massa totale m (navicella e piloti, che hanno peso fisso, più carburante, il cui peso diminuisce nel tempo) che deve atterrare sulla Terra:



Supporremo, in via approssimativa, che l'accelerazione gravitazionale $\vec{g}$ abbia modulo costante.

In questo caso, allora, u è la spinta del motore, la quale riduce la massa totale della navicella.

Si ha dunque il seguente sistema:

$$\begin{cases} h'(t) = -v(t) \\ v'(t) = g - \dfrac{u(t)}{m(t)} \\ m'(t) = -k u(t) \end{cases},$$

con le condizioni iniziali:

$$h(0) = h_0 \qquad m(0) = m_0 \qquad v(0) = v_0$$

Lo stato è dunque (h, v, m), e il controllo è u.

Cerchiamo allora un controllo u che faccia atterrare la navicella (in un tempo finito $T \in]0, +\infty[$) con velocità nulla:

$$\begin{cases} h(T) = 0 \\ v(T) = 0 \end{cases},$$

con il vincolo:

$$m(T) \geq M_0,$$

ove M_0 è la massa della navicella senza carburante (intuitivamente, bisogna atterrare prima di esaurire il carburante).

Possiamo ora chiedere di minimizzare il tempo di atterraggio, oppure di minimizzare il consumo di carburante. È sorprendente scoprire che se si minimizza il tempo, si minimizza anche il consumo di carburante! Infatti:

$$\frac{m'(t)}{m(t)} = \frac{-k(u(t))}{m(t)} = -k(g - v'(t)),$$

e integrando:

$$\log(m(t)) = -kgt + kv(t) + h,$$

da cui:

$$m(t) = e^{-kgt + kv(t) + h} =$$

$$= m_0 \cdot e^{-kgt + kv(t) - kv_0}$$

si ha allora:

$$m(T) = m_0 e^{-kgT + k\cancel{v}(T) - kv_0} = m_0 e^{-kgT - kv_0},$$

Dunque il carburante consumato è:

$$m(0) + m(T) = m_0 - m(T) = m_0\left(1 - e^{-kgT - kv_0}\right),$$

da cui è evidente che per T minimo si ha $m_0 - M(T)$ è minimo.

ALTRI ESEMPI

Esamineremo ora un esempio di natura economica.

Supponiamo di possedere un'attività economica, e di avere un capitale $y(t) \geq 0$, diviso in due parti:

- $u(t)\, y(t)$, destinata agli investimenti;
- $(1 - u(t))\, y(t)$, destinata ai consumi per massimizzare l'utilità,

con $u : [0, T] \to [0, 1]$.

Solitamente l'utilità è rappresentata da un funzionale della forma:

$$J_T(x, u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^T [1 - u(t))\, y(t)]^\alpha \, dt + \\ + \int_0^T a\, [y(t)]^\alpha \, dt,$$

con $a \geq 0$ e $\alpha \in]0, 1[$.

Siamo allora interessati a determinare un controllo $u : [0, T] \to [0, 1]$ che massimizzi l'utilità scritta sopra, rimanendo vincolati all'equazione di stato seguente:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = F(y(t)) - u(t)\, y(t) \\ y(0) = x > 0 \end{cases},$$

con $y(T) > 0$ (si potrebbe chiedere $y(T) \geq y(0)$).

Vediamo ora un ultimo esempio, quello del REGOLATORE LINEARE. Consideriamo un'equazione del tipo:

$$\dot{y}(t) = A(t)\, y(t) + B(t)\, u(t),$$

ove:

- $A : [0, T] \to \mathcal{M}(n, n, \mathbb{R})$;
- $B : [0, T] \to \mathcal{M}(n, m, \mathbb{R})$;
- $u : [0, T] \to \mathbb{R}^m$;
- $y : [0, T] \to \mathbb{R}^n$.

Il funzionale di costo è della forma:

$$J(y(t), u(t)) \overset{\text{def}}{=} \int_0^T \langle M(t)\, y(t), y(t) \rangle + \langle N(t)\, u(t), u(t) \rangle + \langle D\, y(T), y(T) \rangle ,$$

ove $M \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ e $D \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$ sono semidefinite positive, mentre $N \in \mathcal{M}(m, \mathbb{R})$ è definita positiva.

> OSSERVAZIONE
> Se N non è definita positiva, potrebbero sorgere problemi di esistenza del controllo ottimale.

Il problema di minimizzazione presentato è detto allora PROBLEMA DEL REGOLATORE LINEARE, o PROBLEMA LINEARE QUADRATICO.

È sorprendente che il controllo ottimale, in tali ipotesi, esista sempre, e sia un controllo feedback.

RELAZIONI CON IL CALCOLO DELLE VARIAZIONI

Consideriamo il seguente funzionale:

$$F(y) = \int_a^b \varphi(t, y(t), \dot{y}(t))\, dt ,$$

tra le funzioni $y \in \Gamma$, con:

$$\Gamma = \{ y : [a,b] \to \mathbb{R}^n \mid y(a) = A , y(b) = B \}$$

Definiamo allora il seguente controllo:

$$u = y' ,$$

quindi consideriamo lo stato:

$$Y(t) = (w(t), z(t)) ,$$

con $w(t) = y(t)$, e:

$$\begin{cases} z'(t) = \varphi(t, w(t), u(t)) \\ z(a) = 0 \end{cases}$$

Chiaramente, poi, vale:

$$w(a) = A , \quad w(b) = B$$

Definiamo allora il funzionale:

$$J(Y, u) \overset{\text{def}}{=} z(b) ,$$

ossia l'integrale di φ tra a e b.

Il problema è stato dunque trasformato in un problema trattabile con la teoria dei controlli.

CONTROLLABILITÀ NEL CASO LINEARE

Vogliamo ora studiare, dal punto di vista della controllabilità, un sistema lineare del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A\,y(t) + B\,u(t) \\ y(0) = x \end{cases} ;$$

ove $x \in \mathbb{R}^n$, $y : [0,T] \to \mathbb{R}^n$, $u : [0,T] \to \mathbb{R}^m$, con:

$$A \in M(n, \mathbb{R}), \qquad B \in M(n, m, \mathbb{R})$$

> OSSERVAZIONE
> Ricordiamo che, data $A \in M(n, \mathbb{R})$, è ben definita:
>
> $$e^{sA} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{s^n A^n}{n!} \in M(n, \mathbb{R})$$

Definiamo allora MATRICE DI CONTROLLABILITÀ:

$$Q_T \overset{\text{def}}{=} \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} \, ds ,$$

ove B^* è la matrice aggiunta di B e A^* è la matrice aggiunta di A.

> OSSERVAZIONE
> Ricordiamo brevemente che, data $A \in M(n, \mathbb{R})$, si definisce MATRICE AGGIUNTA la matrice trasposta:
>
> $$A^* = A^t$$

LEMMA
Si ha:

$$Q_T = Q_T^*$$

Dim.
Si ha:

$$\langle Q_T z, z \rangle = \int_0^T \langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} z, z \rangle \, ds =$$

$$= \int_0^T \langle B^* e^{sA^*} z, B^* e^{sA^*} z \rangle \, ds =$$

$$= \int_0^T \langle z, e^{sA} B B^* e^{sA^*} z \rangle = \langle z, Q_T z \rangle ,$$

da cui la tesi, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Supponiamo che esista $T > 0$ tale che Q_T sia non singolare. Allora:

- Dati $a, b \in \mathbb{R}^n$, il controllo seguente:

$$\hat{u}(s) \stackrel{\text{def}}{=} - B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right]$$

porta lo stato y da a in b nel tempo T;

- Tra tutti i controlli che portano il corrispondente stato da a in b nel tempo T, $\hat{u}$ minimizza il seguente integrale:

$$G(u) = \int_0^T |u(s)|^2 \, ds$$

Inoltre:

$$G(\hat{u}) = \langle Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right], e^{TA} a - b \rangle$$

Dim.

Innanzitutto $\hat{u}$ è una funzione lineare, anzi analitica. Considerato lo stato corrispondente con dato iniziale in a:

$$\hat{y}(T) = e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} B \hat{u}(s) \, ds =$$

$$= e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} B B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] ds =$$

$$= e^{TA} a - Q_T Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] =$$

$$= e^{TA} a - e^{TA} a + b = b,$$

da cui abbiamo ottenuto la prima tesi.

Sia ora u un altro controllo che porta a in b nel tempo T. Si ha:

$$\int_0^T \langle u(s), \hat{u}(s) \rangle \, ds = - \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] ds =$$

$$= - \int_0^T \langle e^{(T-s)A} B u(s), Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] \rangle \, ds =$$

$$= - \langle y(T) - e^{TA} a, Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] \rangle =$$

$$= \langle e^{TA} a - b, Q_T^{-1} \left[e^{TA} a - b \right] \rangle,$$

dove y è lo stato relativo a u che porta x in b nel tempo T. L'uguaglianza discende dalla relazione seguente:

$$y(T) = e^{TA} x + \int_0^T e^{(T-s)A} B u(s)\, ds,$$

che tra l'altro è stata usata precedentemente ponendo $u = \hat{u}$: essa è una conseguenza dell'applicazione del metodo della variazione delle costanti.

Dato che:

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds = \int_0^T \langle \hat{u}(s), \hat{u}(s) \rangle\, ds =$$

$$= \int_0^T \langle u(s), \hat{u}(s) \rangle\, ds,$$

per concludere resta da dimostrare l'ottimalità.

Si ha:

$$\int_0^T |u(s) - \hat{u}(s)|^2\, ds = \int_0^T |u(s)|^2 ds + \int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds -$$

$$- 2 \int_0^T \langle u(s), \hat{u}(s) \rangle = \int_0^T |u(s)|^2\, ds +$$

$$+ \int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds - 2 \int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds =$$

$$= \int_0^T |u(s)|^2\, ds - \int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds,$$

e dato che la quantità iniziale è non negativa:

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|^2\, ds \leq \int_0^T |u(s)|^2\, ds, \quad \text{c.v.d.}$$

La proposizione appena vista mostra dunque una condizione sufficiente per la controllabilità del sistema. È interessante notare che la condizione è anche necessaria, come mostra la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

Sia $b \in \mathbb{R}^n$. Se esso è raggiungibile da $\underline{0}$, allora R_T è non singolare per ogni $T > 0$.

Dim.

Fissato $T > 0$, definiamo (per un controllo u):

$$L_T : L^2([0,T], \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^m$$

$$L_T(u) = \int_0^T e^{(T-s)A} B\, u(s)\, ds,$$

in modo tale che sia:

$$y(T) = e^{TA} a + L_T(u) = L_T(u),$$

visto che $a = \underline{0}$.

Definiamo ora, per ogni $T > 0$:

$$E_T = \mathrm{Im}(L_T)$$

si può dimostrare che, per $T < T'$, vale $E_T \subseteq E_{T'}$.

Infatti, se $z \in E_T$, ossia esiste $u \in L^2([0,T], \mathbb{R}^m)$ tale che $L_T(u) = z$, allora definendo:

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} 0, & t \le T' - T \\ u(t - T' + T), & T' - T \le t \le T' \end{cases}$$

si ha $\tilde{u} \in L^2([0,T'], \mathbb{R}^m)$, e:

$$L_{T'}(\tilde{u}) = \int_0^{T'} e^{(T'-s)A} B\, \tilde{u}(s)\, ds = \int_{T'-T}^{T'} e^{(T'-s)A} B\, \tilde{u}(s)\, ds =$$

$$= \int_0^T e^{(T-s)A} B\, u(s)\, ds = L_T(u) = z,$$

da cui $z \in E_{T'}$.

Dato che per ipotesi si ha:

$$\bigcup_{T>0} E_T = \mathbb{R}^m,$$

allora:

$$\lim_{T \to +\infty} \dim E_T = m,$$

da cui:

$\exists\, \tilde{T} > 0$ s.t. $\forall\, T \ge \tilde{T}$: $\dim E_T = m \Rightarrow E_T = \mathbb{R}^m$,

da cui il sistema è controllabile al tempo $\tilde{T}$.

Per concludere, notiamo che, per un arbitrario $T > 0$, si ha (dato $v \in \mathbb{R}^m$):

$$\langle Q_T v, v \rangle = \left\langle \left(\int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} ds \right) v, v \right\rangle =$$

$$= \int_0^T \langle e^{sA} B B^* e^{sA^*} v, v \rangle ds =$$

$$= \int_0^T \langle B^* e^{sA^*} v, B^* e^{sA^*} v \rangle ds = \int_0^T |B^* e^{sA^*} v|^2 ds,$$

mentre:

$$\langle L_T(u), v \rangle = \int_0^T \langle e^{(T-s)A} B u(s), v \rangle ds =$$

$$= \int_0^T \langle u(s), B^* e^{(T-s)A^*} v \rangle ds$$

Se ora $Q_T v = 0$, allora $B^* e^{sA^*} v \equiv 0$ in $[0, T]$, da cui $v \in E_T^{\perp}$.

Per un risultato nelle funzioni analitiche noto come PRINCIPIO DI PERMANENZA, si ha che:

$$B^* e^{sA^*} v \equiv 0$$

in $[0, +\infty[$. In particolare:

$$v \in \bigcap_{T>0} E_T^{\perp},$$

da cui $v \in E_{\bar{T}}^{\perp} = (\mathbb{R}^m)^{\perp} = \{0\}$. Dunque $v = 0$, da cui Q_T è non singolare, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Una condizione sufficiente per la controllabilità è che $B \in \mathcal{M}(m, m, \mathbb{R})$ abbia rango uguale a m (nell'ipotesi, ovvia, in cui $m \geq m$). Si dunque:

$$\operatorname{rk} B = m,$$

allora esiste $B^+ \in \mathcal{M}(m, m, \mathbb{R})$ tale che $B B^+ = \mathbb{I}_m$. Allora:

$$u(s) \overset{\text{def}}{=} \frac{\lambda}{T} B^+ e^{(s-T)A} (b - e^{TA} a), \quad s \in [0, T]$$

porta a in b in tempo T (con $T > 0$). Infatti $y(0) = a$, e:

$$y(T) = e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} B B^+ e^{(s-T)A} (b - e^{TA} a) ds = b$$

Concludiamo ora con un esempio, che motiverà il teorema nel prossimo paragrafo. Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y''(t) = u(t), & t \geq 0 \\ y(0) = \xi_1 \\ y'(0) = \xi_2 \end{cases},$$

con $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$. Come sappiamo, esso si può trasformare in un sistema lineare del prim'ordine. Nella fattispecie, ponendo $y' = v$, si ha il seguente sistema:

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u,$$

visto che $v' = y'' = u$, e la seguente condizione iniziale:

$$\begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}$$

Dunque:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Notiamo che $B \in M(2,1,\mathbb{R})$, da cui non è applicabile la condizione sufficiente analizzata nell'osservazione.

Ricordiamo che si definisce MATRICE DI CONTROLLABILITÀ:

$$Q_T = \int_0^T e^{sA} B B^* e^{sA^*} \, ds$$

Cerchiamo di calcolare tale matrice. Si ha:

- $e^{sA} = I + sA = \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
- $e^{sA^*} = (e^{sA})^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix}$;
- $B B^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Dunque:

$$Q_T = \int_0^T \begin{bmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} ds = \int_0^T \begin{bmatrix} 0 & s \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ s & 1 \end{bmatrix} ds =$$

$$= \int_0^T \begin{bmatrix} s^2 & s \\ s & 1 \end{bmatrix} ds = \begin{bmatrix} \frac{T^3}{3} & \frac{T^2}{2} \\ \frac{T^2}{2} & T \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\det Q_T = T^4 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) = \frac{T^4}{12} \neq 0,$$

da cui Q_T è non singolare (ossia invertibile), quindi il sistema è controllabile, per la proposizione precedente.

Come visto in una proposizione precedente, il controllo ottimale è allora:

$$\hat{u}(t) = -B^* e^{(T-t)A^*} Q_T^{-1} e^{TA} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ T-t & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{12}{T^4} \begin{bmatrix} T & -\frac{T^2}{2} \\ -\frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{12}{T^4} \begin{bmatrix} T-t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T & \frac{T^2}{2} \\ -\frac{T^2}{2} & -\frac{T^3}{6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{12}{T^4} \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} - tT & \frac{T^3}{3} - \frac{t T^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} =$$

$$= -\frac{12}{T^3} \left[\xi_1 \left(\frac{T}{2} - t \right) + \xi_2 \left(\frac{T^2}{3} - \frac{Tt}{2} \right) \right],$$

per $t \in [0, T]$.

Inoltre, con i dovuti calcoli, si ha:

$$\int_0^T |\hat{u}(s)|^2 \, ds = \frac{12}{T^3} \left[\xi_1^2 + \xi_1 \xi_2 T + \frac{T^2}{3} \xi_2^2 \right]$$

Specifichiamo infine che il controllo $\hat{u}$ porta $[\xi_1 \ \xi_2]$ in $[0 \ 0]$ in tempo T.

Come abbiamo potuto vedere, l'identificazione del controllo richiede molti conti: nel prossimo paragrafo vedremo un teorema che ci aiuterà a ridurre la mole di conti necessari.

CONDIZIONE SUL RANGO DI KALMAN

Prima di enunciare il Teorema (che esporrà una condizione algebrica equivalente alla controllabilità), ricordiamo che, date:

$$A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{M}(n, m, \mathbb{R}),$$

allora:

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \in \mathcal{M}(n, mn, \mathbb{R}),$$

da cui:

$$\operatorname{rk}[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] \leq n$$

Consideriamo quindi, ancora una volta, un sistema lineare della forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A\,y(t) + B\,u(t) \\ y(0) = x \end{cases},$$

con $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}(n, m, \mathbb{R})$, $x \in \mathbb{R}^n$, e:

$$\begin{cases} y : [0, T] \to \mathbb{R}^n \\ u : [0, T] \to \mathbb{R}^m \end{cases}$$

TEOREMA (DELLA CONDIZIONE SUL RANGO DI KALMAN)
Le seguenti condizioni sono equivalenti:

- Il sistema è controllabile;
- Il sistema è controllabile al tempo $T_0 > 0$ per ogni $T_0 > 0$;
- Esiste $T_0 > 0$ tale che Q_{T_0} è non singolare;
- Q_T è non singolare per ogni $T > 0$;
- Vale la CONDIZIONE SUL RANGO DI KALMAN:

$$\operatorname{rk}[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = n.$$

Dimo:
Abbiamo già dimostrato che le prime quattro condizioni sono equivalenti.

Proviamo ora che se il sistema è controllabile, allora vale la condizione sul rango di Kalman. Supponiamo allora che per ogni $T > 0$ sia $\operatorname{Im}(L_T) = \mathbb{R}^n$ (non è restrittivo supporlo).

Consideriamo l'applicazione $e : \mathbb{R}^{nm} \to \mathbb{R}^n$ che mappa la m-upla di vettori $(u_0, \dots, u_{m-1})$ nel vettore:

$$e(u_0, \dots, u_{m-1}) = Bu_0 + ABu_1 + \dots + A^{m-1}Bu_{m-1},$$

ove ovviamente $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}^m$.

LEMMA

Si ha, per ogni $T > 0$:

$$\mathrm{Im}(L_T) = \mathrm{Im}(e) = n$$

Dim.

Sia $z \in \mathrm{Im}(e)^\perp$. Allora, per ogni $u_0, \dots, u_{m-1} \in \mathbb{R}^m$:

$$0 = \langle e(u_0, \dots, u_{m-1}), z \rangle = \sum_{k=0} \langle u_k, B^*(A^*)^k z \rangle,$$

da cui:

$$\begin{cases} B^* z = 0 \\ \vdots \\ B^*(A^*)^{m-1} z = 0 \end{cases}$$

Il TEOREMA DI HAMILTON-CAYLEY, applicato ad A^*, assicura che $p_{A^*}(A^*) = 0$, ove p_{A^*} è il POLINOMIO CARATTERISTICO di A^*. Dunque esistono dei coefficienti $c_0, \dots, c_{m-1}$ tali che:

$$A^* = \sum_{k=0}^{m-1} c_k (A^*)^k,$$

con $(A^*)^0 = \mathbb{I}_m$.

Dunque, dato che $B^*(A^*)^k z = 0$ per ogni $k = 0, \dots, m-1$, concludiamo che:

$$B^* e^{sA^*} z = 0,$$

ossia:

$$\forall\, u \in L^2([0, T], \mathbb{R}^m) : \langle L_T(u), z \rangle =$$

$$= \int_0^T \langle u, B^* e^{(T-s)A^*} z \rangle \, ds = 0,$$

da cui $z \in \mathrm{Im}(L_T)^\perp$.

Viceversa, $B^* e^{sA^*} z \equiv 0$ in $[0,T]$, da cui, derivando ripetutamente e valutando in $s=0$ si ottiene la seguente:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} B^* (A^*)^k \frac{s^k}{k!} z \equiv 0,$$

si deduce che per ogni $k = 0, \dots, n-1$ vale:

$$B^* (A^*)^k z = 0,$$

da cui $z \in \ker(\mathcal{C})^\perp$, c.v.d.

Di fatto, il lemma conclude la dimostrazione dell'implicazione.

In effetti, il lemma dimostra anche l'altra implicazione: diamone però una dimostrazione più elementare e diretta.

Per ipotesi, esiste $K \in \mathcal{M}(nm, n, \mathbb{R})$ tale che:

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] K = \mathbb{I}_n,$$

denotiamo n matrici $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{M}(m, n, \mathbb{R})$ tali che:

$$\sum_{j=1}^{n} A^{j-1} B K_j = \mathbb{I}_n$$

Sia ora $\varphi \in C_0^{n-1}([0,T])$ con:

$$\int_0^T \varphi(s)\, ds = 1,$$

e sia:

$$\psi(s) \overset{\text{def}}{=} (e^{(s-T)A} b - e^{sA} a)\, \varphi(s)$$

Definiamo allora il controllo:

$$\hat{u}(s) = K_1 \psi(s) + K_2 \psi'(s) + \dots + K_n \psi^{(n-1)}(s),$$

per $s \in [0,T]$.

Osserviamo che, tramite integrazione per parti:

$$\int_0^T e^{(T-s)A} B K_j \psi^{(j-1)}(s)\, ds = \int_0^T A^{j-1} e^{(T-s)A} B K_j \psi(s)\, ds$$

Di conseguenza: $\hat{y}(0) = a$, e:

$$\hat{y}(T) = e^{TA} a + L_T \hat{u} = e^{TA} a + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T e^{(T-s)A} B K_j \psi^{(j-1)}(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + \sum_{j=1}^{n} \int_0^T A^{j-1} e^{(T-s)} B K_j \psi(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} \left[\sum_{j=1}^{m} A^{j-1} B k_j \right] \psi(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} \underline{\underline{I}}_m \psi(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + \int_0^T e^{(T-s)A} \left[e^{(s-T)A} b - e^{sA} a \right] \varphi(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + \int_0^T \left[b - e^{TA} a \right] \varphi(s)\, ds =$$

$$= e^{TA} a + b - e^{TA} a = b,$$

e ciò conclude la dimostrazione, c.v.d.

OSSERVABILITÀ NEL CASO LINEARE

Consideriamo il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A\,y(t) + B\,u(t) & , t \geq 0 \\ y(0) = x \\ w(t) = C\,y(t) & , t \geq 0 \end{cases},$$

ove $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$, $\mathcal{M}(n, m, \mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}(p, n, \mathbb{R})$, e:

- $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$;
- $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^m$;
- $x \in \mathbb{R}^n$.

Il sistema, o meglio la coppia (A, C), è detto OSSERVABILE al tempo $T > 0$ se la funzione:

$$w(t) = C e^{tA} x + \int_0^t e^{(t-s)A} B\,u(s)\,ds$$

è iniettiva da $\mathbb{R}^n$ in $L^2([0, T], \mathbb{R}^m)$, ossia se la corrispondenza $x \to w$ è iniettiva, ossia se:

$\forall\, x \neq 0 \quad \exists\, t_x \in [0, T] \;:\; C e^{t_x A} x \neq 0$

> OSSERVAZIONE
> La definizione data non riguarda la matrice B associata al controllo: d'ora in poi, quindi, assumeremo che il sistema sia senza controllo (dunque $B \equiv 0$, ad esempio).

Chiamiamo allora MATRICE DI OSSERVABILITÀ associata al sistema:

$$R_T \overset{\text{def}}{=} \int_0^T e^{\tau A^*} C^* C e^{\tau A}\,d\tau$$

Vale allora un teorema molto simile a quello visto nello scorso paragrafo.

> OSSERVAZIONE
> Il sistema si dice OSSERVABILE se:
> $\forall\, x \neq 0 \quad \exists\, t_x > 0 \;:\; C e^{t_x A} x \neq 0$

TEOREMA

Sono condizioni equivalenti:

- Il sistema è osservabile;
- Il sistema è osservabile a un fissato tempo $T > 0$;
- R_T è non singolare per qualche $T > 0$;
- R_T è non singolare per ogni $T > 0$;
- $\text{rk}\,[\,C^* \mid A^*C^* \mid \dots \mid (A^*)^{m-1}C^*\,] = n$.

Dim.

Supponiamo che valga 2). Allora:

$\exists\, T > 0$ s.t. $\forall\, x \neq 0 \quad \exists\, t_x \in [0, T]$ s.t. $Ce^{t_x A} x \neq 0$

Dunque, per ogni $x \neq 0$:

$$\langle R_T x, x \rangle = \int_0^T |Ce^{sA} x|^2 \, ds > 0,$$

da cui R_T è non singolare, dunque vale 3).

Supponiamo ora che valga 3). Allora esiste $T > 0$ tale che:

$$\ker R_T = \{\underline{0}\}$$

Ma:

$$\ker R_T = \text{Im}(R_T)^\perp = \text{Im}(\mathcal{C})^\perp,$$

ove:

$$\mathcal{C}(u_0, \dots, u_{m-1}) = C^*u_0 + A^*C^*u_1 + \dots + (A^*)^{m-1}C^*u_{m-1}$$

Dunque $\text{Im}(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^n$, ovvio vale 5).

Chiaramente le implicazioni 2) $\Rightarrow$ 1) e 4) $\Rightarrow$ 3) sono banali.

Se vale 5), allora $\text{Im}(\mathcal{C})^\perp = \{\underline{0}\} = \ker R_T$ per ogni $T > 0$, da cui vale 4).

In effetti, dall'uguaglianza seguente:

$$\langle R_T x, x \rangle = \int_0^T |Ce^{sA} x|^2 \, dx,$$

si ha che se R_T è una matrice a non singolare, allora (dato che a priori è simmetrica e semidefinita

positiva), allora ene è definita positiva, da cui:

$$\forall x \neq 0 : \int_0^T | C e^{sA} x |^2 ds > 0,$$

da cui necessariamente vale 2).

Per concludere, dimostriamo che 1) $\Rightarrow$ 3). Se per assurdo non vale 3), allora esiste $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$ tale che $z \in \ker e = \mathrm{Im}(e)^{\perp}$, ossia:

$$\forall u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^p : 0 = \langle z, C^* u_0 + A^* C^* u_1 + \dots + (A^*)^{n-1} C^* u_{n-1} \rangle$$

Allora:

$$\forall k = 0, \dots, n-1 : C A^k z = 0,$$

e applicando il teorema di Hamilton Cayley ad A si ha che:

$$\forall t \geq 0 : C e^{tA} z = 0,$$

e questa è una contraddizione.

La dimostrazione è dunque completa, c.v.d.

Vediamo ora una semplice applicazione del teorema. Consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y(0) \\ v(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{cases},$$

e sia:

$$w(t) = C \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}$$

Allora:

$$A^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

da cui:

$$\mathrm{rk} \left[C^* \mid A^* C^* \right] = \mathrm{rk} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] = 2,$$

e per il teorema appena visto il sistema è osservabile.

STABILITÀ PER SISTEMI LINEARI

Consideriamo un sistema lineare senza controllo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A\,y(t), & t \geq 0 \\ y(0) = x_0 \end{cases},$$

con $y : [0, +\infty[\to \mathbb{R}^n$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$.
Sappiamo che la soluzione è:

$$y_x(t) = e^{tA} x_0, \quad t \geq 0$$

Il sistema è detto stabile se $y(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, per ogni condizione iniziale $x \in \mathbb{R}^n$. Talvolta diremo che la matrice A è stabile.

TEOREMA (DI STABILITÀ)
Sia $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{R})$. Sono fatti equivalenti:

- $y_x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- $y_x(t) \to 0$ esponenzialmente, per $t \to +\infty$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$;
- $\omega(A) = \sup \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A) \} < 0$;
- Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$:
$$\int_0^{+\infty} |y_x(t)|^2 \, dt < +\infty$$

Dim.
L'equivalenza tra 1), 2) e 3) dovrebbe essere nota, perciò non ne diamo i dettagli. Anche l'implicazione 2) $\Rightarrow$ 4) è ovvia. Notiamo che:

$$\omega(A) = \max \{ \operatorname{Re} \lambda \mid \lambda \in \sigma(A) \}$$

Supponiamo allora che valga 4), e supponiamo che per assurdo $\omega(A) \geq 0$. Allora:
$\exists\, \lambda = \alpha + i\beta \in \sigma(A)$ t.c. $\operatorname{Re} \lambda = \alpha \geq 0$

Preso $v \neq 0$ autovettore per λ:

$$y_v(t) = e^{\lambda t} v = e^{\alpha t} e^{i\beta t} v,$$

da cui:

$$\int_0^{+\infty} |y_v(t)|^2 \, dt \geq \int_0^{+\infty} |v|^2 \, dx = +\infty,$$

e ciò è assurdo, c.v.d.

Prima di continuare, introduciamo la cosiddetta EQUAZIONE MATRICIALE DI LYAPOUNOV:

$$A^* Q + Q A = -R,$$

con $R \in M(n, \mathbb{R})$ simmetrica e $A \in M(n, \mathbb{R})$, di cui si cercano soluzioni simmetriche $Q \in M(n, \mathbb{R})$.

Consideriamo allora il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A y(t) \\ w(t) = C y(t) \\ y(0) = x \end{cases},$$

e supponiamo che il sistema sia osservabile, ossia:

$$\mathrm{rk}\left[C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^* \right] = n$$

TEOREMA

Supponiamo che (A, C) sia osservabile, e che $R = C^* C$. Allora, se l'equazione matriciale di Lyapounov ammette una soluzione $Q = Q^*$ semidefinita positiva, allora A è stabile.

Viceversa, se A è stabile, allora per ogni R simmetrica esiste una e una sola soluzione dell'equazione matriciale di Lyapounov (si intende simmetrica).

Inoltre:

- se R è semidefinita positiva, lo è anche Q;
- se R è definita positiva, lo è anche Q.

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Si ha:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{tA^*} Q e^{tA} \right] = A^* e^{tA^*} Q e^{tA} + e^{tA^*} Q A e^{tA} =$$

$$= e^{tA^*} \left[A^* Q + Q A \right] e^{tA} = -e^{tA^*} C^* C e^{tA},$$

per $t \geq 0$. Integrando:

$$e^{TA^*} Q e^{TA} - Q = \int_0^T \frac{d}{dt}\left[e^{tA^*} Q e^{tA} \right] dt =$$

$$= -\int_0^T e^{tA^*} C^* C e^{tA} \, dt = -R_T,$$

da cui:

$$Q = R_T + e^{TA^*} Q e^{TA}$$

Dato che (A, C) è osservabile e R_T è simmetrica e definita positiva, allora R_T è definita positiva.

Allora Q è definita positiva, infatti per $x \neq 0$:

$$\langle Qx, x \rangle = \langle R_T x, x \rangle + \langle Q e^{A} x, e^{TA} x \rangle \geq$$
$$\geq \langle R_T x, x \rangle > 0$$

Fissato $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$, definiamo allora:

$$V_x(t) \overset{\text{def}}{=} \langle Q y_x(t), y_x(t) \rangle, \quad t \geq 0$$

Se $V_x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, allora $y_x(t) \to 0$ per $t \to +\infty$, da cui (per arbitrarietà di $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$) si ha che A è stabile.

Notiamo che:

$$\frac{d}{dt} V_x(t) = \langle Q A y_x(t), y_x(t) \rangle +$$
$$+ \langle Q y_x(t), A y_x(t) \rangle =$$
$$= - \langle C^* C y_x(t), y_x(t) \rangle = - |C y_x(t)|^2 \leq 0,$$

da cui $V_x(t) \leq V_x(0)$ per ogni $t \geq 0$. D'altra parte, $V_x(t) \geq 0$ per ogni $t \geq 0$.

In ogni caso ogni traiettoria è limitata; da cui per ogni $\lambda \in \sigma(A)$ si ha $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$.

Per assurdo, sia $\operatorname{Re} \lambda = 0$, ossia $\lambda = i\omega$.

Se $\omega = 0$, ossia $\lambda = 0$, allora esiste $v \neq 0$ tale che $Av = 0$ (dunque $A^k v = 0$ per ogni $k \in \mathbb{N}^+$).

In particolare:

$$0 = \langle Qv, Av \rangle + \langle QAv, v \rangle = \langle A^* Qv + QAv, v \rangle =$$
$$= - |Cv|^2,$$

da cui $Cv = 0$. Allora:

$$v \perp \operatorname{Im}(C^* \mid A^* C^* \mid \dots \mid (A^*)^{n-1} C^*),$$

dato che per ogni $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \langle v, C^* u_0 \rangle = \langle Cv, u_0 \rangle = 0 \\ \vdots \\ \langle v, (A^*)^{n-1} C^* u_{n-1} \rangle = \langle Av, (A^*)^{n-2} C^* u_{n-1} \rangle = 0 \end{cases},$$

e per l'ipotesi di osservabilità $v = 0$, e ciò è assurdo.

Se $\omega \neq 0$, allora esistono $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n$ tali che :

$$A(v_1 + iv_2) = i\omega (v_1 + iv_2),$$

da cui, considerando la parte reale, si ha:

$$y_{v_1}(t) = v_1 \cos(\omega t) - v_2 \sin(\omega t)$$

è una soluzione del sistema. La funzione $v_{v_1}(t)$ è palesemente periodica, ed è decrescente per quanto mostrato prima. Concludiamo che $v_{v_1}(t)$ è costante, dunque si ha :

$$\langle \Theta y_{v_1}(t), y_{v_1}(t) \rangle \equiv \gamma \in \mathbb{R}$$

Per il conto fatto in precedenza, allora, si ha :

$$C y_{v_1}(t) \equiv 0,$$

da cui in effetti, per ogni $u_0, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^p$:

$$\begin{cases} \langle v_1, C^* u_0 \rangle = \langle Cv_1, u_0 \rangle = 0 \\ \langle v_2, C^* u_0 \rangle = \langle Cv_2, u_0 \rangle = 0 \end{cases},$$

da cui :

$$\forall k = 1, \dots, n-1 : \begin{cases} \langle v_1, (A^*)^k C^* u_k \rangle = 0 \\ \langle v_2, (A^*)^k C^* u_k \rangle = 0 \end{cases},$$

da cui, per la condizione di osservabilità :

$$v_1 = v_2 = 0,$$

e ciò è assurdo.

Dunque $\mathrm{Re}\, \lambda < 0$ per ogni $\lambda \in \sigma(A)$, dunque A è stabile.

Viceversa, supponiamo che A sia stabile. Consideriamo:

$$Q = \lim_{T \to +\infty} R_T = \int_0^{+\infty} e^{sA^*} R e^{sA} \, ds$$

Allora:

$$A^* Q + Q A = \int_0^{+\infty} A^* e^{sA^*} R e^{sA} \, ds + \int_0^{+\infty} e^{sA^*} R A e^{sA} \, ds =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{d}{ds} \left[e^{sA^*} R e^{sA^*} \right] ds = \left[e^{sA^*} R e^{sA} \right]_0^{+\infty} = -R,$$

per le ipotesi di stabilità su A. Dunque Q risolve l'equazione matriciale di Lyapounov.

Se R è semidefinita positiva, allora:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \langle Qx, x \rangle = \int_0^{+\infty} \langle R e^{sA} x, e^{sA} x \rangle \, ds \geq 0,$$

da cui Q è semidefinita positiva. Se R è definita positiva, allora Q lo è altrettanto: la dimostrazione è analoga.

Infine, se Q_1, Q_2 risolvono l'equazione matriciale di Lyapounov, allora:

$$\frac{d}{ds} \left[e^{sA^*} (Q_1 - Q_2) e^{sA} \right] =$$

$$= e^{sA^*} \left[A^* Q_1 - A Q_2 - Q_1 A + Q_2 A \right] e^{sA} = 0,$$

da cui per ogni $t \geq 0$:

$$Q_1 - Q_2 = e^{tA^*} (Q_1 - Q_2) e^{tA},$$

da cui $Q_1 - Q_2 = 0$ poiché:

$$\lim_{t \to +\infty} e^{tA^*} (Q_1 - Q_2) e^{tA} = 0$$

La dimostrazione è dunque completa, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Se $m = p$, (A, Π_m) è sempre osservabile. Se dunque esiste una matrice Q simmetrica e semidefinita positiva che risolve l'equazione matriciale di Lyapounov (con $R = \Pi_m$), allora A è stabile.

STABILIZZABILITÀ NEL CASO LINEARE

Consideriamo, al solito, un sistema lineare del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A\,y(t) + B\,u(t) \\ y(0) = x \end{cases},$$

con $A \in M(n, \mathbb{R})$ e $B \in M(n, m, \mathbb{R})$.

Il sistema è STABILIZZABILE (a volte si dice che (A,B) è stabilizzabile) se esiste $K \in M(m,n,\mathbb{R})$ tale che la matrice $(A + BK)$ risulti stabile, nel senso dato nello scorso paragrafo.

Se (A,B) è stabilizzabile, allora:

$$u(t) = K\,y(t), \quad t \geq 0$$

è un feedback stabilizzante.

Tutte le soluzioni dell'equazione tendono allora a 0 per $t \to +\infty$, dato che esse risolvono:

$$\dot{y}(t) = A\,y(t) + B\,u(t) = (A + BK)\,y(t),$$

e $(A+BK)$ è per ipotesi stabile.

Diciamo che il sistema è COMPLETAMENTE STABILIZZABILE se per ogni $\omega > 0$ esiste $K_\omega \in M(m,n,\mathbb{R})$ tale che per ogni soluzione $y_x(t)$:

$$|y_x(t)| \leq M e^{-\omega t} |x|, \quad t \geq 0,$$

per qualche $M > 0$, dove $y_x(t)$ risolve:

$$\begin{cases} \dot{y}_x(t) = (A + BK_\omega)\,y_x(t) \\ y_x(0) = x \end{cases}$$

TEOREMA

Sono fatti equivalenti:

- Il sistema è completamente stabilizzabile;
- Il sistema è controllabile;
- Per un polinomio $p(\lambda) \in \mathbb{R}_n[\lambda]$, esiste $K \in M(m,n,\mathbb{R})$ tale che $p(\lambda) = p_{A+BK}(\lambda)$ (polinomio caratteristico di $(A+BK)$) (se $p(\lambda)$ è monico).

Dim.

Premettiamo alla dimostrazione un'osservazione.

OSSERVAZIONE

Consideriamo il sistema seguente:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A y(t) + B u(t) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Siano poi $P \in M(n, \mathbb{R})$ e $S \in M(m, \mathbb{R})$ matrici invertibili. Ponendo $z(t) = P y(t)$ e $v(t) = S u(t)$, si ha che $z(t)$ risolve:

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{A} z(t) + \tilde{B} v(t) \\ z(0) = \xi \end{cases},$$

con $\xi = Px$, e:

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \quad \tilde{B} = PBS^{-1}$$

Il sistema $(\tilde{A}, \tilde{B})$ ottenuto in questo modo è detto EQUIVALENTE al sistema (A, B). La relazione introdotta è una relazione di equivalenza. Dato che:

$$\mathrm{rk}\left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B\right] = \mathrm{rk}\left[\tilde{B} \mid \tilde{A}\tilde{B} \mid \dots \mid \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}\right],$$

è facile che (A, B) è controllabile se e solo se lo è $(\tilde{A}, \tilde{B})$.

Discutiamo allora le classi di equivalenza, nel caso in cui $m = 1$. Dunque:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A y(t) + \underline{b} u \\ y(0) = x \end{cases},$$

con $u(t) \in \mathbb{R}$ per ogni $t \geq 0$, e $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$ è un vettore (dunque $\underline{b}\, u = [ub_1, \dots, ub_n]^t$).

Consideriamo un sistema del tipo:

$$\begin{cases} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_n z = u \\ z(0) = \xi_1 \\ \vdots \\ z^{(n-1)} = \xi_n \end{cases}$$

Diremo che un sistema di questa forma è IN FORMA NORMALE.

Allora, definendo y in questo modo:

$$\begin{cases} y_1 = z \\ y_2 = z' \\ \vdots \\ y_m = z^{(m-1)} \end{cases}$$

ci si può ricondurre a un sistema del tipo:

$$\dot{y} = \tilde{A} y + \underline{b} u ,$$

con:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 \\ -a_m & & \cdots & -a_1 \end{bmatrix} , \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

In particolare, la matrice $\tilde{A}$ è detta MATRICE COMPAGNA, ed è tale che $p_{\tilde{A}}(x) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$.
In particolare, è facile notare che $\operatorname{rk}[\underline{b} \mid \tilde{A}\underline{b} \mid \dots \mid \tilde{A}^{m-1}\underline{b}] = m$, da cui il sistema è controllabile.

Fatta quest'osservazione, dimostriamo il seguente teorema.

TEOREMA
Consideriamo un sistema della forma:

$$\begin{cases} \dot{y} = A y + \underline{b} u \\ y(0) = x \end{cases} ,$$

con $A \in M(m, \mathbb{R})$ e $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$, con $x \in \mathbb{R}^m$. Supponiamo che $(A, \underline{b})$ sia controllabile. Allora il sistema è equivalente ad un unico sistema in forma normale, e in più i coefficienti $a_1, \dots, a_m$ sono i coefficienti del polinomio caratteristico di A:

$$p_A(\lambda) = \lambda^m + a_1 \lambda^{m-1} + \dots + a_{m-1} \lambda + a_m$$

Dim.
Dal teorema di Hamilton - Cayley:

$$p_A(A) = 0 ,$$

dunque:

$$A^3 = -\sum_{k=1}^{3} a_k A^{3-k},$$

con $A^0 = \mathbb{I}_3$, e quindi:

$$A^3 \underline{b} = -\sum_{k=1}^{3} a_k A^{3-k} \underline{b}$$

Dato che $(A, \underline{b})$ è controllabile, i vettori seguenti:

$$\begin{cases} \underline{v}_1 = \underline{b} \\ \underline{v}_2 = A\underline{b} \\ \vdots \\ \underline{v}_3 = A^{3-1}\underline{b} \end{cases}$$

formano una base di $\mathbb{R}^3$. Sia quindi:

$$\underline{y}(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t)),$$

ove:

$$\forall x = 0 : \underline{v}_x(t) = \sum_{i=1}^{3} y_i(t) \underline{v}_i,$$

e:

$$x = \sum_{i=1}^{3} y_i^0 \underline{v}_i$$

si ha:

$$\sum_{i=1}^{3} y_i'(t) \underline{v}_i = \underline{y}'(t) = A\underline{y}(t) + \underline{b}\, u(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} y_i(t) A \underline{v}_i + \underline{b}\, u(t) =$$

$$= \sum_{i=1}^{3-1} y_i(t) \underline{v}_{i+1} + y_3(t) A^3 \underline{b} + \underline{b}\, u(t),$$

ma per il teorema di Hamilton - Cayley:

$$A^3 \underline{b} = -\sum_{k=1}^{3} a_k A^{3-k} \underline{b},$$

da cui:

$$\sum_{i=1}^{3-1} y_i(t) \underline{v}_{i+1} + y_3(t) A^3 \underline{b} + \underline{b}\, u(t) =$$

$$= \sum_{j=2}^{3} y_{j-1}(t) \underline{v}_j - y_3(t) \sum_{j=1}^{3} a_{3+1-j} \underline{v}_j + \underline{b}\, u(t)$$

Dunque, eccoppiando i termini simili:

- $y_1'(t) = -y_3(t) a_3 + u$;
- $y_i'(t) = y_{i-1}(t) - y_3(t) a_{3+1-i}$; per $i = 2, \dots, n$.

Se dunque:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_{n-1} \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ 0 & & & 1 & -a_1 \end{bmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix},$$

si ha:

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \bar{A}\xi + \bar{b}u \\ \xi(0) = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \end{cases}$$

Quindi (A, b) è equivalente a $(\bar{A}, \bar{b})$. In particolare $S = \mathbb{I}_n$, e:

$$P^{-1} = [\, b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1} b \,]$$

Sia ora $Q \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che:

$$\begin{cases} Q \tilde{A} Q^{-1} = \bar{A} \\ Q e_n = e_1 \end{cases}$$

Allora, ad esempio:

- $\tilde{A} e_n = e_{n-1} - a_1 e_n$;
- $\tilde{A} e_n = Q^{-1} \bar{A} Q e_n = Q^{-1} \bar{A} e_1 = Q^{-1} e_2$.

Allora:

$$e_{n-1} - a_1 e_n = Q^{-1} e_2$$

$$Q e_{n-1} = a_1 Q e_n + e_2 = e_2 + a_1 e_1$$

Si ha poi, ad esempio:

$$e_{n-2} - a_2 e_n = \tilde{A} e_{n-1} = Q^{-1} \bar{A} Q e_{n-1} =$$

$$= Q^{-1} \bar{A} (e_2 + a_1 e_1) = Q^{-1} (e_3 + a_1 e_2),$$

da cui:

$$Q e_{n-2} = a_2 Q e_n + e_3 + a_1 e_2 = e_3 + a_1 e_2 + a_2 e_1$$

In generale, allora:

$$Q e_{n-j} = e_{j+1} + a_1 e_j + \dots + a_j e_1$$

Esplicitiamo allora la matrice Q. Si ha:

$$Q = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_1 & 1 \\ a_{n-2} & \vdots & \iddots & & \\ \vdots & a_1 & \iddots & & \\ a_1 & 1 & & 0 & \\ 1 & & & & \end{bmatrix}$$

Si può dimostrare che Q è una soluzione del sistema:

$$\begin{cases} Q \tilde{A} Q^{-1} = \bar{A} \\ Q e_n = e_1 \end{cases},$$

ma non riportiamo i dettagli.

Dunque $(\bar{A}, \bar{b})$ è equivalente a $(\tilde{A}, \tilde{b})$, da cui si ha la tesi, c.v.d.

Con il prossimo teorema diamo una caratterizzazione dei sistemi non controllabili.

TEOREMA (DI DECOMPOSIZIONE DI KALMAN)
Consideriamo un sistema lineare:

$$\begin{cases} y'(t) = A y(t) + B u(t) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Supponiamo che il sistema non sia controllabile:

$$\text{rk} \left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1} B \right] = \ell < n$$

Allora esiste $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix} B_1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

con:

- $A_{11} \in \mathcal{M}(\ell, \mathbb{R})$;
- $A_{12} \in \mathcal{M}(\ell, n-\ell, \mathbb{R})$;
- $A_{22} \in \mathcal{M}(n-\ell, \mathbb{R})$;
- $B_1 \in \mathbb{R}^\ell$.

Inoltre (A_{11}, B_1) è controllabile.

Dim.

PREMESSA

Esiste dunque una base di $\mathbb{R}^n$ tale che il sistema, in tale base, è:

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = A_{11}\xi_1 + A_{12}\xi_2 + B_1 u \\ \dot{\xi}_2 = A_{22}\xi_2 \end{cases},$$

e in più (A_{11}, B_1) è controllabile. La prima equazione descrive la PARTE CONTROLLABILE del sistema, mentre la seconda descrive la PARTE COMPLETAMENTE INCONTROLLABILE.

Sia $E_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ il seguente sottospazio:

$$E_0 = \{ B u_1 + AB u_2 + \dots + A^{n-1} B u_n \mid u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n \}$$

Allora:

- $A(E_0) \subseteq E_0$, cioè E_0 è invariante per A;
- $\mathrm{Im}(B) \subseteq E_0$.

Sia ora $E_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ tale che:

$$E_0 \oplus E_1 = \mathbb{R}^n$$

Siano poi:

- $\{v_1, \dots, v_e\}$ una base di E_0;
- $\{v_{e+1}, \dots, v_n\}$ una base di E_1.

Sia infine P la matrice di cambiamento di base da $\{v_1, \dots, v_n\}$ a $\{e_1, \dots, e_n\}$, le base sono: nica di $\mathbb{R}^n$.

Siano quindi:

$$\tilde{A} = PAP^{-1}, \qquad \tilde{B} = PB$$

Allora:

$$\tilde{A}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix}, \quad \tilde{B}u = \begin{bmatrix} B_1 u \\ B_2 u \end{bmatrix},$$

ove $\xi_1 \in \mathbb{R}^e$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^{n-e}$, $u \in \mathbb{R}^m$.

In particolare E_0 è $\tilde{A}$-invariante, dunque:

$$\tilde{A}\begin{bmatrix}\xi_1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11}\xi_1\\A_{21}\xi_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A_{11}\xi_1\\0\end{bmatrix},$$

da cui $A_{21} \equiv 0$. Inoltre $B(\mathbb{R}^m) \subseteq E_0$, dunque:

$$B_2 u = 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}^m,$$

da cui $B_2 \equiv 0$. Per concludere, notiamo che:

$$\mathrm{rk}([B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B]) = \mathrm{rk}([\tilde{B} \mid \tilde{A}\tilde{B} \mid \dots \mid \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]),$$

per similitudine tramite P ($\tilde{A} = PAP^{-1}$, $\tilde{B} = PB$), e:

$$[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = \left[\begin{array}{c|c|c|c} B_1 & A_{11}B_1 & \dots & A_{11}^{n-1}B_1 \\ 0 & 0 & & 0 \end{array}\right],$$

da cui:

$$\mathrm{rk}([B_1 \mid A_{11}B_1 \mid \dots \mid A_{11}^{n-1}B_1]) = \mathrm{rk}([\tilde{B} \mid \dots \mid \tilde{A}^{n-1}\tilde{B}]) = e,$$

da cui la tesi, visto che $B_1 \in \mathbb{R}^e$, $A_{11} \in M(e, \mathbb{R})$, c.v.d.

Siamo ora pronti per dimostrare il teorema.

Supponiamo che il sistema sia completamente stabilizzabile, ma per assurdo non sia controllabile, ossia:

$$\dim \mathrm{Im}[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B] = e < n$$

Per il teorema di decomposizione di Kalman, esiste $P \in GL(n, \mathbb{R})$ tale che:

$$PAP^{-1} = \begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\0 & A_{22}\end{bmatrix}, \quad PB = \begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix},$$

con (A_{11}, B_1) controllabile.

Data ora $K \in M(m, n, \mathbb{R})$, si ha:

$$P_{A+BK}(\lambda) = \det(\lambda I - (A+BK)) = \det(\lambda I - PAP^{-1} - PBKP^{-1}) =$$

$$= \det\left(\lambda I - \tilde{A} - \begin{bmatrix}B_1\\0\end{bmatrix} K P^{-1}\right) =$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix}\lambda I - A_{11} - B_1 K_1 & -A_{12}\\0 & \lambda I - A_{22}\end{bmatrix}\right),$$

con $K_1 = KP^{-1}$.

Dunque:

$$\det(\lambda I - (A+BK)) = \det(\lambda I - A_{11} - B_1 K_1)\det(\lambda I - A_{22}),$$

quindi:

$$\sigma(A_{22}) \subseteq \sigma(A+BK)$$

Se dunque:

$$\begin{cases} \omega_2 \overset{def}{=} \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A_{22})\} \\ \omega_K \overset{def}{=} \max\{\operatorname{Re}\lambda \mid \lambda \in \sigma(A+BK)\} \end{cases},$$

allora:

$$\omega_2 \leq \omega_K.$$

Se sistema è completamente stabilizzabile, dunque per $\omega > |\omega_2|$ esiste $K \in M(m,n,\mathbb{R})$ ed esiste $M>0$ tale che per una soluzione di:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = (A+BK)\,y(t) \\ y(0) = x \end{cases}$$

valga, per ogni $t \geq 0$, $|y(t)| \leq M e^{-\omega t}\|x\|$. Se dunque $\lambda_0 \in \sigma(A+BK)$ è tale che $\operatorname{Re}\lambda_0 = \omega_K$, e v_0 è autovettore relativo a λ_0, allora la soluzione con $y(0) = v_0$ è:

$$y(t) = e^{\lambda_0 t} v_0 \Rightarrow |y(t)| = e^{\operatorname{Re}\lambda_0 t}\|v_0\|,$$

da cui $\operatorname{Re}\lambda_0 \leq -\omega < -|\omega_2|$, da cui:

$$\omega_2 \leq \omega_K < -|\omega_2| \Rightarrow \omega_2 < -|\omega_2|,$$

assurdo.

Dunque 1) $\Rightarrow$ 2). Dimostriamo ora che 3) $\Rightarrow$ 1).

Sia $\omega > 0$. Consideriamo il polinomio:

$$p(\lambda) = (\lambda + \omega + \varepsilon)^n,$$

con $\varepsilon > 0$. Allora, se $K \in M(m,n,\mathbb{R})$ è tale che:

$$p(\lambda) = p_{A+BK}(\lambda),$$

allora:

$$\sigma(A+BK) = -\omega - \varepsilon,$$

da cui si ha che il sistema è completamente stabilizzabile, per l'arbitrarietà di $\omega > 0$.

Resta allora da dimostrare che 2) $\Rightarrow$ 3): lo faremo in tre passi.

Nel primo passo, supporremo $m = 1$, e dimostreremo l'asserto con quest'ipotesi aggiuntiva. Abbiamo dunque un sistema della forma:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = A y(t) + b u(t) \\ y(0) = x \end{cases},$$

con:

$$\mathrm{rk}\left([\, b \mid Ab \mid \dots \mid A^{n-1} b \,]\right)$$

Allora si ha anche:

$$\mathrm{rk}\left([\, \tilde{b} \mid \tilde{A}\tilde{b} \mid \dots \mid \tilde{A}^{n-1} \tilde{b} \,]\right),$$

con $\tilde{A}$ matrice compagna di A, e $\tilde{b} = e_n$:

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -a_n & \cdots & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix}$$

In particolare, si ha:

$$p_A(\lambda) = p_{\tilde{A}}(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n$$

Considerato allora un polinomio monico generico:

$$q(\lambda) = \lambda^n + \alpha_1 \lambda^{n-1} + \dots + \alpha_n,$$

definiamo:

$$\tilde{K} = [\, a_n - \alpha_n \;\; \dots \;\; a_1 - \alpha_1 \,]$$

Allora:

$$\tilde{A} + \tilde{b}\tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ -\alpha_n & \cdots & -\alpha_2 & -\alpha_1 \end{bmatrix},$$

da cui se $H \in GL(n, \mathbb{R})$ è tale che:

$$\begin{cases} H A H^{-1} = \tilde{A} \\ H b = \tilde{b} = e_n \end{cases},$$

allora:

$$q(\lambda) = p_{\tilde{A}+\tilde{b}\tilde{K}}(\lambda) = p_{M^{-1}(\tilde{A}+\tilde{b}\tilde{K})M}(\lambda) = p_{A+b\tilde{K}M}(\lambda) =$$

$$= p_{A+b\bar{K}}(\lambda),$$

con $\bar{K} = \tilde{K}M$. Il primo passo è dunque concluso.

Nel secondo passo, dimostreremo il seguente lemma.

LEMMA

Sia (A, B) controllabile. Allora esistono $L \in M(m,n,\mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^m$ tali che tale che $(A+BL, Bv)$ è controllabile.

Dim.

Innanzitutto, dato che (A,B) è controllabile, $B \neq 0$:
$\exists\, v \in \mathbb{R}^m$ s.t. $Bv \neq 0$

Dimostreremo ora che esistono $u_1, \dots, u_{n-1} \in \mathbb{R}^m$ tali che la successione seguente di vettori:

$$\begin{cases} e_1 = Bv \\ e_{i+1} = Ae_i + Bu_i \quad , i = 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

sia una base di $\mathbb{R}^n$.

Se per assurdo così non fosse, scelgo $k < n$, ove:

$$k \overset{\text{def}}{=} \max \{ h \in \{1, \dots, n\} \mid \exists\, u_1, \dots, u_{h-1} \in \mathbb{R}^m \text{ s.t. } e_1, \dots, e_h \text{ sono linearmente indipendenti} \}$$

Certamente, inoltre, $k \geq 0$. Siano dunque $u_1, \dots, u_{k-1}$ tali che $e_1, \dots, e_k$ risultino linearmente indipendenti. Sia:

$$E_0 \overset{\text{def}}{=} \operatorname{Span}(e_1, \dots, e_k)$$

Chiaramente $\dim E_0 = k$. Per massimalità di k:
$\forall\, u \in \mathbb{R}^m$: $Ae_k + Bu \in E_0$

In particolare, per $u = 0$, $Ae_k \in E_0$, quindi:

$$\operatorname{Im}(B) \subseteq E_0$$

Allora:
$\forall\, i = 1, \dots, k$: $Ae_i \in E_0$

Dunque:

- $A(E_0) \subseteq E_0$;
- $\mathrm{Im}(B) \subseteq E_0$.

Allora:

$$\dim\left(\left[B \mid AB \mid \dots \mid A^{n-1}B\right]\right) \leq \dim E_0,$$

da cui necessariamente $k = n$.

Sia allora $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base di $\mathbb{R}^n$ così fatta. Definiamo allora, dato $u_n \in \mathbb{R}^n$ arbitrario:

$$L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$e_i \to u_i$$

Allora:

$\forall\, i = 1, \dots, n-1$: $e_{i+1} = Ae_i + Bu_i = (A + BL)e_i$,

e iterando:

$\forall\, i = 2, \dots, n$: $e_i = (A + BL)^{i-1} Bv$

Dunque:

$$\mathrm{Span}\left(Bv, (A+BL)v, \dots, (A+BL)^{n-1}Bv\right) = \mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n),$$

e dato che $\mathrm{Span}(e_1, \dots, e_n) = \mathbb{R}^n$ deduciamo che $(A + BL, Bv)$ è controllabile, c.v.d.

Concludiamo con il passo 3.

Sia $p(\lambda)$ un polinomio monico, e considerata la coppia (A, B), siano L e v (dati dal lemma) tali che il sistema di equazione:

$$\dot{y} = (A + BL)y + (Bv)u$$

sia controllabile. Per il primo passo, esiste $k^* \in \mathbb{R}^n$ tale che:

$$p(\lambda) = p_{A+BL+Bv\cdot k^*}(\lambda),$$

da cui si conclude definendo $k \overset{\text{def}}{=} L + v \cdot k^*$, c.v.d.

INTRODUZIONE ALL'OTTIMALITÀ

Consideriamo un'equazione di stato generica, del tipo:

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = f(y(t), u(t)), \quad t \in [0,T] \\ y(0) = x \end{cases}$$

Vogliamo determinare un CONTROLLO OTTIMALE, ovvio un controllo che minimizzi un funzionale del tipo:

$$J(x,u) = \int_0^T g(y(t), u(t))\, dt + G(y(t))$$

Se invece $t \in [0, +\infty[$, il funzionale avrà del tipo:

$$J(x,u) = \int_0^{+\infty} g(y(t), u(t))\, dt$$

Limitiamoci al caso in cui $t \in [0,T]$, e inoltre f, g, G sono continue nelle rispettive variabili.

Prima di analizzare le condizioni necessarie per l'esistenza di controlli ottimali, nel prossimo paragrafo vedremo alcuni preliminari.

CONI NORMALI E CONI TANGENTI

Sia X uno spazio normato, e sia $F \subseteq X$. Sia poi $x_0 \in X$.
Si definisce CONO NORMALE in x_0 a F:

$$N(F, x_0) \overset{\text{def}}{=} \left\{ \varphi \in X^* \;\middle|\; \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ x \in F \setminus \{x_0\}}} \varphi\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|} \right) \leq 0 \right\}$$

OSSERVAZIONE
Il cono normale è ben definito e ha senso solamente quando $x_0 \in \partial F = \overline{F} \setminus \mathring{F}$.

Si definisce invece CONO TANGENTE in x_0 a F:

$$T(F, x_0) \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \in X \;\middle|\; \exists (u_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq X, \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \subseteq]0, +\infty[\right.$$
$$\left. \text{s.t. } (u_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \to u, (t_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \searrow 0, x_0 + t_n u_n \in F \right\}$$

Equivalentemente:

$$T(F, x_0) = \left\{ u \in X \;\middle|\; \forall \delta > 0 \; \exists t \in]0, \delta], \forall v \in B(u, \delta) \text{ s.t. } x_0 + tv \in F \right\}$$

OSSERVAZIONE
Anche in questo caso, la definizione ha senso solo quando $x_0 \in \overline{F} \setminus \mathring{F}$, in quanto $T(F, x_0) = X$ per ogni $u \in \mathring{F}$.
Infatti $u \notin T(F, x_0)$ se e solo se:
$\exists \delta_0 > 0$ s.t. $\forall t \in]0, \delta_0], \forall v \in B(u, \delta) : x_0 + tv \notin F$,
dunque:
$$\{ (t, v) \mid t \in]0, \delta_0], v \in B(u, \delta_0), x_0 + tv \in F \} = \emptyset$$

Vediamo ora una proposizione.

PROPOSIZIONE
Sia F convesso e chiuso. Allora:
$$N(F, x_0) = \left\{ \varphi \in X^* \mid \varphi(u) \leq 0 \; \forall u \in T(F, x_0) \right\}$$

Dim.
Sia $\varphi \in N(F, x_0)$, e sia $u \in T(F, x_0)$. Allora esistono $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \to u$, $(t_n)_{n \in \mathbb{N}^+} \searrow 0$ tali che:
$\forall n \in \mathbb{N}^+ : x_0 + t_n u_n \in F$,
da cui se $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^+} = (x_0 + t_n u_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$, per l'ipotesi

si ha, definitivamente per $n \geq N$, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\varphi\left(\frac{u_n}{\|u_n\|}\right) = \varphi\left(\frac{x_n - x_0}{\|x_n - x_0\|}\right) \leq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \varphi(u_n) \leq \varepsilon \|u_n\|,$$

e passando al limite:

$$\varphi(u) \leq \varepsilon \|u\|,$$

da cui la tesi, per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$.

Viceversa, sia $\varphi \in X^*$ con $\varphi(u) \geq 0$ per ogni $u \in T(F, x_0)$.

Sia $x \in \bar{F} - \{x_0\} \cap B(x_0, \delta)$, e siano:

$$t = \|x - x_0\|, \quad u = \frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}$$

Allora:

$$x = x_0 + tv,$$

e:

$$x - x_0 = tv \Rightarrow \|x - x_0\| = t$$

Dunque $x_0 \in F$ e $x_0 + tu \in \bar{F}$, da cui $x_0 + su \in F$ per ogni $s \in [0, t]$.

Se per assurdo fosse $u \notin T(F, x_0)$, allora esisterebbe $\delta_0 > 0$ tale che:

$$\emptyset = \{(t, v) \mid t \in]0, \delta_0], \ v \in B(u, \delta_0), \ x_0 + tv \in \bar{F}\}$$

da cui seguirebbe $x_0 + \frac{\delta_0}{2} u \notin F$, assurdo.

Allora $u \in T(F, x_0)$. Allora:

$$\varphi\frac{(x - x_0)}{\|x - x_0\|} = \varphi(u) \geq 0,$$

da cui si ottiene la tesi, c.v.d.

Un'immediata conseguenza è un Teorema che ricorda il principio variazionale di Fermat.

TEOREMA

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile secondo Fréchet in $x_0 \in K \subseteq X$. Se:

$$f(x_0) = \min_{x \in K} f(x),$$

allora:

$$-f'(x_0) \in N(K, x_0)$$

Sia.

Si ha infatti, per $x \in K$ sufficientemente vicino a x_0:

$$0 \leq f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + o(\|x - x_0\|), \quad x \to x_0,$$

da cui, dividendo per $\|x - x_0\|$:

$$-f'(x_0)\left(\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) \leq 0,$$

da cui la tesi, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Siano F, G tali che esiste $V \in \mathcal{I}(x_0)$ tale che:

$$V \subseteq F \cap G$$

Allora:

$$\begin{cases} N(F, x_0) = N(G, x_0) \\ T(F, x_0) = T(G, x_0) \end{cases}$$

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Siano X, Y spazi normati, e siano $x_0 \in F \subseteq X$, $y_0 \in G \subseteq Y$. Allora:

$$N(F \times G, (x_0, y_0)) = N(F, x_0) \times N(G, y_0)$$

La dimostrazione è dovuta al fatto che:

$$(X \times Y)^* \cong X^* \times Y^*$$

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Se $F, G \subseteq X$, e $x_0 \in F \subseteq G \subseteq X$, allora:

$$N(G, x_0) \subseteq N(F, x_0)$$

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Siano $F_1, \dots, F_m \subseteq X$, e siano:

$$F = \bigcup_{i=1}^{m} F_i, \quad x_0 \in \bigcap_{i=1}^{m} F_i$$

Allora:

$$N(F, x_0) \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} N(F_i, x_0)$$

Vediamo ora le regole che trasportano i coni normali per mezzo di funzioni.

PROPOSIZIONE

Siano X, Y spazi normati, e siano $U \subseteq X$, $V \subseteq Y$ aperti.
Sia poi $g : U \to V$ differenziabile secondo Fréchet in $x_0 \in U$.
Se $B \subseteq U$, $g(B) \subseteq C \subseteq V$ (con $C \subseteq V$), e $x_0 \in B$, allora:

$$N(C, g(x_0)) \subseteq [g'(x_0)^*]^{-1} N(B, x_0),$$

ove al secondo membro si è un'immagine inversa.

OSSERVAZIONE

Se $C = g(B)$, e g risulta differenziabile secondo Fréchet in $B(x_0, r) \subseteq U$, con $r > 0$, e g' risulta continua in x_0, allora vale la seguente uguaglianza:

$$N(C, g(\bar{x})) = [g'(\bar{x})^*]^{-1} N(B, \bar{x})$$

Dimostreremo ciò in seguito, con i seguenti teoremi:

- Il TEOREMA DI KANTOROVICH;
- Il TEOREMA DI LUSTERNIK - GRAVES.

OSSERVAZIONE

In generale, per F qualunque, si ha:

$$N(F, x_0) \subseteq \{ \varphi \in X^* \mid \varphi(u) \leq 0 \ \forall u \in T(F(x_0)) \}$$

TEOREMA DI LUSTERNIK

TEOREMA (DI LUSTERNIK)
Siano X, Y spazi di Banach, e sia $U \subseteq X$ un aperto. Sia poi $g: U \to Y$ differenziabile secondo Fréchet in $x_0 \in U$. Supponiamo poi che $g'(x_0): X \to Y$ sia surgettiva. Allora, posto $S = \{ x \in X \mid g(x) = g(x_0) \}$, vale:

$$N(S, x_0) = g'(x_0)^* (Y^*)$$

Dim.
Si ha:

$$g(S) \subseteq \{g(x_0)\}$$

OSSERVAZIONE
Si ha $N(\{g(x_0)\}, g(x_0)) = Y^*$, in quanto per ogni $\varphi \in Y^*$ la condizione è vacuamente verificata.

Dalla proposizione precedente, applicando $g'(x_0)^*$ a sinistra ed ambo i membri, si ha:

$$g'(x_0)^* \left[N(\{g(x_0)\}, g(x_0)) \right] \subseteq N(S, x_0)$$
$$g'(x_0)^* (Y^*) \subseteq N(S, x_0)$$

Per l'altra inclusione, si hanno i seguenti lemmi, che dimostreremo in seguito.

LEMMA (SOLO ENUNCIATO)
Nelle ipotesi del teorema, vale:

$$T(S, \bar{x}) = \ker g'(\bar{x})$$

LEMMA (SOLO ENUNCIATO)
Siano X, Y spazi di Banach, e sia $A: X \to Y$ lineare, limitata e surgettiva. Sia $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \ker A$. Allora esiste $T \in Y^*$ tale che $\varphi(x) = TAx$.

Sia $\varphi \in N(S, x_0)$. Allora $\varphi(u) \leq 0$ per ogni $u \in \ker g'(\bar{x})$, da cui $\varphi(u) = 0$ per ogni $u \in \ker g'(\bar{x})$ (usando il primo lemma). Dal secondo lemma si ha allora:

$$\varphi = g'(x)^* T, \quad T \in Y^*, \quad \text{c.v.d.}$$

TEOREMA DI PONTRYAGIN

TEOREMA (DI PONTRYAGIN)

Siano X, Y spazi di Banach, e siano $\phi: X \to Y$, $g: X \to \mathbb{R}$ differenziabili secondo Fréchet in X. Sia:

$$K = \{ x \in X \mid \phi(x) = 0, g(x) \in [a,b] \}$$

un vincolo.

Sia $x_0 \in K$, e supponiamo che:

$$\psi : X \to Y \times \mathbb{R}$$

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} \phi(x) \\ g(x) \end{bmatrix}$$

verifichi:

$$\operatorname{Im}(\psi'(x_0)) = Y \times \mathbb{R}$$

Allora, se:

$$x_0 = \min_{x \in K} J(x),$$

con $J: X \to \mathbb{R}$ differenziabile secondo Fréchet in X, allora:

$$\exists \zeta \in X^*, \exists \mu \in \mathbb{R} \text{ t.c. } J'(x_0) - \phi'(x_0)^* \zeta - g'(x_0)^* \mu = 0_{X^*}$$

Dim.

Sia:

$$K = \psi^{-1}(\{\underline{0}\} \times [a,b])$$

Per i risultati precedenti:

$$-J'(x_0) \in N(K, x_0) = \psi'(x_0)^* \left(N(\{\underline{0}\} \times [a,b], \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_0) \end{bmatrix}) \right) =$$

$$= \psi'(x_0)^* \left[N(\{\underline{0}\}, 0) \times N([a,b], g(x_0)) \right] =$$

$$= \psi'(x_0)^* \left[X \times N([a,b], g(x_0)) \right]$$

Ora:

$$N([a,b], g(x_0)) = \begin{cases}]-\infty, 0], & g(x_0) = a \\ \{0\}, & g(x_0) \in]a,b[\\ [0, +\infty[, & g(x_0) = b \end{cases}$$

Allora:

$$-J'(x_0) = \psi'(x_0)^* \begin{bmatrix} \xi \\ \lambda \end{bmatrix},$$

dunque per ogni $u \in X$:

$$-J'(x_0)u = \langle \Phi'(x_0)^* \xi, u \rangle + \langle g'(x_0)^* \lambda, u \rangle,$$

da cui:

$$0 = \langle J'(x_0), u \rangle + \langle \Phi'(x_0)^* \xi, u \rangle + \langle g'(x_0)^* \lambda, u \rangle,$$

da cui:

$$0 = J'(x_0) + \Phi'(x_0)^* \xi + g'(x_0)^* \lambda,$$

da cui la tesi, ponendo $\xi = -\zeta$ e $\lambda = -\mu$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Giustificheremo l'uguaglianza seguente in seguito:

$$N(K, x_0) = [\psi'(x_0)^*] N(\{0\} \times [a,b], \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_0) \end{bmatrix}),$$

con i teoremi di Kantorovich e di Lusternik-Graves.

OSSERVAZIONI SUL TEOREMA DI LUSTERNIK

Usando la notazione usata nel paragrafo dedicato al teorema di Lusternik, sappiamo che, se:

$$C = \{ \bar{y} \} = g(S),$$

allora a priori vale:

$$N(C, \bar{y}) \subseteq \left[g'(\bar{x})^* \right]^{-1} N(S, \bar{x}),$$

da cui:

$$g'(\bar{x})^* (Y^*) \subseteq N(S, \bar{x})$$

In realtà vale:

$$N(C, \bar{y}) = \left[g'(\bar{x})^* \right]^{-1} N(S, \bar{x}),$$

in quanto

$$\inf_{\substack{z \in S \\ g(z) = \bar{y}}} \| z - \bar{x} \| = \| \bar{x} - \bar{x} \| = 0,$$

da cui (dato che $g(S) = \{ \bar{y} \}$) la tesi del teorema di Lusternik - Graves si ottiene comunque.

> OSSERVAZIONE
> Non si può però concludere che allora vale l'uguaglianza:
> $$g'(\bar{x})^* (Y^*) = N(S, \bar{x}),$$
> in quanto $g'(\bar{x})^*$ non è suriettiva, dunque a priori:
> $$\left[g'(\bar{x})^* \right] \left[g'(\bar{x})^* \right]^{-1} N(S, \bar{x}) \subseteq N(S, \bar{x})$$

Veniamo ora alla dimostrazione dei due lemmi precedentemente solo enunciati.

LEMMA
Nelle ipotesi del teorema di Lusternik, vale:

$$T(S, \bar{x}) = \ker g'(\bar{x})$$

Dim.
Sia $u \in T(S, \bar{x})$, allora esistono $(t_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \searrow 0$ e $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \to u$ tali che:
$\forall\, m \in \mathbb{N}^+ : \bar{x} + t_m u_m \in S \Rightarrow g(\bar{x}) = g(\bar{x} + t_m u_m)$

Allora:

$$g(\bar{x}) = g(\bar{x} + t_m u_m) = g(\bar{x}) + g'(x)\, t_m u_m + o(t_m u_m),$$

$$g'(x)\, t_m u_m = o(t_m u_m),$$

$$g'(x)\, u_m = o(u_m),$$

da cui $g'(x)\, u = 0$, da cui $u \in \ker g'(x)$. L'implicazione opposta è più tecnica (e fa uso della tesi del teorema di Lusternik): non ne diamo i dettagli, c.v.d.

LEMMA

Siano X, Y spazi di Banach, e sia $A : X \to Y$ un operatore lineare, limitato e surgettivo. Sia poi $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) = 0$ per ogni $x \in \ker A$.

Allora:

$$\exists\, T \in Y^* \quad \text{s.t.} \quad \varphi(x) = T A x,$$

ossia:

$$\varphi = A^* T \in \mathrm{Im}(A^*)$$

Dim.

La tesi è la seguente:

$$\varphi \in \mathrm{Im}(A^*)$$

Sia $y \in Y$, e siano $x, x' \in X$ tali che:

$$Ax = Ax' = y$$

> OSSERVAZIONE
> Un elemento esiste di sicuro, perché A è surgettivo. Eventualmente $x = x'$.

Allora:

$$\varphi(x - x') = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi(x) = \varphi(x'),$$

perché $x - x' \in \ker A$, da cui φ è costante su $A^{-1}\{y\}$.

Definiamo allora:

$$T : Y \to \mathbb{R}$$

$$y \to Ty = \varphi(x)$$

T è una ben definita applicazione lineare: mostriamo che è continua.

Sia allora $G \subseteq R$ un aperto. Allora:

$$T^{-1}(G) = \{ y \in Y \mid Ty \in G \} = \{ Ax \mid x \in X, \varphi(x) \in G \} =$$
$$= A(\varphi^{-1}(G)),$$

ove $\varphi^{-1}(G)$ è aperto.

Notiamo ora che A è lineare, limitata e surgettiva: per il TEOREMA DELLA MAPPA APERTA, allora, A è aperta, da cui $T^{-1}(G) = A(\varphi^{-1}(G))$ è aperto.

Dunque $T \in Y^*$, e per ogni $x \in X$:

$$\varphi(x) = T(Ax),$$

ossia:

$$\varphi = A^* T,$$

da cui $\varphi \in \mathrm{Im}(A^*)$, c.v.d.

APPLICAZIONI DEL TEOREMA DI PONTRYAGIN AL PROBLEMA DI BOLZA

Consideriamo il problema di minimizzazione del seguente funzionale:

$$J(y,u) = \int_0^T g(y(t),u(t))\,dt + G(y(T)),$$

meglio noto come PROBLEMA DI BOLZA, dove il vincolo:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t),u(t)) \quad , t \in [0,T] \\ y(0) = x \end{cases},$$

che può essere riscritto in forma integrale in questo modo:

$$y(t) = x + \int_0^t f(y(s),u(s))\,ds$$

Supponiamo che sia:

$$\begin{cases} g \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}) \\ f \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n) \\ G \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \end{cases}$$

Dato che è presente un addendo dipendente dal valore puntuale di y in T, non possiamo scegliere spazi come $L^2([0,T],\mathbb{R}^n)$, ma dobbiamo richiedere che siano:

- $y \in C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$;
- $u \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m)$.

Il vincolo può essere espresso nella forma:

$$\Phi(y,u) = 0,$$

dove:

$$[\Phi(y,u)](t) = y(t) - x - \int_0^t f(y(s),u(s))\,ds$$

Se dunque:

- $X = C^0([0,T],\mathbb{R}^n) \times C^0([0,T],\mathbb{R}^m)$;
- $Y = C^0([0,T],\mathbb{R}^n)$,

allora:

- $J : X \to \mathbb{R}$, $\Phi : X \to Y$;
- $G : X \to \mathbb{R}$ (costante in u).

Calcoliamo ora le derivate. Si ha, per $(h,k) \in X$:

$$[J'(y_0,u_0)](h,k) = \int_0^T g_y(y_0,u_0)\,h(s)\,ds + \int_0^T g_u(y_0,u_0)\,k(s)\,ds + DG(y_0(T))\,h(T),$$

mentre:

$$[[\Phi'(y_0,u_0)](h,k)](t) = h(t) - \int_0^t f_y(y_0,u_0)\,h(s)\,ds - \int_0^t f_u(y_0,u_0)\,k(s)\,ds$$

Resta allora da verificare che:

$$\Phi(y_0,u_0) : X \to Y$$

sia suriettiva.

Data $\ell \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m)$, cerchiamo allora $(h,k) \in X$ tale che:

$$\forall t \in [0,T]: h(t) - \int_0^t f_y(y_0,u_0)\,h(s) + f_u(y_0,u_0)\,k(s)\,ds = \ell(t)$$

Poniamo $k \equiv 0$. Allora si ha:

$$h(t) - \int_0^t f_y(y_0,u_0)\,h(s)\,ds = \ell(t)$$

Nello spazio Y, bisogna allora risolvere:

$$(I - K)\,h = \ell,$$

ove I è l'identità e K è un operatore integrale.

OSSERVAZIONE
In particolare K è un operatore compatto, dunque potrebbe essere utile il TEOREMA DELL'ALTERNATIVA DI FREDHOLM. Tuttavia dimostrare che $(I-K)$ è iniettivo non è immediato.

La soluzione è:

$$h = \sum_{m=0}^{+\infty} K^m \ell,$$

ben definita e appartenente a Y, in quanto la serie è normalmente convergente.

Infatti:

$$\|Ke(t)\| = \left\| \int_0^t f_y(y_0, u_0)\, e(s)\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_0^t \|f_y\|_\infty \|e\|_\infty\, ds = t \|f_y\|_\infty \|e\|_\infty,$$

e per ogni $n \in \mathbb{N}^+$ (operando per induzione):

$$\|K^n e\| \leq \frac{t^n}{n!} \|f_y\|_\infty^n \|e\|_\infty,$$

da cui:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \|K^n e\| \leq e^{t\|f_y\|_\infty} \|e\|_\infty \leq$$

$$\leq e^{T\|f_y\|_\infty} \|e\|_\infty,$$

da cui la serie è normalmente convergente, dunque convergente.

Dunque $\Phi'(y_0, u_0)$ è surgettiva.

Sia dunque (y_0, u_0) un punto di minimo relativo per J sul vincolo:

$$K = \{ \Phi = 0 \}$$

Allora esiste $\varphi \in Y^* = C^0([0,T], \mathbb{R}^n)^* \cong (C^0([0,T], \mathbb{R})^*)^n$ tale che:

$$J'(y_0, u_0) + \Phi'(y_0, u_0)^* \varphi = \underline{0} \in X^*$$

Prima di andare avanti, però, bisogna caratterizzare $C^0([0,T], \mathbb{R})^*$: rimandiamo quindi al prossimo paragrafo.

DUALE DELLE FUNZIONI CONTINUE

Premettendo che non entreremo nei dettagli, $(C^0([0,T],\mathbb{R}))^*$ è costituito da misure con segno μ associate a funzioni φ che risultano differenza di funzioni crescenti e continue a sinistra, salvo al più nel punto T. In altre parole, φ è tale che:

- Per ogni $c<d<T$:
$$\mu([c,d[) = \varphi(d) - \varphi(c);$$
- $\mu([c,T[) = \varphi(T^-) - \varphi(c) = \lim_{s \nearrow T} \varphi(s) - \varphi(c)$.
- $\mu([c,T]) = \varphi(T) - \varphi(c)$.

Per $h \in C^0([0,T],\mathbb{R})$, vale allora:

$$\langle \mu, h \rangle = \mu(h) = \int_{[0,T]} h(t)\, d\mu(t)$$

Lo spazio $(C^0([0,T],\mathbb{R}^m))^*$ è allora costituito da m-uple di misure con segno $\underline{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_m)$, associate a funzioni $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ come quella presentata sopra. Dunque:

- Per ogni $c<d<T$:
$$\underline{\mu}([c,d[) = (\varphi_1(d) - \varphi_1(c), \dots, \varphi_m(d) - \varphi_m(c));$$
- $\underline{\mu}([c,T[) = (\varphi_1(T^-) - \varphi(c), \dots, \varphi_m(T^-) - \varphi_m(c))$;
- $\underline{\mu}([c,T]) = (\varphi_1(T) - \varphi_1(c), \dots, \varphi_m(T) - \varphi_m(c))$.

Notiamo che, se $\mu \in C^0([0,T],\mathbb{R})^*$ e $h \in C^1([0,T],\mathbb{R})$, allora vale la seguente formula di integrazione per parti:

$$\int_{[s,T]} h(t)\, d\mu(t) = \varphi(T)h(T) - \varphi(s)h(s) - \int_s^T h'(t)\varphi(t)\, dt$$

Infatti:

$$\int_{[s,T]} h(t)\, d\mu(t) = \int_{[s,T]} [h(t)-h(s)]\, d\mu(t) + h(s)[\varphi(T)-\varphi(s)] =$$

$$= \int_{[s,T]} \int_s^t h'(\sigma)\, d\sigma\, d\mu(t) + h(s)[\varphi(T)-\varphi(s)] = \int_s^T \int_{[\sigma,T]} d\mu(t)\, h'(\sigma)\, d\sigma +$$

$$+ h(s)[\varphi(T)-\varphi(s)] = \int_s^T [\varphi(T)-\varphi(\sigma)]\, h'(\sigma)\, d\sigma + h(s)[\varphi(T)-\varphi(s)] =$$

$$= \varphi(T)[h(T)-h(s)] + h(s)[\varphi(T)-\varphi(s)] - \int_s^T \varphi(\sigma)h'(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= [\varphi(T)h(T) - \varphi(s)h(s)] - \int_s^T \varphi(\sigma)h'(\sigma)\, d\sigma$$

APPLICAZIONE DEL TEOREMA DI PONTRYAGIN: CONCLUSIONE

Fatte le giuste premesse nello scorso paragrafo, concludiamo il discorso intrapreso due paragrafi fa.

Usando il teorema di Pontryagin, sappiamo che esiste $\mu \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m)^*$ tale che:

$$J'(y_0,u_0) - \Phi'(y_0,u_0)^* \mu = 0 \in X^*$$

Se $(h,k) \in X$, usando il teorema di Fubini-Tonelli (detta φ la funzione associata a μ):

$$\begin{aligned}
&\left[\Phi'(y_0,u_0)^* \mu\right](h,k) = \mu\left(\Phi'(y_0,u_0)(h,k)\right) = \\
&= \int_{[0,T]} h(s)\, d\mu(s) - \int_{[0,T]} \left(\int_0^t f_y(y_0,u_0)\cdot h(s) + f_u(y_0,u_0)\cdot k(s)\, ds \right) d\mu(t) = \\
&= \int_{[0,T]} h \cdot d\mu - \int_0^T \left[f_y \cdot h + f_u \cdot k \right] \left(\int_{[s,T]} d\mu \right) ds = \\
&= \int_{[0,T]} h \cdot d\mu - \int_{[0,T]} \left[f_y \cdot h + f_u \cdot k \right] (\varphi(T) - \varphi(s))\, ds = \\
&= \int_{[0,T]} h \cdot d\mu - \int_{[0,T]} \left[f_y \cdot h + f_u \cdot k \right] \eta(s)\, ds,
\end{aligned}$$

con:

$$\eta(s) \overset{\text{def}}{=} \varphi(T) - \varphi(s)$$

Per ogni $(h,k) \in X$, allora, vale:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[g_y(y_0,u_0)\cdot h + g_u(y_0,u_0)\cdot k \right] dt + DG(y_0(T))\cdot h(T) + \\
&+ \int_{[0,T]} h \cdot d\mu - \int_0^T \left[f_y(y_0,u_0)\cdot h + f_u(y_0,u_0)\cdot k \right] \eta(s)\, ds = 0,
\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\left(g_y(y_0(s),u_0(s)) - \eta(s) f_y(y_0(s),u_0(s)) \right] \cdot h(s)\, ds + \right. \\
&+ \int_0^T \left[g_u(y_0(s),u_0(s)) - \eta(s) f_u(y_0(s),u_0(s)) \right] \cdot k(s)\, ds + \\
&\left. + DG(y_0(T))\cdot h(T) + \int_{[0,T]} h(s)\, d\mu(s) = 0 \right.
\end{aligned}$$

Iniziamo ora a sfruttare l'arbitrarietà di $(h,k) \in X$. Se $h \equiv 0$, si ha:

$$\forall\, k \in C^0([0,T],\mathbb{R}^m): \int_{[0,T]} \left[g_u - \eta f_u \right] \cdot k\, ds = 0,$$

da cui, per il Lemma fondamentale del calcolo delle Variazioni (in $L^1([0,T])$):

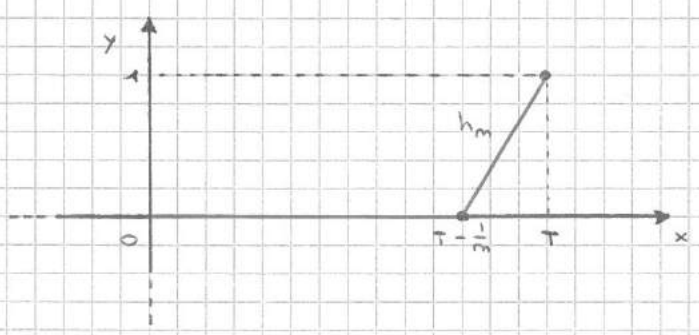
$$g_u(y_0, u_0) - \eta \cdot f_u(y_0, u_0) = 0,$$

quasi ovunque in $[0,T]$, rispetto alla misura di Lebesgue su $[0,T]$.

Definiamo ora la seguente successione di funzioni in $C^0([0,T], \mathbb{R}^m)$:

$$(h_n)_{n \in \mathbb{N}^+}, \quad h_n(t) = \begin{cases} 0 & , t \le T - \frac{1}{n} \\ v \cdot [n(t-T) + 1] & , T - \frac{1}{n} < t \le T \end{cases},$$

con $v \in \mathbb{R}^m$ fissato:



Si ottiene allora, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

$$0 = \int_{T-\frac{1}{n}}^{T} [g_y(y_0, u_0) - \eta f_y(y_0, u_0)] \cdot h_n \, ds + DG(y_0(T)) \cdot v + \int_{[T-\frac{1}{n}, T]} v \cdot [n(t-T) + 1] \cdot d\varphi(t)$$

Per $n \to +\infty$, si ha, per il Teorema di convergenza dominata:

$$\left(\int_{T-\frac{1}{n}}^{T} [g_y(y_0, u_0) - \eta (f_y(y_0, u_0)] \cdot h_n \, ds \right)_{n \in \mathbb{N}^+} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

Studiamo ora il terzo termine, ossia il secondo integrale. Si ha, mediante integrazione per parti:

$$\int_{[T-\frac{1}{n}, T]} [n(s-T) + 1] v \cdot d\mu(s) = \left[(n(s-T) + 1) v \cdot \varphi(s) \right]_{T-\frac{1}{n}}^{T} + - \int_{T-\frac{1}{n}}^{T} nv \cdot \varphi(t) \, dt = v \cdot \varphi(T) - \int_{T-\frac{1}{n}}^{T} nv \cdot \varphi(t) \, dt,$$

e per $n \to +\infty$:

$$\left(\int_{[T-\frac{1}{n}, T]} h(s) \, d\mu(s) \right)_{n \in \mathbb{N}^+} \xrightarrow[n \to +\infty]{} [\varphi(T) - \varphi(T^-)] \cdot v,$$

da cui deve valere, per ogni $v \in \mathbb{R}^m$:

$$DG(y_0(T)) \cdot v + [\varphi(T) - \varphi(T^-)] \cdot v = 0,$$

da cui:

$$DG(y_0(T)) = -[\varphi(T) - \varphi(T^-)]$$

Per concludere, se $h \in C_c^1([0,T], \mathbb{R}^m)$, allora si ha:

$$\int_0^T [g_y(y_0,u_0) - \eta(s) f_y(y_0,u_0)] \cdot h \, ds + \int_{[0,T]} h(t) \, d\mu(t) = 0,$$

e dato che:

$$\int_{[0,T]} h(t) \, d\mu(t) = -\int_0^T h'(t) \varphi(t) \, dt,$$

allora:

$$\int_0^T [g_y(y_0,u_0) - \eta(s) f_y(y_0,u_0)] \cdot h - h' \cdot \varphi \, ds$$

da cui, per definizione di derivata distribuzionale, esiste:

$$\eta'(s) = -\varphi'(s) = -\eta(s) f_y(y_0,u_0) + g_y(y_0,u_0),$$

quasi ovunque in $[0,T]$.

Si ottiene in definitiva il seguente sistema di condizioni necessarie:

$$\begin{cases} g_u(y_0,u_0) - \eta(s) f_u(y_0,u_0) = 0 \\ \eta'(s) = -\eta(s) \cdot f_y(y_0,u_0) + g_y(y_0,u_0) = 0 \\ \eta(T) + DG(y_0(T)) = 0 \end{cases},$$

ove la prima e la seconda condizione sono da intendersi quasi ovunque su $[0,T]$, mentre l'ultima è puntuale, ed è dovuta al fatto che:

$$\eta(T) = \lim_{t \nearrow T} \eta(t) = \lim_{t \nearrow T} [\varphi(T) - \varphi(t)] = \varphi(T) - \varphi(T^-)$$

In molti casi concreti, questo sistema di condizioni individua un'unica coppia (y_0,u_0) candidata a essere la coppia ottimale: l'esistenza della coppia ottimale, tuttavia, va ovviamente dimostrata separatamente.

TEOREMI DI KANTOROVICH E LUSTERNIK - GRAVES

In questo paragrafo sistemeremo tutti i dettagli riguardo la dimostrazione del teorema di Pontryagin: iniziamo con il TEOREMA DI KANTOROVICH.

TEOREMA (DI KANTOROVICH)
Siano X, Y spazi di Banach, e sia $\Omega \subseteq X$ un aperto. Sia poi $f : \Omega \to Y$ una applicazione continua. Siano poi $x_0 \in \Omega$, $B(x_0, r) \subseteq \Omega$ (con $r > 0$), e $A : B(x_0, r) \to L(X, Y)$ tale che:

- Esiste $\beta > 0$ tale che per ogni $x \in B(x_0, r)$ esista un'applicazione inversa destra di $A(x)$, sia essa $B(x) : Y \to X$, tale che:
  $\forall\, u \in Y : \| B(x) u \|_X \leq \beta \| u \|_Y$;
- Esiste $\alpha \in \left]0, \frac{1}{\beta}\right[$ tale che per ogni $x_1, x_2 \in B(x_0, r)$:
  $$\| f(x_2) - f(x_1) - A(x_1)(x_2 - x_1) \|_Y \leq \alpha \| x_2 - x_1 \|_X .$$

Allora, se:
$$\| f(x_0) \| < \frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta) r ,$$
esiste $\bar{x} \in B(x_0, r)$ tale che $f(\bar{x}) = \underline{0}$. Esso può essere determinato definendo la successione seguente (derivante dall'uso del metodo di Newton):
$$\begin{cases} z_0 = x_0 \\ z_{m+1} = z_m - B(z_m)(f(x_m)) \end{cases} ,$$
la quale è ben definita, e soddisfa:
$$\| z_m - \bar{x} \| \leq r(\alpha\beta)^m \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$
In effetti, per il termine iniziale si ha una disuguaglianza più precisa:
$$\| x_0 - \bar{x} \| \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \| f(x_0) \| < r$$

Dim.

Iniziamo dimostrando per induzione che per ogni $n \in \mathbb{N}$:

- $z_n \in B(x_0, r)$;
- $\| z_{n+1} - z_0 \| \leq \beta (\alpha\beta)^n \| f(x_0) \|$;
- $\| f(z_n) \| \leq (\alpha\beta)^n \| f(x_0) \|$.

Il caso base è banale, in quanto $z_0 = x_0$. In particolare si ha:

$$\| z_1 - z_0 \| = \| B(x_0)(f(x_0)) \| \leq \beta \| f(x_0) \|$$

Supponiamo allora che le tre proposizioni valgano per $k = 0, \dots, N-1$. Si ha allora:

$$\| z_N - x_0 \| \leq \sum_{j=0}^{N-1} \| z_{j+1} - z_j \| \leq \beta \sum_{j=0}^{N-1} \| f(x_j) \| \leq$$

$$\leq \beta \sum_{j=0}^{N-1} (\alpha\beta)^j \| f(x_0) \| \leq$$

$$\leq \beta \sum_{j=0}^{+\infty} (\alpha\beta)^j \| f(x_0) \| = \beta \frac{1}{1-\alpha\beta} \| f(x_0) \| <$$

$$< \beta \frac{\alpha}{1-\alpha\beta} \cdot \frac{1}{\beta} (1-\alpha\beta) r = r$$

OSSERVAZIONE

Notiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

$$0 = f(z_{n-1}) + A(z_{n-1})(z_n - z_{n-1})$$

Per l'osservazione appena fatta:

$$\| f(z_N) \| = \| f(x_N) - f(z_{N-1}) - A(z_{N-1})(z_N - z_{N-1}) \| \leq$$

$$\leq \alpha \| z_N - z_{N-1} \| \leq$$

$$\leq \alpha\beta \| f(z_{N-1}) \| \leq (\alpha\beta)^N \| f(x_0) \|,$$

usando entrambe le ipotesi del teorema e l'ipotesi induttiva.

Infine:

$$\| z_{N+1} - z_N \| \leq \beta \| f(z_N) \| \leq (\alpha\beta)^N \cdot \beta \| f(x_0) \|,$$

e la dimostrazione per induzione è completa.

La successione $(z_n)_{n \in \mathbb{N}^+}$ è allora di Cauchy, visto che $(\alpha\beta) < 1$, dunque esiste $\bar{x}$ tale che:

$$\lim_{n \to +\infty} z_n = \bar{x}$$

Notiamo che:

$$\| \bar{x} - x_0 \| = \lim_{k \to +\infty} \| z_k - x_0 \| \leq \beta \frac{1}{1 - \alpha\beta} \| f(x_0) \| < r,$$

e per continuità di f in $B(x_0, r)$:

$$\| f(\bar{x}) \| = \lim_{n \to +\infty} \| f(z_n) \| = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow f(\bar{x}) = 0$$

Infine, per $n \in \mathbb{N}$:

$$\| z_n - \bar{x} \| = \lim_{p \to +\infty} \| z_n - z_p \| \leq \lim_{p \to +\infty} \sum_{k=n}^{p-1} \| z_{k+1} - z_k \| \leq$$
$$\leq \sum_{k=n}^{+\infty} \| z_{k+1} - z_k \| \leq \beta \| f(x_0) \| \sum_{k=n}^{+\infty} (\alpha\beta)^k =$$
$$= \beta \frac{(\alpha\beta)^n}{1 - \alpha\beta} \| f(x_0) \| < r (\alpha\beta)^n, \text{ c.v.d.}$$

Con il teorema appena dimostrato, possiamo dimostrare un altro teorema, il TEOREMA DI LUSTERNIK - GRAVES.

TEOREMA (DI LUSTERNIK - GRAVES)
Siano X, Y spazi di Banach, sia $\Omega \subseteq X$ un aperto, e sia $g : \Omega \to Y$ un'applicazione differenziabile secondo Fréchet in $B(\bar{x}, r_0) \subseteq \Omega$, con $\bar{x} \in \Omega$ e $r > 0$, con $g'(x) : X \to Y$ continua in $\bar{x}$, e $g'(\bar{x})$ surgettiva.

Allora esistono $\rho \in \left]0, \frac{r_0}{2}\right]$, $\alpha > 0$, $C > 0$ tali che:
$\forall \omega \in B(\bar{x}, \rho)$, $\forall y \in B(g(\bar{x}), \alpha)$ $\exists x \in B\left(\bar{x}, \frac{r_0}{2}\right)$ s.t.

$$\begin{cases} g(x) = y \\ \| x - \omega \| \leq C \| y - g(\omega) \| \end{cases}$$

Si dice allora che g è APERTA in $\bar{x}$.

Dim.
Sia $A = g'(\bar{x})$. Proviamo innanzitutto che esiste $\beta > 0$ tale che:
$\forall y \in Y \; \exists \omega \in X$ s.t. $A\omega = y$, $\| \omega \| \leq \beta \| y \|$

Siano:

- $B = \{ x \in X \mid \|x\| < 1 \}$
- $S_\delta = \{ y \in Y \mid \|y\| < \delta \}$, per ogni $\delta > 0$.

Essendo A un'applicazione aperta, per il teorema della mappa aperta, esiste $\delta > 0$ tale che:

$$S_\delta \subseteq A(B)$$

Se $y = 0$, allora $\omega = 0$ verifica la richiesta.
Se $y \neq 0$, sia $t = \frac{\delta}{2\|y\|}$. Allora $ty \in S_\delta$, da cui esiste $z \in B$ tale che:

$$Az = ty,$$

da cui, se $\omega = \frac{z}{t}$, si ha:

- $\omega \in X$;
- $A\omega = y$;
- $\|\omega\| \leq \frac{1}{\|t\|} = \frac{2}{\delta}\|y\|$.

Per concludere basta scegliere allora:

$$\beta = \frac{2}{\delta}$$

L'applicazione $h : y \to \omega$ definisce allora un'inversa destra $h : Y \to X$ di $A = g'(\bar{x})$, tale che per ogni $y \in Y$:

$$\|h(y)\| \leq \beta\|y\|$$

Fatte queste premesse, sia $\alpha \in]0, \frac{1}{\beta}[$. Per la continuità di g' in $\bar{x}$, esiste $r \in]0, \frac{R}{2}]$ tale che:
$\forall w, u \in B(\bar{x}, 2r) : \|g(w) - g(u) - g'(u)(w-u)\| \leq$
$\leq \alpha\|w - u\|$

Siano allora $\sigma, \tau > 0$ tali che:

$$\sigma + \tau < \frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta)r$$

Per continuità di g in $B(\bar{x}, r_0)$, esiste $\rho \in]0, r]$ tale che:

$$g(B(\bar{x}, \rho)) \subseteq B(g(\bar{x}), \tau)$$

Fissati $w \in B(\bar{x}, \rho)$, $y \in B(g(\bar{x}), \sigma)$, sia:

$$f(x) \overset{\text{def}}{=} g(x) - y$$

Si ha allora:

$$\| f(\omega) \| \leq \| g(\omega) - g(\bar{x}) \| + \| g(\bar{x}) - y \| < \delta + \tau < \frac{1}{\beta}(1 - \alpha\beta)\tau$$

Inoltre, durante la dimostrazione, è stata dimostrata la validità delle altre ipotesi del Teorema di Kantorovich. In particolare, per $x, x' \in B(\omega, \tau)$:

$$\| f(x') - f(x) - g'(x)(x' - x) \| = \| g(x') - g(x) - g'(x)(x' - x) \| < \alpha \| x' - x \|,$$

in quanto:

- $\| x' - \bar{x} \| \leq \| x' - \omega \| + \| \omega + \bar{x} \| < \tau + \rho \leq 2\tau$;
- $\| x - \bar{x} \| \leq \| x - \omega \| + \| \omega - \bar{x} \| < \tau + \rho \leq 2\tau$.

Per il teorema di Kantorovich, allora, esiste $x \in B(\omega, \tau)$ tale che $f(x) = \underline{0}$, ossia $g(x) = y$, e inoltre:

$$\| x - \omega \| \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \| f(\omega) \| < \tau,$$

ossia:

$$\| x - \omega \| \leq \frac{\beta}{1 - \alpha\beta} \| g(\omega) - y \|$$

Si deduce allora la tesi, per arbitrarietà di $\omega \in B(\bar{x}, \rho)$ e $y \in B(g(\bar{x}), \sigma)$, ponendo:

$$C = \frac{\beta}{1 - \alpha\beta}, \quad \text{c.v.d.}$$

Dimostrati questi teoremi, torniamo alla dimostrazione del teorema di Pontryagin. La dimostrazione è corretta, tuttavia c'è un'uguaglianza che non è stata giustificata:

$$N(K, x_0) = \psi'(x_0)^* \left(N\left(\{0\} \times [a, b], \begin{bmatrix} 0 \\ g(x_0) \end{bmatrix} \right) \right)$$

Enunciamo allora (e dimostriamo) una proposizione che ci consentirà di dimostrare tale uguaglianza.

PROPOSIZIONE

Siano X, Y spazi di Banach, e sia $\Omega \subseteq X$ un aperto. Sia poi $g: \Omega \to Y$ un'applicazione differenziabile secondo Fréchet in $\bar{x} \in \Omega$. Sia $B \subseteq \Omega$ tale che $\bar{x} \in B$, e sia $C \subseteq V$.

Se $C \supseteq g(B)$, allora:

$$N(C, g(\bar{x})) \subseteq [g'(\bar{x})^*]^{-1}[N(B, \bar{x})],$$

quindi in particolare:

$$g'(\bar{x})^* [N(C, g(\bar{x}))] \subseteq N(B, \bar{x})$$

Se invece $C = g(B)$, e g è differenziabile secondo Fréchet in $B(\bar{x}, r_0) \subseteq \Omega$, con g' continua in $\bar{x}$, e $g'(\bar{x})$ è suriettiva:

$$N(C, g(\bar{x})) = [g'(\bar{x})^*]^{-1} N(B, \bar{x})$$

Dim.

Sia $\varphi \in N(C, g(\bar{x}))$. Allora:

$$\varphi(y - g(\bar{x})) \leq \omega(\|y - g(x)\|) \quad \forall y \in C,$$

con $\omega(\|y - g(\bar{x})\|) = o(\|y - g(x)\|)$, per $\|y - g(\bar{x})\| \to 0$.

Dato che g è differenziabile in $\bar{x}$:

$$\forall x \in B: \; g(x) - g(\bar{x}) - [g'(\bar{x})](x - \bar{x}) = \Theta(\|x - \bar{x}\|),$$

con $\Theta(\|x - \bar{x}\|) = o(\|x - \bar{x}\|)$, per $x \to \bar{x}$.

Sia $x \in B$. Allora $g(x) \in C$, quindi:

$$\begin{aligned}
[g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x}) &= \varphi(g'(\bar{x})[x - \bar{x}]) = \\
&= \varphi(g(x) - g(\bar{x}) - \Theta(\|x - \bar{x}\|)) = \\
&= \varphi(g(x) - g(\bar{x})) + \Theta_1(\|x - \bar{x}\|) \leq \\
&\leq \omega(\|g(x) - g(\bar{x})\|) + \Theta_1(\|x - \bar{x}\|),
\end{aligned}$$

con $\Theta_1(\|x - \bar{x}\|) = o(\|x - \bar{x}\|)$, per $x \to \bar{x}$. Dato che per x sufficientemente vicino a $\bar{x}$:

$$\|g(x) - g(\bar{x})\| \leq [\|g'(\bar{x})\| + 1] \|x - \bar{x}\|,$$

si ha allora, per tali x:

$$\frac{[g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} \leq \frac{\omega(K\|x - \bar{x}\|)}{\|x - \bar{x}\|} + \frac{\Theta_1(\|x - \bar{x}\|)}{\|x - \bar{x}\|},$$

da cui:

$$\limsup \frac{[g'(\bar{x})^* \varphi](x - \bar{x})}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0;$$

da cui $\varphi \in [g'(\bar{x})^*]^{-1} N(B, \bar{x})$. Dunque:

$$N(C, g(\bar{x})) \subseteq [g'(\bar{x})^*]^{-1} N(B, \bar{x}),$$

e applicando $g'(\bar{x})^*$ per entrambi i membri si ha:

$$[g'(\bar{x})^*] N(C, g(\bar{x})) \subseteq [g'(\bar{x})^*][g'(\bar{x})^*]^{-1} N(B, \bar{x}) \subseteq$$
$$\subseteq N(B, \bar{x}),$$

da cui il primo enunciato.

OSSERVAZIONE

Si noti che, a priori, per $f: X \to Y$ e $A \subseteq Y$:

$$f(f^{-1}(A)) \subseteq A,$$

e l'uguaglianza vale se $A \subseteq f(X)$ (in particolare vale se f è suriettiva).

Nel secondo caso, immediatamente è applicabile il teorema di Lusternik - Graves, dunque esistono $r > 0$, $C > 0$ e $\rho \in]0, \frac{\delta}{2}]$ tali che:

$\forall w \in B(\bar{x}, \rho)$, $\forall y \in B(g(\bar{x}), r)$ $\exists x \in B(\bar{x}, \frac{\delta}{2})$ s.t.

$$\begin{cases} g(x) = y \\ \|x - w\| \leq C \|y - g(w)\| \end{cases}$$

In particolare, se $w = \bar{x}$, si ha:

$$\forall y \in B(g(\bar{x}), r): \inf_{\substack{z \in B \\ g(z) = y}} \|\bar{x} - z\| \leq C \|g(\bar{x}) - y\|$$

Per ogni $y \in B(g(\bar{x}), r)$ esiste allora $z_y \in B$ tale che:

$$\begin{cases} g(z_y) = y \\ \|z_y - \bar{x}\| \leq 2C \|y - g(\bar{x})\| \end{cases}$$

Sia allora $\varphi \in [g'(\bar{x})^*]^{-1}(N(B, \bar{x}))$, ossia tale che:

$$g'(\bar{x})^* \varphi \in N(B, \bar{x})$$

Per definizione di cono normale:

$$g'(\bar{x})^* \varphi (x - \bar{x}) = \varphi(g'(\bar{x})(x - \bar{x})) \leq \omega(\|x - \bar{x}\|),$$

per $x \in B$, ove ω è infinitesima in 0.

Dato che g è differenziabile in $\bar{x}$, per $y \in C \cap B(g(\bar{x}), r)$ si ha:

$$\varphi(y - g(\bar{x})) = \varphi(g(z) - g(\bar{x})) = \varphi(g'(\bar{x})(z - \bar{x}) + \vartheta(\|z - \bar{x}\|) \leq$$

$$\leq \omega(\|z - \bar{x}\|) + \|\varphi\| \vartheta_1(\|z - \bar{x}\|) \leq$$

$$\leq \omega(2C\|y - g(\bar{x})\|) + \|\varphi\| \vartheta_1(2C\|y - g(\bar{x})\|) \leq$$

$$\leq \vartheta_2(\|y - g(\bar{x})\|)$$

con $\vartheta_2(\|y - g(\bar{x})\|) = o(\|y - g(\bar{x})\|)$, per $\|y - g(\bar{x})\| \to 0$. Dunque $\varphi \in N(C, g(\bar{x}))$, c.v.d.

Per concludere, vediamo una generalizzazione del Teorema di Lusternik, la cui dimostrazione è omessa.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)
Siano X, Y spazi di Banach, e sia $\Omega \subseteq X$ un aperto. Sia $g: \Omega \to Y$ differenziabile secondo Fréchet in $B(\bar{x}, r_0) \subseteq \Omega$, con g' continua in $\bar{x}$, e $g'(\bar{x})$ surgettiva. Sia poi $C \subseteq Y$, e sia $B = g^{-1}(C)$. Supponiamo che $\bar{x} \in B$. Allora:

$$N(B, \bar{x}) = [g'(\bar{x})^*] N(C, g(\bar{x}))$$

L'uguaglianza:

$$N(K, x_0) = [\psi'(x_0)^*](N(\{0\} \times [a, b], [\tfrac{\partial}{\partial x_0}]))$$

è dunque dimostrata, perché in effetti la proposizione precedente è applicabile.

UN ALTRO ESEMPIO: UN MODELLO EPIDEMICO CON VACCINAZIONE

Vediamo ora un'altra applicazione del Teorema di Pontryagin, analizzando una popolazione alle prese con un'epidemia, la quale può essere combattuta mediante vaccinazione.

Supponiamo che il tempo sia limitato (dunque $\tau = [0, T]$), in modo da poter considerare costante nel tempo la numerosità della popolazione.

Supponiamo che, tra i membri di tale popolazione, si sviluppi un'epidemia con:

- TASSO DI CONTAGIO $\beta \in [0, 1]$;
- TASSO DI GUARIGIONE $\mu \in [0, 1]$.

La popolazione si divide allora in tre categorie:

- I SUSCETTIBILI, ossia coloro che possono contrarre la malattia;
- gli INFETTI, ossia i malati;
- i RITOSSI, ossia coloro che sono guariti dalla malattia, e che perciò non possono più contrarla.

Siano allora $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ le percentuali delle tre categorie al tempo t. Allora:

$\forall\, t \in [0, T]$: $S(t) + I(t) + R(t) = 1$,

e:

$\forall\, t \in [0, T]$: $S(t) \geq 0$, $I(t) \geq 0$, $R(t) \geq 0$

Inoltre (supponendo che la popolazione sia molto vasta, in modo da poter trattare $S(t)$, $I(t)$, $R(t)$ come funzioni):

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta\, S(t)\, I(t) \\ I'(t) = \beta\, S(t)\, I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu\, I(t) \end{cases}, \quad t \in [0, T],$$

a cui vanno aggiunte le condizioni iniziali:

$$S(0) = S_0 \geq 0, \quad I(0) = I_0 \geq 0, \quad R(0) = R_0 \geq 0,$$

con: $S_0 + I_0 + R_0 = 1$.

Supponiamo ora di fondere un vaccino (da somministrare solamente ai suscettibili), che rende ogni individuo vaccinato immune alla malattia, in tempo istantaneo.

È chiaro che la strategia migliore, nonché la più dispendiosa, è quella di vaccinare immediatamente tutti i suscettibili. Siamo invece interessati a minimizzare simultaneamente gli infetti e i costi dell'operazione di vaccinazione. Sia allora:

$$u : [0,T] \to [0,1]$$
$$t \to u(t)$$

descrive il tasso di immunizzazione al variare del tempo, lo scopo è quello di minimizzare un funzionale della forma:

$$J(u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^T I(t) + \frac{A}{2} u(t)^2 \, dt,$$

con $A > 0$: la funzione di A è quella di dare più importanza all'aspetto sanitario ($A \approx 0$) o a quello economico ($A \gg 0$). Il vincolo è ora il seguente:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) I(t) - u(t) S(t) \\ I'(t) = \beta S(t) I(t) - \mu I(t) \\ R'(t) = \mu I(t) + u(t) S(t) \\ S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad R(0) = R_0 \end{cases},$$

da cui si può osservare la presenza di un nuovo termine, dovuto all'operazione di vaccinazione, che tende a convertire suscettibili in rimossi.

> OSSERVAZIONE
> Dato che $R(t) = 1 - S(t) - I(t)$, le tre equazioni sono ridondanti.

Alcuni aspetti possono essere dedotti risolvendo le due equazioni:

$$\begin{cases} I(t) = I_0 \, e^{\int_0^t \beta S(\delta) - \mu \, d\delta} \\ S(t) = S_0 \, e^{\int_0^t \beta I(\delta) + u(\delta) \, d\delta} \end{cases}$$

Si può allora notare che:

- Dato che $I_0 \geq 0$ e $S_0 \geq 0$, si ha $I(t) \geq 0$ e $S(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$;
- Dato che $I'(t) + S'(t) = -u(t)S(t) - \mu I(t) \leq 0$, e $I_0 + S_0 \leq 1$, per ogni $t \in [0,T]$ vale $I(t) + S(t) \leq 1$;
- Dato che $u(t) \in [0,1]$ per ogni $t \in [0,T]$, e $I(t) \geq 0$ per ogni $t \in [0,T]$, $S(t)$ è decrescente in T;
- Se $S_0 \leq \frac{\mu}{\beta}$, vale $S(t) \leq \frac{\mu}{\beta}$ per ogni $t \in [0,T]$, da cui $I(t)$ è decrescente in t;
- Se $S_0 > \frac{\mu}{\beta}$, $I(t)$ è crescente in t fin quando $S(t) \geq \frac{\mu}{\beta}$, e da lì in poi è decrescente in t.

L'inverso di $\frac{\mu}{\beta}$, ovvia $\frac{\beta}{\mu}$, è detto NUMERO RIPRODUTTIVO DI BASE, oppure VALORE DI SOGLIA CRITICA, e indica a grandi linee la virulenza e la pericolosità della malattia, in questo caso: più esso è basso, più la malattia è innocua, e comunque poco pericolosa.

Ora che il problema è stato presentato, vediamo di analizzarlo negli spazi opportuni. Infatti abbiamo il seguente vincolo di stato, imposto dal sistema:
$\forall t \in [0,T]: \quad 0 \leq I(t) + S(t) \leq 1$,
e il seguente vincolo sul controllo:
$\forall t \in [0,T]: \quad 0 \leq u(t) \leq 1$

Scegliamo allora come spazi:

- $X = L^2([0,T]) \times L^2([0,T]) = [L^2([0,T])]^2$;
- $Y = L^2([0,T])$.

Il primo spazio riguarda le variabili di stato (S,I), mentre il secondo riguarda la variabile di controllo u.

Il funzionale da minimizzare è allora

$$J = J(S,I,u) = \int_0^T I(t) + \frac{\lambda}{2} u(t)^2 \, dt,$$

definito da $X \times Y$ in $\mathbb{R}$.

Il vincolo in forma implicita è allora:

$$\Phi : X \times Y \to X \times Y$$

$$[\Phi(S,I,u)](t) \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} S(t) - S_0 + \int_0^t [\beta S(\sigma) I(\sigma) + u(\sigma) S(\sigma)] \, d\sigma \\ I(t) - I_0 - \int_0^t [\beta S(\sigma) I(\sigma) - \mu I(\sigma)] \, d\sigma \\ u(t) \end{bmatrix}$$

Infine:

$$K \overset{\text{def}}{=} \{ (S,I,u) \in [L^2([0,T])]^3 \mid \Phi(S,I,u) \in \{\underline{0}\} \times \{\underline{0}\} \times H \},$$

dove H è il seguente convesso chiuso:

$$H \overset{\text{def}}{=} \{ u \in L^2([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le 1 \text{ quasi ovunque in } [0,T] \}$$

Calcoliamo ora i differenziali di J e Φ, per una variazione $(\sigma, j, v) \in X \times Y$:

$$J'(S,I,u)(\sigma,j,v) = \int_0^T j(t) + \lambda u(t) v(t) \, dt$$

$$[\Phi'(S,I,u)](\sigma,j,v)(t) = \begin{bmatrix} \sigma(t) + \int_0^t [[\beta I + u]\sigma + \beta S j + S v] \, d\tau \\ j(t) - \int_0^t [\beta I \sigma + [\beta S - \mu] j] \, d\tau \\ v(t) \end{bmatrix}$$

Verifichiamo ora che Φ' è suriettivo da $X \times Y$ in sé. Notiamo che Φ' è della forma:

$$\Phi' = \mathbb{I} + \mathbb{K},$$

con $\mathbb{I}$ operatore identico, e $\mathbb{K}$ operatore integrale (in particolare compatto). Per l'alternativo di Fredholm, allora, è equivalente mostrare che Φ' è iniettivo, cioè che il sistema:

$$\begin{cases} 0 = \sigma(t) + \int_0^t [\beta I(\tau) + u(\tau)] \sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau) + S(\tau) v(\tau) \, d\tau \\ 0 = j(t) - \int_0^t \beta I(\tau) \sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau) - \mu j(\tau) \, d\tau \\ 0 = v(t) \end{cases}$$

non ha soluzioni non banali. Certamente $v = 0$, da cui

si ha:

$$\begin{cases} \sigma = \delta(t) + \int_0^t \left[\beta I(\tau) + u(\tau)\right]\sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau)\, d\tau \\ 0 = j(\tau) - \int_0^t \beta I(\tau)\sigma(\tau) + \beta S(\tau) j(\tau) - \mu j(\tau)\, d\tau \end{cases},$$

con le condizioni iniziali $\delta(0) = 0$, $j(0) = 0$: essendo questo sistema equivalente a un sistema differenziale lineare, deduciamo (grazie alle condizioni iniziali) che $\sigma \equiv j \equiv 0$.

> OSSERVAZIONE
> In questo caso, $g : X \times Y \to Y$, dunque il teorema di Pontryagin non è immediatamente applicabile. La dimostrazione, però, può essere ripercorsa facilmente, dato che H, come abbiamo già notato, è un convesso chiuso.

In ogni caso, se $(\bar S, \bar I, \bar u)$ è un punto di minimo vincolato di J su K, allora vale:

$$\begin{aligned} -J'(\bar S, \bar I, \bar u) &\in N(K, (\bar S, \bar I, \bar u)) = \\ &= N(\Phi^{-1}(\{0\}\times\{0\}\times H), (\bar S, \bar I, \bar u)) = \\ &= \Phi'(\bar S, \bar I, \bar u)^* \left[L^2(0,T]) \times L^2([0,T]) \times N(H, \bar u)\right] \end{aligned}$$

> OSSERVAZIONE
> Dato che $\Phi'(\bar S, \bar I, \bar u)$ è surgettivo, per l'alternativa di Fredholm anche $\Phi'(\bar S, \bar I, \bar u)^*$ è surgettivo.

Notiamo ora che:

$$N(H, \bar u) = \left\{ v \in L^2([0,T]) \;\middle|\; \int_0^T uv\, dt \le 0 \;\; \forall\, u \in T(H, \bar u) \right\},$$

con:

$$T(H, \bar u) = \left\{ v \in L^2([0,T]) \;\middle|\; \exists\, (t_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \searrow 0,\ \exists\, (v_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to v \right.$$
$$\left. \text{t.c. } 0 \le \bar u + t_m v_m \le 1 \right.$$
$$\left. \text{quasi ovunque su } [0,T] \right\}$$

Dato che, per $v \in T(H, \bar u)$, $(v_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to v$ in norma $\|\cdot\|_{L^2}$, a meno di passare a sottosuccessioni si può supporre che vi sia convergenza puntuale quasi ovunque su $[0,T]$.

Consideriamo allora i seguenti insiemi:

- $E_0 = \{ t \in [0,T] \mid u(t) = 0 \}$;
- $E_1 = \{ t \in [0,T] \mid u(t) = 1 \}$,

allora:

- Dev'essere $v(t) \geq 0$ quasi ovunque su E_0;
- Dev'essere $v(t) \leq 0$ quasi ovunque su E_1.

Infine, sull'insieme:

$$E = \{ t \in [0,T] \mid 0 < u(t) < 1 \},$$

v può assumere valori arbitrari.

Dunque $v \in T(H, \bar{u})$ se e solo se $v \in L^2([0,T])$, e:

- $v \geq 0$ quasi ovunque su E_0;
- $v \leq 0$ quasi ovunque su E_1.

Se allora $u \in N(H, \bar{u})$ e $v \in T(H, \bar{u})$:

$$0 \geq \int_0^T u(t)\, v(t)\, dt = \int_{E_0} u\, v\, dt + \int_{E_1} u\, v\, dt + \int_E u\, v\, dt$$

Se in particolare $v \equiv 0$ su E_0 e E_1 (dunque $-v \equiv 0$ su E_0 e E_1):

$$0 \geq \int_E u\, v\, dt \quad , \quad 0 \geq -\int_E u\, v\, dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = \int_E u\, v\, dt \, ,$$

da cui $u \equiv 0$ quasi ovunque su E.

Scegliendo ora v tale che $v \equiv 0$ su E_1 e $v \geq 0$ su E_0, si ottiene:

$$0 \geq \int_{E_0} u\, v\, dt \, ,$$

da cui $u \leq 0$ quasi ovunque su E_0; scegliendo invece v tale che $v \equiv 0$ su E_0 e $v \leq 0$ su E_1, si ha:

$$0 \geq \int_{E_1} u\, v\, dt \, ,$$

da cui $u \geq 0$ quasi ovunque su E_1.

Dunque, se $u \in N(H,\bar{u})$, allora $u \in \mathcal{M}$, ove:

$$\mathcal{M} = \left\{ u \in L^2([0,T]) \;\middle|\; u = 0 \text{ su } E,\ u \le 0 \text{ su } E_0,\ u \ge 0 \text{ su } E_1 \right\},$$

ove le uguaglianze sono da intendersi quasi ovunque. Dunque:

$$-J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) \in \left[\Phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})^*\right]\left(L^2([0,T]) \times L^2([0,T]) \times N\right),$$

e per il teorema di Pontryagin, esiste:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ m \end{bmatrix} \in L^2([0,T]) \times L^2([0,T]) \times N$$

tale che:

$$J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) + \Phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})^* (\lambda_1, \lambda_2, m) = 0,$$

ovvio per ogni $(\sigma, j, v) \in X \times Y = (L^2([0,T]))^3$:

$$J'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})(\sigma, j, v) + (\lambda_1, \lambda_2, m)\left[\Phi'(\bar{S},\bar{I},\bar{u})(\sigma, j, v)\right] = 0$$

Dunque:

$$0 = \int_0^T j(t) + A\bar{u}(t)v(t) + \lambda_1(t) \cdot \Big[\sigma(t) + \int_0^t \left[\beta \bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)\right]\sigma(\tau) + \beta \bar{S}(\tau) j(\tau) + \bar{S}(\tau) v(\tau)\, d\tau \Big] + \lambda_2 \Big[j(t) - \int_0^t \beta \bar{I}(t)\sigma(t) + \left[\beta \bar{S}(\tau) - \mu\right] j(\tau)\, d\tau \Big] + m(t) v(t)\, dt = 0,$$

ovvio, per il teorema di Fubini - Tonelli:

$$\int_0^T \sigma(\tau) \Big[\lambda_1(\tau) + \left[\beta \bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)\right] \int_\tau^T \lambda_1(t)\, dt - \beta I(\tau) \int_\tau^T \lambda_2(t) dt \Big] + j(\tau) \Big[1 + \beta \bar{S}(\tau) \int_\tau^T \lambda_1(t)\, dt + \lambda_2(\tau) - \left[\beta \bar{S}(\tau) - \mu\right] \int_\tau^T \lambda_2(t)\, dt \Big] + v(\tau) \Big[A\bar{u}(\tau) + \bar{S}(\tau) \int_\tau^T \lambda_1(t)\, dt + m(\tau) \Big]\, d\tau = 0$$

E allora definiamo:

$$\lambda_1(\tau) = -\int_\tau^T \lambda_1(t)\, dt, \quad \lambda_2(\tau) = -\int_\tau^T \lambda_2(t)\, dt,$$

si ottiene, per arbitrarietà della terna (σ, j, v), il seguente sistema:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) - \left[\beta \bar{I}(t) + \bar{u}(t)\right] \lambda_1(t) + \beta \bar{I}(t) \lambda_2(t) = 0 \\ \lambda_2'(t) - \beta \bar{S}(t) \lambda_1(t) + \left[\beta \bar{S}(t) - \mu\right] \lambda_2(t) + 1 = 0, \\ A\bar{u}(t) - \bar{S}(t) \lambda_1(t) + m(t) = 0 \end{cases}$$

ove le uguaglianze sono da intendersi quasi ovunque in $[0,T]$.

Dunque $\lambda_1(t)$ e $\lambda_2(t)$ sono soluzioni del seguente sistema differenziale "retrogrado":

$$\begin{bmatrix} \lambda_1'(t) \\ \lambda_2'(t) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -\beta\bar{I}(t) - \bar{u}(t) & -\beta\bar{S}(t) \\ \beta\bar{I}(t) & \beta\bar{S}(t) - \mu \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

con la condizione finale:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1(T) \\ \lambda_2(T) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Inoltre, dato che $m \in \mathbb{R}$, dalla relazione:

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{A}\left[\lambda_1(t)\bar{S}(t) - m(t)\right],$$

si ha, quasi ovunque:

- su $\bar{E}_1$:
$$1 = \bar{u}(t) = \frac{1}{A}\left[\lambda_1(t)\bar{S}(t) - m(t)\right] \leq \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A};$$
- su $\bar{E}_0$:
$$0 = \bar{u}(t) = \frac{1}{A}\left[\lambda_1(t)\bar{S}(t) - m(t)\right] \geq \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A};$$
- su $\bar{E}$:
$$\bar{u}(t) = \frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A}.$$

Dunque, quasi ovunque su $[0,T]$:

$$\bar{u}(t) = \min\left\{\max\left\{\frac{\bar{S}(t)\lambda_1(t)}{A}, 0\right\}, 1\right\}$$

In particolare $\bar{u}$ è continua, in quanto $\bar{S}$ è continua e $\lambda_1 \in L^2([0,T])$, dunque $\lambda_1 \in H^1([0,T]) \subseteq C^0([0,T])$.

Notiamo che, nel nostro esempio:

$$f(S,I,u) = \begin{bmatrix} -\beta IS - uS \\ \beta IS - \mu I \end{bmatrix}, \quad g(S,I,u) = I + \frac{A}{2}u^2,$$

dunque se $(S,I) = y$:

$$\begin{cases} g_y(S,I,u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}^t \\ g_u(S,I,u) = Au \end{cases},$$

e:

$$\begin{cases} f_y(S,I,u) = \begin{bmatrix} -\beta I - u & -\beta S \\ \beta I & \beta S - \mu \end{bmatrix} \\ f_u(S,I,u) = \begin{bmatrix} -S \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

OSSERVAZIONE
Notiamo che $\bar{u}$ è anche un controllo feedback.

Vediamo allora le condizioni di ottimalità. Si ha:

$$\begin{cases} \psi'(t) = -\psi(t) \cdot f_y(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) - g_y(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) \\ g_u(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) + \psi(t) f_u(\bar{S},\bar{I},\bar{u}) + m(t) = 0 \end{cases},$$

ove:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \lambda_1(t) \\ \lambda_2(t) \end{bmatrix}^t$$

OSSERVAZIONE
Le equazioni sono le stesse trovate nel caso del problema di Bolza (a meno dei segni, i quali sono irrilevanti). Dato che però ora si è un controllo sul vincolo, compare un moltiplicatore in più ($m \in \mathbb{R}$).

Se dunque esiste il controllo ottimale, esso è continuo; si può dimostrare che anche lo stato ottimale è continuo, anzi di classe C^1.

ESISTENZA DEL CONTROLLO OTTIMALE: INTRODUZIONE

Il discorso fatto nello scorso paragrafo dimostra, in qualche senso, l'unicità del controllo ottimale, o comunque serve per generare delle condizioni necessarie che un qualsiasi controllo ottimale deve soddisfare (e volte sapita che tali condizioni caratterizzino il controllo ottimale). L'esistenza di un controllo ottimale, invece, è ancora da trattare.

Prima di fissare una successione minimizzante $((I_m, u_m))_{m \in \mathbb{N}^+}$ tale che:

$$(J(I_m, u_m))_{m \in \mathbb{N}^+} \to \inf_{I,u} J(I,u),$$

bisogna dimostrare che, per ogni controllo u, esiste lo stato (S,I) corrispondente, ossia bisogna dimostrare che per ogni controllo u il sistema:

$$\begin{cases} y' = F(t, y(t)) \\ y(0) = x \end{cases},$$

con:

$$F(t, y(t)) = f(y(t), u(t))$$

misurabile in t e continua in y, ammette soluzione. In questo caso, però, il Teorema di esistenza e unicità di Cauchy-Lipschitz non è applicabile. Bisogna quindi percorrere una strada alternativa.

TEOREMA (DI McSHANE)

Sia $f : [a,b] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una funzione tale che:

- $f(\cdot, y)$ è misurabile per ogni $y \in \mathbb{R}^n$;
- $f(x, \cdot)$ è continua per ogni $x \in [a,b]$;
- Esistono $S \in L^1([a,b])$ e $\varphi \notin L^1([0, +\infty[, \mathbb{R})$ continua e positiva (ma non integrabile) tale che:

$$|f(x,y)| \leq \frac{S(x)}{\varphi(\|y\|)},$$

per ogni $x \in [a,b]$ e $y \in \mathbb{R}^n$.

Allora, per ogni $(\xi, \eta) \in [a,b] \times \mathbb{R}^n$, esiste $y : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ assolutamente continua tale che:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

quasi ovunque in $[a,b]$.

Se inoltre esistono $M \in L^1([a,b])$ e $\omega :]0, +\infty[\to \mathbb{R}^+$ continua tali che:

$$|f(x, y+z) - f(x,y)| \leq M(x)\,\omega(\|z\|)$$

per ogni $(x,z) \in [a,b] \times (\mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\})$, e se:

$$\int_0^1 \omega(\sigma)\,d\sigma = +\infty ,$$

allora la soluzione è unica.

Dim.

Proviamo innanzitutto che se $y \in C^0([a,b])$, allora:

$$f(x, y(x))$$

è misurabile su $[a,b]$.

Se $y \in C^0([a,b])$, in particolare esiste una successione $(y_m)_{m \in \mathbb{N}^+}$ di funzioni costanti a tratti in $[a,b]$, con:

$$(y_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \to y$$

puntualmente ovunque in $[a,b]$. Se dunque per ogni $m \in \mathbb{N}^+$:

$$y_m(x) = \sum_{j=1}^{k_m} c_{m,j}\, \mathbb{I}_{J_{m,j}}(x) ,$$

con $c_{m,j} \in \mathbb{R}$ per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ e per ogni $j \in \{1, \dots, k_m\}$, e per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ $J_1, \dots, J_{m,k_m}$ sono un insieme di intervalli adiacenti, con:

$$\bigcup_{j=1}^{k_m} J_{m,j} = [a,b]$$

Si ha allora:

$$f(x, y_m(x)) = \sum_{j=1}^{k_m} f(x, c_{m,j})\, \mathbb{I}_{J_{m,j}}(x) ,$$

da cui $f(x, y_m(x))$ è misurabile in x. Allora $f(x, y(x))$, limite puntuale, è misurabile.

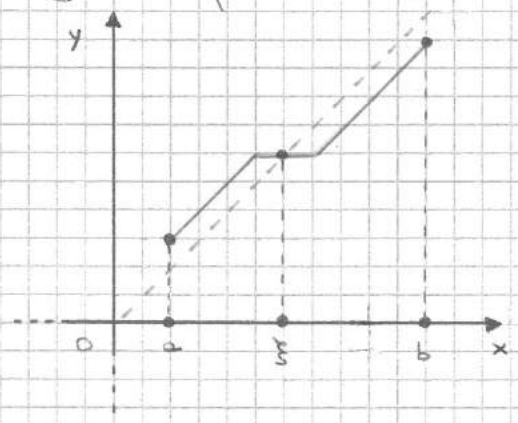
Supponiamo che $\varphi \equiv 1$, cioè che $|f(x,y)| \le S(x)$ in $[a,b] \times \mathbb{R}$. Allora, dato che $y \in C^0([a,b])$:

$$f(x, y(x)) \in L^1([a,b])$$

Fissato ora $\xi \in [a,b]$, poniamo per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

$$g_1(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} x + \frac{1}{3^{n+1}} - a & a \le x < \xi_n - \frac{1}{3^{n+1}} \\ \xi_n & \xi_n - \frac{1}{3^{n+1}} \le x \le \xi_n + \frac{1}{3^{n+1}} \\ x - \frac{1}{3^{n+1}} - \xi_n + \frac{1}{3^{n+1}} & \xi_n + \frac{1}{3^{n+1}} < x \le b \end{cases},$$

con ovvie modifiche quando $\xi_n = a$ e $\xi_n = b$:



Vediamo ora che, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, esiste ed è unica la funzione $g_n \in C^0([a,b])$ tale che:

$$g_n(x) = \int_{\xi_n}^{\mu_n(x)} f(t, g_n(t))\, dt + \eta,$$

per $x \in [a,b]$.

L'equazione è soddisfatta in $\left[\xi_n - \frac{1}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{1}{3^{n+1}}\right]$ da $g(x) = \eta$ (la verifica è immediata).

Se ora g_n è definita in $\left[\xi_n - \frac{k-1}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{k-1}{3^{n+1}}\right]$ per qualche $k \ge 2$, e risolve l'equazione in tale intervallo, allora sicuramente g_n è continua in tale intervallo.
Ma se $x \in \left[\xi_n - \frac{k}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{k}{3^{n+1}}\right]$, si ha:

$$\mu_n(x) \in \left[\xi_n - \frac{k-1}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{k-1}{3^{n+1}}\right],$$

quindi il secondo membro dell'equazione è ben definito in $\left[\xi_n - \frac{k}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{k}{3^{n+1}}\right]$, dunque g_n è definita in $\left[\xi_n - \frac{k}{3^{n+1}}, \xi_n + \frac{k}{3^{n+1}}\right]$.

Usando allora il principio di induzione, g_n è ben definita e continua in $[a,b]$.

Osserviamo adesso che $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$ è una famiglia di funzioni:

- EQUILIMITATA, in quanto per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ e per ogni $x\in[a,b]$:

$$|g_n(x)| \le \|\eta\| + \int_a^b S(x)\,dx = \|\eta\| + \|S\|_{L^1([a,b])}$$

- EQUICONTINUA. Sia infatti $\varepsilon>0$, e sia $\delta>0$ tale che:

$$|\beta-\alpha|<\delta \Rightarrow \left|\int_\alpha^\beta S(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

Tale $\delta>0$ esiste perché $S\in L^1([a,b])$.

Allora, dato che per ogni $n\in\mathbb{N}^+$ u_n è 1-Lipschitziana, per $|\beta-\alpha|<\delta$ si ha:

$$|g_n(\beta)-g_n(\alpha)| \le \left|\int_{u_n(\alpha)}^{u_n(\beta)} f(t,g_n(t))\,dt\right| \le$$
$$\le \left|\int_{u_n(\alpha)}^{u_n(\beta)} S(t)\,dt\right| < \varepsilon.$$

Per il Teorema di Ascoli-Arzelà esiste allora $(g_{n_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \to_{\|\cdot\|_\infty} g$ (uniformemente in $[a,b]$).

Dato che per $n\in\mathbb{N}^+$ si ha $|u_n(x)-x| \le \frac{1}{n}$ per ogni $x\in[a,b]$, per convergenza dominata si ha che g risolve:

$$g(x) = \eta + \int_\xi^x f(t,g(t))\,dt$$

per ogni $x\in[a,b]$, dunque g risolve il problema di Cauchy.

Eliminiamo ora l'ipotesi $\varphi=1$. Dato che $\varphi\notin L^1(]0,+\infty[)$, ma $\varphi\in L^1(]0,\lambda])$ per ogni $\lambda>0$, esiste $N>\|\eta\|+1$ tale che:

$$\int_{|\eta|+1}^N \varphi(t)\,dt > \int_a^b S(x)\,dx$$

Poniamo:

$$g_N(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & , \|y\|\le N \\ f\left(x, \frac{Ny}{\|y\|}\right) & , \|y\|>N \end{cases},$$

per ogni $x\in[a,b]$. È chiaro che g_N soddisfa le proprietà di f, e inoltre $g_N([a,b]\times\mathbb{R}^m) = g_N([a,b]\times B_{\mathbb{R}^m}(0,N))$, per cui:

$$|g_N(x,y)| \le S(x) \sup_{0\le t\le N} \frac{1}{\varphi(t)} +$$

e la funzione a destra appartiene a $L^1([a,b])$.

Per quanto visto precedentemente, esiste una funzione y assolutamente continua in $[a,b]$ soluzione del seguente sistema:

$$\begin{cases} y'(x) = g_N(x, y(x)) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

Dimostriamo allora che $\|y(x)\| < N$ in $[a,b]$. Da qui si avrà che in realtà:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x)) \\ y(\xi) = \eta \end{cases},$$

da cui la tesi.

Supponiamo per assurdo che valga:

$$\sup_{x \in [a,b]} \|y(x)\| > N$$

Allora vale almeno una delle seguenti disuguaglianze strette:

$$\sup_{x \in [a,\xi]} \|y(x)\| > N \quad , \quad \sup_{x \in [\xi,b]} \|y(x)\| > N$$

Supponiamo che valga la seconda (la dimostrazione nel caso in cui valga la prima è simile).

Siano:

- $\beta \overset{\text{def}}{=} \inf \{ x > \xi \mid \|y(x)\| = N \}$
- $\alpha \overset{\text{def}}{=} \sup \{ x \in [\xi, \beta[\mid \|y(x)\| = \|\eta\| + 1 \}$.

Allora:

$\forall x \in [\alpha, \beta]: \quad \|\eta\| + 1 = \|y(\alpha)\| \leq \|y(x)\| \leq \|y(\beta)\| = N,$

dunque:

$$g_N(x, y(x)) = f(x, y(x))$$

in $[\alpha, \beta]$.

Dunque, quasi ovunque in $[\alpha, \beta]$:

$$y(x)\, y'(x) = y(x)\, f(x, y(x)) \leq \frac{\|y(x)\|\, s(x)}{\varphi(\|y(x)\|)},$$

ossia:

$$\varphi(\|y(x)\|) \frac{y(x)}{\|y(x)\|} \cdot y'(x) \leq s(x)$$

Integrando allora in $[\alpha, \beta]$, si ha:

$$\int_{\|y_0\|+1}^{N} \varphi(t)\,dt = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(\|y(x)\|) \frac{y(x)}{\|y(x)\|} y'(x)\,dx \leq$$

$$\leq \int_{\alpha}^{\beta} S(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} S(x)\,dx,$$

con il cambio di variabile $t = \|y(x)\|$: ciò è assurdo.

Per concludere, dimostriamo l'unicità delle ipotesi aggiuntive.

Siano y_1, y_2 soluzioni del problema: per assurdo, siano esse distinte. Allora

$$\|y_1 - y_2\|_{\infty,[a,b]} > 0,$$

quindi almeno una della seguente disuguaglianze è verificata:

$$\|y_1 - y_2\|_{\infty,[a,\xi]} > 0 \quad , \quad \|y_2 - y_2\|_{\infty,[\xi,b]} > 0$$

Supponiamo che valga la seconda (la dimostrazione nell'ipotesi in cui vale la prima è analoga). Sia:

$$\gamma \overset{\text{def}}{=} \sup \{ x \geq \xi \mid y_1(\tau) = y_2(\tau) \ \forall \tau \in [\xi, x] \}$$

Tale estremo superiore è ben definito, ed è strettamente minore di b. Esiste allora $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \subseteq]\xi, b]$, $(\gamma_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \searrow \gamma$ tale che per ogni $m \in \mathbb{N}^+$ $y_1(\gamma_m) \neq y_2(\gamma_m)$.

Fissato $m \in \mathbb{N}^+$, allora, esiste $I_m =]\alpha_m, \beta_m[$, con $\gamma_m \in I_m$, e:

$$\gamma \leq \alpha_m < \beta_m \leq b,$$

tale che:

- $y_1(\alpha_m) = y_2(\alpha_m)$;
- $\|y_1(x) - y_2(x)\| > 0 \quad \forall x \in I_m$.

Si ha allora, per $x \in I_m$:

$$[y_1(x) - y_2(x)] \cdot \frac{d}{dx}[y_1(x) - y_2(x)] = [y_1(x) - y_2(x)] \cdot [f(x, y_1(x)) +$$

$$- f(x, y_2(x))] \leq |y_1(x) - y_2(x)|\, M(x)\, \omega(\|y_1(x) - y_2(x)\|),$$

da cui:

$$\frac{\frac{d}{dx}\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|}{\omega(\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|)} = \frac{\gamma_1(x)-\gamma_2(x)}{\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|}\cdot\frac{\frac{d}{dx}[\gamma_1(x)-\gamma_2(x)]}{\omega(\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|)} \le h(x),$$

e integrando su I_m:

$$\int_0^{\|\gamma_1(\beta_m)-\gamma_2(\beta_m)\|}\frac{dt}{\omega(t)} = \int_{\alpha_m}^{\beta_m}\frac{\frac{d}{dx}[\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|]}{\omega(\|\gamma_1(x)-\gamma_2(x)\|]}dx \le$$

$$\le \int_{\alpha_m}^{\beta_m} h(x)\,dx \le \int_a^b h(x)\,dx,$$

e ciò è assurdo, visto che $\frac{1}{\omega} \notin L^1([0,\delta[)$ per ogni $\delta>0$. Dunque $\gamma=b$, quindi $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ in $[\xi,b]$. Similmente si ottiene $\gamma_1 \equiv \gamma_2$ in $[a,\xi]$, da cui la tesi, c.v.d.

APPLICAZIONE AL CASO DEL MODELLO EPIDEMICO

Vediamo ora come applicare il teorema appena visto.

Sia H il seguente convesso chiuso:

$$H \overset{\text{def}}{=} \{ u \in L^2([0,T]) \mid 0 \le u(t) \le 1 \text{ quasi ovunque in } [0,T] \}$$

Dimostreremo che per ogni $u \in H$ esiste un'unica coppia (S,I) di funzioni assolutamente continue in $[0,T]$ che risolve il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} S'(t) = -\beta S(t) I(t) - u(t) S(t) \\ I'(t) = \beta S(t) I(t) - \mu I(t) \\ S(0) = S_0 \,, \quad I(0) = I_0 \end{cases},$$

quasi ovunque in $[0,T]$ (ove $I_0 \ge 0$, $S_0 \ge 0$, $I_0 + S_0 \le 1$).

Innanzitutto notiamo che:

$$f(t,S,I) = \begin{bmatrix} -\beta SI - u(t) S \\ \beta SI - \mu I \end{bmatrix},$$

con $t \in [0,T]$ e $(S,I) \in \mathbb{R}^2$, è misurabile in t (fissato $(S,I) \in \mathbb{R}^2$), e $C^1(\mathbb{R}^2)$ in (S,I) (fissato $t \in [0,T]$).

Non valgono però le ipotesi del teorema precedente, perciò bisogna aggirare l'ostacolo. Si ha infatti:

- $|f(t,S,I)| \le [2\beta \|I\| + \|u(t)\| + \mu][\|S\| + \|I\|]$;
- $|f(t,S,I) - f(t,\tilde{S},\tilde{I})| \le [2\beta\|I\| + \|u(t)\| + 2\beta\|\tilde{S}\| + \mu] \cdot [\|S - \tilde{S}\| + \|I - \tilde{I}\|]$,

da cui in particolare si può notare l'assenza dell'ipotesi per l'unicità.

C'è allora da usare un trucco. Sia $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ tale che:

- $0 \le \vartheta(S,I) \le 1 \quad \forall (S,I) \in \mathbb{R}^2$;
- $\forall (S,I) \in \mathbb{R}^2 \; \exists' \; \|S\| \le 1 \wedge \|I\| \le 1 : \vartheta(S,I) = 1$;
- $\forall (S,I) \in \mathbb{R}^2 \; \exists' \; \|S\| > 2 \vee \|I\| > 2 : \vartheta(S,I) = 0$.

Definiamo allora:

$$\tilde{f}(t,S,I) \overset{\text{def}}{=} f(t,S,I)\,\vartheta(S,I),$$

$\tilde{f}$ verifica tutte le ipotesi del teorema precedente, visto che in effetti $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$.

Dunque, fissato $\bar{u}$ (controllo), il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}' = f(t,S,I) \\ \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} S_0 \\ I_0 \end{bmatrix} \end{cases}$$

(ove l'uguaglianza è da intendersi quasi ovunque in $[0,T]$) ha soluzione unica $(\bar{S}, \bar{I})$. Si ha allora:

- $\bar{I}(t) = I_0\, e^{\int_0^t [\beta \bar{S}(\tau) - \mu]\,\vartheta(\bar{S}(\tau),\bar{I}(\tau))\,d\tau} \geq 0$;
- $\bar{S}(t) = S_0\, e^{-\int_0^t [\beta \bar{I}(\tau) + \bar{u}(\tau)]\,\vartheta(\bar{S}(\tau),\bar{I}(\tau))\,d\tau} \in [0, S_0]$;
- $\bar{I}'(t) + \bar{S}'(t) = -[\bar{u}(t)\,\bar{S}(t) + \mu \bar{I}(t)]\,\vartheta(\bar{S}(t),\bar{I}(t)) \leq 0$.

Dunque:

$\forall\, t \in [0,T] : 0 \leq \bar{I}(t) + \bar{S}(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1$

Dunque:

$\forall\, t \in [0,T] : \tilde{f}(t,\bar{S},\bar{I}) = f(t,S,I)$,

da cui $(\bar{S},\bar{I})$ è soluzione del problema di nostro interesse.

Se ora $(\tilde{S},\tilde{I})$ è un'altra soluzione dello stesso problema, allora:

$\forall\, t \in [0,T] : 0 \leq \tilde{S}(t) + \tilde{I}(t) \leq I_0 + S_0 \leq 1$,

da cui $\tilde{f}(t,\tilde{S}(t),\tilde{I}(t)) = f(t,\tilde{S}(t),\tilde{I}(t))$, da cui $(\tilde{S},\tilde{I}) = (\bar{S},\bar{I})$ perché $\tilde{f}$ soddisfa le ipotesi del teorema visto nel paragrafo precedente.

Abbiamo dunque dimostrato che per ogni controllo $u \in H$ esiste un unico stato (S,I) associato a u.

A questo punto, allora, possiamo risolvere univocamente il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} \lambda_1'(t) = [\beta I(t) + u(t)]\lambda_1(t) - \beta I(t)\lambda_2(t) \\ \lambda_2'(t) = \beta S(t)\lambda_1(t) - [\beta S(t) - \mu]\lambda_2(t) - 1 \\ \lambda_1(T) = \lambda_2(T) = 0 \end{cases},$$

ancora grazie al teorema visto nello scorso paragrafo.

Concludiamo allora dimostrando che, per il problema epidemico con vaccinazione (da cui siamo partiti), il controllo ottimale esiste ed è unico.

Sia $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \subseteq H$ una successione, e sia $((S_m, I_m))_{m\in\mathbb{N}^+}$ la successione degli stati associati. Supponiamo che:

$$(J(I_m, u_m))_{m\in\mathbb{N}^+} \to \inf_{(I,u)} J,$$

ove:

$$J(I,u) = \int_0^T I(t) + \frac{\lambda}{2} u(t)^2 \, dt$$

Allora $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ è limitata in $L^2([0,T])$, dunque esiste $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \to \bar{u} \in H$ (H è chiuso e convesso, dunque debolmente chiuso). Quindi:

$$\frac{\lambda}{2}\int_0^T \bar{u}(t)^2 \, dt \le \liminf_{m\to+\infty} \frac{\lambda}{2}\int_0^T u_m(t)^2 \, dt$$

D'altra parte, le successioni $(I_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ e $(S_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ sono equilimitate, ma anche equicontinue (visto che $(I'_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ e $(S'_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ sono equilimitate).

Per il teorema di Ascoli-Arzelà, allora, esiste $((S_{m_{k_h}}, I_{m_{k_h}}))_{h\in\mathbb{N}^+} \to_{\|\cdot\|_\infty} (\bar{S}, \bar{I})$. In particolare:

$$\lim_{h\to+\infty} \int_0^T I_{m_{k_h}}(t) \, dt = \int_0^T \bar{I}(t) \, dt,$$

da cui si ha facilmente:

$$J(\bar{I}, \bar{u}) \le \inf_{(I,u)} J,$$

da cui $(\bar{S}, \bar{I}, \bar{u})$ è una terna ottimale.

TEOREMI DI ESISTENZA DEL CONTROLLO OTTIMALE PER IL PROBLEMA DI BOLZA

Dati $t_0, t_1 \in \mathbb{R}$, con $t_0 \leq t_1$, considereremo il seguente sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \quad , t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases},$$

ove $u \in L^1([t_0, t_1], U)$, con $U \subseteq \mathbb{R}^m$ (t_0 e t_1 dipendono ~~allora~~ dal controllo). Imponiamo anche delle condizioni finali, imponendo che valga:

$$e = (t_0, t_1, y(t_0), y(t_1)) \in S,$$

con $S \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$.

Dinoti quindi S e U, vogliamo minimizzare il seguente funzionale:

$$J(y_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t))\, dt + \Phi(e),$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^n$, $u \in L^1([t_0, t_1], U)$ (tale che, detta y la soluzione del problema esposto precedentemente, valga $e \in S$).

Supponiamo che valga il seguente sistema di ipotesi:

$$\begin{cases} f \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U, \mathbb{R}^n) \\ L \in C^0(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U, \mathbb{R}) \\ \Phi \in C^0(S, \mathbb{R}) \end{cases}$$

D'ora in poi, chiameremo (γ) tale sistema di ipotesi.

Supporremo poi che valgano le seguenti due ipotesi, che chiameremo rispettivamente (a) e (b):

- $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, y \in \mathbb{R}^n, \forall\, u \in U$:
$$\|f(t, y, u)\| \leq C_1 [1 + \|y\| + \|u\|];$$
- $\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, y, \bar{y} \in \mathbb{R}^n, \forall\, u \in U$:
$$\|f(t, y, u) - f(t, \bar{y}, u)\| \leq C_2 [1 + \|u\|] \|y - \bar{y}\|,$$

con $C_1, C_2 \in]0, +\infty[$.

OSSERVAZIONE

Se $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è limitato, allora se valgono (a) e (b) esistono delle costanti $C_1', C_2' \in]0, +\infty[$ tali che:

- $\| f(t, y, u) \| \leq C_2' [1 + \| y \|]$
- $\| f(t, y, u) - f(t, \bar{y}, u) \| \leq C_2' \| y - \bar{y} \|$

per ogni $t \in \mathbb{R}$, $y, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$, $u \in U$.

Con le ipotesi fatte finora, per $u \in L^1([t_0, t_1], U)$ esiste ed è unica la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = x_0 \end{cases}, \quad t \in [t_0, t_1],$$

per un teorema dimostrato precedentemente. Infatti:

$$f(t, y(t), u(t)) = F(t, y(t))$$

soddisfa le ipotesi del teorema di McShane.

Dunque, per $t \in [t_0, t_1]$:

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), u(s))\, ds$$

Tale soluzione è assolutamente continua in $[t_0, t_1]$.

Dalle ipotesi (a) si ha:

$$\| y(t) - y(t_0) \| = \left\| \int_{t_0}^{t} f(s, y(s), u(s))\, ds \right\| \leq$$

$$\leq \int_{t_0}^{t} \| f(s, y(s), u(s)) \|\, ds \leq \int_{t_0}^{t} C_1 [1 + \| y(s) \| + \| u(s) \|]\, ds$$

Ma vale anche:

$$\| y(t) - y(t_0) \| \leq \int_{t_0}^{t} C_1 [1 + \| y(s) - y(t_0) + y(t_0) \| + \| u(s) \|]\, ds \leq$$

$$\leq C_1 \int_{t_0}^{t} \| y(s) - y(t_0) \|\, ds + C_1 \int_{t_0}^{t} [1 + \| y(t_0) \| + \| u(s) \|]\, ds,$$

da cui, per il lemma di Gronwall:

$$\| y(t) - y(t_0) \| \leq C \int_{T_0}^{T_1} [1 + \| y(t_0) \| + \| u(s) \|]\, ds,$$

con $C = e^{C_1 (T_1 - T_0)} C_1$, con $T_0 \leq t_0$ e $t_1 \leq T_1$.

Definiamo ora alcune classi. Sia:

$$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{ (y_0, u) \mid y_0 \in \mathbb{R}^n \wedge \exists\, [t_0, t_1] \subseteq \mathbb{R} \text{ s.t. } u \in U([t_0, t_1], U),\ e \in S \}$$

Ogni $(y_0, u) \in \mathcal{F}$ è detta COPPIA AMMISSIBILE.

Definiamo poi, per $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$F(t, y) \overset{\text{def}}{=} \{ f(t, y, u) \mid u \in U \}$$

> OSSERVAZIONE
> Se $f(t, y, u) = \phi_{t,y}(u)$, allora:
>
> $$\overline{F}(t, y) = \phi_{t,y}(U),$$
>
> e dato che $\phi_{t,y}$ è continua, $F(t, y)$ è compatto, se U è compatto.

Possiamo quindi enunciare il primo teorema.

TEOREMA (DI FILIPPOV) (SOLO ENUNCIATO)
Supponiamo che sia $L \equiv 0$, ovvia:

$$J(y_0, u) = \Phi(e)$$

Supponiamo poi che valgano le ipotesi (a), (b), (γ), e anche le seguenti ipotesi:

- $\mathcal{F} \neq \phi$;
- U compatto;
- S compatto;
- $F(t, y)$ convesso (e chiuso) per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Allora:
$\exists\, (y_0^*, u^*) \in \mathcal{F}$ s.t. $J(y_0^*, u^*) = \min_{\mathcal{F}} J$.

> OSSERVAZIONE
> Se U è compatto, $\overline{F}(t, y)$ è compatto, quindi anche chiuso. L'ipotesi di convessità è invece non banale.

OSSERVAZIONE

L'ultima ipotesi si può sostituire con la seguente:

- U convesso;
- $f(t,y,u) = \alpha(t,y) + \beta(t,y)u$.

Se poi $\mu = \min_{\mathcal{U}} J$ e $\mu_1 > \mu$, allora la penultima ipotesi si può sostituire con le seguenti:

- $\Phi \in C^0(S, \mathbb{R})$;
- Esiste $S' \subseteq S$ compatto tale che:

$$e \in S, \quad J(y_0, u) \leq \mu \Rightarrow e \in S'$$

Per enunciare il secondo teorema, definiamo:

$$\tilde{F}(t,y) \overset{\text{def}}{=} \{(z,\omega) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists\, u \in U \;:\; z = f(t,y,u) \wedge \omega \geq L(t,y,u)\}$$

TEOREMA (DI CESARI) (SOLO ENUNCIATO)

Supponiamo che valgano le ipotesi (a), (b), (γ), e in più supponiamo che:

- $\mathcal{U} \neq \Phi$;
- U è chiuso;
- S è compatto;
- $\tilde{F}(t,y)$ è convesso (e chiuso) per ogni $(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$;
- $L(t,y,u) \geq g(u)$, con $g: U \to \mathbb{R}$ è continua e tale che:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = +\infty,$$

per ogni $(t,y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ (g ha quindi crescita super-lineare).

Allora:

$$\exists\, (y_0^*, u^*) \in \mathcal{U} \;:\; J(y_0^*, u^*) = \min_{\mathcal{U}} J$$

OSSERVAZIONE

Se U è compatto, allora l'ultima ipotesi è naturalmente verificata.

OSSERVAZIONE

Si dimostra facilmente che, se U è compatto e $L \equiv 0$, allora il teorema di Peano (l'unico che dimostreremo) implica il teorema di Filippov.

OSSERVAZIONE

Le ultime tre ipotesi possono essere sostituite dalle seguenti:

- Detto $\mu = \inf_S J$, se $\mu > \mu_x$, allora esiste $S' \subseteq S$ compatto tale che:
$$e \in S, \ J(\gamma_0, u) \leq \mu_x \Rightarrow e \in S';$$
- U è convesso, $f(t, \gamma, u) = \alpha(t, \gamma) + \beta(t, \gamma) u$, L è convessa su U nella variabile u;
- Esistono $\beta > 1$, $C_1 > 0$, $C_2 \in \mathbb{R}$ tali che per ogni $(t, \gamma, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \times U$:
$$L(t, \gamma, u) \geq C_1 \|u\|^\beta - C_2$$

OSSERVAZIONE

Se S è compatto, allora:
$\exists T_0, T_1 \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall e \in S \ [t_0, t_1] \subseteq [T_0, T_1]$,
ossia ogni controllo $u \in L^1([t_0, t_1], U)$ tale che $e \in S$ è tale che $[t_0, t_1] \subseteq [T_0, T_1]$.

Dato allora $u \in L^1([t_0, t_1], U)$, essa si può prolungare a $u' \in L^1([T_0, T_1], U)$ ponendo $u' \equiv u$ in $[t_0, t_1]$, e $u' \equiv v$ in $[T_0, T_1] \setminus [t_0, t_1]$, con $v \in U$ arbitrario ($v \in \mathbb{R}^m$ è un vettore).

OSSERVAZIONE

Dato che g è tale che $\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = +\infty$, e U è chiuso, esiste $b > 0$ tale che:
$\forall u \in U: \ g(u) \geq -b$

Prima di dimostrare il teorema, vediamo alcune applicazioni.

ESEMPI E CONTROESEMPI A RIGUARDO

Vediamo ora un'applicazione del Teorema di Filippov.
Fissiamo una condizione iniziale $(t_0, y_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, e consideriamo un insieme $S_1 \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ chiuso. Sia quindi:

$$S \overset{\text{def}}{=} \{ e = (t_0, t_1, y_0, y_1) \mid (t_1, y_1) \in S_1 \}$$

Chiaramente anche S è chiuso.

La coppia (y_0, u) è ammissibile (cioè $(y_0, u_0) \in \mathcal{F}$) se u è tale che la soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

è tale che esiste $t_1 \in]t_0, +\infty[$ (finito) tale che:

$$(t_1, y(t_1)) \in S_1$$

Supponiamo allora che valgano le ipotesi del Teorema di Filippov (quindi (a), (b), (γ) più le altre) tranne la penultima (richiediamo solamente che S_1 sia chiuso, quindi S sia chiuso).

Allora:

$\exists (y_0, u^*) \in \mathcal{F}$ s.t. $u^* \in L^1([t_0, t^*], U)$, $(t^*, y(t^*)) \in S_1$ e $t^* - t_0 = \min_{\mathcal{F}} t_1$,

cioè esiste il controllo u^* che trasporta (t_0, y_0) in S_1 nel tempo minimo.

In questo caso, il funzionale è:

$$J(y_0, u) = t_1 - t_0$$

Dato che $\mathcal{F} \neq \emptyset$, esiste u che trasporta (t_0, y_0) in S_1 in tempo finito $\tau - t_0$. Allora sia:

$$\mu_1 = \tau - t_0 \geq \inf_{\mathcal{F}} J$$

Se $\mu_1 = \inf_{\mathcal{F}} J$, allora u è un controllo ottimale.

Se invece $\mu_1 > \inf_{\mathcal{F}} J$, dalle ipotesi che abbiamo si deduce che esiste $M_1 > 0$ tale che $|y(t)| \leq M_1$ per ogni t tra t_0 e T_1.

Allora l'insieme seguente è compatto in S_1:

$$S_1' \overset{\text{def}}{=} \{ (t_1, \gamma_1) \mid t_1 \in [t_0, T_1],\ |\gamma(t)| \le M_1\ \forall\, t \in [t_0, t_1],\ (t_1, \gamma(t_1)) \in S_1 \},$$

dunque:

$$S' \overset{\text{def}}{=} \{ e = (t_0, t_1, \gamma_0, \gamma(t_1)) \mid (t_1, \gamma(t_1)) \in S_1' \}$$

è compatto in S.

Inoltre, se $e \in S$ e $J(\gamma_0, u) \le \mu_1$, allora $e \in S'$. Allora la terza ipotesi è verificata. Se infatti $e \in S$ e $J(\gamma_0, u) \le \mu_1$, ossia esiste $\bar{u} : [t_0, \vartheta_1] \to U$ con $J(\gamma_0, \bar{u}) = \vartheta_1 - t_0 \le \mu_1$ (con $\vartheta_1 \in [t_0, T_1]$) tale che $(\vartheta_1, \gamma(\vartheta_1)) \in S_1$, allora:

$$|\bar{u}(t)| \le M_1\ \forall\, t \in [t_0, T_1],$$

quindi $e \in S'$.

Per il teorema di Filippov, allora, esiste un controllo ottimale. Dunque esiste $u^* \in L^1([t_0, t^*], U)$ tale che $(\gamma_0, u^*) \in \mathcal{T}$, $(t^*, \gamma(t^*)) \in S_1$ e:

$$t^* - t_0 = \min_{\mathcal{T}} J$$

Vediamo ora un primo controesempio. Sia $n = 1$, e sia $U = [-1, 1]$. Sia:

$$f(t, \gamma, u) = u,$$

cosicché:

$$\begin{cases} \gamma'(t) = u(t) \\ \gamma(t_0) = \gamma_0 \end{cases},$$

e imponiamo $t_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$. Sia poi:

$$S_1 = \{ (t, \gamma) \mid t > 0,\ \gamma = t^{-1} \}$$

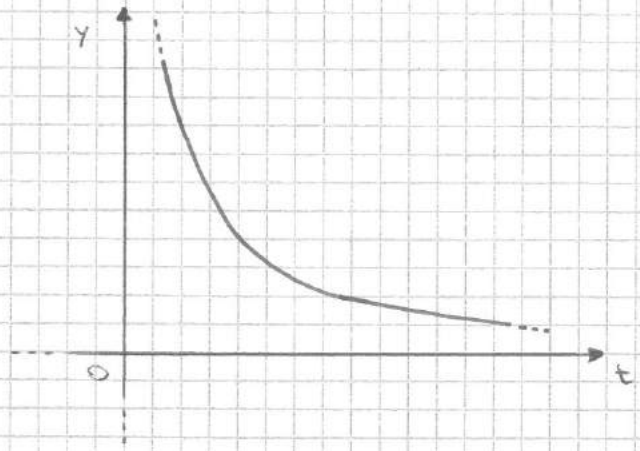
Sia poi:

$$J(\gamma_0, u) = \gamma(t_1),$$

ossia il primo istante in cui $\gamma(t_1) = \frac{1}{t_1}$.

È evidente che S' non sia compatto, come del resto

mostra il grafico seguente:



È chiaro che per ogni controllo u si ha:

$$J(y_0, u) > 0,$$

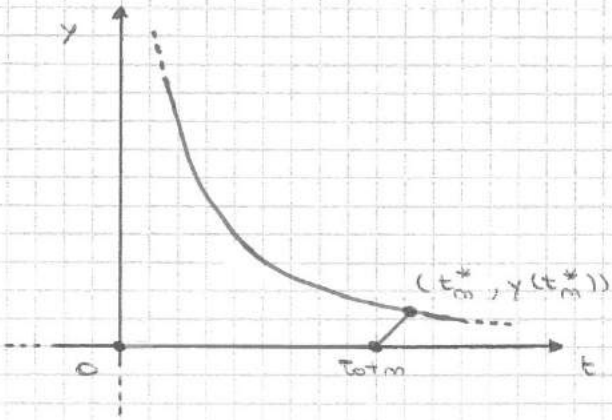
ma si dimostra facilmente che:

$$\inf_{\mathcal{U}} J = 0$$

Per vedere che $\inf_{\mathcal{U}} J = 0$, considerato $m \in \mathbb{N}^+$ definiamo:

$$u_m(t) = \begin{cases} 0, & t \in [t_0, t_0 + m] \\ 1, & t \in [t_0 + m, t_m^*], \end{cases}$$

ove t_m^* è tale che $y(t_m^*) = \frac{1}{t_m^*}$, come nel grafico seguente:



Allora si ha:

$$J(y_0, u_m) = \frac{1}{t_m^*} = \frac{1}{t_0 + m},$$

da cui $\inf_{\mathcal{U}} J = 0$.

OSSERVAZIONE
In questo caso, S non è compatto.

Vediamo ora un altro controesempio. Sia $n = 2$, $U = [-1, 1]$. Siano $t_0 = 0$, $y_0 = (-1, 0)$.

Sia poi:

$$f(t, y, u) = (-y_2^2 + u^2, u),$$

cosicché:

$$\begin{cases} y_1'(t) = -y_2^2 + u^2 \\ y_2'(t) = u \end{cases}$$

Consideriamo poi, per $a \in]0, 1[$:

$$C(a) = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = a^2\}$$

Dunque abbiamo:

$$S = \{(t, y) \mid t \geq 0, \ \|y\|^2 = a^2\},$$

e:

$$J(u) = \inf \{ t > 0 \mid y_1^2(t) + y_2^2(t) = a^2 \}$$

OSSERVAZIONE
Si può supporre che sia:

$$S = \{(t, y) \mid t \in [0, T], \ \|y^2\| = a^2\},$$

con $T > 0$.

L'ipotesi mancante, però, è l'ultima. Infatti, per $(t, y) \in \mathbb{R}^3$:

$$F(t, y) = \{ (-y_2^2 + u^2, u) \mid u \in [-1, 1] \}$$

è un tratto di parabola, dunque non è convesso.

Si dimostrano infatti i seguenti fatti:

- $J(u) \geq 1 - a \ \forall u \ \exists! (y_0, u) \in \mathcal{F}$;
- $\inf_{\mathcal{F}} J = 1 - a$;
- $J(u) > 1 - a \ \forall u \ \exists! (y_0, u) \in \mathcal{F}$.

Iniziamo dalla prima affermazione. Si ha:

$$y_1(t) - y_1(0) = \int_0^t y_1'(s)\, ds = \int_0^t u^2(s)\, ds \leq t$$

Se dunque $t < 1 - a$, allora:

$$y_1(t) - y_1(0) < 1 - a \Rightarrow y_1(t) < 1 - a + 1 = -a,$$

da cui $(t, y(t)) \notin C(a)$. Dunque $J(u) \geq 1 - a$, $\forall$ $(y_0, u) \in \mathcal{F}$.

Proviamo ora la seconda affermazione:

$$\inf_{\mathcal{F}} J = 1 - a$$

Per $i \in \mathbb{N}^+$, sia:

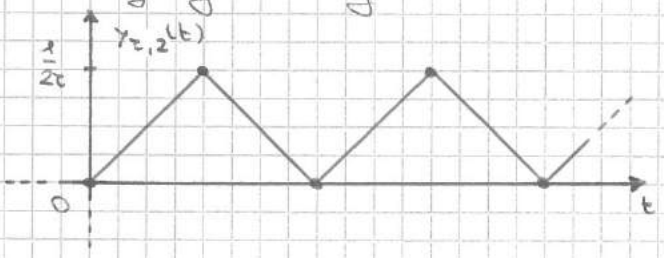
$$u_i(t) = \begin{cases} 1, & t \left[\frac{2i-2}{2i}, \frac{2i-1}{2i} \right[\\ -1, & t \left[\frac{2i-1}{2i}, \frac{2i}{2i} \right[\end{cases},$$

al variare di $i \in \mathbb{N}^+$.

Detto $y_i(t)$ lo stato corrispondente, si ha:

$$y_{i,2}(t) = \int_0^t u(s)\, ds,$$

da cui si ha il grafico seguente:



In particolare, $\| y_{i,2} \|_\infty \leq \frac{1}{2i}$.

Inoltre:

$$y_{i,1}(t) = -1 + \int_0^t -y_{i,2}(s)^2 + u^2(s)\, ds =$$

$$= -1 + t - \int_0^t y_{i,2}(s)^2\, ds$$

Sia allora:

$$t_{i,i} = J(u_i)$$

Certamente $1 - a \leq t_{i,i}$. Proviamo allora che:

$$\lim_{i \to +\infty} t_{i,i} = 1 - a$$

In effetti per convergenza dominata si ha:

$$\lim_{i \to +\infty} y_{i,1}(t) = -1 + t,$$

per ogni $t \geq 0$.

Fissato $t = 1$, si ha, per i sufficientemente elevato, $y_{i,1}(t) > -a$, $|y_{i,2}(t)| \leq \frac{1}{2i}$, da cui $(y_{i,1}(t), y_{i,2}(t))$ è interno a C.

Dunque, per t sufficientemente grande:

$$1 - a \leq t_{1,t} < 1$$

D'altronde:

$$y_{t,1}(t_{1,t}) = -1 + t_{1,t} - \int_0^{t_{1,t}} y_{t,2}^2(s)\,ds =$$

$$= -1 + t_{1,t}\left(1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right)\right), \quad t \to +\infty,$$

e dato che deve valere:

$$y_{t,1}^2(t_{1,t}) + y_{t,2}^2(t_{1,t}) = a^2,$$

si ha:

$$\lim_{t \to +\infty} y_{t,1}^2(t_{1,t}) = a^2$$

Dato che:

$$y_{t,1}(t_{1,t}) \leq -1 + t_{1,t} \leq 0,$$

si ha allora:

$$\lim_{t \to +\infty} y_{t,1}(t_{1,t}) = -a$$

Si ottiene quindi:

$$\lim_{t \to +\infty} t_{1,t} = \lim_{t \to +\infty} \frac{1 + y_{t,1}(t_{1,t})}{1 + O\left(\frac{1}{t^2}\right)} = 1 - a$$

Dunque effettivamente si ha:

$$\inf_{\mathcal{J}} J = 1 - a$$

Verifichiamo ora di dimostrare che per ogni $(y_0, u) \in \mathcal{J}$ si ha $J(y_0, u) > 1 - a$.

Vi sono dunque due casi:

- $u \equiv 1$ quasi ovunque in $[0, 1-a]$;
- $u < 1$ in $E \subseteq [0, 1-a]$, con $m(E) > 0$.

Se $u \equiv 1$ quasi ovunque in $[0, 1-a]$, allora:

$$\begin{cases} y_1(t) = -1 + \int_0^t (-s^2 + 1)\,ds = -1 + t - \frac{t^3}{3} \\ y_2(t) = t \end{cases}, \quad t \in [0, 1-a]$$

Se dunque fosse:

$$y_1^2(1-a) + y_2^2(1+a) = a^2,$$

si avrebbe:

$$a^2 = \left(-1 + (1-a) - \frac{(1-a)^3}{3}\right)^2 + (1-a)^2,$$

e con qualche conto si vede che tale relazione non è soddisfatta se $0 < a < 1$.

Se invece esiste $E \subseteq [0, 1-a]$, con $m(E) > 0$, tale che $u < 1$ in E (quasi ovunque in E), si ha:

$$y_1(t) \leq -1 + \int_0^t u^2(s)\,ds < -1 + t \leq -a,$$

per $t \in [0, 1-a]$, e quindi per ogni $t \in [0, 1-a]$:

$$y_1^2(t) + y_2^2(t) > a^2$$

Di qui si ha quanto voluto.

Concludiamo ora mostrando che il teorema di Lesari è in generale falso, se manca l'ultima ipotesi, quella che coinvolge la funzione con crescita superlineare g.

Siano $n = m = 1$, e siano $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $y_0 = 1$, $y_1 = 0$ (dunque $S = \{(0, 1, 1, 0)\}$). Siano:

$$f(t, y, u) = u$$
$$L(t, y, u) = tu^2$$

Chiaramente l'ipotesi non è verificata, in quanto ponendo $t = 0$ si ha in particolare che $g \leq 0$ ovunque su U, e quindi non vale:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = +\infty$$

Tra i controlli che portano lo stato y_0 nello stato y_1 in tempo unitario, cerchiamo quello che minimizza il seguente funzionale:

$$J(u) = \int_0^1 s\,u^2(s)\,ds$$

Notiamo che $u \equiv 0$ non è ammissibile, in quanto si avrebbe:

$\forall\, t \in [0,1] : y(t) = 1$,

mentre dev'essere $y(1) = y_1 = 0$.

Dunque $J(u) > 0$ per ogni controllo ammissibile.

Per $\varepsilon \in \mathbb{N}^+$, ora, sia:

$$u_\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{\varepsilon}\, t^{\frac{1}{\varepsilon}-1}$$

Allora lo stato corrispondente è:

$$y_\varepsilon(t) = 1 - t^{\frac{1}{\varepsilon}},$$

da cui u_ε è ammissibile per ogni $\varepsilon \in \mathbb{N}^+$. Si ha poi:

$$J(u_\varepsilon) = \int_0^1 \frac{s}{\varepsilon^2}\, s^{\frac{1}{\varepsilon}-2}\, ds = \frac{1}{\varepsilon^2}\left[\frac{s^{\frac{2}{\varepsilon}}}{\frac{2}{\varepsilon}}\right]_0^1 = \frac{1}{2\varepsilon},$$

da cui:

$$\inf_{(y_0,u)\in\mathcal{A}} J(u) = 0,$$

da cui si ha che il minimo non esiste.

TEOREMA DI CESARI

Prima di enunciare e dimostrare il Teorema, ricordiamo che l'equazione di stato è:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)), \ t \in [t_0, t_1] \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

con $y_0 \in \mathbb{R}^n$ fissato, e t_0, t_1 tali che $t_0 \leq t_1$, e dipendenti dal controllo $u \in L^1([t_0, t_1], U)$ usato. Inoltre $U \subseteq \mathbb{R}^m$ è fissato, e si vuole che:

$$e = (t_0, t_1, y_0, y(t_1)) \in S,$$

con $S \subseteq \mathbb{R}^{2n+2}$ fissato.

In questo contesto, si cerca di minimizzare un funzionale del tipo:

$$J(y_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} L(t, y(t), u(t)) \, dt + \Phi(e),$$

al variare di $y_0 \in \mathbb{R}^n$ e $u \in L^1([t_0, t_1], U)$, in modo che valga $e \in S$.

Supporremo, d'ora in avanti, che valgano le condizioni (γ), (a), (b) esposte in precedenza. In particolare, le ultime due implicano una condizione, che d'ora in poi chiameremo (c):

$$\begin{cases} \| y(t) - y(t_0) \| \leq \Gamma \int_{t_0}^{t} 1 + \| y(s) \| + \| u(s) \| \, ds \\ \| y(t) - y(t_0) \| \leq \Gamma' \int_{t_0}^{t} 1 + \| y(t_0) \| + \| u(s) \| \, ds \end{cases},$$

con Γ, Γ' costanti positive opportune.

Definiamo ora:

$$\mathcal{F} \overset{\text{def}}{=} \{ (y_0, u) \mid y_0 \in \mathbb{R}^n, \ u \in L^1([t_0, t_1], U), \ e \in S \},$$

e per $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\tilde{F}(t, y) \overset{\text{def}}{=} \{ (z, w) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \exists \, u \in U \ \exists' \ z = f(t, y, u) \wedge w \geq L(t, y, u) \}$$

Enunciamo ora, e dimostriamo, il Teorema di Cesari.

TEOREMA (DI CESARI)

Oltre alle ipotesi viste in questo paragrafo, supponiamo che:

- $\mathcal{F} \neq \emptyset$;
- U è chiuso;
- S è compatto;
- Per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\tilde{F}(t, y)$ è convesso;
- Per ogni $(t, y, u) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times U$, si ha:

$$L(t, y, u) \geq g(u),$$

con $g : U \to \mathbb{R}$ continua e tale che:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = +\infty$$

Allora esiste il controllo ottimale:

$\exists\, (y_0^*, u^*) \in \mathcal{F}$ s.t. $\min_{\mathcal{F}} J = J(y_0^*, u^*)$

Dim.

Dato che S è compatto, per un'osservazione fatta in precedenza possiamo assumere che tutti i controlli ammissibili siano definiti in $[T_0, T_1]$ (usando un retto $v \in U$ per operare l'estensione, come spiegato nell'osservazione).

LEMMA

Dati $\nu > 0$ e $\eta > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che se $A \subseteq [T_0, T_1]$ è tale che $m(A) < \delta$, e per $u \in L^1([T_0, T_1], U)$ vale:

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\, dt \leq \nu,$$

allora:

$$\int_A \|u(t)\|\, dt < \eta$$

Dim.

Per un'osservazione precedente, esiste $b > 0$ tale che $g(u) \geq -b$ per ogni $u \in U$. Inoltre, per la quinta ipotesi tale esiste una funzione $\vartheta(B) : [B_0, +\infty[\to [0, +\infty[$, positiva e tendente a 0 per $B \to +\infty$, tale che per

$u \in U$ con $\|u\| \geq B$ vale:

$$\|u\| \leq \vartheta(B)\, g(u)$$

(ϑ è positiva in $[B_0, +\infty[$, dove B_0 è tale che $g(u) > 1$ per $u \in U$ con $\|u\| \geq B_0$).

Sia allora B tale che $\vartheta(B)[\nu + 2b(T_1 - T_0)] \leq \frac{1}{2}\eta$, e sia $\delta < 1$ tale che $B\delta \leq \frac{1}{2}\eta$. Allora:

$$A_1 = \{ t \in A \mid \|u(t)\| \leq B \},$$

ove A è tale che $A \subseteq [T_0, T_1]$ e $m(A) < \delta$, si ha:

$$\int_A \|u(t)\|\, dt = \int_{A_1} \|u(t)\|\, dt + \int_{A \setminus A_1} \|u(t)\|\, dt <$$

$$< B\delta + \int_{A \setminus A_1} \vartheta(B)\, g(u(t))\, dt$$

Osserviamo ora che, dato che $g(u) \geq -b$ per ogni $u \in U$, si ha:

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u(t))_+\, dt = \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\, dt + \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))_-\, dt \leq$$

$$\leq \nu + (T_1 - T_0)\, b,$$

da cui:

$$\int_{T_0}^{T_1} |g(u(t))|\, dt \leq \nu + 2(T_1 - T_0)\, b$$

Allora:

$$B\delta + \int_{A \setminus A_1} \vartheta(B)\, g(u(t))\, dt \leq$$

$$\leq B\delta + \int_{A \setminus A_1} \vartheta(B)\, |g(u(t))|\, dt \leq$$

$$\leq B\delta + \int_{T_0}^{T_1} \vartheta(B)\, |g(u(t))|\, dt \leq$$

$$\leq B\delta + \vartheta(B)\,[\nu + 2b(T_1 - T_0)] \leq \frac{1}{2}\eta + \frac{1}{2}\eta = \eta,$$

da cui la tesi, c.v.d.

LEMMA

Sia $\nu > 0$. Esiste $M > 0$ tale che, per $u \in L^1([T_0, T_1], U)$:

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\, dt \leq \nu \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1} \|u(t)\|\, dt \leq M$$

Dim.

Sia B tale che, per $u \in \mathcal{U}$ con $\|u\| \geq B$, $g(u) > 1$.

Sia quindi:

$$A_1 = \{ t \in [T_0, T_1] \mid \|u(t)\| \leq B \}$$

Si ha allora:

$$\int_{T_0}^{T_1} \|u(t)\| dt = \int_{A_1} \|u(t)\| dt + \int_{[T_0,T_1] \setminus A_1} \|u(t)\| dt \leq$$

$$\leq B(T_1 - T_0) + \int_{[T_0,T_1] \setminus A_1} \vartheta(B)\, g(u(t))\, dt \leq$$

$$\leq B(T_1 - T_0) + \vartheta(B) \left[v + 2b(T_1 - T_0) \right],$$

maggiorando con il modulo e usando quanto visto nel lemma precedente. Vale allora la tesi, ossia:

$$M \overset{\text{def}}{=} B(T_1 - T_0) + \vartheta(B) \left[v + 2b(T_1 - T_0) \right], \text{ c.v.d.}$$

Questi due lemmi serviranno per il prossimo lemma, ma prima diamo una definizione. Sia $\mathcal{U}$ un insieme di funzioni definite su $[T_0, T_1]$ a valori in U. Esso è detto EQUIASSOLUTAMENTE CONTINUO su $[T_0, T_1]$ se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta_\varepsilon > 0$ tale che se $A \subseteq [T_0, T_1]$ è della forma:

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} [s_k, t_k],$$

con $s_k < t_k$ per ogni $k = 1, \dots, N$, e $m(A) < \delta_\varepsilon$, allora per ogni funzione $y \in \mathcal{U}$ vale:

$$\sum_{k=1}^{N} \| y(t_k) - y(s_k) \| \leq \varepsilon$$

OSSERVAZIONE

Se $N = 1$, si ottiene che $\mathcal{U}$ è una famiglia equicontinua (dunque è applicabile il Teorema di Ascoli-Arzelà).

OSSERVAZIONE

La relazione che definisce l'assoluta continuità passa al limite rispetto alla convergenza uniforme.

LEMMA

Esiste una successione minimizzante $(y_{0,i}, u_i)_{i \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$:

$$\lim_{i \to +\infty} J(y_{0,i}, u_i) = \inf_{\mathcal{F}} J$$

tale che $(y_i)_{i \in \mathbb{N}} \to_{\|\cdot\|_\infty} y^*$ su $[T_0, T_1]$. Inoltre, y^* è assolutamente continua in $[T_0, T_1]$, e :

$$\lim_{i \to +\infty} e_i = e^* = (t_0^*, t_1^*, y_0^*, y_1^*),$$

con $y_0^* = y^*(t_0^*)$, $y_1^* = y^*(t_1^*)$.

Dim.

Innanzitutto S è compatto e $\Phi : S \to \mathbb{R}$ è continua. Deduciamo che esiste $N \in \mathbb{N}^+$ tale che $|\Phi(e)| \leq N$ per ogni $e \in S$.

Sia ora $(y_{0,j}, u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$ una successione minimizzante, e sia $(y_j)_{j \in \mathbb{N}}$ la successione degli stati associati. Allora :

$$\exists\, \Gamma > 0 \;\; \text{s.t.} \;\; \forall\, j \in \mathbb{N} : \; J(y_{0,j}, u_j) \leq \Gamma$$

Per ogni $j \in \mathbb{N}$, dunque, $u_j : [t_{0,j}, t_{1,j}] \to U$, e :

$$e_j = (t_{0,j}, t_{1,j}, y_{0,j}, y_j(t_{1,j}))$$

Inoltre :

$$J(y_{0,j}, u_j) = \int_{t_{0,j}}^{t_{1,j}} L(t, y_j(t), u_j(t))\, dt + \Phi(e_j)$$

Dunque, per $j \in \mathbb{N}$:

$$\int_{t_{0,j}}^{t_{1,j}} g(u_j(t))\, dt \leq \int_{t_{0,j}}^{t_{1,j}} L(t, y_j(t), u_j(t))\, dt \leq \Gamma + N,$$

quindi :

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u_j(t))\, dt \leq \Gamma + N + (T_1 - T_0)\, |g(\nu)| \overset{\text{def}}{=} \nu$$

Definiamo allora :

$$X_\nu \overset{\text{def}}{=} \Big\{ y \;\Big|\; \exists\, (y_0, u) \subseteq \mathcal{F} \text{ s.t. } y \text{ è lo stato corrispondente a } u,\ e \in S,\ \int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\, dt \leq \nu \Big\}$$

La famiglia X_ν è equilimitata. Infatti, da un lemma precedente:

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u(t))\,dt \le \nu \quad \Rightarrow \int_{T_0}^{T_1} \|u(t)\|\,dt \le M,$$

con M opportuno, e per le ipotesi a disposizione, per $t \in [T_0, T_1]$:

$$\|y(t)\| \le \|y_0\| + C_1 \int_{T_0}^{T_1} [1 + \|y_0\| + \|u(s)\|]\,ds \le$$

$$\le [1 + C_1(T - T_0)]\,\|y_0\| + C_1 M + 1 \le M_1,$$

visto che M è compatto, dunque $\|y_0\| \le \lambda$ con $\lambda > 0$ opportuno (M è una costante indipendente da $\|y_0\|$).

Mostriamo ora che X_ν è equiassolutamente continua.

Dato $[s,t] \subseteq [T_0, T_1]$, si ha, per $y \in X_\nu$:

$$\|y(t) - y(s)\| = \left\| \int_s^t f(\tau, y(\tau), u(\tau))\,d\tau \right\| \le$$

$$\le C_1 \int_s^t [1 + \|y_0\| + \|u(\tau)\|]\,d\tau \le$$

$$\le C_1 [1 + M_1]\,|t - s| + C_1 \cdot \int_s^t \|u(\tau)\|\,d\tau \le$$

$$\le \tilde{C} \left[|t - s| + \int_s^t \|u(\tau)\|\,dt \right],$$

con $\tilde{C} = C_1 [1 + M_1]$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\eta = \frac{\varepsilon}{2\tilde{C}}$, e sia $\delta > 0$ fornito dal primo lemma visto, eventualmente rimpicciolito affinché sia $\delta < \eta$. Se allora $A \subseteq [T_0, T_1]$ è della forma:

$$A = \bigcup_{k=1}^{N} [s_k, t_k],$$

con $m(A) < \delta$, si ha:

$$\sum_{k=1}^{N} \|y(t_k) - y(s_k)\| \le \tilde{C} \sum_{k=1}^{N} |t_k - s_k| + \tilde{C} \sum_{k=1}^{N} \int_{s_k}^{t_k} \|u(t)\|\,dt \le$$

$$\le \tilde{C}\,\delta + \tilde{C}\eta < 2\tilde{C}\eta = \varepsilon,$$

dunque X_ν è equiassolutamente continua.

Allora, per il Teorema di Ascoli - Arzelà, a meno di estrarre una sottosuccessione, si ha:

$$(y_j)_{j\in\mathbb{N}} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y^*,$$

con y^* assolutamente continua su $[T_0, T_1]$ (per un'osservazione precedente). La tesi si ottiene a meno, eventualmente estraendo una sottosuccessione ulteriore, visto che S è compatto, c.v.d.

Lo stato y^* è "in cerca" di un controllo u^*, che poi si dimostrerà essere ottimale: costruire u^*, però, è tutt'altro che semplice.

Il prossimo lemma, ora, ci permette di guadagnare un'altra proprietà, estraendo un'ulteriore sottosuccessione.

LEMMA

Nelle ipotesi del lemma precedente, si può estrarre un'ulteriore sottosuccessione tale che si abbia la seguente convergenza puntuale, ovunque su $[T_0, T_1]$:

$$(z_j)_{j\in\mathbb{N}} \to z^*,$$

con:

$$z_j(t) = \int_{T_0}^{t} L(s, y_j(s), u_j(s))\, ds,$$

per $t \in [T_0, T_1]$.

Inoltre la funzione $z^*(t) + b(t - T_0)$ è monotona crescente.

Dim.

Si ha, per $j \in \mathbb{N}$:

$$0 \le \int_{t_{0,j}}^{t_{1,j}} L(t, y_j(t), u_j(t))\, dt + b(t_{1,j} - t_{0,j}) \le$$

$$\le \Gamma + N + b(T_1 - T_0) \overset{\text{def}}{=} \bar{\Gamma},$$

con Γ e N introdotte nella dimostrazione del lemma precedente. Ricordando (sempre dal lemma precedente) che per ogni $y \in X_\nu$ vale $\|y\|_\infty \le M_1$,

per continuità di L si ha che esiste $\Delta > 0$ tale che:
$\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [T_0, T_1] \setminus [t_{0,j}, t_{1,j}]$:

$$0 \leq L(t, y_j(t), v) + b \leq \Delta,$$

dunque esiste $\Delta_0 > 0$ tale che:

$\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall t \in [T_0, T_1]$:

$$0 \leq \int_{T_0}^{t} L(s, y_j(s), u_j(s))\, ds + b(t - T_0) \leq \Delta_0$$

Definiamo allora:

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad \Psi_j(t) \overset{\text{def}}{=} z_j(t) + b(t - T_0)$$

dato che:

$$\Psi_j(t) = \int_{T_0}^{t} L(s, y_j(s), u_j(s)) + b\, ds,$$

per quanto detto prima si ha che Ψ_j è crescente in t. In più $\|\Psi_j\|_\infty \leq B_0$.

Possiamo allora dimostrare che esiste una sottosuccessione $(\Psi_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \to \Psi^*$ (puntualmente ovunque su $[T_0, T_1]$), con Ψ^* crescente. A questo punto varrà $(z_{j_k})_{k \in \mathbb{N}} \to z^* = \Psi^* - b(\cdot - T_0)$, ovunque su $[T_0, T_1]$, da cui la tesi.

Proveremo quest'affermazione in passi successivi:

- Usando un procedimento diagonale di Cantor, esiste $(\Psi_{j_k})_{k \in \mathbb{N}^+}$ tale che, per ogni $t \in [T_0, T_1]$, $t \in \mathbb{Q}$:

$$\exists\, \Psi(t) \overset{\text{def}}{=} \lim_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t)$$

- Definiamo ora, per $t \in [T_0, T_1[\setminus \mathbb{Q}$:

$$\Psi(t) = \liminf_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s < t}} \Psi(s),$$

e se $T_1 \notin \mathbb{Q}$:

$$\Psi(T_1) = \sup_{\substack{t \in [T_0, T_1[\\ t \in \mathbb{Q}}} \Psi(t)$$

La funzione così ottenuta è crescente in $[T_0, T_1]$.

- La funzione Ψ ottenuta nel passo precedente, essendo crescente e limitata, ha un numero di punti di discontinuità al più numerabile. Se $t_0 \in [T_0, T_1]$ è un punto di continuità per Ψ, allora:

$$\lim_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t) = \Psi(t)$$

Dato infatti $\varepsilon > 0$, esistono $s, \sigma \in \mathbb{Q}$, con $\sigma < t_0 < s$, tali che $\Psi(s) - \Psi(\sigma) < \varepsilon$. Dato che per ogni $k \in \mathbb{N}^+$:

$$\Psi_{j_k}(\sigma) \leq \Psi_{j_k}(t_0) \leq \Psi_{j_k}(s),$$

si ha:

- $\Psi(\sigma) \leq \liminf_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t_0) \leq \limsup_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t_0) \leq \Psi(s)$;
- $\Psi(\sigma) \leq \Psi(t_0) \leq \Psi(s)$,

da cui, per arbitrarietà di $\varepsilon > 0$:

$$\lim_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t_0) = \Psi(t_0);$$

- Considerato l'insieme E dei punti di discontinuità di Ψ, $|E| \leq \aleph_0$, dunque usando un nuovo procedimento diagonale di Cantor esiste un'ulteriore sottosuccessione tale che:

$$\forall t \in E : \exists \lim_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t) \overset{\text{def}}{=} \Psi^*_{\#}(t)$$

Definiamo quindi $\Psi^* : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}$ ponendo:

$$\Psi^*(t) = \begin{cases} \Psi^*_{\#}(t), & t \in E \\ \Psi(t), & t \in [T_0, T_1] \setminus E \end{cases}$$

Allora:

$$\forall t \in [T_0, T_1] : \lim_{k \to +\infty} \Psi_{j_k}(t) = \Psi^*(t)$$

Resta da controllare che Ψ^* sia crescente.

Osserviamo preliminarmente che, se $t \in E$, allora:

$$\limsup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s < t}} \Psi(s) \leq \Psi^*(t) \leq \liminf_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s > t}} \Psi(s) = \Psi(t)$$

Se dunque $t' < t$, allora dato $\vartheta \in \mathbb{Q}$, $t < \vartheta < t$, si ha:

$$\Psi^*(t') \leq \Psi(t') \leq \Psi(\vartheta) \leq \limsup_{\substack{s \in \mathbb{Q} \\ s < t}} \Psi(s) \leq \Psi^*(t),$$

da cui Ψ^* è crescente : ciò conclude la dimostrazione, c.v.d.

Iniziamo ora a porre le basi per la costruzione del cono tangente $\tilde{\Psi}$.

Definiamo ora, per $q > 0$ razionale :

$$D_q(t,y) \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{|s-t|+\|y'-y\|<q} \tilde{\Psi}(s,y') ,$$

quindi :

$$C_q(t,y) \overset{\text{def}}{=} \text{Conv}\,(D_q(t,y)) ,$$

ove è l'inviluppo convesso.

LEMMA

Si ha la seguente uguaglianza :

$$\tilde{\Psi}(t,y) = \bigcap_{\substack{q>0 \\ q\in\mathbb{Q}}} \overline{C_q(t,y)}$$

Dim.

Un'inclusione, la prima, è banale : vediamo quindi la seconda. Sia :

$$\bar{z} = (z,\omega) \in \bigcap_{\substack{q\in\mathbb{Q} \\ q>0}} \overline{C_q(t,y)}$$

Innanzitutto, vale :

$\forall\, q' < q$: $\overline{C_{q'}(t,y)} \subseteq \overline{C_q(t,y)}$,

da cui :

$$\bar{z} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}^+} \overline{C_{\frac{1}{n}}(t,y)} = \bigcap_{\substack{q>0 \\ q\in\mathbb{Q}}} \overline{C_q(t,y)}$$

Allora esiste $(\bar{z}_j)_{j\in\mathbb{N}^+} \to \bar{z}$, ove :

$\forall\, j \in \mathbb{N}^+$: $\bar{z}_j \in C_{\frac{1}{j}}(t,y)$

Per ogni $j \in \mathbb{N}^+$ si ha ove :

$$\bar{z}_j = \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij}\, \bar{z}_{ij} ,$$

con :

- $\lambda_{ij} \geq 0 \quad \forall\, i = 1,\dots,m+2$;
- $\sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij} = 1$.
- $\bar{z}_{ij} = (z_{ij}, \omega_{ij}) \in \tilde{\Psi}(t_{ij}, y_{ij}) \quad \forall\, i = 1,\dots,m+2$.

Il fatto che la sommatoria abbia $n+2$ elementi al massimo è dovuto al fatto che $\vec{z}_j \in \mathbb{R}^{n+1}$, per ogni $j \in \mathbb{N}^+$.

OSSERVAZIONE

Per $j \in \mathbb{N}^+$ e $i = 1, \dots, n+2$, si ha:

$$|t_{ij} - t| + \|y_{ij} - y\| \leq \frac{1}{i+1},$$

e inoltre esiste $u_{ij} \in U$ tale che:

$$\begin{cases} z_{ij} = f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \\ w_{ij} \geq L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \end{cases}$$

Eventualmente estraendo delle sottosuccessioni, si può supporre che:

- Per ogni $i = 1, \dots, n+2$: $(\lambda_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to \lambda_i$, con $\lambda_i \geq 0$, in modo che $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1$;
- Per ogni $i = 1, \dots, n+2$, vale una delle seguenti alternative.
  - $(u_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to u_i$;
  - $(\|u_{ij}\|)_{j \in \mathbb{N}^+} \to +\infty$.

Eventualmente permutando gli indici, esiste allora $e \in \{0, \dots, n+2\}$ tale che:

- se $i \leq e$, $(u_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to u_i$;
- se $i > e$, $(\|u_{ij}\|)_{j \in \mathbb{N}^+} \to +\infty$.

Il nostro obiettivo, ora, è quello di mostrare che $e \geq 1$, ovvia che non può essere $e = 0$. Si ha infatti:

$$\omega_j = \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_{ij} w_{ij} \geq \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \geq \sum_{i=1}^{n+2} \lambda_{ij} g(u_{ij})$$

Per $j \in \mathbb{N}^+$ si ha $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to \omega$, $(\lambda_{ij})_{j \in \mathbb{N}} \to \lambda_i$ per ogni $i \in \{1, \dots, n+2\}$, e:

- Per $i \leq e$, $(u_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to u_i$;
- Per $i > e$, $(g(u_{ij}))_{j \in \mathbb{N}^+} \to +\infty$.

Allora necessariamente per ogni $i > e$ $(\lambda_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to 0$, ovvia $\lambda_i = 0$. Dato che deve essere $\sum_{i=1}^{n+2} \lambda_i = 1$, ne segue

che non può essere $e = 0$.

Si può dimostrare, infatti, che per $i > e$:

$$(\lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}))_{j \in \mathbb{N}^+} \to 0$$

infatti, per $j \geq j_0$ opportuno:

$$0 \leq \frac{|f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})|}{g(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})} = \frac{\lambda_{ij}}{\lambda_{ij}} \cdot \frac{|f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})|}{g(u_{ij})} \leq$$

$$\leq \frac{C_+ \cdot \lambda_{ij} [1 + \|y_{ij}\| + \|u_{ij}\|]}{\lambda_{ij} g(u_{ij})}$$

Dato che $(y_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+} \to y$ (quindi $(y_{ij})_{j \in \mathbb{N}^+}$ è limitata) e che:

$$\lim_{\|u\| \to +\infty} \frac{g(u)}{\|u\|} = +\infty,$$

per il teorema dei carabinieri si ha:

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\lambda_{ij} |f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij})|}{\lambda_{ij} g(u_{ij})} = 0,$$

e dato che prima abbiamo visto che, se $i > e$, allora $(\lambda_{ij} g(u_{ij}))_{j \in \mathbb{N}^+}$ è limitata, si deduce quanto voluto:

$$\lim_{j \to +\infty} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = 0,$$

per $i > e$.

Dunque:

$$z = \lim_{j \to +\infty} z_j = \lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij} z_{ij} =$$

$$= \lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij} f(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = \sum_{i=1}^{e} \lambda_i f(t, y, u_i),$$

mentre:

$$\omega = \lim_{j \to +\infty} \omega_j = \lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij} \omega_{ij} \geq$$

$$\geq \lim_{j \to +\infty} \sup \sum_{i=1}^{m+2} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) \geq$$

$$\geq \lim_{j \to +\infty} \sum_{i=1}^{e} \lambda_{ij} L(t_{ij}, y_{ij}, u_{ij}) = \sum_{i=1}^{e} \lambda_i L(t, y, u_i)$$

Esistono allora $v_1, \dots, v_e \in [0, +\infty[$ tali che:

$$\omega = \sum_{i=1}^{e} \lambda_{ij} [L(t, y, u_i) + v_i]$$

Definiamo allora, per $i = 1, \dots, e$:

$$\tilde{z}_i = (f(t, y, u_i), L(t, y, u_i) + v_i)$$

Chiaramente $\tilde{z}_i \in \tilde{F}(t, y)$ per ogni $i = 1, \dots, e$.

Inoltre:

$$\bar{z} = \sum_{i=1}^{e} \lambda_i \tilde{z}_i ,$$

quindi:

$$\bar{z} \in \text{Conv}(\tilde{F}(t, y)) = \tilde{F}(t, y) ,$$

poiché $\tilde{F}(t, y)$ è convesso, c.v.d.

Segue un lemma un'po' tecnico. Ricordiamo che, data una successione minimizzante $(y_{0,j}, u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$, essa può essere scelta in modo che $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y^* \in AC([T_0, T_1])$, $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to e^* = (t_0^*, t_1^*, y_0^*, y^*(t_1^*))$, e $(z_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to z^*$, ove:

$\forall j \in \mathbb{N}^+ : z_j(t) = \int_{T_0}^{t} L(s, y_j(s), u_j(s))\, ds$,

con z^* tale che:

$$z^* + b(\cdot - T_0)$$

risulti crescente. Tutto ciò è garantito dai lemmi visti in precedenza.

LEMMA

Sia, per $j \in \mathbb{N}^+$, $\bar{z}_j(t) \overset{\text{def}}{=} (y_j(t), z_j(t))$, e sia poi:

$\bar{z}^*(t) \overset{\text{def}}{=} (y^*(t), z^*(t))$

Nei punti di derivabilità di $\bar{z}^*$, vale:

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t))$$

Dim.

Dato che $y^* \in AC([T_0, T_1], \mathbb{R}^n)$ e che $z^*(t) + b(t - T_0)$ è monotona crescente, si ha che $(\bar{z}^*)'(t)$ esiste per quasi ogni $t \in [T_0, T_1]$.

Si ha quindi che per quasi ogni $t \in [T_0, T_1]$ esistono $(\bar{z}^*)'(t)$ e $(\bar{z}_j)'(t)$, per ogni $j \in \mathbb{N}^+$. Sia E l'insieme di tali tempi.

Se $t \in E$, per ogni $j \in \mathbb{N}^+$:

$$\bar{z}_j'(t) = (f(t, y_j(t), u_j(t)), L(t, y_j(t), u_j(t)))$$

Fissato $q \in \mathbb{N}^+$, esistono $\delta > 0$ e $j_0 \in \mathbb{N}^+$ tali che, se $|s-t| < \delta$ e $j \geq j_0$:

$$|s-t| + \|y_j(s) - y^*(t)\| < \frac{1}{q},$$

visto che $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$ è una successione equiassolutamente continua (dunque lo è anche $[y^* \cup (y_j)_{j \in \mathbb{N}^+}]$). In effetti, qui si usa anche l'uniforme continuità di y^* (garantita dall'assoluta continuità, e dal fatto che $[T_0, T_1]$ è compatto).

Dunque:

$$\bar{z}_j'(s) \in D_q(t, y^*(t)),$$

per $|s-t| < \delta$ e $j \geq j_0$.

Vedendo allora l'integrale come limite di combinazioni convesse, si ha allora:

$$\frac{z_j(t+h) - z_j(t)}{h} = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} z_j'(s)\, ds \in \overline{C_q(t, y^*(t))},$$

se $|h| < \delta$ e $j \geq j_0$. Per $j \to +\infty$:

$$\forall\, |h| < \delta: \quad \frac{z^*(t+h) - z^*(t)}{h} \in \overline{C_q(t, y^*(t))}$$

Per $h \to 0$, dato che esiste la derivata:

$$(z^*)'(t) \in \overline{C_q(t, y^*(t))}$$

Per arbitrarietà di $q > 0$, allora:

$$(z^*)'(t) \in \bigcap_{q>0} \overline{C_q(t, y^*(t))} = \tilde{F}(t, y^*(t)),$$

da cui la tesi, c.v.d.

Dimostriamo ora il lemma più importante di tutti.

LEMMA (DI SELEZIONE)
Sia $D \subseteq \mathbb{R}^{p+m}$ un insieme non vuoto, e per $z \in \mathbb{R}^p$ poniamo:

$$D^z = \{ u \in \mathbb{R}^m \mid (z, u) \in D \},$$

quindi:

$$\Delta = \{ z \in \mathbb{R}^p \mid D^z \neq \emptyset \}$$

Sia D σ-compatto. Allora esiste $\phi : \Delta \to \mathbb{R}^m$ misurabile tale che quasi ovunque in Δ:

$$(z, \phi(z)) \in D$$

Dim.

Supponiamo per ora che D sia compatto. Allora anche Δ è compatto, perché $\Delta = \pi(D)$, con:

$$\pi : \mathbb{R}^{p+m} \to \mathbb{R}^p$$
$$(z, u) \to z$$

In questo caso, si fa per induzione su m.

Per $m = 1$, se $\phi(z) = \min D^z$, si ha chiaramente che per ogni $z \in \Delta$ $(z, \phi(z)) \in D$. In più si può dimostrare che u è inferiormente semicontinua, dunque misurabile. Il passo base è quindi dimostrato.

Supponiamo ora il passo induttivo, da $(m-1)$ a m. Sia:

$$\tilde{D} = \pi_m(D),$$

con:

$$\pi_m : \mathbb{R}^{p+m} \to \mathbb{R}^{p+m-1}$$
$$(z, u) \to (z, u_1, \dots, u_{m-1})$$

Per ipotesi induttiva, allora, esistono delle funzioni misurabili $\phi_1, \dots, \phi_{m-1}$ tali che per quasi ogni $z \in \Delta$:

$$(z, \phi_1(z), \dots, \phi_{m-1}(z)) \in \tilde{D}$$

Definiamo allora:

$$\phi_m(z) \overset{\text{def}}{=} \min \{ v \in \mathbb{R} \mid (z, \phi_1(z), \dots, \phi_{m-1}(z), v) \in D \}$$

Dunque per quasi ogni $z \in \Delta$:

$$(z, \phi_1(z), \dots, \phi_{m-1}(z), \phi_m(z)) \in D$$

Resta da mostrare che ϕ_m è misurabile. Per il TEOREMA DI LUSIN esiste una successione di compatti $(K_j)_{j \in \mathbb{N}^*}$ tale che:

- $K_j \subseteq K_{j+1}$ $\forall$
- $\Delta \setminus \bigcup_{j \in \mathbb{N}} K_j$ è trascurabile;
- $\phi_m|_{K_j}$ è inferiormente semicontinua per ogni $j \in \mathbb{N}^*$.

Allora ϕ_m è misurabile, quindi il passo induttivo è dimostrato.

Se in generale D è δ-completo, allora esiste una successione di compatti $(D_j)_{j \in \mathbb{N}^+}$ tale che:

- Per ogni $j \in \mathbb{N}^+$ $D_j \subseteq D_{j+1}$;
- $D = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^+} D_j$.

Sia poi $\Delta_j = \pi(D_j)$, per ogni $j \in \mathbb{N}^+$. Allora:

- Per ogni $j \in \mathbb{N}^+$, Δ_j è compatto;
- Per ogni $j \in \mathbb{N}^+$, $\Delta_j \subseteq \Delta_{j+1}$;
- $\Delta = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^+} \Delta_j$.

Per quanto appena dimostrato, per ogni $j \in \mathbb{N}^+$ esiste $\phi_j : \Delta_j \to \mathbb{R}^m$ tale che $(z, \phi_j(z)) \in D_j$ per quasi ogni $z \in \Delta_j$, con ϕ_j misurabile.

Per concludere, allora, basta definire $\phi_* : \Delta \to \mathbb{R}^m$ ponendo:

$$\phi_*(z) = \phi^k(z)$$

per ogni $z \in \Delta_k - \Delta_{k-1}$ (con $\Delta_0 \neq \emptyset$), c.v.d.

Dimostriamo ora un ultimo lemma, prima di passare alla dimostrazione del Teorema.

LEMMA

Esistono $u^* \in L^1([T_0, T_1], U)$ e $v^* : [T_0, T_1] \to \mathbb{R}$ misurabile e positiva tali che:

$$\begin{cases} (y^*)'(t) = f(t, y^*(t), u^*(t)) \\ (z^*)'(t) = L(t, y^*(t), u^*(t)) + v^*(t) \end{cases}$$

quasi ovunque in $[T_0, T_1]$.

Dim.

Sia $U' = U \times [0, +\infty[$. Per $\bar{u} = (u, v) \in U'$, sia:

$$\bar{f}(t, y, \bar{u}) \overset{\text{def}}{=} (f(t, y, u), L(t, y, u) + v),$$

per ogni $(t, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Si ha allora:

$$\forall t \in [T_0, T_1] : \bar{f}(t, y^*(t), \cdot)(U') = \tilde{F}(t, y^*(t))$$

Osserviamo ora che la funzione $\bar{z}^*(t) = (y^*(t), z^*(t))$ è misurabile in $[T_0, T_1]$, quindi ancora per il teorema di Lusin esiste un sottoinsieme δ-completo Δ di $[T_0, T_1]$ tale che:

- $m([T_0, T_1] \setminus \Delta) = 0$;
- $\bar{z}^*|_\Delta$ è continua.

Poniamo allora:

$$D = \{ (t, \bar{u}) \in \Delta \times U' \mid (\bar{z}^*)'(t) = \bar{f}(t, y^*(t), \bar{u}) \}$$

Si può dimostrare, a partire dalla δ-completezza di Δ e di U', che D è δ-completo.

Applicando immediatamente un lemma precedente:

$$(\bar{z}^*)'(t) \in \tilde{F}(t, y^*(t)),$$

quindi:

$$D^t = \{ \bar{u} \in U' \mid (t, \bar{u}) \in D \} \neq \phi,$$

per quasi ogni $t \in \Delta$.

Applicando allora il lemma di relazione, esiste $\bar{u}^* : \Delta \to U'$ misurabile, tale che quasi ovunque in Δ vale:

$$(t, \bar{u}^*(t)) \in D,$$

ovvia per quasi ogni $t \in [T_0, T_1]$ si ha:

$$(t, \bar{u}^*(t)) \in D$$

Sia quindi:

$$\bar{u}^*(t) \overset{\text{def}}{=} (u^*(t), v^*(t))$$

Dato che $\bar{u}^*$ è misurabile, u^* e v^* sono misurabili, e in più dato che $\bar{u}^*$ è a valori in $U' = U \times [0, +\infty[$, v^* è a valori in $[0, +\infty[$ (ovvia è positiva), mentre u^* è a valori in U (entrambe sono definite in $[T_0, T_1]$). Vale poi, quasi ovunque in $[T_0, T_1]$:

$$\begin{cases} (y^*)'(t) = f(t, y^*(t), u^*(t)) \\ (z^*)'(t) = L(t, y^*(t), u^*(t)) + v^*(t) \end{cases}$$

Resta allora da controllare che u^* sia integrabile, ovvero che $u^* \in L^1([T_0, T_1], U)$.

Ricordiamo che:

$$\Psi^*(t) = Z^*(t) + b(t - T_0)$$

è crescente, quindi per il TEOREMA DI DERIVAZIONE DI LEBESGUE:

$$\Psi^*(T_1) - \Psi^*(T_0) \geq \int_{T_0}^{T_1} (\Psi^*)'(t)\, dt =$$

$$= \int_{T_0}^{T_1} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt + b(T_1 - T_0) \geq$$

$$\geq \int_{T_0}^{T_1} g(u^*(t))\, dt + b(T_1 - T_0),$$

da cui:

$$\int_{T_0}^{T_1} g(u^*(t))\, dt < +\infty,$$

e per un lemma precedente, $u^* \in L^1([T_0, T_1], U)$, c.v.d.

Possiamo finalmente concludere, dimostrando il teorema.

Consideriamo una successione $(y_{0j}, u_j) \subseteq \mathcal{F}$ minimizzante, tale che:

- $(y_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to y^* \in AC([T_0, T_1])$;
- $(e_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to e^* = (t_0^*, t_1^*, y^*(t_0^*), y^*(t_1^*))$, con $t_0^* \leq t_1^*$;
- $(Z_j)_{j \in \mathbb{N}^+} \to Z^*$.

Si ha immediatamente:

$$\inf_{\mathcal{F}} J = \lim_{j \to +\infty} J(y_{0j}, u_j) = \lim \left[Z_j(t_{1j}) - Z_j(t_{0j}) + \Phi(e_j) \right]$$

È sufficiente allora provare che:

$$J(y_0^*, u^*) \leq \inf_{\mathcal{F}} J$$

Innanzitutto, per la continuità di Φ:

$$\lim_{j \to +\infty} \Phi(e_j) = \Phi(e^*)$$

Bisogna ora discutere tre casi: $t_0^* = t_1^*$, e $t_0^* < t_1^*$.

Se $t_0^* = t_1^*$, allora $J(y_0^*, u^*) = \Phi(e^*)$. In effetti:

$\forall j \in \mathbb{N}^+$: $z_j(t_{1,j}) - z_j(t_{0,j}) \geq 0$,

da cui:

$$J(y_0^*, u^*) \leq \liminf_{j \to +\infty} J(y_0, u_j),$$

ovvio:

$$J(y_0^*, u^*) \leq \inf_{\mathcal{U}} J$$

Se $t_0^* < t_1^*$, siano t_0, t_1 tali che:

$$t_0^* < t_0 < t_1 < t_1^*$$

Esiste allora $j_0 \in \mathbb{N}^+$ tale che:

$\forall j \geq j_0$: $\psi_j(t_{1,j}) - \psi(t_{0,j}) \geq \psi_j(t_1) - \psi_j(t_0)$,

e addizionando ambo i membri il termine $b(t_{1,j} - t_{0,j})$ si ottiene che:

$$\begin{aligned}
&\liminf_{j \to +\infty} \left[z_j(t_{1,j}) - z_j(t_{0,j}) \right] \geq \\
&\geq \lim_{j \to +\infty} \psi^*(t_0) - \psi^*(t_1) - b(t_{1,j} - t_{0,j}) = \\
&= \psi^*(t_0) - \psi^*(t_1) - b(t_1^* - t_0^*) \geq \\
&= \psi^*(t_0) - \psi^*(t_1) - b(t_1 - t_0) = \\
&\geq \int_{t_0}^{t_1} (\psi^*)'(t)\, dt - b(t_1 - t_0) = \\
&= \int_{t_0}^{t_1} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt
\end{aligned}$$

Per arbitrarietà di t_0, t_1, allora:

$$\liminf_{j \to +\infty} \left[z_j(t_{1,j}) - z_j(t_{0,j}) \right] \geq \int_{t_0^*}^{t_1^*} L(t, y^*(t), u^*(t))\, dt,$$

da cui:

$$J(y_0^*, u^*) \leq \inf_{\mathcal{U}} J,$$

e ciò conclude la dimostrazione, c.v.d.

INTRODUZIONE ALLA TEORIA DEI CONTROLLI IN DIMENSIONE INFINITA

Premettiamo che ci restringeremo, per semplicità, al caso di un equazione di stato lineare e funzionale quadratico.

Si ha dunque la seguente equazione di stato:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

per $t \in [0,T]$, ove $y : [T_0, T_1] \to Y$, e $u : [T_0, T_1] \to U$, con Y e U spazi di Hilbert (rispettivamente "degli stati" e "dei controlli").

Supponiamo che sia:

- $B \in L(U,Y)$;
- $A : D(A) \subseteq Y \to Y$, con $\overline{D(A)} = Y$.

Dunque A e B sono entrambi lineari, ma mentre B è continuo, ossia limitato, A è densamente definito, ma in generale illimitato.

Si considera poi, ad esempio, un funzionale della forma:

$$J(u) = \int_0^T \langle y(t), My(t) \rangle + \langle u(t), Nu(t) \rangle \, dt + \\ + \langle y(T), P_0 y(T) \rangle ,$$

ove $M \in L(Y)$, $N \in L(U)$, $P_0 \in L(Y)$ sono tutti operatori lineari semidefiniti positivi e autoaggiunti, e in più si chiede che N sia COERCIVO, ossia esista $\nu > 0$ tale che:

$$\forall u \in U : \langle u, Nu \rangle \geq \nu \|u\|^2$$

Un esempio comune è quello in cui $A = \Delta$ è il Laplaciano, ad esempio definito in $H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ chiuso e limitato.

Si ottiene allora la seguente equazione di stato:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} y(t,x) = \Delta y(t,x) + B u(t,x) \\ y(0,x) = y_0(x) \quad \forall \; x \in \Omega \\ y(t,x) \equiv 0 \quad \forall \; x \in \partial\Omega \end{cases}$$

I controlli come quello esposto nell'equazione sono detti CONTROLLI DISTRIBUITI, e si differenziano dai CONTROLLI DI FRONTIERA, notevolmente meno semplici da studiare.

Vogliamo allora, ad esempio, scrivere l'equazione di stato in forma integrale, oppure risolvere il problema di minimo per J, sfruttando ad esempio la convessità di quest'ultima. Il problema, poi, diventa quello di scrivere un controllo ottimale u^* nella forma $\Phi(y(t))$, per ottenere un controllo feedback. Si riesce a dimostrare che:

$$u^*(t) = -B^* R(t) y(t)$$

è ottimale, dove $R(t)$ è detto OPERATORE DI RICCATI, e verifica delle proprietà ben precise, che analizzeremo nel seguito.

TEORIA DEI SEMIGRUPPI

Nella notazione usata nello scorso paragrafo, spesso si richiede che $A : D(A) \subseteq X \to X$ sia densamente :

$$\overline{D(A)} = X,$$

e in più sia un operatore CHIUSO, generatore del SEMI = GRUPPO FORTEMENTE CONTINUO $(e^{tA})_{t \geq 0}$.

Sia dunque X uno spazio di Banach, e sia :

$$L(X) \overset{\text{def}}{=} \{ T : X \to X \mid \|T\|_{op} < +\infty, \ T \text{ lineare} \}$$

Se $A \in L(X)$, è ben definito, per $t \geq 0$, l'operatore :

$$e^{tA} \overset{\text{def}}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

La buona definizione deriva dal fatto che la serie converge totalmente, in quanto :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|t|^k \|A\|_{op}^k}{k!} = e^{|t| \|A\|} < +\infty$$

Valgono le seguenti proprietà :

- $e^{tA} e^{sA} = e^{(t+s)A}$;
- $\|e^{tA}\| \leq e^{|t| \|A\|}$;
- $e^{0A} = \mathbb{I}$.

Inoltre l'applicazione :

$$\Phi_A : [0, +\infty[\to L(X)$$
$$t \to e^{tA}$$

è continua.

OSSERVAZIONE

Esistono semigruppi dove la fenomenologia è differente : vediamo un esempio. Sia $X = L^p(\mathbb{R})$, con $p \in [1, +\infty[$, e :

$$G(t) : L^p(\mathbb{R}) \to L^p(\mathbb{R})$$
$$f(x) \to f(x+t)$$

Allora $G(0) = \mathbb{I}$, $G(t) \circ G(s) = G(t+s)$, e :

$$\|G(t)\| = 1$$

Data $A \in L(L^2(\mathbb{R}))$, si ha che Φ_A (definita come prima) è continua, ma per ogni $t \geq \frac{1}{2}$:

$$\| G(t) - \mathbb{I} \|_{op} \geq 1$$

fissato $t > 0$, infatti, se si considera la funzione $\varphi = \varphi' \mathbb{I}_{[0,t[}$, con:

$$\varphi'(x) = \begin{cases} 1 & , x \in [2kt, (2k+1)t[\\ -1 & , x \in [(2k+1)t, (2k+2)t[\end{cases}$$

per $k \in \mathbb{N}$, allora $\| (G(t) - \mathbb{I}) \varphi(t) \| \geq \| \varphi(t) \|$, da cui la tesi. Nel caso di prima, invece, si aveva:

$$\lim_{t \to t_0} \| e^{tA} - e^{t_0 A} \|_{op} = 0,$$

per $t_0 \geq 0$.

Dato quindi uno spazio di Banach X, si definisce SEMI-GRUPPO FORTEMENTE CONTINUO una famiglia:

$$(G(t))_{t \geq 0} \subseteq L(X)$$

tale che:

- $G(0) = \mathbb{I}$;
- $G(t) G(s) = G(t+s) \quad \forall t, s \geq 0$;
- Per $x \in X$, $\phi_x : [0, +\infty[\to X$ tale che:

  $$\phi_x(t) = G(t) x$$

  è continua.

Un semigruppo fortemente continuo è CONTINUO (nella norma degli operatori) se l'applicazione:

$$\Phi : [0, +\infty[\to L(X)$$
$$t \to G(t)$$

è continua.

In effetti, abbiamo visto, nell'osservazione, un semigruppo fortemente continuo, ma non continuo nella norma degli operatori; l'esempio presentato all'inizio, invece, è relativo a un semigruppo anche continuo nella norma degli operatori.

Torniamo ora all'esempio visto all'inizio, relativo al semigruppo $(e^{tA})_{t\geq 0}$, con $A \in \mathcal{L}(X)$.

È un facile esercizio verificare che:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^{hA} - \mathbb{I}}{h} = A,$$

nello spirito degli operatori, dunque:

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{(t+h)A} - e^{tA}}{h} = Ae^{tA} = e^{tA} A,$$

Sia dunque $(G(t))_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo in X. Si definisce DOMINIO:

$$D \overset{def}{=} \left\{ x \in X \;\middle|\; \exists \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t} \in X \right\}$$

Si definisce allora GENERATORE INFINITESIMALE del semigruppo l'operatore $A : D \subseteq X \to X$ dato da:

$$Ax = \lim_{t\to 0} \frac{G(t)x - x}{t},$$

per $x \in D$. D'ora in poi $D = D(A)$ sarà detto DOMINIO di A.

La proposizione che segue dimostra una importante proprietà sul dominio $D(A)$ di A.

PROPOSIZIONE

Vale:

$$\overline{D(A)} = X$$

Dim.

Sia $x_0 \in X$: è sufficiente scrivere una successione $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to x_0$ contenuta in $D(A)$.

Per $m \in \mathbb{N}^+$, definiamo:

$$x_m \overset{def}{=} \frac{1}{\frac{1}{m}} \int_0^{\frac{1}{m}} G(s)\, x_0 \, ds$$

Dato che $\phi_{x_0} : [0, +\infty[\to X$ data da:

$$\phi_{x_0}(t) = G(t)\, x_0$$

è continua, si ha che $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to x_0$.

fissato ora $m \in \mathbb{N}$, si ha:

$$\frac{G(\frac{1}{k}) - \mathbb{I}}{\frac{1}{k}} x_m =$$

$$= \frac{G(\frac{1}{k}) - \mathbb{I}}{\frac{1}{k}} \frac{1}{3^{m-1}} \int_0^{\frac{1}{3^m}} G(s) x_0 \, ds = k^m \int_{\frac{1}{k^m}}^{\frac{1}{k^m}+\frac{1}{3^m}} G(s) x_0 \, ds =$$

$$= k^m \int_0^{\frac{1}{3^m}} G(s) x_0 \, ds = k^m \int_{\frac{1}{3^m}}^{\frac{1}{k^m}+\frac{1}{3^m}} G(s) x_0 \, ds - k^m \int_0^{\frac{1}{k^m}} G(s) x_0 \, ds,$$

da cui:

$$\lim_{k \to +\infty} \frac{G(\frac{1}{k}) - \mathbb{I}}{\frac{1}{k}} x_m = \frac{1}{3^{m-1}} \left[G(\tfrac{1}{3^m}) x_0 - x_0 \right],$$

e in generale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(h) - \mathbb{I}}{h} x_m = \frac{1}{h} \left[G(h) x_0 - x_0 \right],$$

da cui $x_m \in D(A)$, c.v.d.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Sia $(G(t))_{t \geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo, continuo rispetto alla norma degli operatori. Allora esiste $A \in L(X)$ tale che:

$\forall\, t \geq 0 : \; G(t) = e^{tA}$

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t \geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo, con:

$$A : D(A) \subseteq X \to X$$

generatore infinitesimale. Allora $D(A)$ è invariante per l'azione del semigruppo, ossia:

$\forall\, x \in D(A), \forall\, t \geq 0 : \; G(t) x \in D(A)$

In fine, vale:

$$A G(t) x = G(t) A x,$$

per ogni $x \in D(A)$ e ogni $t \geq 0$.

Dimo.

Si ha, per $h > 0$, $t \geq 0$:

$$\frac{G(h) - \mathbb{I}}{h} G(t) x = \frac{G(t+h) - G(t)}{t} = G(t) \frac{G(h) - \mathbb{I}}{h} x,$$

e per $h \to 0$ si ottiene che $G(t) x \in D(A)$ se $x \in D(A)$, e infine $AG(t) x = G(t) A x$, c.v.d.

Vediamo ora una proposizione che sarà utile in futuro.

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo, definito su uno spazio di Banach X. Allora:

$$\forall T>0 \ \exists B_T>0 \ : \ \forall t\in[0,T] : \|G(t)\|_{L(X)} \leq B_T$$

Dim.

Sia $x\in X$. Allora l'applicazione:

$$\begin{aligned} \Phi_x : [0,T] &\to X \\ t &\to G(t)x \end{aligned}$$

è continua da $[0,T]$ in X, quindi:

$$\begin{aligned} \Psi_x : [0,T] &\to \mathbb{R} \\ t &\to \|G(t)x\|_X \end{aligned}$$

è continua da $[0,T]$ in $\mathbb{R}$. Dunque esiste $B_{T,x}$ tale che per ogni $t\in[0,T]$ vale $\|G(t)x\|_X \leq B_{T,x}$.

Usando allora il Teorema di Banach-Steinhaus, allora, si ha che esiste $B_T>0$ tale che:

$$\|G(t)\| \leq B_T$$

per ogni $t\in[0,T]$, ossia la Tesi, c.v.d.

Vediamo quindi un'altra proposizione.

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo in X, e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora, per ogni $x\in D(A)$ e per ogni $t\geq 0$:

$$\exists \frac{d}{dt} G(t)x = AG(t)x = G(t)Ax$$

Dim.

Sia $t_0\geq 0$. Per $h>0$ e per $x\in D(A)$, per una proposizione precedente si ha:

$$\left(\frac{G(t_0+h)-G(t_0)}{h}x\right)_{h>0} \xrightarrow[h\to 0^+]{} AG(t_0)x = G(t_0)Ax,$$

dunque esiste:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^+ G(t)x\Big|_{t=t_0} = A\,G(t_0)x = G(t_0)Ax$$

se ora $t_0 > 0$, e $h \in]0, t_0]$, per $x \in D(A)$ si ha:

$$\frac{G(t_0-h)-G(t_0)}{-h}x - G(t_0)Ax =$$

$$= G(t_0-h)\left[\frac{G(h)-\mathbb{I}}{h}x - Ax\right] + \left[G(t_0-h)-G(t_0)\right]Ax$$

Ora:

- $\left\| G(t_0-h)\left[\frac{G(h)-\mathbb{I}}{h}x - Ax\right]\right\|_X \le \|G(t_0-h)\|_{L(X)}\left\|\frac{G(h)-\mathbb{I}}{h}x - Ax\right\|_X$, e tale quantità tende a 0 per $h \to 0^+$, per la proprietà vista precedentemente e per la forte continuità del semigruppo;
- sempre per la forte continuità del semigruppo, si ha:

$$\|[G(t_0-h)-G(t_0)]Ax\|_X \xrightarrow[h\to 0^+]{} 0.$$

se allora $t_0 > 0$, esiste anche la derivata sinistra: di qui si ottiene la tesi, c.v.d.

La prossima proposizione mostra una interessante proprietà di cui godono i generatori infinitesimali di semigruppi fortemente continui.

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t\ge 0}$ un semigruppo fortemente continuo in X, e sia A il suo generatore infinitesimale. Allora A è chiuso.

Dim.

Dati $x, y \in X$ tali che $(x_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \subseteq D(A)$ è tale che:

$$\begin{cases} (x_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to x \\ (Ax_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to y \end{cases},$$

bisogna dimostrare che $Ax = y$ (e che $x \in D(A)$).

Per la precedente proposizione:

$$G(t)x_m - x_m = \int_0^t \frac{d}{ds} G(s)x_m\,ds = \int_0^t G(s)Ax_m\,ds$$

da cui:

$$\frac{G(t)x_n - x_n}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t G(s) A x_n \, ds$$

Per il Teorema di convergenza dominata (applicato al secondo membro), allora, si ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{G(t)x_n - x_n}{t} = \frac{G(t)x - x}{t} = \frac{1}{t}\int_0^t G(s) y \, ds,$$

e per $t \to 0^+$:

$$Ax = y,$$

da cui vale anche $x \in D(A)$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Sia $X = L^\infty(\mathbb{R})$, e sia $(G(t))_{t\geq 0}$ dato da:

$$G(t)(f)(x) = f(x+t)$$

Allora $(G(t))_{t\geq 0}$ non è un semigruppo fortemente continuo, in quanto:

$\forall t \in [0, +\infty[: \| G(t)\mathbb{I}_{[0,1]} - \mathbb{I}_{[0,1]} \|_\infty = 1$,

da cui non si ha $\| G(t)x - x \|_\infty \to 0$ per ogni $x \in X$.

Se invece $X = L^p(\mathbb{R})$, con $1 \leq p < +\infty$, allora $(G(t))_{t\geq 0}$ è un semigruppo fortemente continuo. Chi è il suo generatore infinitesimale?

Se $f \in D(A)$, deve esistere il limite seguente, in X:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(\cdot + h) - f(\cdot)}{h} = g$$

Se $u \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, si ha:

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{f(x+t) - f(x)}{t} u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(\xi) \frac{u(\xi - t) - u(\xi)}{t} d\xi,$$

con opportuni rimaneggiamenti. Se $t \to 0$ si ottiene allora:

$$\int_{\mathbb{R}} g(x) u(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} f(\xi)(-u'(x))\, dx,$$

da cui $g = f'$ (in senso debole). Allora:

$$D(A) \subseteq W^{1,p}(\mathbb{R})$$

e per $f \in \mathcal{D}(A)$ vale:

$$\lim_{t} \frac{f(\cdot + t) - f(\cdot)}{t} = f'(\cdot)$$

Viceversa, se $f \in W^{1,p}(\mathbb{R})$, allora è chiaro che vale il limite scritto sopra, in $L^p(\mathbb{R})$. Allora:

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = W^{1,p}(\mathbb{R}) \\ Af = f' \end{cases}$$

STIME ASINTOTICHE

Sia $(G(t))_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo in uno spazio di Banach X.

Si definisce TIPO, o SOGLIA DI CRESCITA, di $(G(t))_{t\geq 0}$:

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t}$$

PROPOSIZIONE

Si ha:

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t}$$

Dim.

Sicuramente:

$$\omega_0 \leq \liminf_{t\to+\infty} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t},$$

da cui è sufficiente mostrare che:

$$\limsup_{t\to 0} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t} \leq \omega_0$$

Sia $\varepsilon>0$, e sia $t_\varepsilon>0$ tale che:

$$\frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|_{L(X)}}{t_\varepsilon} \leq \omega_0 + \varepsilon$$

Per ogni $t>0$ esistono unici $n\in\mathbb{N}$ e $\tau\in[0,t_\varepsilon[$ tali che:

$$t = n\cdot t_\varepsilon + \tau$$

Si ha allora:

$$\frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t} = \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)^n G(\tau)\|_{L(X)}}{n\cdot t_\varepsilon + \tau} \leq \frac{n \ln \|G(t_\varepsilon)\| + \ln \|G(\tau)\|}{n\cdot t_\varepsilon + \tau} \leq \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\| + \frac{1}{n} \ln B_{t_\varepsilon}}{t_\varepsilon + \frac{\tau}{n}},$$

sfruttando una proposizione precedente. Dunque:

$$\limsup_{t\to+\infty} \left[\frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|}{t_\varepsilon + \frac{\tau}{n}} + \frac{1}{n} \frac{\ln B_{t_\varepsilon}}{t_\varepsilon + \frac{\tau}{n}} \right] \leq \limsup_{t\to+\infty} \frac{\ln \|G(t_\varepsilon)\|}{t_\varepsilon} \leq$$

$$\leq \omega_0 + \varepsilon,$$

da cui la tesi, c.v.d.

OSSERVAZIONE

ω_0 è in ogni caso un estremo inferiore, non un minimo (e priori).

Vediamo ora qualche esempio. Sia $(G(t))_{t\geq 0}$ dato da:

$$G(t)(f)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x+t),$$

per $t \geq 0$.

Se $X = L^p([0,+\infty[)$ o $L^p(\mathbb{R})$, allora $\|G(t)\|_{L(X)} = 1$, dunque $\omega_0 = 0$.

Se $X = L^p([0,T])$, si ha $\|G(t)\|_{L(X)} = 0$ per ogni $t \geq T$, dunque $\omega_0 = -\infty$.

Vediamo ora un esempio per mostrare che un semigruppo fortemente continuo $(G(t))_{t\geq 0}$ può avere tipo $\omega_0 = 0$, e non essere limitato superiormente in norma.

Sia $X = \mathbb{C}^2$, e sia $(G(t))_{t\geq 0}$ dato da:

$$G(t) : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}^2$$

$$\begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} z + tw \\ w \end{bmatrix}$$

Scriveremo allora:

$$G(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

con abuso di notazione.

Si verifica agevolmente che quello definito è un semigruppo fortemente continuo in X, e che il suo generatore infinitesimale è:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Si ha:

$$\|G(t)\|^2_{L(X)} = \sup_{(z,w)\in\mathbb{C}^2} \frac{\|z+tw\|^2 + \|w\|^2}{\|z\|^2 + \|w\|^2} \leq$$

$$\leq \sup_{(z,w)\in\mathbb{C}^2} \frac{\|z\|^2 + \|w\|^2(1+t^2) + 2t\,\mathrm{Re}\, z\bar{w}}{\|z\|^2 + \|w\|^2} \leq 1 + t + t^2,$$

e d'altra parte:

$$\|G(t)\|^2_{L(X)} \geq \frac{\|G(t)[1]\|^2_X}{2} \leq \frac{(1+t^2)+1}{2} = 1 + \frac{t^2}{2} + t$$

Dunque:

- $\lim_{t \to +\infty} \|G(t)\|_{L(X)} = +\infty$;
- $\omega_0 = 0$,

che era il risultato che volevamo evidenziare.

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t \geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo in X, e sia ω_0 il tipo di $(G(t))_{t \geq 0}$. Allora, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $H_\varepsilon \geq 1$ tale che:

$$\|G(t)\|_{L(X)} \leq H_\varepsilon e^{(\omega_0 + \varepsilon)t}$$

per ogni $t \geq 0$: la crescita della norma, quindi, è al più esponenziale.

Dim.

Per una proposizione precedente, esiste $t_\varepsilon > 0$ tale che:

$$\forall\, t \geq t_\varepsilon : \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t} \leq \omega_0 + \varepsilon,$$

ossia:

$$\forall\, t \geq t_\varepsilon : \|G(t)\|_{L(X)} \leq e^{(\omega_0 + \varepsilon)t}$$

D'altronde, sempre per una proposizione precedente:

$$\exists\, B_{t_\varepsilon} > 0 \text{ s.t. } \forall\, t \in [0, t_\varepsilon] : \|G(t)\|_{L(X)} \leq B_{t_\varepsilon}$$

Sia allora $H_\varepsilon \geq 1$ tale che:

$$\forall\, t \in [0, t_\varepsilon] : B_{t_\varepsilon} \leq H_\varepsilon e^{(\omega_0 + \varepsilon)t}$$

Si ha quindi:

$$\forall\, t \in [0, +\infty[: \|G(t)\|_{L(X)} \leq H_\varepsilon e^{(\omega_0 + \varepsilon)t},$$

come si voleva, c.v.d.

Sulla scorta di ciò definiamo, per $H \geq 1$ e $\omega \in \mathbb{R}$:

$$\mathcal{G}(H, \omega) \overset{\text{def}}{=} \{ (G(t))_{t \geq 0} \mid G \text{ è un semigruppo fortemente continuo in } X, \forall\, t \geq 0\ \|G(t)\|_{L(X)} \leq H e^{\omega t} \}$$

PROPOSIZIONE

Sia $(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{G}(H,\omega)$, e sia A il generatore infinitesimale di $(G(t))_{t\geq 0}$. Allora:

- $\rho(A) \supseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega \}$; dove $\rho(A)$ è il RISOLVENTE di A:
$$\rho(A) \overset{\text{def}}{=} \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1} \in L(X) \};$$
- se $R(\lambda, A) = (\lambda \mathbb{I} - A)^{-1}$ (con $\lambda \in \rho(A)$), allora:
$$\forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}, \operatorname{Re}\lambda > \omega : R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x \, dt$$

Dim.

Sia $z \in X$, e sia $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Allora l'equazione:
$$(\lambda \mathbb{I} - A)x = z$$
ha un'unica soluzione, data da:
$$x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) z \, dt$$

Infatti:
$$\frac{G(h) - \mathbb{I}}{h} x = \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} [G(t+h) - G(t)] z \, dt =$$
$$= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t+h)} G(t+h) z \, dt - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) z \, dt =$$
$$= \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_h^{+\infty} e^{-\lambda s} G(s) z \, ds - \frac{1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G(s) z \, ds =$$
$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G(s) z \, ds - \frac{e^{\lambda h}}{h} \int_0^{h} e^{-\lambda s} G(s) z \, ds,$$
e per $h \to 0^+$, si ha che $x \in \mathcal{D}(A)$, con:
$$Ax = \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda s} G(s) z \, ds - z = \lambda x - z$$
Se ora $x' \in \mathcal{D}(A)$ e $\lambda x' - A x' = z$, allora mediante integrazione per parti si ha:
$$x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) z \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)[\lambda x' - A x'] \, dt =$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) x' \, dt - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \left(\frac{d}{dt} G(t) \right) x' \, dt =$$
$$= \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) x' \, dt - [e^{-\lambda t} G(t) x']_0^{+\infty} - \lambda \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t) x' \, dt = x',$$
da cui $x = x'$. La tesi è dunque dimostrata, c.v.d.

TEOREMA DI HILLE - YOSIDA

Veniamo ora al risultato più importante legato alla teoria dei semigruppi.

TEOREMA (DI HILLE - YOSIDA)

Siano $H \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$, e sia $A : D(A) \subseteq X \to X$ ($\overline{D(A)} = X$) un operatore lineare chiuso. Sono fatti equivalenti:

- A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $(G(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{G}(H, \omega)$;
- $\rho(A) \supseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} \lambda > \omega \}$, e:

$$\| R^k(\lambda, A) \|_{L(X)} \leq \frac{H}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}$$

ogniqualvolta $k \in \mathbb{N}$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ è tale che $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Dim.

Dimostriamo la prima implicazione. Per la proposizione precedente, sicuramente:

$$\rho(A) \supseteq \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}\lambda > \omega \},$$

per definizione di $\mathcal{G}(H, \omega)$. Inoltre:

$$R(\lambda, A)x = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} G(t)x \, dt,$$

per $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re}\lambda > \omega$.

Derivando $(k-1)$ volte tale identità (la validità si ha dal teorema di convergenza dominata) si ottiene:

$$(-1)^{k-1} (k-1)! \, R^k(\lambda, A)x = (-1)^{k-1} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-\lambda t} G(t)x \, dt,$$

da cui integrando per parti $(k-1)$ volte:

$$\| R^k(\lambda, A)x \|_X \leq \frac{H}{(k-1)!} \int_0^{+\infty} t^{k-1} e^{-(\operatorname{Re}\lambda - \omega)t} \|x\|_X \, dt =$$

$$= \frac{H}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k} \|x\|_X,$$

da cui:

$$\| R^k(\lambda, A) \|_{L(X)} \leq \frac{H}{(\operatorname{Re}\lambda - \omega)^k}$$

La seconda implicazione è più laboriosa. Definiamo, per $n \in \mathbb{N}^+$ con $n > \omega$, la successione degli APPROSSIMANTI DI YOSIDA:

$$\begin{cases} J_n \overset{\text{def}}{=} nR(n, A) \\ A_n \overset{\text{def}}{=} A J_n = nAR(n, A) \end{cases}$$

OSSERVAZIONE

Si ha:

$$A_n = nAR(n, A) = n(A - n\mathbb{I} + n\mathbb{I})(n\mathbb{I} - A)^{-1} = \\ = n^2 R(n, A) - n\mathbb{I}$$

Gli operatori J_n, A_n (per $n > \omega$) sono lineari e continui (dunque limitati). La loro introduzione è dovuta al fatto che:

- $\forall\, x \in X : (J_n x)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > \omega}} \to x$;
- $\forall\, x \in D(A) : (A_n x)_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n > \omega}} \to Ax$;
- Per ogni $k \in \mathbb{N}^+$, $\overline{D(A^k)} = X$.

Dimostriamo queste tre affermazioni:

- Se $x \in D(A)$, allora:

$$J_n x - x = nR(n, A)x - x = AR(n, A)x = \\ = R(n, A)Ax \to 0,$$

dato che $\|R(n, A)\| \leq \frac{M}{n - \omega}$. Dato che $\overline{D(A)} = X$, è:

$$\|J_n\|_{L(X)} \leq \frac{nM}{n - \omega} \leq C,$$

con C opportuna costante positiva, per ogni $n > \omega$, la tesi si ricava per ogni $x \in X$;

- Se $x \in D(A)$, dal punto precedente si ha:

$$A_n x - Ax = [nR(n, A) - \mathbb{I}]Ax \to 0;$$

- Per ogni $x \in X$, si ha $J_n^k x \in D(A^k)$, quindi basta mostrare che $(J_n^k x)_{\substack{n \in \mathbb{N}^+ \\ n > \omega}} \to x$, per ogni $k \in \mathbb{N}^+$. Per $k = 1$ la tesi è vera. Se la tesi è vera per $(k-1)$, allora usando il fatto che esiste $C_k > 0$ tale che per

ogni $n > \omega$ vale:

$$\| J_n^k \|_{L(X)} \leq C_k ,$$

e l'ipotesi induttiva:

$$J_n^k x - x = J_n^{k-1} (J_n x - x) + (J_n^{k-1} x - x) \to 0$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $n > \omega$, consideriamo il sottogruppo fortemente continuo $(e^{t A_n})_{t \geq 0}$. Si ha:

$$e^{t A_n} = e^{-nt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} R^k(n, A) ,$$

visto che $A_n = n^2 R(n, A) - n I$. Dunque:

$$\| e^{t A_n} \|_{L(X)} \leq e^{-nt} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{n^{2k} t^k}{k!} \| R^k(\lambda, A) \|_{L(X)} \leq$$

$$\leq M e^{-nt} e^{\frac{n^2 t}{n-\omega}} = M e^{\frac{n\omega t}{n-\omega}} ,$$

per ogni $t \geq 0$, e per ogni $n > \omega$. Inoltre, per $T \geq 0$ fissato, e per ogni $x \in X$, $(e^{t A_n} x)_{\substack{n \in \mathbb{N}^+ \\ n > \omega}} \to e^{tA} x$ uniformemente in $[0, T]$. Infatti, dato che A_n e A_m commutano:

$$e^{t A_n} x - e^{t A_m} x = \int_0^t \frac{d}{ds} \left[e^{(t-s) A_m} e^{s A_n} \right] x \, ds =$$

$$= - \int_0^t A_m e^{(t-s) A_m} e^{s A_n} x \, ds + \int_0^t e^{(t-s) A_m} e^{s A_n} A_n x \, ds =$$

$$= \int_0^t e^{(t-s) A_m} e^{s A_n} \left[A_n - A_m \right] x \, ds ,$$

da cui, fissato $\varepsilon > 0$, detto $\nu_\varepsilon \in \mathbb{N}^+$ quell'indice tale che:

$$\forall n, m \geq \nu_\varepsilon : \| A_n x - A_m x \|_X \leq \varepsilon$$

(e tale indice si ha perché $(A_n x)_{\substack{n \in \mathbb{N}^+ \\ n > \omega}} \to Ax$, dunque è una successione di Cauchy), vale:

$$\| e^{t A_n} x - e^{t A_m} x \|_X \leq t M^2 e^{C|\omega| T} \varepsilon ,$$

per $n, m \geq \nu_\varepsilon$. Infatti $\left(\frac{n\omega}{n-\omega} \right)_{\substack{n \in \mathbb{N}^+ \\ n > \omega}} \to \omega$ è limitata, e dunque esiste $C > 0$ tale che:

$$\forall n \in \mathbb{N}^+, n > \omega : \left| \frac{n\omega}{n-\omega} \right| < C|\omega|$$

Dunque esiste:

$$G(t) x \overset{\text{def}}{=} \lim_{n \to +\infty} e^{t A_n} x$$

Per l'uniforme convergenza, $(G(t))_{t\geq 0}$ è un semigruppo fortemente continuo, con:

$$\|G(t)\|_{L(X)} = \lim_{n\to+\infty} \|e^{tA_n} x\|_{L(X)} \leq H e^{\omega t}$$

Dunque $(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{G}(H,\omega)$: resta allora da provare che A è il suo generatore infinitesimale.

Sia $B : D(B) \subseteq X \to X$ il generatore infinitesimale di $(G(t))_{t\geq 0}$. Se $x \in D(A)$, allora:

$$(e^{tA_n} x)_{\substack{n\in\mathbb{N}^+ \\ n\to\omega}} \to G(t)x,$$

uniformemente in $[0,T]$, e:

$$\frac{d}{dt} e^{tA_n} x = A_n e^{tA_n} x = e^{tA_n} A_n x \to G(t) A x,$$

sempre uniformemente in $[0,T]$. Allora esiste:

$$\frac{d}{dt} G(t) x = G(t) A x,$$

per ogni $t \geq 0$ e per ogni $x \in D(A)$. Per $t \to 0^+$:

$$\left(\frac{G(t)x - x}{t} \right)_{t>0} \xrightarrow[t\to 0^+]{} Ax,$$

da cui $D(A) \subseteq D(B)$, e in $D(A)$ vale $A \equiv B$. Viceversa, se $x \in D(B)$, sia:

$$z = \lambda x - Bx,$$

con $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $\operatorname{Re}\lambda > \omega$. Allora:

$$R(\lambda, A) z \in D(A),$$

da cui:

$$R(\lambda, A) z \in D(B),$$

e:

$$(\lambda \mathbb{I} - B) R(\lambda, A) z = (\lambda \mathbb{I} - A) R(\lambda, A) z = z$$

Essendo:

$$R(\lambda, B)(\lambda \mathbb{I} - B) = \mathbb{I}_{D(B)},$$

si ha:

$$x = R(\lambda, B) z = R(\lambda, B)(\lambda \mathbb{I} - B) R(\lambda, A) z =$$
$$= R(\lambda, z) \in D(A),$$

da cui $D(B) \subseteq D(A)$.

Dunque A è il generatore infinitesimale di $(G(t))_{t\geq 0}$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Osserviamo che è sufficiente supporre che:

$$\rho(A) \geq]\omega, +\infty[,$$

e che la stima su $R^k(\lambda, A)$ valga solo per $\lambda \in]\omega, +\infty[$.

Infatti, se $H = \mathbb{R}$, è sufficiente la stima su $R(\lambda, A)$ (cioè per $k = 1$): le altre si ottengono da questa.

RISOLUZIONE DEL PROBLEMA DI CAUCHY

Consideriamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

per $t \in [0,T]$, dove:

- $A \in L(X)$ è il generatore di un semigruppo fortemente continuo;
- $y_0 \in X$;
- $f \in L^p([0,T],X)$, con $p \in [1,+\infty]$,

e X è uno spazio di Banach.

Supponiamo che il semigruppo $(G(t))_{t\geq 0}$ generato da A sia tale che:

$$(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{G}(M,\omega)$$

Diamo ora, immediatamente, la definizione di due tipi di soluzione.

Se $y_0 \in D(A)$, diciamo che $y : [0,T] \to X$ è SOLUZIONE STRETTA del problema di Cauchy se:

$$y \in W^{1,p}([0,T],X) \cap L^p([0,T],D(A)),$$

e y risolve l'equazione, con $y(0) = y_0$ (la condizione iniziale, ora, ha senso).

Se $y_0 \in X$, diciamo che $y : [0,T] \to X$ è SOLUZIONE FORTE del problema di Cauchy se:

$$y \in L^p([0,T],X),$$

ed esiste $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq W^{1,p}([0,T],X) \cap L^p([0,T],D(A))$ tale che:

- $(y_k)_{k\in\mathbb{N}} \to y$ in $L^p([0,T],X)$;
- $(y_k' - Ay_k)_{k\in\mathbb{N}} \to f$ in $L^p([0,T],X)$;
- $(y_k(0))_{k\in\mathbb{N}} \to y_0$ in X.

TEOREMA

Per $y_0 \in X$ e $f \in L^p([0,T], X)$, esiste ed è unica la soluzione forte del problema di Cauchy, data da:

$$y(t) = G(t)\, y_0 + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds,$$

per $t \in [0,T]$.
Inoltre $y \in C^0([0,T], X)$.

Dim.

Per $k \in \mathbb{N}^+$ con $k > \omega$, siano:

$$\begin{cases} y_{0,k} = J_k\, y_0 \\ f_k(t) = J_k\, f(t) \end{cases}$$

allora:

- $y_{0,k} \in D(A)$;
- $f_k \in L^p([0,T], D(A))$
- Posto:

$$y_k(t) = G(t)\, y_{0,k} + \int_0^t G(t-s)\, f_k(s)\, ds,$$

si può derivare l'espressione rispetto a t, ottenendo:

$$\begin{cases} y_k'(t) - A y_k(t) = f_k(t), & t \in [0,T] \\ y_k(0) = y_{0,k} \end{cases},$$

da cui:

- $(y_k' - A y_k)_{k \in \mathbb{N}^+} \longrightarrow f$ in $L^p([0,T], X)$;
- $(y_k(0))_{k \in \mathbb{N}^+} \longrightarrow y_0$ in X.

- Vale $(y_k)_{k \in \mathbb{N}^+} \longrightarrow y$ in $C^0([0,T], X)$, dunque anche in $L^p([0,T], X)$. Infatti:

$$\| y_k(t) - y(t) \|_X = \left\| G(t)(y_{0,k} - y_0) + \int_0^t G(t-s)\left[f_k(s) - f(s)\right] ds \right\|_X \leq$$

$$\leq H e^{\omega t} \| y_{0,k} - y_0 \|_X + H \left[\int_0^t e^{\omega p' (t-s)}\, ds \right]^{\frac{1}{p'}} \| f_k - f \|_{L^p([0,T], X)},$$

usando la disuguaglianza di Hölder. Dunque:

$$\| y_k(t) - y(t) \|_X \leq H e^{\omega t} \| y_{0,k} - y_0 \|_X + H \left[\frac{e^{|\omega| p' T} - 1}{|\omega| p'} \right]^{\frac{1}{p'}} \| f_k - f \|_{L^p},$$

se $\omega \neq 0$, mentre se $\omega = 0$:

$$\| y_k(t) - y(t) \|_X \leq H e^{\omega t} \| y_{0,k} - y_0 \|_X + H\, T^{\frac{1}{p'}} \| f_k - f \|_{L^p}$$

Infine, esiste $v_1 > 0$ tale che:
$\forall\, t \in [0,T]: e^{\omega t} \le v_1 e^{|\omega| T}$

In sostanza, tale quantità tende a 0 uniformemente per $t \in [0,T]$.

> OSSERVAZIONE
> Dato che $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq W^{1,p}([0,T],X) \subseteq C^0([0,T],X)$, e:
> $(y_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \to \|\cdot\|_\infty\ y$,
> vale $y \in C^0([0,T],X)$.

Proviamo ora l'unicità: sia z una soluzione forte del problema. Allora esiste $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \subseteq W^{1,p}([0,T],X) \cap L^p([0,T],D(A))$ tale che:

- $(z_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \to z$ in $L^p([0,T],X)$;
- $(z_k' - A z_k)_{k\in\mathbb{N}^+} \to f$ in $L^p([0,T],X)$;
- $(z_k(0))_{k\in\mathbb{N}^+} \to y_0$ in X.

Definiamo, per $k \in \mathbb{N}^+$:

$$f_k \overset{\text{def}}{=} z_k' - A z_k$$

Allora, per $s \in [0,t]$:

$$\frac{d}{ds}\left[G(t-s)\, z_k(s)\right] = -A G(t-s) z_k(s) + G(t-s)\left[A z_k(s) + f_k(s)\right] = G(t-s)\, f_k(s)$$

Integrando si ha quindi:

$$z_k(t) = G(t)\, z_k(0) + \int_0^t G(t-s)\, f_k(s)\, ds,$$

e per $k \to +\infty$, si ha quindi:

$$z(t) = G(t)\, y_0 + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds = y(t),$$

da cui si è unicità, c.v.d.

TEOREMA
Siano $y_0 \in D(A)$ e $f \in L^p([0,T],D(A))$. Allora vi è un'unica soluzione forte del problema, data da:

$$y(t) = G(t)\, y_0 + \int_0^t G(t-s)\, f(s)\, ds, \quad t \in [0,T]$$

Inoltre $y \in C^0([0,T], D(A))$.

Se $y_0 \in D(A)$ e $f \in W^{1,1}([0,T], X)$, allora esiste un'unica soluzione stretta del problema, data dalla formula precedente. Inoltre:

$$y \in C^1([0,T], X) \cap C^0([0,T], D(A))$$

Dim.

Proviamo la prima affermazione. In virtù della proposizione precedente, esiste un'unica soluzione forte del problema seguente:

$$\begin{cases} v'(t) = Av(t) + Af(t), & t \in [0,T] \\ v(0) = Ay_0 \end{cases},$$

visto che $Af \in L^1([0,T], X)$, e $Ay_0 \in X$. Essa è:

$$v(t) = G(t)Ay_0 + \int_0^t G(t-s)Af(s)\,ds =$$
$$= AG(t)y_0 + \int_0^t AG(t-s)f(s)\,ds$$

LEMMA

Se $h: [0,T] \to D(A)$, per ogni $t \in [0,T]$:

$$\int_0^t h(s)\,ds \in D(A), \quad A\int_0^t h(s)\,ds = \int_0^t Ah(s)\,ds$$

Dim.

Per il teorema di convergenza dominata:

- $\left(J_n \int_0^t h(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}^+} = \left(n R(n,A) \int_0^t h(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \int_0^t h(s)\,ds$;
- $\left(AJ_n \int_0^t h(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}^+} = \left(A_n \int_0^t h(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}^+} =$
$$= \left(\int_0^t A_n h(s)\,ds\right)_{n\in\mathbb{N}^+} \to \int_0^t Ah(s)\,ds$$

Essendo A chiuso, allora, si ottiene la tesi, c.v.d.

In virtù del lemma:

$$v(t) = Ay(t),$$

da cui $y \in C^0([0,T], D(A))$. Siano ora $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \subset (V_n)_{n\in\mathbb{N}^+}$ le successioni di soluzioni dei problemi seguenti:

$$\begin{cases} y_n'(t) = A_n y_n(t) + f(t) \\ y_n(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_n'(t) = A_n v_n(t) + A_n f(t) \\ v_n(0) = y_0 \end{cases},$$

per $t \in [0,T]$.
Per ogni $n \in \mathbb{N}^+$, $A_n \in L(X)$, dunque:
$\forall n \in \mathbb{N}^+ : y_n, v_n \in C^1([0,T], X)$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}^+$:

- $y_n(t) = e^{tA_n} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} f(s)\, ds$;
- $v_n(t) = e^{tA_n} A_n y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_n} A_n f(s)\, ds = A_n y_n(t)$.

Dato che per ogni $x \in X$ si ha:

$$(e^{tA_n} x) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty, [0,T]} G(t)x,$$

allora:

- $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^+} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} y$, uniformemente in $[0,T]$;
- come conseguenza, $y(0) = y_0$;
- $(A_n y_n(t))_{n\in\mathbb{N}^+} = (v_n(t))_{n\in\mathbb{N}^+} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} v(t)$, uniformemente in $[0,T]$.

Dunque per ogni $t \in [0,T]$ $y(t) \in D(A)$, e $Ay(t) = v(t)$.
Inoltre:

$$(y_n'(t))_{n\in\mathbb{N}^+} = (A_n y_n(t) + f(t))_{n\in\mathbb{N}^+} \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} Ay(t) + f(t),$$

sempre uniformemente in $[0,T]$, da cui per ogni $t \in [0,T]$:
$\exists\ y'(t) = Ay(t) + f(t)$

Quindi $y \in C^1([0,T], X) \cap C^0([0,T], D(A))$ è la soluzione stretta del problema.

Proviamo ora la seconda affermazione. Dato che $f' \in L^p([0,T], X)$ e $Ay_0 + f(0) \in X$, esiste un'unica soluzione forte del problema seguente:

$$\begin{cases} z'(t) = Az(t) + f'(t), & t \in [0,T] \\ z(0) = Ay_0 + f(0) \end{cases}$$

Essa è:

$$z(t) = G(t)[Ay_0 + f(0)] + \int_0^t G(t-s) f'(s)\, ds,$$

per $t \in [0,T]$.

Siano allora $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ e $(z_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ le successioni di soluzioni di:

$$\begin{cases} y_m'(t) = A_m y_m(t) + f(t) \\ y_m(0) = y_0 \end{cases}, \quad \begin{cases} z_m'(t) = A_m z_m(t) + f'(t) \\ z_m(0) = A_m y_0 + f(0) \end{cases},$$

per $t \in [0,T]$. Tali funzioni appartengono a $C^1([0,T],X)$, e sono date da:

- $y_m(t) = e^{tA_m} y_0 + \int_0^t e^{(t-s)A_m} f(s)\,ds$;
- $z_m(t) = e^{tA_m}[A_m y_0 + f(0)] + \int_0^t e^{(t-s)A_m} f'(s)\,ds =$

$$= e^{tA_m}[A_m y_0 + f(0)] + \left[e^{(t-s)A_m} f(s)\right]_0^t + A_m \int_0^t e^{(t-s)A_m} f(s)\,ds =$$

$$= A_m y_m(t) + e^{tA_m} f(0) + f(t) - e^{tA_m} f(0) =$$

$$= A_m y_m(t) + f(t) = y_m'(t),$$

per ogni $m \in \mathbb{N}^+$.

Dunque:

- $(y_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to \|\cdot\|_\infty$ y, uniformemente in $[0,T]$;
- Come conseguenza, $y(0) = y_0$;
- $(y_m')_{m\in\mathbb{N}^+} = (z_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to z$, uniformemente in $[0,T]$.

Allora $y \in C^1([0,T],X)$, e $y'(t) = z(t)$ per ogni $t \in [0,T]$. Inoltre:

$$(A_m y_m(t))_{m\in\mathbb{N}^+} = (y_m'(t) - f(t))_{m\in\mathbb{N}^+} \to z(t) - f(t),$$

quindi per $t \in [0,T]$ vale $y(t) \in D(A)$, con:

$$Ay(t) = z(t) - f(t) = y'(t) - f(t)$$

Dunque $y \in L^p([0,T], D(A))$, e ciò conclude la dimostrazione, c.v.d.

SEMIGRUPPI IN SPAZI DI HILBERT

La Teoria dei semigruppi si specializza, se X è uno spazio di Hilbert.

TEOREMA (DI DATKO)

Sia X uno spazio di Hilbert complesso. Sia $(G(t))_{t\geq 0}$ un semigruppo fortemente continuo generato da A. Sono fatti equivalenti:

- $(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{G}(H,\omega)$, con $H \geq 1$, $\omega < 0$;
- $\int_0^{+\infty} \| G(t)x \|_X^2 \, dt < +\infty \quad \forall x \in X$;
- Esiste un operatore $P \in L(X)$ simmetrico (autoaggiunto) e semidefinito positivo che risolve l'EQUAZIONE DI LYAPOUNOV:

$$\langle Px, Ay \rangle_X + \langle Ax, Py \rangle_X = -\langle x, y \rangle_X \quad \forall x, y \in D(A)$$

Dim.

Che la prima affermazione implichi la seconda è evidente: la tesi discende subito dalla definizione stessa di $\mathcal{G}(H,\omega)$, con $\omega < 0$.

Vediamo ora di dimostrare che la seconda affermazione implica la terza.

LEMMA

Esiste $K > 0$ tale che per ogni $x \in X$:

$$\left[\int_0^{+\infty} \| G(t)x \|_X^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq K \| x \|_X$$

Dim.

Definiamo, per $T > 0$, l'operatore:

$$T_T : X \to L^2([0,+\infty[, X)$$
$$(T_T x)(t) = G(t)x \, \mathbb{I}_{[0,T]}(t)$$

Si ha $T_T \in L^2(X, L^2([0,+\infty[, X))$. Infatti, se:

$$K_x = \left[\int_0^{+\infty} \| G(t)x \|_X^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}},$$

allora $K_x < +\infty$ (per ipotesi), e:

$$\| T_T x \|_{L^2([0,+\infty[,X)} = \left[\int_0^T \| G(t)x \|_X^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq K_x \quad \forall T > 0,$$

da cui:

$$\sup_{T>0} \| T_T x \|_{L^2([0,+\infty[,X)} \leq k_x \quad \forall x \in X$$

allora, per il teorema di Banach-Steinhaus:

$$\sup_{T>0} \| T_T \|_{L(X, L^2([0,+\infty[,X))} \overset{\text{def}}{=} k < +\infty ,$$

da cui:

$$\sup_{T>0} \frac{1}{\| x \|_X} \left[\int_0^{+\infty} \| G(t) x \|_X^2 \, dt \right]^{\frac{1}{2}} \leq k ,$$

da cui si ha la Tesi, c.v.d.

Dimostrato questo lemma, sia:

$$\Phi(x,y) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{+\infty} \langle G(t) x, G(t) y \rangle_X \, dt ,$$

e per $\lambda > 0$ sia:

$$\Phi_\lambda(x,y) \overset{\text{def}}{=} \int_0^{\lambda} \langle G(t) x, G(t) y \rangle_X \, dt ,$$

per ogni $x, y \in X$.

Le forme Φ e Φ_λ ($\lambda > 0$) sono sesquilineari e continue su $X \times X$. Allora, per ogni $y \in X$ fissato, l'applicazione:

$$\Psi_y : X \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$x \longrightarrow \Phi(x,y)$$

è lineare e continua da X in $\mathbb{C}$, con:

$$\sup_{x \in X - \{0\}} \frac{|\Phi(x,y)|}{\| x \|_X} \leq k \| y \|_X$$

Allora, per il Teorema di Riesz, esiste ed è unico l'elemento $z_y \in X$ tale che:

$$\Phi(x,y) = \langle x, z_y \rangle_X \quad \forall x \in X$$

In particolare:

$$\| z_y \|_X = \| \Phi(\cdot, y) \|_{L(X,\mathbb{C})}$$

La dipendenza di z_y da y è lineare, dunque esiste $P : Y \to Y$ lineare, tale che:

$\forall y \in Y : z_y = P y$

Inoltre P è continua ($P \in L(X)$), dato che $\| P \|_{L(X)} \leq k$, per quanto visto prima.

Infine P è semidefinito positivo, in quanto:

$$\langle Px, x \rangle_x = \phi(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in X,$$

e inoltre è autoaggiunto in quanto ϕ è hermitiano.

Per definizione, poi, vale:

$$\langle Px, y \rangle_x = \langle x, Py \rangle_x = \phi(x,y),$$

per ogni $x, y \in X$.

OSSERVAZIONE

In modo analogo si determina, per $\lambda > 0$, P_λ tale che per ogni $x, y \in X$:

$$\langle P_\lambda x, y \rangle_x = \phi_\lambda(x,y)$$

Dato che per ogni $x, y \in X$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \phi_\lambda(x,y) = \phi(x,y),$$

si deduce che per ogni $x \in X$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} P_\lambda x = Px$$

Se ora $x, y \in D(A)$, vale:

$$\langle P_\lambda Ax, y \rangle_x + \langle P_\lambda x, Ay \rangle_x = \int_0^\lambda \langle G(t)Ax, G(t)y \rangle_x + \langle G(t)x, G(t)Ay \rangle_x \, dt =$$

$$= \int_0^\lambda \frac{d}{dt} \langle G(t)x, G(t)y \rangle_x \, dt = \langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_x - \langle x, y \rangle_x$$

Quindi:

$$\langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_x = \langle Ax, P_\lambda y \rangle_x + \langle P_\lambda x, Ay \rangle_x + \langle x, y \rangle_x,$$

per ogni $x, y \in D(A)$.

Allora, per ogni $x \in D(A)$:

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \langle G(\lambda)x, G(\lambda)y \rangle_x = \langle Ax, Py \rangle_x + \langle Px, Ay \rangle_x + \langle x, y \rangle_x,$$

e dato che:

$$\langle G(\cdot)x, G(\cdot)y \rangle_x \in L^1([0, +\infty[),$$

il limite è nullo, dunque si ha la tesi:

$$\langle Ax, Py \rangle_x + \langle Px, Ay \rangle_x = -\langle x, y \rangle_x$$

Mostriamo ora che la terza affermazione implica la seconda.

Sia $x \in D(A)$. Utilizziamo la funzione:

$$\alpha(x) \overset{\text{def}}{=} \langle Px, x \rangle_X$$

come funzione di Lyapounov dell'equazione:

$$y' = Ay$$

si ha allora:

$$\frac{d}{dt}\langle PG(t)x, G(t)x\rangle_X = \langle PAG(t)x, G(t)x\rangle_X +$$

$$+ \langle PG(t)x, AG(t)x\rangle_X = \langle AG(t)x, PG(t)x\rangle_X +$$

$$+ \langle PG(t)x, AG(t)x\rangle_X = -\|G(t)x\|_X^2,$$

e integrando in $[0,T]$:

$$\langle PG(T)x, G(T)x\rangle_X - \langle Px, x\rangle_X = -\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 \, dt,$$

da cui:

$$\int_0^T \|G(t)x\|_X^2 \, dt \leq \langle Px, x\rangle_X,$$

per ogni $x \in D(A)$. La relazione si estende poi per ogni $x \in X$, per densità. Per $T \to +\infty$, allora, si ottiene la tesi:

$$\int_0^{+\infty} \|G(t)x\|_X^2 \, dt \leq \langle Px, x\rangle_X < +\infty$$

Mostriamo infine che la seconda affermazione implica la prima.

Supponiamo che esistano $M_1 \geq 1$, $\omega_1 \in \mathbb{R}$ tali che

$$(G(t))_{t\geq 0} \in \mathcal{G}(M_1, \omega_1)$$

Se $\omega_1 < 0$ si ha quanto voluto; resta allora da discutere il caso in cui $\omega_1 \geq 0$.

Se $\omega_1 = 0$, allora $\|G(t)\|_{L(X)} \leq M_1$, quindi per $z \in X$:

$$t\|G(t)z\|_X^2 = \int_0^t \|G(t)z\|_X^2 \, ds \leq \int_0^t \|G(s)\|_{L(X)}^2 \|G(t-s)z\|_X^2 \, ds \leq$$

$$\leq M_1^2 \int_0^t \|G(\tau)z\|_X^2 \, d\tau,$$

da cui:

$$\|G(t)x\|_X^2 \leq \frac{H_1^2 k^2}{t} \|x\|_X^2 ,$$

per ogni $x \in X$, $t > 0$.

OSSERVAZIONE

Si è usata la seguente relazione (già provata):

$$\int_0^{+\infty} \|G(t)x\|_X^2 \, dt \leq K^2 \|x\|_X^2 ,$$

Dunque:

$$\|G(t)\|_{L(X)} \leq \frac{H_1 K}{\sqrt{t}} < 1 ,$$

se $t \geq t_0$ con $t_0 > 0$ opportuno, da cui si ha che il tipo di G è:

$$\omega_0 = \inf_{t>0} \frac{\ln \|G(t)\|_{L(X)}}{t} < 0$$

Da qui segue la tesi, anche quando $\omega_1 = 0$.

Infine, se $\omega_1 > 0$, se $x \in X$:

$$\frac{1 - e^{-2\omega_1 t}}{2\omega_1} \|G(t)x\|_X^2 = \int_0^t e^{-2\omega_1 s} \|G(t)x\|_X^2 \, ds \leq$$

$$\leq \int_0^t e^{-2\omega_1 s} \|G(s)\|_{L(X)}^2 \|G(t-s)x\|_X^2 \, ds \leq$$

$$\leq H_1^2 \int_0^t \|G(t)x\|_X^2 \, dt \leq H_1^2 k^2 \|x\|_X^2 ,$$

da cui:

$$\|G(t)x\|_X^2 \leq \frac{2\omega_1 k^2 H_1^2}{1 - e^{-2\omega_1 t}} \|x\|_X^2$$

per ogni $t > 0$, e quindi:

$$\|G(t)\|_{L(X)}^2 \leq \frac{2\omega_1 k^2 H_1^2}{1 - e^{-2\omega_1 t}} ,$$

per $t > 0$. Allora:

- Per $t \in [0,1]$:

$$\|G(t)\|_{L(X)}^2 \leq H_1^2 e^{2\omega_1} ;$$

- Per $t > 1$:

$$\|G(t)\|_{L(X)}^2 \leq \frac{2\omega_1 H_1^2 k^2}{1 - e^{-2\omega_1}} .$$

Dunque $\|G(t)\|_{L(X)}$ è uniformemente limitato: ci siamo allora ricondotti al caso precedente.

La dimostrazione è dunque conclusa, c.v.d.

Anche il Teorema di Hille - Yosida si specializza nel caso Hilbertiano.

TEOREMA (DI LUMER - PHILLIPS)

Sia X uno spazio di Hilbert complesso, e sia:

$$A : D(A) \subseteq X \to X$$

un operatore lineare chiuso. Sono fatti equivalenti:

- $\overline{D(A)} = X$, $\rho(A) \supseteq]0, +\infty[$, $\mathrm{Re}(\langle Ax, x \rangle_X) \leq 0 \quad \forall x \in D(A)$;
- A è il generatore infinitesimale di $(G(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{G}(1,0)$ (esso è detto SEMIGRUPPO CONTRATTIVO).

Dim.

Dimostriamo prima la seconda implicazione.

Sia $x \in D(A)$. Allora:

$$\mathrm{Re}(\langle Ax, x \rangle_X) = \lim_{h \to 0^+} \frac{1}{h} \mathrm{Re}\left[\langle G(h)x, x \rangle_X - \|x\|_X^2 \right] \leq 0$$

Per i risultati visti in precedenza, poi, $\overline{D(A)} = X$ e $\rho(A) \supseteq]0, +\infty[$.

Dimostriamo ora la prima implicazione.

Sia $\lambda > 0$, e sia $R(\lambda, A)x = y \in X$. Allora:

$$\lambda y - Ay = x,$$

da cui:

$$\lambda \|y\|_X^2 - \langle Ay, y \rangle_X = \langle x, y \rangle_X,$$

da cui:

$$(\mathrm{Re}\,\lambda)\|y\|_X^2 \leq \mathrm{Re}(\langle Ay, y \rangle_X) + \|x\|_X \|y\|_X,$$

ossia:

$$\|y\|_X = \|R(\lambda, A)x\|_X \leq \frac{1}{\mathrm{Re}\,\lambda} \|x\|_X,$$

visto che $\mathrm{Re}(\langle Ay, y \rangle_X) \leq 0$.

Per il Teorema di Hille - Yosida, allora, A è il generatore infinitesimale di $(G(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{G}(1,0)$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Si dice che A è DISSIPATIVO in X (spazio di Hilbert) se per ogni $x \in D(A)$ vale:

$$\mathrm{Re}(\langle Ax, x \rangle_x) \leq 0,$$

e che A è MASSIMALE DISSIPATIVO quando è dissipativo, con $\rho(A) \geq]0, +\infty[$.

I semigruppi contrattivi sono quindi tutti e soli quelli generati da operatori massimali dissipativi densamente definiti.

APPLICAZIONE AI PROBLEMI DI DIRICHLET

Sia $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ un aperto limitato con frontiera localmente Lipschitziana.

Consideriamo il problema di Dirichlet per l'EQUAZIONE DI LAPLACE:

$$\begin{cases} \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Un primo risultato di esistenza e unicità si ha in forma debole. Si considera su $H_0^1(\Omega)$ il seguente prodotto scalare:

$$\langle u, v \rangle_* = \int_\Omega \langle \nabla u, \nabla v \rangle_{\mathbb{R}^m} \, d\underline{x}$$

Esso è equivalente al prodotto scalare naturale dello spazio $H_0^1(\Omega)$, per la disuguaglianza di Poincaré.

Applicando allora il teorema di Riesz, per ogni $T \in H^{-1}(\Omega)$ (duale di $H_0^1(\Omega)$) esiste ed è unica $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathbb{R}^m} \, d\underline{x} = {}_{H^{-1}(\Omega)}\langle T, \varphi \rangle_{H_0^1(\Omega)}$$

Dato che $f \in L^2(\Omega)$, allora, se $T \in H^{-1}(\Omega)$ è dato da:

$$\langle T, \varphi \rangle \overset{\text{def}}{=} -\int_\Omega f \varphi \, d\underline{x},$$

allora u è tale che:

$$\int_\Omega \langle \nabla u, \nabla \varphi \rangle_{\mathbb{R}^m} \, d\underline{x} = \int_\Omega f \varphi \, d\underline{x}$$

OSSERVAZIONE

In particolare, per $\varphi = u$, si ottiene che:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

da cui:

$$\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$$

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)},$$

usando la disuguaglianza di Poincaré.

Inoltre, una tecnica tipica della teoria ellittica, detta METODO DEI RAPPORTI INCREMENTALI, permette di affermare che, se $f \in L^2(\Omega)$, allora $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, con:

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Possiamo allora rappresentare il problema proposto, definendo l'operatore $A : D(A) \subseteq L^2(\Omega) \to L^2(\Omega)$, con:

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

dato da:

$$Au \overset{\text{def}}{=} \Delta u,$$

per $u \in D(A)$.

Il problema allora si può riscrivere in questo modo:

$$\begin{cases} u \in D(A) \\ Au = f \end{cases},$$

per $f \in L^2(\Omega)$.

Osserviamo che, per $u \in D(A)$:

$$\mathrm{Re}\left(\langle Au, u\rangle_{L^2(\Omega)}\right) = \mathrm{Re}\left(\langle \Delta u, u\rangle_{L^2(\Omega)}\right) =$$

$$= \mathrm{Re}\left(\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} \cdot u \, d\sigma\right) - \int_\Omega \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \, dx \leq 0,$$

e inoltre $\overline{D(A)} = L^2(\Omega)$ e $\rho(A) \supseteq [0, +\infty[$, dato che per ogni $\lambda \geq 0$ il problema

$$\begin{cases} \lambda u - \Delta u = f \in L^2(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

ha soluzione unica (ciò si vede usando il procedimento visto poco fa).

Per il Teorema di Lumer-Phillips, allora, A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo di contrattivo.

OSSERVAZIONE

Nel caso del problema di Neumann per l'equazione di Laplace:

$$\begin{cases} \Delta u = f & , \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & , \partial\Omega \end{cases},$$

si è una teoria parallela che dà gli stessi risultati. L'operatore seguente:

$$A u = \Delta u,$$

definito in:

$$D(A) = \{ u \in H^2(\Omega) \mid \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ in } \partial\Omega \}$$

genera un semigruppo fortemente continuo contrattivo. L'unica differenza è che $0 \notin \rho(A)$.

Consideriamo ora il problema di Dirichlet per l'EQUAZIONE DEL CALORE:

$$\begin{cases} y_t(t,x) - \Delta y(t,x) = B u(t,x) & ,]0,T] \times \Omega \\ y(t,x) = 0 & ,]0,T] \times \partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x) & , \Omega \end{cases},$$

con un termine di controllo $Bu(t,x)$, distribuito in $]0,T] \times \Omega$. Possiamo riscrivere tale problema in modo astratto in questo modo:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) & , t \in]0,T] \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

con $X = L^2(\Omega)$, e $Ay = \Delta y$, in:

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

e A è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo.

Sia ora $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ aperto, connesso e limitato, con frontiera regolare. Consideriamo il problema di Dirichlet per l'EQUAZIONE DELLE ONDE:

$$\begin{cases} y_{tt}(t,x) - \Delta y(t,x) = f(t,x) & ,]0,T] \times \Omega \\ y(t,x) = 0 & ,]0,T] \times \partial\Omega \\ y(0,x) = y_0(x), \; y_t(0,x) = y_1(x) & , \Omega \end{cases}$$

Anche in questo caso, ci si può ridurre ad un'equazione astratta. Se poniamo $v = y_t$, allora l'equazione diventa:

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \Delta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix},$$

con la condizione iniziale:

$$\begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix},$$

e $y(t,x) = 0$ su $\partial\Omega$.

Se allora $A_u = \Delta u$ su:

$$D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega),$$

si dice il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}(0) = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \end{bmatrix} \end{cases},$$

Sia allora:

$$\mathcal{A} \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{bmatrix}$$

Analizziamo le proprietà spettrali di A, in $X = L^2(\Omega)^2$. Si ha innanzitutto:

$$D(\mathcal{A}) = D(A) \times L^2(\Omega)$$

Ora, l'equazione:

$$\lambda \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} - \mathcal{A} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

equivale al sistema seguente:

$$\begin{cases} \lambda y - v = f \\ \lambda v - Ay = g \end{cases},$$

da cui:

$$\begin{cases} v = \lambda y - f \\ \lambda^2 y - Ay = g + \lambda f \end{cases}$$

Per $\lambda \in \mathbb{R}$ vale $\lambda^2 \geq 0$, dunque $\lambda^2 \in \rho(A)$. Dunque:

$$R(\lambda, \mathcal{A}) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\lambda^2, A)(g + \lambda f) \\ \lambda R(\lambda^2, A)(g + \lambda f) - f \end{bmatrix},$$

ovvio:

$$R(\lambda, \mathcal{Q}) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & \lambda \\ A & \lambda \end{bmatrix} R(\lambda^2, A) \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}$$

Quest'operatore non è a priori semidefinito si stima mentre bene: il teorema di Hille - Yosida, allora, non è applicabile.

Consideriamo allora uno spazio differente:

$$X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

con il prodotto scalare:

$$\left\langle \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix} \right\rangle_X \overset{\text{def}}{=} \int_\Omega \nabla y \cdot \nabla z + v w \, dx$$

Allora l'operatore $\mathcal{Q}$, con $D(\mathcal{Q}) = D(A) \times H_0^1(\Omega)$, è tale che:

$$\left\langle \mathcal{Q} \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_X = \left\langle \begin{bmatrix} v \\ \Delta y \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y \\ v \end{bmatrix} \right\rangle_X = \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla y + \Delta y \cdot v \, dx =$$

$$= \int_\Omega \cancel{\nabla v \cdot \nabla y} - \nabla v \cdot \nabla y \, dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial \nu} \cancel{v} \, d\sigma = 0$$

Dunque $\mathcal{Q}$ e $-\mathcal{Q}$ sono entrambi massimali dissipativi, e quindi $\mathcal{Q}$ genera un semigruppo fortemente continuo contrattivo.

L'equazione delle onde, allora, si rappresenta in forma astratta in questo modo:

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu, & t \in]0, T] \\ y(0) = y_0 \end{cases},$$

in $X = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$.

TEORIA DEI CONTROLLI IN DIMENSIONE INFINITA

Torniamo ora al problema di minimizzazione del funzionale seguente:

$$J(x,u) = \int_0^T \left[\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \right] dt + \langle Py(T), y(T) \rangle_X ,$$

con X, U spazi di Hilbert separabili, $M, P_0 \in L(X)$, $N \in L(U)$, tutti autoaggiunti e semidefiniti positivi (N coercivo con costante di coercività $\delta > 0$), di cui si cercano (al variare dei controlli $u \in L^2([0,T], U)$) soluzioni della forma:

$$y(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s) Bu(s)\, ds ,$$

con $B \in L(U,X)$, della seguente equazione di stato:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = x \end{cases} ,$$

con $x \in X$, e $A : D(A) \subseteq X \to X$ (generatore infinitesimale di $(G(t))_{t \geq 0}$).

Il funzionale quadratico J è strettamente convesso e coercivo: per ogni $x \in X$, allora, esiste ed è unico il controllo ottimale u^*, a cui corrisponde l'unico stato ottimale y^*. Infatti $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^+}$ è una successione minimizzante, per la coercività di N essa è limitata in $L^2([0,T], U)$, dunque esiste $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}^+} \to u^*$. A questo punto, $(y_{m_k})_{k \in \mathbb{N}^+} \to y^*$ in $L^2([0,T], X)$, con:

$$y^*(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s) B u^*(s)\, ds ,$$

e inoltre:

$$(y_{m_k}(T))_{k \in \mathbb{N}^+} \to y^*(T)$$

A questo punto, per la semicontinuità inferiore della norma, si conclude: (u^*, y^*) è una coppia ottimale (è unica, per la stretta convessità di J).

Vogliamo ora caratterizzare (u^*, y^*). Il Teorema di Pontryagin ci dà molte informazioni: le condizioni necessarie per il Teorema di Bolza in $\mathbb{R}^n$ continuano a valere in questo contesto più generale.

In questo caso, si ottiene:

$$\begin{cases} N u^*(t) = -B^* p(t) & , t \in [0,T] \\ p'(t) = -A^* p(t) - \pi y^*(t) & , t \in [0,T] \\ p(T) = P_0 y^*(T) \end{cases},$$

con $p = -\frac{\psi}{2}$ (ψ è stata definita e analizzata in precedenza).

Il moltiplicatore p si dice CO-STATO, e risolve un problema di Cauchy all'indietro.

IMMERSIONE IN UN CAMPO DI SOLUZIONI

Immergiamo ora il nostro problema in una famiglia più generale. Per $s \in [0,T[$, consideriamo il seguente funzionale:

$$J_s(x,u) = \int_s^T \left[\langle M y(t), y(t) \rangle_X + \langle N u(t), u(t) \rangle_U \right] dt + \langle P_0 y(T), y(T) \rangle_X ,$$

da minimizzare tra le $u \in L^2([s,T], U)$ tali che:

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^T G(t-\tau) B u(\tau) \, d\tau ,$$

per $t \in [s,T]$, con $x \in X$ e $(G(t))_{t \geq 0}$ generato da un operatore $A : D(A) \subseteq X \to X$.

Si definisce allora FUNZIONE VALORE di questo problema di controllo:

$$V(s,x) \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ J_s(x,u) \;\middle|\; u \in L^2([s,T],U),\ y(t) = G(t-s)x + \int_s^T G(t-\tau) B u(\tau) d\tau \right\}$$

Indicheremo infine con $(u^*_{s,x}(\cdot), y^*_{s,x}(\cdot))$ e $p^*_{s,x}(\cdot)$ la coppia ottimale relativa a (s,x) e il relativo co-stato.

Dunque:

$$\begin{cases} (p^*_{s,x})'(t) = -A p^*_{s,x}(t) - M y^*_{s,x}(t) \\ p^*_{s,x}(T) = P_0 y^*_{s,x}(T) \end{cases} ,$$

e inoltre:

$$u^*(s,x) = -N^{-1} B^* p^*_{s,x}(t) ,$$

e:

$$y^*_{s,x}(t) = G(t-s)x + \int_s^T G(t-\tau) B u^*_{s,x}(\tau) \, d\tau$$

Infine:

$$V(s,x) = \int_s^T \left[\langle M y^*_{s,x}(t), y^*_{s,x}(t) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(t), u^*_{s,x}(t) \rangle_U \right] dt + \langle P_0 y^*_{s,x}(T), y^*_{s,x}(T) \rangle_X$$

PROPOSIZIONE

L'applicazione $u_s^* : X \to C([s,T],U)$ data da:

$$u_s^*(x) = u_{s,x}^*$$

è lineare e continua. L'applicazione $y_s^* : X \to C([s,T],X)$ data da:

$$y_s^*(x) = y_{s,x}^*$$

è lineare e continua. L'applicazione $p_s^* : X \to C([s,T],X)$ data da:

$$p_s^*(x) = p_{s,x}^*$$

è lineare e continua.

Inoltre, esiste $L_T \geq 0$ tale che:

$$\| y_{s,x}^*(t) \|_X + \| u_{s,x}^*(t) \|_U + \| p_{s,x}^*(t) \|_X \leq L_T \| x \|_X ,$$

per ogni $x \in X$, $s \in [0,T[$, $t \in [s,T]$.

Dim.

Per una coppia qualunque (u,y), con:

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^T G(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau ,$$

vediamo come invertire y in $J_s(x,u)$. Poniamo:

- $[L_s(u)](t) = \int_s^t G(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau$;
- $L_{sT} u = \int_s^T G(t-\tau) B u(\tau)\, d\tau$.

Allora:

$$L_s \in L(L^2([s,T],U) \to L^2([s,T],X)),$$
$$L_{sT} \in L(L^2([s,T],U), X),$$

Inoltre:

$$\begin{cases} \| L_s \| \leq \dfrac{H e^{\omega(T-s)}}{2\omega} \| B \|_{L(U,X)} \\ \| L_{sT} \| \leq \dfrac{H e^{\omega(T-s)}}{2\omega} \| B \|_{L(U,X)} \end{cases},$$

a meno di norme operatore.

Poniamo poi:

$$L_s^* : L^2([s,T],X) \to L^2([s,T],U)$$

$$[L_s^* v](t) = \int_s^T B^* G(t-\tau)^* v(\tau)\, d\tau \quad ,$$

e:

$$L_{sT}^* : X \to L^2([s,T],U)$$

$$[L_{sT}^* y](t) = B^* G(T-t)^* y$$

Si ha pertanto:

$$J_s(x,u) = \int_s^T \left[\langle M[G(t-s)x + L_s u(t)], G(t-s)x + L_s u(t)\rangle_X + \right.$$

$$\left. + \langle N u(t), u(t)\rangle_U \right] dt +$$

$$+ \langle P_0 [G(t-s)x + L_{sT} u], G(t-s)x + L_{sT} u\rangle_X =$$

$$= \int_s^T \langle G(t-s)^* M G(t-s)x, x\rangle_X \, dt + \langle G(T-s)^* P_0 G(T-s)x, x\rangle_X +$$

$$+ 2\int_s^T \langle [L_s^* M G(\cdot - s)x](t) + [L_{sT}^* P_0 G(T-s)x](t)\rangle_U \, dt +$$

$$+ \int_s^T \left[\langle [L_s^* M L_s u](t), u(t)\rangle_U \quad N(t), u(t)\rangle_U + \right.$$

$$\left. + \langle [L_{sT}^* P_0 L_{sT} u](t), u(t)\rangle_U \right] dt$$

Se $u = u_{s,x}^*$ la quantità $J_s(x,u)$ è minima, dunque:

$$\frac{\partial}{\partial u} J_s(x,u) \equiv 0$$

per $u = u_{s,x}^*$. Dopo un po' di conti si ottiene allora:

$$2\left(L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT}\right) u_{s,x}^* +$$

$$+ 2\left(L_s^* M G(\cdot - s)x + L_{sT}^* P_0 G(T-s)x\right) = 0$$

Sia allora:

$$L \overset{\text{def}}{=} L_s^* M L_s + N + L_{sT}^* P_0 L_{sT}$$

è autoaggiunto e coercivo da $L^2([s,T],U)$ in sé, con una costante $\delta > 0$. Quindi è iniettivo e dato che:

$$L^2([s,T],U) = \overline{\mathrm{Im}\, L} \oplus \ker L \, ,$$

si ha che $\overline{\mathrm{Im}\, L} = L^2([s,T],U)$ (ossia è immagine è densa).

La coercività, però, implica che $\mathrm{Im}\, L = \overline{\mathrm{Im}\, L}$ è chiuso.

Dunque L è bigettivo, e:

$$\| L^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2([s,T],U))} \leq \frac{1}{\delta}$$

Ne segue che:

$$u^*_{s,x} = -L^{-1}\left(L^*_s M G(\cdot - s)x + L^*_{sT} P_0 G(T-s)x \right),$$

da cui si ha che u^*_s è lineare.

A questo punto, $y^*_{s,x}$ è lineare rispetto a x e $u^*_{s,x}$, da cui y^*_s è lineare. Infine, essendo $p^*_{s,x}$ lineare rispetto a $y^*_{s,x}$, p^*_s è lineare.

La continuità di y^*_s e p^*_s segue dalle proprietà del semigruppo $(G(t))_{t\geq 0}$, il quale è fortemente continuo; a questo punto, la continuità di u^*_s segue da quella di p^*_s.

Resta ora da dimostrare la stima. Si ha:

- $$\| u^*_{s,x} \|_{L^2([s,T],U)} \leq \frac{1}{\delta}\left[\| L^*_s \| \|M\| \| G(\cdot - s) \|_{L^2([s,T],X)} + \right.$$
$$\left. + \| L^*_{sT} \| \|P_0\| \| G(T-s) \|_X \right] \leq C_T \| x \|_X ;$$
- $$\| y^*_{s,x}(t) \|_X \leq M e^{\omega T} \| x \|_X + \| L_s \| \| u^*_{s,x} \|_{L^2([s,T],U)} \leq D_T \| x \|_X ;$$
- Dato che:
$$p^*_{s,x}(t) = G(T-t)^* P_0 y^*_{s,x}(T) + \int_t^T G(T-\tau)^* M y^*_{s,x}(\tau)\, d\tau ,$$
si ha:
$$\| p^*_{s,x}(t) \|_X \leq M e^{\omega T} \| P_0 \| \| y^*_{s,x}(T) \|_X + \int_t^T M e^{\omega(T-\tau)} \| M \| \| y^*_{s,x}(\tau) \|_X \, d\tau \leq E_T \| x \|_X ;$$
- Per concludere:
$$\| u^*_{s,x}(t) \|_U = \| N^{-1} B^* p^*_{s,x}(t) \|_U \leq F_T \| x \|_X$$

Di qui, sommando le varie costanti, si giunge alla tesi, c.v.d.

COROLLARIO

Per ogni $s \in [0,T[$ esiste $Q(s) \in L(X)$, autoaggiunto e semidefinito positivo, tale che:

$$V(s,x) = \langle Q(s)x, x \rangle_X ,$$

per ogni $x \in X$.

Dim.

Dalla proposizione precedente si ha che la funzione:

$$V(s,x) = J_s(x, u^*_{s,x})$$

è quadratica rispetto a $y^*_{s,x}$ e $u^*_{s,x}$ (le quali sono lineari rispetto a x). Allora $V(s,x)$ è quadratica in x, e non negativa: da qui segue la tesi, c.v.d.

L'operatore $Q(s) \in L(X)$ appena determinato è detto OPERATORE DI RICCATI: nel prossimo paragrafo analizzeremo alcune delle proprietà che ha.

PRINCIPIO DI OTTIMALITÀ DI BELLMAN ED EQUAZIONE DI BELLMAN

PROPOSIZIONE (PRINCIPIO DI OTTIMALITÀ DI BELLMAN)

Siano $x \in X$ e $s \in [0,T[$. Allora:

$$u^*_{0,x}|_{[s,T]} = u^*_{s,y^*_{0,x}(s)},$$

nel senso che $u^*_{0,x}$ è ottimale anche in $[s,T]$ per ogni $s \in [0,T[$, a patto di cambiare il valore iniziale, ponendolo uguale a $y^*_{0,x}(s)$.

Dim.

Sia $\hat{u} \in L^2([s,T],U)$, e sia $\hat{y}$ lo stato corrispondente al valore $y^*_{0,x}(s)$:

$$\begin{cases} \hat{y}'(t) = A\hat{y}(t) + B\hat{u}(t), & t \in [s,T] \\ \hat{y}(s) = y^*_{0,x}(s) \end{cases},$$

Poniamo:

$$\bar{u}(t) = \begin{cases} u^*_{0,x}(t), & t \in [0,s] \\ \hat{u}(t), & t \in]s,T] \end{cases}, \quad \bar{y}(t) = \begin{cases} y^*_{0,x}(t), & t \in [0,s] \\ \hat{y}(t), & t \in]s,T] \end{cases}$$

È chiaro che:

$$\begin{cases} \bar{y}'(t) = A\bar{y}(t) + B\bar{u}(t), & t \in [0,T] \\ \bar{y}(0) = x \end{cases}$$

Allora:

$$J(x, u^*_{0,x}) \leq J(x, \bar{u})$$

Sottraendo ad ambo i membri la quantità:

$$\int_0^s \left[\langle M y^*_{0,x}(t), y^*_{0,x}(t) \rangle_X + \langle N u^*_{0,x}(t), u^*_{0,x}(t) \rangle_U \right] dt$$

si ottiene allora:

$$J_s(y^*_{0,x}(s), u^*_{0,x}|_{[s,T]}) \leq J_s(y^*_{0,x}(s), \hat{u}),$$

da cui si ha la tesi, c.v.d.

COROLLARIO

Per $0 \leq s \leq t \leq T$ e $x \in X$, vale:

$$V(s,x) = \int_s^T \left[\langle M y^*_{s,x}(\tau), y^*_{s,x}(\tau) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(\tau), u^*_{s,x}(\tau) \rangle_U \right] d\tau + V(t, y^*_{s,x}(t))$$

Dim.

Riscriviamo la relazione seguente:

$$V(s,x) = J_s(x, u^*_{s,x})$$

spezzando l'integrale all'istante $t \in [s,T[$. Si ha allora:

$$V(s,x) = \int_s^T \left[\langle R y^*_{s,x}(\tau), y^*_{s,x}(\tau) \rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(\tau), u^*_{s,x}(\tau) \rangle_U \right] d\tau + \\ + J_t\left(y^*_{s,x}(t), u^*_{s,x}|_{[t,T]}\right)$$

A questo punto, usando il principio di ottimalità di Bellman:

$$J_t\left(y^*_{s,x}(t), u^*_{s,x}|_{[t,T]}\right) = V(t, y^*_{s,x}(t)),$$

e da qui si ha la tesi, c.v.d.

COROLLARIO (EQUAZIONE DI BELLMAN)

Per $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$, vale:

$$V(s,x) = \inf \left\{ \int_s^T \left[\langle R y(\tau), y(\tau) \rangle_X + \langle N u(\tau), u(\tau) \rangle_U \right] d\tau + V(t, y(t)) \right| \\ u \in L^2([s,T], U),\ y'(\tau) = A y(\tau) + B u(\tau) \text{ in } [s,T], \\ y(s) = x \Big\}$$

Dim.

Sia k il secondo membro. Dal corollario precedente si ha che $V(s,x) \ge k$.

Viceversa, sia $\hat{u} \in L^2([s,T], U)$, e sia $\hat{y}$ tale che:

$$\hat{y}'(\tau) = A\hat{y}(\tau) + B\hat{u}(\tau),$$

per $\tau \in [s,T]$, con $\hat{y}(s) = x$.

Poniamo poi, per $u \in L^2([t,T], U)$:

$$\bar{u}(\tau) = \begin{cases} \hat{u}(\tau), & \tau \in [s,t] \\ u(\tau), & \tau \in]t,T] \end{cases}, \quad \bar{y}(\tau) = \begin{cases} \hat{y}(\tau), & \tau \in [s,t] \\ y(\tau), & \tau \in]t,T] \end{cases},$$

con y tale che:

$$\begin{cases} y'(\tau) = A y(\tau) + B u(\tau), & \tau \in [t,T] \\ y(t) = \hat{y}(t) \end{cases}$$

Allora:

$$V(s,x) = \int_s^T \left[\langle M \bar{y}(\tau), \bar{y}(\tau) \rangle_X + \langle N \bar{u}(\tau), \bar{u}(\tau) \rangle_U \right] d\tau + \langle P_0 \bar{y}(T), \bar{y}(T) \rangle_X =$$

$$= \int_s^t \left[\langle M \hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_X + \langle N \hat{u}(\tau), \hat{u}(\tau) \rangle_U \right] d\tau +$$

$$+ \int_t^T \left[\langle M y(\tau), y(\tau) \rangle_X + \langle N u(\tau), u(\tau) \rangle_U \right] d\tau + \langle P_0 y(T), y(T) \rangle_X =$$

$$= \int_s^t \left[\langle M \hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_X + \langle N \hat{u}(\tau), \hat{u}(\tau) \rangle_U \right] d\tau +$$

$$+ J_t(\hat{y}(t), u)$$

Passando all'estremo inferiore si ottiene:

$$V(s,x) \le \int_s^t \left[\langle M \hat{y}(\tau), \hat{y}(\tau) \rangle_X + \langle N \hat{u}(\tau), \hat{u}(\tau) \rangle_U \right] d\tau + V(t, \hat{y}(t)),$$

e per l'arbitrarietà della coppia $(\hat{u}, \hat{y})$:

$$V(s,x) \le K, \quad \text{c.v.d.}$$

COROLLARIO

Per $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$, vale:

$$V(s,x) = \int_s^t \left[\langle M y^*_{0,x}(\tau), y^*_{0,x}(\tau) \rangle_X + \langle N u^*_{0,x}(\tau), u^*_{0,x}(\tau) \rangle_U \right] d\tau +$$

$$+ V(t, y^*_{0,x}(t))$$

Dim.

Per il principio di ottimalità di Bellman:

$$\begin{cases} u^*_{0,x}(\tau) = u^*_{s, y^*_{0,x}(s)}(\tau) \\ y^*_{0,x}(\tau) = y_{s, y^*_{0,x}(s)}(\tau) \end{cases},$$

per ogni $\tau \in [s,T]$. A questo punto basta applicare il primo corollario di questo paragrafo, con $y^*_{0,x}(s)$ al posto di x, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Se $0 \le s \le t < T$ e $x \in X$, allora vale:

$$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1} B^* Q(t) y^*_{s,x}(t)$$

Dim.

La coppia ottimale del problema:

$$\min\left\{\int_s^t \left[\langle M y(\tau), y(\tau)\rangle_X + \langle N u(\tau), u(\tau)\rangle_U\right] d\tau + \right.$$
$$\left. + \langle Q(t) y(t), y(t)\rangle_X \right\},$$

con:

$$\begin{cases} y' = Ay + Bu \quad , [s,t] \\ y(s) = x \end{cases},$$

soddisfa (per il Teorema di Pontryagin):

$$\begin{cases} p'(\tau) = -A^* p(\tau) - M y(\tau) \quad , \tau \in [s,t] \\ p(t) = Q(t) y(t) \\ u(\tau) = -N^{-1} B^* p(\tau) \quad , \tau \in [s,t] \end{cases}$$

Tale coppia è proprio $(u^*_{s,x}, y^*_{s,x})$. Infatti, per i corollari precedenti (i primi due):

$$\int_s^t \left[\langle M y^*_{s,x}(\tau), y^*_{s,x}(\tau)\rangle_X + \langle N u^*_{s,x}(\tau), u^*_{s,x}(\tau)\rangle_U\right] d\tau +$$
$$+ V(t, y^*_{s,x}(t)) = V(s,x) \leq$$
$$\leq \int_s^t \left[\langle M y(\tau), y(\tau)\rangle_X + \langle N u(\tau), u(\tau)\rangle_U\right] + V(t, y(t)),$$

per ogni $u \in L^2([s,t], U)$, con:

$$y' = Ay + Bu$$

in $[s,t]$ e $y(s) = x$. Ne segue che:

$$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1} B^* Q(t) y^*_{s,x}(t), \quad \text{c.v.d.}$$

COROLLARIO (EQUAZIONE CLOSED-LOOP)

Se $0 \leq s < T$ e $x \in X$, allora:

$$\begin{cases} (y^*_{s,x})'(t) = A y^*_{s,x}(t) - B N^{-1} B^* Q(t) y^*_{s,x}(t), t \in [s,T] \\ y^*_{s,x}(s) = x \end{cases}$$

Dim.

La dimostrazione è immediata, visto che:

$$u^*_{s,x}(t) = -N^{-1} B^* Q(t) y^*_{s,x}(t),$$

per $t \in [s,T]$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Ad ogni istante $t \in [s,T]$, allora, per ogni $x \in X$ i valori del controllo e dello stato ottimale sono determinati solo da x e t. L'equazione, però, coinvolge $\mathcal{A}(t)$, ossia $V(t,x)$, che nella sua definizione coinvolge i valori futuri del controllo.

Per l'osservazione appena fatta, è importante mostrare che $V(t,x)$ è soluzione di un'equazione differenziale ordinaria, risolvibile direttamente: vedremo che questa sarà un'EQUAZIONE DI RICCATI.

EQUAZIONE DI RICCATI

Inoltre si può dimostrare il seguente risultato.

LEMMA

Se $x \in D(A)$, $V_x : [0,T] \to \mathbb{R}$ è Lipschitziana. In particolare, esiste $L_T' \geq 0$ tale che:

$$|V(t,x) - V(\tau,x)| \leq L_T' \left[\|x\|_X + \|Ax\|_X \right] \|x\|_X |t-\tau|,$$

per ogni $t, \tau \in [0,T]$.

Dim.

Dalla relazione:

$$J_t(y^*_{0,x}(t), u^*_{t,x}) = V(t,x)$$

e da alcune stime viste in passato, esiste $C_T > 0$ tale che:

$$\forall x \in X : \quad \langle Q(t)x, x \rangle_X = V(t,x) \leq C_T \|x\|_X^2$$

L'operatore (autoaggiunto e semidefinito positivo) $Q(t)$ verifica allora:

$$\|Q(t)\|_{L(X)} \leq C_T$$

Dunque:

$$|V(t,x) - V(t,z)| = |\langle Q(t)x, x\rangle_X - \langle Q(t)z, z\rangle_X| \leq$$

$$\leq |\langle Q(t)(x-z), x\rangle_X + \langle Q(t)z, x-z\rangle_X| \leq$$

$$\leq C_T \left[\|x\|_X + \|z\|_X \right] \|x-z\|_X,$$

per $t \in [0,T]$ e $x, z \in X$.

Se allora $t, \tau \in [0,T]$ (supponiamo $t > \tau$), per il primo corollario della scorsa paragrafo si ha:

$$V(\tau,x) - V(t,x) = \int_\tau^t \left[\langle M y^*_{\tau,x}(s), y^*_{\tau,x}(s) \rangle + \right.$$

$$\left. + \langle N u^*_{\tau,x}(s), u^*_{\tau,x}(s) \rangle \right] ds + V(t, y^*_{\tau,x}(t)) - V(t,x),$$

da cui:

$$|V(\tau,x) - V(t,x)| \leq L_T^2 \|M\| \|x\|_X^2 |t-\tau| +$$

$$+ L_T^2 \|N\| \|x\|_X^2 |t-\tau| + C_T \left[1 + L_T \right] \|x\|_X \|y^*_{\tau,x}(t) - x\|_X$$

Per concludere:

$$\| y^*_{\tau,x}(t) - x \|_X \le \| G(t-\tau)x - x \|_X + \| [L_T(u^*_{\tau,x})](t) \|_X \le$$

$$\le \left\| \int_0^{t-\tau} G(\sigma) A x \, d\sigma \right\|_X + \left\| \int_\tau^t G(t-\sigma) B u^*_{\tau,x}(\sigma) \, d\sigma \right\|_X \le$$

$$\le \left[M e^{\omega T} \| Ax \|_X + M e^{\omega T} \| B \| L_T \| x \|_X \right] |t-\tau|$$

Da qui si ottiene allora la tesi, definendo L_T in modo opportuno, c.v.d.

PROPOSIZIONE (EQUAZIONE DI RICCATI)

Se $x \in D(A)$, allora $V_x : [0,T] \to \mathbb{R}$ data da:

$$V_x(t) = V(t,x)$$

è derivabile quasi ovunque in $[0,T]$. Inoltre per $x, y \in D(A)$ vale:

$$\frac{d}{dt} \langle Q(t)x, y \rangle_X + \langle Q(t)x, Ay \rangle_X + \langle Ax, Q(t)y \rangle_X +$$

$$- \langle N^{-1} B^* Q(t) x, B^* Q(t) y \rangle_U + \langle Mx, y \rangle_X = 0,$$

per quasi ogni $t \in [0,T]$.

Dim.

La derivabilità quasi ovunque di V_x in $t \in [0,T]$ per $x \in D(A)$ segue subito dalla Lipschitzianità, provata nel lemma precedente.

Per il principio di ottimalità di Bellman, $u^*_{\tau,x}$ è ottimale anche in $[t,T]$, rispetto allo stato iniziale $y^*_{\tau,x}(t)$: per il primo corollario dello scorso paragrafo, allora (con le dovute sostituzioni) si ha:

$$\langle Q(t) y^*_{\tau,x}(t), y^*_{\tau,x}(t) \rangle_X = V(t, y^*_{\tau,x}(t)) =$$

$$= \int_t^T \left[\langle M y^*_{\tau,x}(s), y^*_{\tau,x}(s) \rangle_X + \langle N u^*_{\tau,x}(s), u^*_{\tau,x}(s) \rangle_U \right] ds +$$

$$+ \langle P_0 y^*_{\tau,x}(T), y^*_{\tau,x}(T) \rangle_X$$

Se t è un punto di derivabilità di V_x, analizzando la formula appena scritta possiamo vedere che esiste

La seguente derivata:

$$\left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)\, y^*_{\tau,x}(t), y^*_{\tau,x}(t)\rangle_X\right]_{t=\tau} = -\langle Mx, x\rangle_X +$$

$$- \langle N\, u^*_{\tau,x}(\tau), u^*_{\tau,x}(\tau)\rangle_U$$

D'altra parte, al primo membro si ha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\langle Q(\tau+h)\, y^*_{\tau,x}(\tau+h), y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X - \langle Q(\tau)x, x\rangle_X\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\Big[\langle Q(\tau+h)\left[y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x\right], y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X +$$

$$+ \langle Q(\tau+h)x, y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x\rangle_X + \langle\left[Q(\tau+h) - Q(\tau)\right]x, x\rangle_X\Big]$$

Dato che:

$$\frac{1}{h}\left[y^*_{\tau,x}(\tau+h) - x\right] = \frac{1}{h}\left[G(h)x - x + \int_\tau^{\tau+h} G(\tau+h-s)\, B\, u^*_{\tau,x}(s)\, ds\right],$$

e dato che tale quantità converge a:

$$Ax + B\, u^*_{\tau,x}(\tau),$$

si ha:

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h}\left[\langle Q(\tau+h)\, y^*_{\tau,x}(\tau+h), y^*_{\tau,x}(\tau+h)\rangle_X - \langle Q(\tau)x, x\rangle_X\right] =$$

$$= \langle Q(\tau)\left[Ax + B u^*_{\tau,x}(\tau)\right], x\rangle_X + \langle Q(\tau)x, Ax + B u^*_{\tau,x}(\tau)\rangle_X +$$

$$+ \left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)x, x\rangle_X\right]_{t=\tau}$$

Ricordando ora che:

$$u^*_{\tau,x}(t) = -N^{-1}B^*\, Q(t)\, y^*_{\tau,x}(t),$$

si ha:

$$\left[\frac{d}{dt}\langle Q(t)x, x\rangle_X\right]_{t=\tau} + \langle Q(\tau)x, Ax\rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x\rangle_X +$$

$$- 2\langle N^{-1}B^*\, Q(\tau)x, B^*\, Q(\tau)x\rangle_U = -\langle Mx, x\rangle_X +$$

$$- \langle N^{-1}B^*\, Q(\tau)x, B^*\, Q(\tau)x\rangle_U$$

Ne segue che, per quasi ogni $\tau \in [0,T]$ e per ogni $x \in D(A)$:

$$\left[\frac{d}{d\tau}\langle Q(\tau)x, x\rangle\right] + \langle Q(\tau)x, Ax\rangle_X + \langle Ax, Q(\tau)x\rangle_X +$$

$$- \langle N^{-1}B^*\, Q(\tau)x, B^*\, Q(\tau)x\rangle_U + \langle Mx, x\rangle_X = 0$$

A questo punto, usando la formula di polarizzazione, si ottiene la tesi (con conti che non riportiamo), c.v.d.

OSSERVAZIONE

Formalmente, l'operatore $\mathcal{A}$ risolve il seguente problema di Cauchy "retrogrado":

$$\begin{cases} \dot{\Sigma} = -A^* \Sigma - \Sigma A + \Sigma B N^{-1} B^* \Sigma - M \\ \Sigma(T) = P_0 \end{cases}$$

Se ora definiamo:

$$\mathcal{A}\Sigma \overset{\text{def}}{=} A^* \Sigma + \Sigma A ,$$

allora $\mathcal{A}$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $(H(t))_{t\geq 0}$ in $\Sigma(X)$, ove:

$$\Sigma(X) \overset{\text{def}}{=} \{ \Sigma \in L(X) \mid \Sigma = \Sigma^* \},$$

e vale:

$$H(t)\Sigma = G(t)^* \Sigma G(t),$$

per $t \geq 0$.

Il suo dominio, infine, è:

$$D(\mathcal{A}) = \{ \Sigma \in \Sigma(X) \mid |\langle \Sigma x, Ay \rangle_X + \langle Ax, \Sigma y \rangle_X| \leq C_\Sigma \|x\|_X \|y\|_X \quad \forall\, x, y \in D(A) \}$$

OSSERVAZIONE

C'è un metodo euristico per dedurre la forma dell'equazione di Riccati: mediamola. Se (u^*, y^*) è la coppia ottimale in $[0,T]$, cerchiamo $\Sigma(t)$ tale che:

$$p^*(t) = \Sigma(t) y^*(t)$$

Sostituendo nell'equazione di p^*, si ha:

$$\dot{\Sigma} y^* + \Sigma (y^*)' = -A\Sigma y^* - M y^* ,$$

e ricordando l'equazione di y^*:

$$\dot{\Sigma} y^* + \Sigma A y^* + \Sigma B u^* = -A\Sigma y^* - M y^*$$

Infine, dato che:

$$u^* = -N^{-1} B^* p^* ,$$

si ha:

$$\dot{\Sigma} y^* + \Sigma A y^* + A^* \Sigma y^* - \Sigma B N^{-1} B^* \Sigma y^* + M y^* = 0 ,$$

da cui si ottiene l'equazione, per arbitrarietà di

y^*:

$$Q' + QA + A^*Q - QBN^{-1}B^*Q + M = 0$$

OSSERVAZIONE

Osserviamo che, se $P(t) = Q(T-t)$, allora $P(t)$ risolve per quasi ogni $t \in [0,T]$ e per ogni $x, y \in D(A)$:

$$\left[\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X\right] - \langle P(t)x, Ay\rangle_X - \langle Ax, P(t)y\rangle_X +$$

$$+ \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U - \langle Mx, y\rangle_X = 0$$

Dall'osservazione appena fatta segue la proposizione seguente.

PROPOSIZIONE

Sia P la soluzione dell'equazione sopra scritta. Allora l'applicazione seguente:

$$\Pi : [0,T] \to \mathbb{R}$$
$$t \to \langle P(t)x, x\rangle_X$$

è crescente.

Dim.

Sia $0 \le \tau < t$. Prendo $P_0 = 0$, si ha:

$$J_\tau(x,u) \ge J_t(x,u),$$

per $u \in L^2([\tau,T],U)$.

Perciò, se u^* è ottimale rispetto a x in $[\tau,T]$, si ha:

$$\langle Q(\tau)x, x\rangle_X = V(\tau,x) = J_\tau(x,u^*) \ge J_t(x,u^*) =$$
$$= V(t,x) = \langle Q(t)x, x\rangle_X,$$

se $t \ge \tau$. Dunque:

$$\Pi' : [0,T] \to \mathbb{R}$$
$$t \to \langle Q(t)x, x\rangle_X$$

è decrescente, quindi con un piccolo cambio di variabile si ottiene che Π è crescente, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Se $P(t) = Q(T-t)$, allora $V(s,x) = \langle P(T-s)x, x\rangle_X$, e il controllo ottimale è $u^*_{s,x} = -N^{-1}B^*P(T-t)y^*(t)$.

UNICITÀ PER L'EQUAZIONE DI RICCATI

Cominciamo con un'osservazione importante, anche se colla Teorale.

OSSERVAZIONE

Sia $(H(t))_{t\geq 0}$ dato da:

$$H(t)\,\Phi = G(t)^*\,\Phi\,G(t)$$

L'equazione di Riccati:

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle P(t)x, Ay\rangle_X + \langle Ax, P(t)y\rangle_X +$$

$$- \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U + \langle Mx, y\rangle_X,$$

per ogni $x, y \in D(A)$, si scrive in forma debole nel modo che segue:

$$P(t)x = G(t)^*P_0\,G(t)x +$$

$$+\int_0^t G(t-s)^*\left[M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)\right]G(t-s)x\,ds,$$

per $x \in X$.

Definiamo ora:

$$C_s([0,T], \Sigma(X)) \overset{\text{def}}{=} \left\{\Phi : [0,T] \to \Sigma(X) \;\middle|\; \forall\, x \in X \quad \Phi_x : t \to \Phi(t)x \in C^0([0,T], X)\right\}$$

PROPOSIZIONE

Sia $P \in C_s([0,T], \Sigma(X))$. Sono fatti equivalenti:

- P è soluzione debole dell'equazione di Riccati;
- $\langle P(t)x, y\rangle_X$ è derivabile quasi ovunque in $[0,T]$, e verifica l'equazione di Riccati per ogni $x, y \in D(A)$.

Dim.

Se $x, y \in D(A)$ e P è soluzione debole, si può scrivere:

$$\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle P_0\,G(t)x, G(t)y\rangle_X +$$

$$+\int_0^t \left\langle \left[M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)\right]G(t-s)x, G(t-s)y\right\rangle_X ds,$$

e derivando si ottiene:

$$\frac{d}{dt}\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle P_0\, G(t)\, Ax, G(t)y\rangle_X + \langle P_0\, G(t)x, G(t)Ay\rangle_X +$$
$$+ \langle [M - P(t)BN^{-1}B^*P(t)]x, y\rangle_X +$$
$$+ \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]\, G(t-s)Ax, G(t-s)y\rangle_X\, ds +$$
$$+ \int_0^t \langle [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]\, G(t-s)x, G(t-s)Ay\rangle_X\, ds =$$
$$= \langle Ax, G(t)^* P_0\, G(t)y\rangle_X + \langle G(t)^* P_0\, G(t)x, Ay\rangle_X + \langle Mx, y\rangle_X +$$
$$- \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U +$$
$$+ \langle Ax, \int_0^t G(t-s)^* [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]\, G(t-s)y\, ds\rangle_X +$$
$$+ \langle \int_0^t G(t-s)^* [M - P(s)BN^{-1}B^*P(s)]\, G(t-s)x\, ds, Ay\rangle_X =$$
$$= \langle Ax, P(t)y\rangle_X + \langle P(t)x, Ay\rangle_X + \langle Mx, y\rangle_X +$$
$$- \langle N^{-1}B^*P(t)x, B^*P(t)y\rangle_U$$

Viceversa, se $P(t)$ risolve l'equazione differenziale, allora per $x, y \in D(A)$ si ha:

$$\frac{d}{ds}\langle P(t-s)G(s)x, G(s)y\rangle = -\langle AG(s)x, P(t-s)G(s)y\rangle_X +$$
$$- \langle P(t-s)G(s)x, AG(s)y\rangle_X - \langle MG(s)x, G(s)y\rangle_X +$$
$$+ \langle N^{-1}B^*P(t-s)G(s)x, B^*P(t-s)G(s)y\rangle_U +$$
$$+ \langle P(t-s)AG(s)x, G(s)y\rangle_X + \langle P(t-s)G(s)x, AG(s)y\rangle_X =$$
$$= -\langle MG(s)x, G(s)y\rangle + \langle N^{-1}B^*P(t-s)G(s)x, B^*P(t-s)G(s)y\rangle$$

Integrando in $[0,t]$:

$$\langle P_0\, G(t)x, G(t)y\rangle_X - \langle P(t)x, y\rangle_X = -\int_0^t \langle MG(s)x, G(s)y\rangle_X\, ds +$$
$$+ \int_0^t \langle N^{-1}B^*P(t-s)\, G(s)x, B^*P(t-s)\, G(s)y\rangle_U\, ds,$$

da cui:

$$\langle P(t)x, y\rangle_X = \langle G(t)^* P_0\, G(t)x, y\rangle_X +$$
$$+ \int_0^t \langle G(s)^* [MP(t-s)BN^{-1}B^*P(t-s)]\, G(s)^* x, y\rangle_X\, ds$$

Per densità, ora, la stessa relazione vale per $x, y \in X$: per l'arbitrarietà di y, allora, si dice che P è soluzione debole dell'equazione di Riccati, c.v.d.

Vediamo ora un lemma fondamentale per il seguito.

LEMMA

Sia $\sigma \in [0,T]$, e sia $K \in C_s([0,T], L(X))$. Allora per ogni $x \in X$ l'equazione integrale seguente:

$$y(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)K(s)y(s)\,ds,$$

con $t \in [\sigma, T]$, ha un'unica soluzione in $C^0([\sigma,T], X)$. Tale soluzione ha dipendenza lineare da x, quindi:

$$y(t) = U(t,\sigma)x$$

L'operatore $U(t,\sigma)$, infine, verifica:

$$\begin{cases} U(t,\sigma)x = U(t,\tau)U(\tau,\sigma)x \quad \forall \tau \in [\sigma,t] \\ U(\sigma,\sigma)x = x \end{cases},$$

e inoltre:

$$\|U(t,\sigma)\|_{L(X)} \le 2He^{\alpha(t-\sigma)},$$

con H, α opportuni.

Infine, per ogni $g \in C^0([\sigma,T], X)$, la soluzione dell'equazione:

$$z(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)[K(s)y(s) + g(s)]\,ds$$

è la funzione:

$$z(t) = U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,s)g(s)\,ds,$$

per $t \in [\sigma, T]$.

Dim.

Innanzitutto notiamo che lo spazio $C_s([0,T], L(X))$ è di Banach, con la norma:

$$\|K\| = \sup_{t\in[0,T]} \|K(t)\|_{L(X)}$$

> OSSERVAZIONE
> Tale estremo superiore non può essere infinito, per il teorema di Banach - Steinhaus.

Introduciamo ora in $C^0([\sigma,T],X)$ una nuova norma. Per $\alpha>0$, poniamo:

$$\|g\|_\alpha \overset{\text{def}}{=} \sup_{t\in[\sigma,T]} e^{-\alpha(t-\sigma)} \|g(t)\|_X$$

OSSERVAZIONE

$\|\cdot\|_\alpha$ è equivalente a $\|\cdot\|_\infty$, infatti:

$$\forall\, g\in C^0([\sigma,T],X): \quad \|g\|_\alpha \le \|g\|_\infty \le e^{\alpha(T-\sigma)} \|g\|_\alpha$$

Sia ora:

$$[Ly](t) = \int_\sigma^t G(t-s)\,k(s)\,y(s)\,ds$$

Allora $L\in \mathcal{L}(C^0([\sigma,T],X))$, e per $t\in[\sigma,T]$ reale:

$$e^{-\alpha(t-\sigma)}\|[Ly](t)\|_X = \left\| \int_\sigma^t e^{-\alpha(t-s)} G(t-s)\,k(s)\, e^{-\alpha(s-\sigma)} y(s)\,ds \right\|_X \le$$

$$\le H \int_\sigma^t e^{-(\alpha-\omega)(t-s)} \|k\|\,\|y\|_\alpha\,ds \le \frac{H\|k\|}{\alpha-\omega}\|y\|_\alpha;$$

se $\alpha>\omega$. Se in più $\alpha > 2H\|k\|+\omega$ si ha:

$$\|[Ly]\|_\alpha \le \frac{1}{2}\|y\|_\alpha$$

Se allora:

$$[\mathcal{L}y](t) \overset{\text{def}}{=} G(t-\sigma)x + [Ly](t),$$

allora $\mathcal{L}: C^0([\sigma,T],X) \circlearrowleft$ è una contrazione, dato che:

$$\|[\mathcal{L}y]-[\mathcal{L}z]\|_\alpha = \|L(y-z)\|_\alpha \le \frac{1}{2}\|y-z\|_\alpha$$

Per il teorema delle contrazioni, allora, esiste ed è unica $y(t)$ tale che:

$$y(t) = [\mathcal{L}y](t) \quad \forall\, t\in[\sigma,T]$$

che la dipendenza di y da x sia lineare, è immediato.

Notiamo ora che:

$$\|y(t)\|_X = \|G(t-\sigma)x + [Ly](t)\|_X \le He^{\omega(t-\sigma)}\|x\|_X + \|[Ly](t)\|_X,$$

da cui:

$$e^{-\alpha(t-\sigma)}\|y(t)\|_X \le He^{-(\alpha-\omega)(t-\sigma)}\|x\|_X + e^{-\alpha(t-\sigma)}\|[Ly](t)\|_X,$$

da cui:

$$\|y\|_\alpha \le H\|x\|_X + \|[Ly]\|_\alpha \le H\|x\|_X + \frac{1}{2}\|y\|_\alpha$$

Dunque:

$$\|y\|_\alpha \leq 2H \|x\|_X ,$$

quindi:

$$\|y(t)\|_X \leq e^{\alpha(t-\sigma)} 2H \|x\|_X ,$$

per ogni $t \in [\sigma, T]$.

Ciò prova la stima per $\|U(t,\sigma)\|_{L(X)}$. Che $U(\sigma,\sigma) \equiv \mathbb{I}$ è immediato, mentre la proprietà di transizione:

$$U(t,\sigma) = U(t,\tau)U(\tau,\sigma)$$

è facile conseguenza dell'unicità.

Consideriamo infine la funzione:

$$w(t) \overset{\text{def}}{=} U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,s)\, g(s)\, ds$$

Partendo dalla seguente relazione:

$$U(t,\sigma)x = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)\, k(s)\, U(s,\sigma)x\, ds ,$$

si ricava:

$$U(t,\sigma)x + \int_\sigma^t U(t,s)\, g(s)\, ds =$$

$$= G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)\, k(s)\, U(s,\sigma)x\, ds +$$

$$+ \int_\sigma^T \left[G(t-s)\, g(s) + \int_s^t G(t-\lambda)\, k(\lambda)\, U(\lambda,s)\, g(s)\, d\lambda \right] ds =$$

$$= G(t-\sigma)x + \int_\sigma^T G(t-s)\, g(s)\, ds +$$

$$+ \int_\sigma^t G(t-s)\, k(s)\, U(s,\sigma)x\, ds + \int_\sigma^t G(t-\lambda)\, k(\lambda) \int_\sigma^s U(\lambda,s)\, g(s)\, ds\, d\lambda ,$$

per il Teorema di Fubini - Tonelli. Continuando si ha:

$$G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)\, g(s)\, ds +$$

$$+ \int_\sigma^t G(t-\lambda)\, k(\lambda) \left[U(\lambda,\sigma)x + \int_\sigma^\lambda U(\lambda,s)\, g(s)\, ds \right] d\lambda$$

Dunque w risolve:

$$z(t) = G(t-\sigma)x + \int_\sigma^t G(t-s)\left[g(s) + k(s) \quad (s) \right] ds$$

Per concludere, tale soluzione è unica. Se infatti z_1, z_2 sono soluzioni, allora $y \overset{\text{def}}{=} z_1 - z_2$ è soluzione di:

$$y(t) = \int_\sigma^t G(t-s)\, k(s)\, y(s)\, ds ,$$

ossia $y(t) = U(t,s)\,0 = 0$.

La dimostrazione è ora completa, c.v.d.

Vediamo ora la proposizione chiave per l'unicità della soluzione dell'equazione differenziale di Riccati.

PROPOSIZIONE

Sia $R : [0,T] \to \Sigma(X)$ una soluzione dell'equazione differenziale di Riccati, con $R(T) = P_0$. Allora, per ogni $x \in X$, e per ogni $u \in L^2([s,T],U)$ (x e y è lo stato corrispondente, con valore iniziale $y(s) = x$), si ha:

$$\langle R(s)x, x\rangle_X = J_s(x,u) - \int_s^T \| V[u(t) + N^{-1}B^* R(t) y(t)] \|_U^2 \, dt ,$$

ove $V^2 = VV^t = N$.

Dim.

Supponiamo che $u \in C^1([s,T],U)$. Allora $y \in C^1([s,T],X)$, e si ha:

$$\frac{d}{dt}\langle R(t)y(t), y(t)\rangle_X = \frac{d}{dt}\langle R(t)z, z\rangle_X\Big|_{z=y(t)} + \langle y'(t), R(t)y(t)\rangle_X +$$

$$+ \langle R(t)y(t), y'(t)\rangle_X = -\langle R(t)y(t), Ay(t)\rangle_X + \langle Ay(t), R(t)y(t)\rangle_X +$$

$$+ \langle N^{-1}B^*R(t)y(t), B^*R(t)y(t)\rangle_U - \langle My(t), y(t)\rangle_X +$$

$$+ \langle Ay(t), R(t)y(t)\rangle_X + \langle Bu(t), R(t)y(t)\rangle_X +$$

$$+ \langle R(t)y(t), Ay(t)\rangle_X + \langle R(t)y(t), Bu(t)\rangle_X =$$

$$= -\|Wy(t)\|_X^2 + \|VB^*R(t)y(t)\|_U^2 + \langle u(t), B^*R(t)y(t)\rangle_U +$$

$$+ \langle B^*R(t)y(t), u(t)\rangle_U ,$$

dove $W^2 = WW^t = M$. A questo punto, aggiungendo e sottraendo la quantità $\|Vu(t)\|_U^2$:

$$-\|Wy(t)\|_X^2 - \|Vu(t)\|_U^2 + \|V[u(t) + N^{-1}B^*R(t)y(t)]\|_U^2$$

Integrando su $[s,T]$ si ottiene la tesi:

$$\langle P_0 y(t), y(t)\rangle_X + \int_s^T [\langle My(t), y(t)\rangle_X + \langle Nu(t), u(t)\rangle_U] dt +$$

$$-\int_s^T \| V\left[u(t) + N^{-1} B^* R(t) y(t)\right] \|^2_{U} dt = \langle R(s) x, x \rangle_X$$

Concludiamo qui, per ora, la dimostrazione, rimandando alla fine del paragrafo l'estensione al caso di $u \in L^2([s,T], U)$, c.v.d.

COROLLARIO

Sia $R : [0,T] \to \Sigma(X)$ una soluzione in $[0,T]$ dell'equazione di Riccati. Allora $R(t) \equiv Q(t)$, dove Q è tale che:

$$\forall x \in X, \forall s \in [0,T[: \langle Q(s) x, x \rangle_X = V(s,x)$$

Dim.

Fissato $s \in [0,T[$, per la proposizione precedente si ha:

$$\forall u \in L^2([s,T], U) : \langle R(s) x, x \rangle_X \leq J_s(x,u)$$

Scegliendo la soluzione $\bar{y}(t)$ dell'equazione:

$$\bar{y}(t) = G(t-s) x + \int_s^t G(t-\lambda) B N^{-1} B^* R(\lambda) \bar{y}(\lambda) d\lambda,$$

e:

$$\bar{u}(t) = -N^{-1} B^* R(t) \bar{y}(t),$$

si ha:

$$\langle R(s) x, x \rangle_X = J_s(x, \bar{u}) \leq J_s(x,u),$$

per ogni $u \in L^2([s,T], U)$.

Allora $\bar{u}(t)$ è il controllo ottimale:

$$\bar{u}(t) = u^*_{s,x}(t) \quad \forall t \in [s,T]$$

da ciò segue che:

$$\langle R(s) x, x \rangle_X = V(s,x) = \langle Q(s) x, x \rangle_X \quad \forall s \in [0,T[,$$

ossia:

$$R(s) = Q(s) \quad \forall s \in [0,T],$$

visto che $R(T) = Q(T) = P_0$, c.v.d.

COROLLARIO

Per ogni $P_0 \in \Sigma(X)$ semidefinito positivo, esiste un'unica soluzione P dell'equazione differenziale di Riccati in avanti. Inoltre per ogni $t \geq 0$ $P(t)$ è semidefinito positivo. Infine, per ogni $0 \leq t \leq t'$, si ha $P_0 \leq P(t) \leq P(t')$,

nel senso che per ogni $x \in X$:

$$\langle P_0 x, x \rangle_X \leq \langle P(t) x, x \rangle_X \leq P(t') x, x \rangle_X$$

Dim.

PREMESSA

L'equazione di Riccati è:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \langle P(t) x, x \rangle_X = \langle P(t) x, A y \rangle_X + \langle A x, P(t) y \rangle_X + \\ \quad - \langle N^{-1} B^* P(t) x, B^* P(t) y \rangle_U + \langle H x, y \rangle_X, \quad x, y \in D(A) \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

Per ogni $T > 0$ esiste ed è unico $Q_T \in \Sigma(X)$ semidefinito positivo tale che:

$$\langle Q_T x, x \rangle_X = V(t, x)$$

(la funzione valore del funzionale J_T). Inoltre Q_T risolve univocamente l'equazione di Riccati "retrograda".

Ne segue allora che $P(t) = Q_T(T-t)$ è l'unica soluzione in $[0, T]$ dell'equazione scritta nella premessa.

Se ora $T_1 > T$, allora $P_1(t) = Q_{T_1}(T_1 - t)$ è ancora soluzione dell'equazione scritta sopra, questa volta in $[0, T_1]$, con lo stesso dato iniziale: $P_1(0) = P(0) = P_0$.
Per unicità, allora, $P_1 \equiv P$ in $[0, T]$: per arbitrarietà di T_1, allora, $P(\cdot)$ è definita in $[0, +\infty[$, e in tale intervallo è soluzione dell'equazione scritta sopra.

Siano ora $T > t' \geq t \geq 0$, e sia $u \in L^2([s, T], U)$.
Si ha allora:

$$J_t(x, u) \geq J_{t'}(x, u) \geq J_{t'}(x, u^*_{t', x}) = V(t', x),$$

Quindi, per arbitrarietà di u:

$$V(t, x) \geq V(t', x)$$

Pertanto:

$$\langle P(T-t) x, x \rangle = \langle Q_T(t) x, x \rangle_X = V(t, x) \geq$$
$$\geq V(t', x) = \langle Q(t') x, x \rangle_X = \langle P(T-t') x, x \rangle_X,$$

e da qui si ha, con un cambio di variabile, la tesi.
c.v.d.

OSSERVAZIONE

Vediamo ora come concludere la dimostrazione di una proposizione, la quale è rimasta incompleta.

Se $u \in L^2([S,T],U)$, sia $(u_m)_{m \in \mathbb{N}} \to u$ in $L^2([S,T],U)$, con $u_m \in C^1([S,T],U)$.

Allora $(y_m)_{m \in \mathbb{N}} \to \|\cdot\|_\infty y$, da cui l'uguaglianza della Tesi continua a valere al limite. La dimostrazione è ora completa.

TEORIA DEI CONTROLLI CON ORIZZONTE INFINITO

Consideriamo ora il problema lineare-quadratico con orizzonte infinito. Il funzionale da minimizzare è ora:

$$J(x,u) = \int_0^{+\infty} \left[\langle My(t), y(t) \rangle_X + \langle Nu(t), u(t) \rangle_U \right] dt ,$$

con $x \in X$ e $u \in \mathcal{U}_x$, la classe dei CONTROLLI AMMISSIBILI:

$$\mathcal{U}_x \overset{\text{def}}{=} \left\{ u \in L^2([0,+\infty[, U) \;\middle|\; J(x,u) < +\infty \right\}$$

Nel funzionale, infine, la funzione y è soluzione debole del problema seguente:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t) \\ y(0) = x \end{cases}$$

Ricordiamo che, nelle formule precedenti, $M \in \Sigma(X)$ è semidefinito positivo, mentre $N \in \Sigma(U)$ è coercivo (con costante di coercività $\delta > 0$); infine, $B \in L(U,X)$, mentre:

$$A : D(A) \subseteq X \to X$$

è lineare, e genera un semigruppo fortemente continuo $(G(t))_{t \geq 0}$.

> OSSERVAZIONE
> Si noti che se $(G(t))_{t \geq 0} \in \mathcal{G}(H,\omega)$ con $\omega > 0$, allora $u \notin \mathcal{U}_x$, perché $\sqrt{M}\, y(t) = \sqrt{M}\, G(t)x \notin L^2([0,+\infty[, X)$, in generale.

TEOREMA
Se $\mathcal{U}_x \neq \emptyset$, allora esiste ed è unico il controllo ottimale u^* per J.

Dim.
Il funzionale J assume valori finiti, ed è coercivo e strettamente convesso (quest'ultima proprietà garantisce l'unicità, una volta dimostrata l'esistenza).

Se $(u_m)_{m \in \mathbb{N}^+} \subseteq \mathcal{U}_x$ è una successione minimizzante, per coercività di J essa è limitata in $L^2([0,+\infty[, U)$, perciò ammette una sottosuccessione $(u_{m_k})_{k \in \mathbb{N}^+} \to u^*$.

di conseguenza, se $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+}$ è la successione degli stati:

$$\forall m\in\mathbb{N}^+ : y_{m_k}(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)B u_{m_k}(s)\,ds,$$

allora $(y_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \to y^*$ puntualmente, ove:

$$y^*(t) = G(t)x + \int_0^t G(t-s)B u^*(s)\,ds$$

A questo punto, usando la semicontinuità inferiore di J, si ha:

$$J(x,u^*) \le \liminf_{k\to+\infty} J(x,u_{m_k}) = \inf_{u\in\mathcal{U}_x} J(x,u),$$

da cui si ha che u^* è un controllo ottimale, c.v.d.

TEOREMA

Supponiamo che per ogni $x\in X$ esista $u^*_x\in\mathcal{U}_x$ (controllo ottimale). Allora esiste $\bar{P}\in\Sigma(X)$ semidefinito positivo tale che:

- $\bar{P}$ risolve l'EQUAZIONE ALGEBRICA DI RICCATI:

$$\langle Ax, \bar{P}y\rangle_X + \langle \bar{P}x, Ay\rangle_X - \langle N^{-1}B^*\bar{P}x, B^*\bar{P}y\rangle_X + \langle Qx,y\rangle_X = 0,$$

per $x,y\in D(A)$;

- $\bar{P}$ è la "soluzione minimale", nel senso che per ogni $\tilde{P}\in\Sigma(X)$ semidefinito positivo che risolve l'equazione algebrica di Riccati si ha, per ogni $x\in X$:

$$\langle \bar{P}x, x\rangle_X \le \langle \tilde{P}x, x\rangle_X$$

- la coppia ottimale (u^*, y^*) per J, con $y^*(0)=x$, verifica:

$$u^*(t) = -N^{-1}B^*\bar{P}y^*(t) \quad \forall t\ge 0,$$

e:

$$\langle \bar{P}x, x\rangle_X = J(x,u^*)$$

per ogni $x\in X$.

Dim.

Sia P la soluzione dell'equazione di Riccati incontrata (scritta nello scorso paragrafo, nella premessa alla dimostrazione di un corollario).

Come sappiamo dal precedente corollario, P esiste, è unica, e in più è differenziabile:

$$\alpha_x : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$$
$$t \to \langle P(t)x, x \rangle_X ,$$

per ogni $x \in X$, è crescente. Essendo $P_0 = 0$, si ha:

$$\langle P(t)x, x \rangle_X = J_{T-t}(x, u^*_{T-t,x}) \leq J(x, u^*_x) < +\infty ,$$

per ogni $t \geq 0$ (ove $T > t$ è arbitrario).

Dunque esiste il seguente limite:

$$\lim_{t \to +\infty} \langle P(t)x, x \rangle_X \in \mathbb{R} ,$$

per ogni $x \in X$.

Usando la formula di polarizzazione, per ogni $x, y \in X$ esiste:

$$\lim_{t \to +\infty} \langle P(t)x, y \rangle \in \mathbb{R}$$

Allora esiste $\bar{P} \in \Sigma(X)$ semidefinito positivo tale che: $\forall x \in X$: $(P(t)x)_{t \geq 0} \to \bar{P}x$. Dato che per $x \in X$:

$$\lim_{t \to +\infty} \langle [\bar{P} - P(t)]x, x \rangle_X = \lim_{t \to +\infty} \| \sqrt{\bar{P} - P(t)}\, x \|^2_X = 0 ,$$

e tenuto conto che:

$$\| \sqrt{\bar{P} - P(t)} \|_{L(X)} \leq \sqrt{\| \bar{P} \|_{L(X)}} < +\infty ,$$

si ottiene:

$$\| [\bar{P} - P(t)]x \|_{L(X)} \leq \sqrt{\| \bar{P} \|_{L(X)}}\, \| \sqrt{\bar{P} - P(t)}\, x \|_X ,$$

si ha:

$$\lim_{t \to +\infty} \| [\bar{P} - P(t)]x \| = 0 ,$$

ovvia:

$$\lim_{t \to +\infty} \langle [\bar{P} - P(t)]x , [\bar{P} - P(t)]x \rangle_X = 0$$

Segue allora che:
$\forall x \in X$: $(P(t)x)_{t \geq 0} \to \bar{P}x$,
fortemente e non solo debolmente.

Passiamo ora al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione di Riccati. Il secondo membro tende a:

$$\langle Ax, \bar{P}y \rangle_X + \langle \bar{P}x, Ay \rangle_X - \langle N^{-1} B^* \bar{P}x, \bar{P}y \rangle + \langle Mx, y \rangle_X ,$$

per $x, y \in D(A)$.

Da ciò si deduce che anche il primo membro (che è una derivata) ha limite. Tale limite non può che essere 0, in quanto se fosse ad esempio positivo avremmo:

$$\lim_{t \to +\infty} \langle P(t)x, y \rangle_X = +\infty,$$

ma poco fa abbiamo dimostrato esattamente il contrario. Se fosse negativo, si giungerebbe ad un assurdo in maniera del tutto analoga.

Dunque $\bar{P}$ risolve l'equazione algebrica di Riccati.

Proviamo ora la minimalità di $\bar{P}$. Se $\tilde{P}$ è un'altra soluzione dell'equazione, allora $\tilde{P}$ è soluzione stazionaria dell'equazione differenziale di Riccati, con dato iniziale $\tilde{P}_0$ semidefinito positivo.

Consideriamo ora i seguenti funzionali:

- $J^t(x,u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \left[\langle My(s), y(s) \rangle_X + \langle Nu(s), u(s) \rangle_U \right] ds$;
- $\tilde{J}^t(x,u) \overset{\text{def}}{=} \int_0^t \left[\langle My(s), y(s) \rangle_X + \langle Nu(s), u(s) \rangle_U \right] ds + \langle \tilde{P} y(t), y(t) \rangle_X$.

Chiaramente $J^t(x,u) \leq \tilde{J}^t(x,u)$ per ogni (x,u) ammissibile. Inoltre:

- $\inf J^t = \langle Q_t(0)x, x \rangle_X = \langle P(t)x, x \rangle_X$;
- $\inf \tilde{J}^t = \langle \tilde{P}x, x \rangle_X$.

Quindi:

$$\forall u \in L^2([0,t], U): \quad \langle P(t)x, x \rangle_X = \inf J^t \leq \tilde{J}^t(x,u),$$

da cui:

$$\forall t \geq 0: \quad \langle P(t)x, x \rangle_X \leq \langle \tilde{P}x, x \rangle_X,$$

e per $t \to +\infty$:

$$\langle \bar{P}x, x \rangle \leq \langle \tilde{P}x, x \rangle$$

Proviamo infine le relazioni per u^* e $J(x,u^*)$.
Sia (u^*, y^*) una coppia ottimale per J. Allora, per $t \geq 0$:

$$\langle P(t)x, x \rangle_X = \inf J^t \leq J^t(x,u^*) \leq J(x,u^*),$$

e per $t \to +\infty$:

$$\langle \bar{P}x, x \rangle_X \leq J(x, u^*)$$

Viceversa, sia $t > 0$, e sia (u_t, y_t) la coppia ottimale per J^t. Se $T < t$, si ha:

$$\langle P(t)x, x \rangle_X = \int_0^t \left[\langle M y_t(s), y_t(s) \rangle_X + \langle N u_t(s), u_t(s) \rangle_U \right] ds \geq$$
$$\geq \int_0^T \left[\langle M y_t(s), y_t(s) \rangle_X + \langle N u_t(s), u_t(s) \rangle_U \right] ds$$

A questo punto serve un lemma, che enunciamo e dimostriamo di seguito.

LEMMA
Sia $\bar{y}$ la soluzione di:

$$\bar{y}(t) = G(t)x - \int_0^t G(t-s) B N^{-1} B^* \bar{P} \bar{y}(s) ds, \quad t \geq 0,$$

e:

$$\bar{u}(t) = -N^{-1} B^* \bar{P} \bar{y}(t), \quad t \geq 0$$

Allora, per ogni $T > 0$, si ha (per $t \to +\infty$):

$$(y_t)_{t \geq 0} \to \text{ u.i.l.s. } \bar{y}, \quad (u_t)_{t \geq 0} \to \text{ u.i.l.s. } \bar{u},$$

in $C^0([0,T], X)$.

Dim.
La coppia (u_t, y_t) è ottimale per J^t. Per un corollario precedente, vale:

$$u_t(\tau) = -N^{-1} B^* Q(\tau) y_t(\tau) =$$
$$= -N^{-1} B^* P(t-\tau) y_t(\tau),$$

e:

$$y_t(\tau) = G(\tau)x - \int_0^\tau G(\tau - s) B N^{-1} B P(t-s) y_t(s) ds,$$

per $\tau \in [0, t]$.

Fissato allora $T < t$, in $[0,T]$ la funzione $z_t \overset{\text{def}}{=} y_t - \bar{y}$ risolve la seguente equazione integrale:

$$z_t(\tau) = -\int_0^\tau G(\tau - s) B N^{-1} B P(t-s) z_t(s) ds -$$
$$- \int_0^\tau G(\tau - s) B N^{-1} B \left[P(t-s) - \bar{P} \right] \bar{y}(s) ds$$

Non diamo i dettagli di ciò.

Possiamo allora scrivere:

$$z_t(\tau) = U_t(\tau,0)\,\underline{0} - \int_0^\tau U_t(\tau,s)\,B N^{-1} B^* \left[P(t-s) - \bar{P}\right] \bar{y}(s)\,ds,$$

con $U_t(\tau,s) \in L(X)$ per ogni $0 \le s \le \tau \le T$. Inoltre:

$$\| U_t(\tau,s) \|_{L(X)} \le 2H e^{\alpha(\tau-s)},$$

per ogni $0 \le s \le \tau$, con:

$$\alpha > 2H \|B\|^2 \|\bar{P}\| \|N^{-1}\| + \omega$$

Allora si ha:

$$|z_t(\tau)| \le \int_0^T 2He^{\alpha T} \|B\|^2 \|N^{-1}\| \left\| \left[P(t-s) - \bar{P}\right] \bar{y}(s) \right\|_X ds$$

L'integrando converge a 0 puntualmente, e si può dimostrare che è dominato da una funzione integrabile non dipendente da t. Per il Teorema di convergenza dominata, allora, $(z_t)_{t\ge 0} \to_{\|\cdot\|_\infty} 0$ in $[0,T]$, ovvia $(y_t)_{t\ge 0} \to_{\|\cdot\|_\infty} \bar{y}$ in $C^0([0,T],X)$.

Provate la convergenza seguente:

$$(u_t)_{t\ge 0} \to_{\|\cdot\|_\infty} \bar{u},$$

in $C^0([0,T],X)$, richiede maggiori dettagli: concludiamo qui la dimostrazione, allora, c.v.d.

Concludiamo ora la dimostrazione. Tenendo conto dei lemmi, per $t \to +\infty$ si ottiene, per ogni $\varepsilon > 0$:

$$\langle \bar{P}x, x\rangle_X \ge \int_0^T \left[\langle M\bar{y}(\tau), \bar{y}(\tau)\rangle_X + \langle N\bar{u}(\tau), \bar{u}(\tau)\rangle_U \right] d\tau,$$

e per $T \to +\infty$:

$$\langle \bar{P}x, x\rangle_X \ge J(x,\bar{u})$$

Allora $\bar{u} \in \mathcal{U}_x$, e in più:

$$\langle \bar{P}x, x\rangle_X \ge J(x,\bar{u}) \ge J(x,u^*)$$

Allora vale l'uguaglianza, quindi per unicità:

$$u^* \equiv \bar{u}, \quad y^* \equiv \bar{y},$$

da cui si ottiene:

$$u^* = -N^{-1} B^* \bar{P} y^*, \quad \text{c.v.d.}$$

ESPONENZIALE STABILIZZABILITÀ ED ESPONENZIALE RILEVABILITÀ

Siamo ora interessati a capire sotto quali condizioni l'equazione algebrica di Riccati ha soluzione unica. Anticipiamo subito che l'unicità si ha sotto particolari ipotesi legate alla STABILIZZABILITÀ della coppia (A,B).

Diremo che la coppia (A,B) è ESPONENZIALMENTE STABILIZZABILE se esiste $K \in L(X,U)$ (detto FEEDBACK STABILIZZANTE) tale che l'operatore A_K, definito in $D(A_K) = D(A)$ dalla relazione:

$$A_K y = Ay + BKy ,$$

sia il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $(G_K(t))_{t\geq 0}$ esponenzialmente stabile.

Sia ora Y un altro spazio di Hilbert separabile, e sia:

$$C \in L(X,Y)$$

La coppia (A,C) si dice ESPONENZIALMENTE RILEVABILE se (A^*, C^*) è una coppia esponenzialmente stabilizzabile. In tal caso, esiste un controllo feedback $L \in L(X,Y)$ tale che $A^* + C^*L$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo esponenzialmente stabile (lo stesso vale allora per $A + L^*C$).

TEOREMA

Se (A,B) è esponenzialmente stabilizzabile, allora l'equazione algebrica di Riccati ha almeno una soluzione $P \in \Sigma(X)$ semidefinita positiva.

Dim.

Dall'ipotesi segue che $U_x \neq \emptyset$ per ogni $x \in X$. Basta infatti risolvere l'equazione:

$$\begin{cases} y' = (A+BK)y \\ y(0) = x \end{cases} ,$$

che ha come soluzione:

$$y(t) = G_K(t)x ,$$

con $(G_K(t))_{t\geq 0}$ generato da $(A+BK)$. Per concludere, poi, basta scegliere:

$$u = -Ky$$

A questo punto si conclude usando il teorema visto nello scorso paragrafo, c.v.d.

TEOREMA

Se $R = C^*C$, con (A,C) esponenzialmente rilevabile, allora (A,B) è esponenzialmente stabilizzabile, e infine l'equazione algebrica di Riccati ha esattamente una soluzione $P \in \Sigma(X)$ semidefinita positiva. Il feedback è dato da:

$$K = -N^{-1}B^*P,$$

quindi si è un unico controllo ottimale.

Dim.

Siano P, P_1 soluzioni dell'equazione algebrica di Riccati, con $R = C^*C$; poniamo $K = -N^{-1}B^*P$. Allora si ha, per $x, y \in D(A)$:

$$\begin{aligned}
&\langle (A+BK)x, Py\rangle_X + \langle Px, (A+BK)y\rangle_X + \langle NKx, Ky\rangle_U + \\
&+ \langle Cx, Cy\rangle_Y = \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X + \langle BKx, Py\rangle_X + \\
&+ \langle Px, BKy\rangle_X + \langle NKx, Ky\rangle_U + \langle Cx, Cy\rangle_Y = \\
&= \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X - 2\langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \\
&\quad + \langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \langle C^*Cx, y\rangle_X = \\
&= \langle Ax, Py\rangle_X + \langle Px, Ay\rangle_X - \langle N^{-1}B^*Px, B^*Py\rangle_X + \\
&\quad + \langle C^*Cx, y\rangle_X = 0
\end{aligned}$$

Enunciamo ora un lemma (che non dimostriamo, essendo la dimostrazione contosa e tecnica, e povera di idee).

LEMMA

Se $R \in \Sigma(X)$ è semidefinito positivo, e $K \in L(X)$, e essi soddisfano la seguente equazione:

$$\langle (A+BK)x, Ry\rangle_X + \langle Rx, (A+BK)x\rangle_X + \langle NKx, Kx\rangle_U + \langle Cx, Cy\rangle_Y = 0$$

per ogni $x \in D(A)$, allora se (A,C) è esponenzialmente

rilevabile, allora (A,B) è esponenzialmente stabilizzabile con feedback K. Se inoltre $P \in \Sigma(X)$ è semidefinito positivo, ed è soluzione dell'equazione algebrica di Riccati, con $H = C^*C$, allora $P \leq R$, nel senso che per ogni $x \in X$:

$$\langle Px, x \rangle_X \leq \langle Rx, x \rangle_X$$

Da quanto già dimostrato e dal lemma, si deduce l'esistenza di una soluzione.

Applicando ora il lemma con R, P dati da P e P_1, si deduce $P_1 \leq P$. Applicando ora il lemma scambiando P e P_1, e usando R, P dati da P_1 e P, si deduce $P_1 \geq P$. Allora $P_1 = P$, da cui si è enunciato, c.v.d.

TEORIA DEI CONTROLLI NEL CASO LINEARE CONVESSO

Siano X e U spazi di Hilbert separabili, e sia $T>0$.

Il nostro obiettivo, ora, è quello di minimizzare, per $s \in [0,T[$ e $x \in X$:

$$J_s(x,u) = \int_s^T \left[g(y(t)) + h(u(t)) \right] dt + \Phi(y(T)),$$

con $u \in L^2([s,T],U)$, e y soluzione del sistema:

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bu(t), & t \in [s,T] \\ y(s) = x \end{cases},$$

dove:

- $B \in L(U,X)$;
- $A : D(A) \subseteq X \to X$ è il generatore infinitesimale di un semigruppo fortemente continuo $(G(t))_{t \geq 0}$;
- $g : X \to [0, +\infty[$ è convessa e di classe C^1;
- $\Phi : X \to [0, +\infty[$ è convessa e di classe C^1;
- $h : U \to [0, +\infty[$ è strettamente convessa, di classe C^1, e tale che esistono $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$ tale che:
  $\forall u \in U : h(u) \geq a \|u\|_U^2 + b$

> OSSERVAZIONE
> La funzione $y(\cdot)$, data $u(\cdot)$, sarà dunque:
> $$y(t) = G(t-s)x + \int_s^T G(t-\sigma) B u(\sigma) \, d\sigma,$$
> per $t \in [s,T]$.

Non è detto che $J_s(x,u)$ sia ovunque finito: ad esempio $h \circ u \notin L^1([s,T],[0,+\infty[)$, allora $J_s(x,u) = +\infty$. Se però $u \equiv 0$, allora:

$$J_s(x,0) = \int_s^T \left[g(G(t-s)x) + h(0) \right] dt + \Phi(G(T-s)x),$$

dato che in tal caso:

$$y(t) = G(t-s)x$$

L'integrale è allora finito, perché $h(0)$ e $\Phi(G(T-s)x)$, e $g(G(t-s)x)$ è continua da $[s,T]$ in $[0,+\infty[$, dunque è limi-

Tale.

PROPOSIZIONE

Nelle ipotesi precedenti, esiste un unico controllo ottimale $u^*_{s,x}$:
$\forall\, u \in L^2([s,T],U) : J_s(x, u^*_{s,x}) \leq J_s(x,u)$

Dim.

Sia:

$$D = \inf_{u \in L^2([s,T],U)} J_s(x,u),$$

e sia $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \subset L^2([s,T],U)$ tale che:

$$\lim_{m\to+\infty} J_s(x,u_m) = D$$

La successione $(u_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ è allora una successione minimizzante.

Dato che:

$$e\,\|u_m\|^2_{L^2([s,T],U)} \leq \int_s^T h(u_m(t))\,dt + b(T-s),$$

$(u_m)_{m\in\mathbb{N}^+}$ è limitata in $L^2([s,T],U)$, quindi esiste una sottosuccessione $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \to \bar{u}$ in $L^2([s,T],U)$.

Ora, la funzione:

$$H : L^2([s,T],U) \to \mathbb{R}$$

$$H(u) \overset{\text{def}}{=} \int_s^T h(u(t))\,dt$$

è convessa e inferiormente semicontinua. Infatti la convessità è immediata, mentre per la semicontinuità inferiore notiamo che se $(v_m)_{m\in\mathbb{N}^+} \to \bar{v}$ in $L^2([s,T],U)$, allora esiste $(v_{m_k})_{k\in\mathbb{N}^+} \to \bar{v}$ in $L^2([s,T],U)$ puntualmente quasi ovunque in $[s,T]$, e tale che:

$$\lim_{k\to+\infty} H(v_{m_k}) = \liminf_{m\to+\infty} H(v_m)$$

Dato che h è continua $(h(v_{m_k}))_{k\in\mathbb{N}^+} \to h(\bar{v})$ puntualmente quasi ovunque in $[s,T]$. Allora, usando il lemma di Fatou:

$$H(\bar{v}) \leq \liminf_{k\to+\infty} H(v_{m_k}) = \lim_{k\to+\infty} H(v_{m_k}) = \liminf_{m\to+\infty} H(v_m)$$

La funzione H è allora DEBOLMENTE SEMICONTINUA INFERIORMENTE (ciò si dimostra usando il Teorema di Helly-Banach: non diamo i dettagli).

Quindi:

$$H(\bar{u}) \leq \liminf_{k \to +\infty} H(u_{m_k})$$

Se poi per ogni $k \in \mathbb{N}$ y_{m_k} è lo stato corrispondente a u_{m_k}, e $\bar{y}$ è lo stato corrispondente a $\bar{u}$, allora si ha che:

$$\forall\, t \in [s,T] : (y_{m_k}(t))_{k \in \mathbb{N}} \longrightarrow \bar{y}(t) \text{ in } X$$

Dato che ϕ e g sono convesse e continue su X (ossia, in particolare, debolmente semicontinue inferiormente su X), allora:

$$g(\bar{y}(t)) \leq \liminf_{k \to +\infty} g(y_{m_k}(t)) \quad \forall\, t \in [s,T],$$

e:

$$\phi(\bar{y}(T)) \leq \liminf_{k \to +\infty} \phi(y_{m_k}(T))$$

Di conseguenza, usando il Lemma di Fatou:

$$J_s(x,\bar{u}) = \int_s^T \left[g(\bar{y}(t)) + h(\bar{u}(t)) \right] dt + \phi(\bar{y}(T)) \leq$$

$$\leq \int_s^T \liminf_{k \to +\infty} g(y_{m_k}(t))\, dt + H(\bar{u}) + \liminf_{k \to +\infty} \phi(y_{m_k}(T)) \leq$$

$$\leq \liminf_{k \to +\infty} \int_s^T g(y_{m_k}(t))\, dt + \liminf_{k \to +\infty} H(u_{m_k}) + \liminf_{k \to +\infty} \phi(y_{m_k}(T)) \leq$$

$$\leq \liminf_{k \to +\infty} J(s, u_{m_k}) = \Delta,$$

da cui:

$$J_s(x,\bar{u}) = \Delta,$$

ossia $\bar{u}$ è un controllo ottimale.

Proviamo ora l'unicità: siano u_1, u_2 ottimali, con $u_1 \neq u_2$. Allora l'insieme:

$$E = \{ t \in [s,T] \mid u_1(t) \neq u_2(t) \}$$

ha misura strettamente positiva. Se allora $\lambda \in]0,1[$:

$$H((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2) = \int_E h((1-\lambda)u_1 + \lambda u_2)\, dt + \int_{E^c} h(u_1)\, dt <$$

$$< \int_E (1-\lambda) h(u_1) + \lambda h(u_2)\, dt + \int_{E^c} h(u_1)\, dt = (1-\lambda) H(u_1) + \lambda H(u_2)$$

λ allora $u_\lambda = (1-\lambda)\,u_1 + \lambda u_2$, allora:

$$J_S(x, u_\lambda) < J_S(x, u_1) = S,$$

e ciò è assurdo. Dunque il controllo ottimale è unico, c.v.d.

Il passo successivo è quello di cercare di caratterizzare la coppia ottimale per mezzo delle condizioni necessarie di Pontryagin. Nel prossimo paragrafo, quindi, richiameremo alcune nozioni sulle funzioni convesse che ci serviranno in futuro.

SOTTOGRADIENTI E SOTTODIFFERENZIALE

Sia X uno spazio normato, e sia:

$$f : X \to]-\infty, +\infty]$$

una funzione.

La funzione si dice DIFFERENZIABILE SECONDO GÂTEAUX, o G-DIFFERENZIABILE, in $x_0 \in X$ se esiste $A \in L(X,]-\infty, +\infty])$ tale che:

$$\lim_{t \to 0} \left\| \frac{1}{t} \left[f(x_0 + tv) - f(x_0) \right] - Av \right\| = 0$$

per ogni $v \in X$. In tale caso, si scrive $A = f'_G(x_0)$.

> OSSERVAZIONE
> Se f è differenziabile secondo Fréchet in x_0, allora lo è anche secondo Gâteaux: la nozione offerta data, allora, generalizza quella del più noto differenziabile secondo Fréchet.

PROPOSIZIONE
Se f è G-differenziabile, sono fatti equivalenti:

- f è convessa;
- $f(\xi) \geq f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_x \quad \forall x, \xi \in X$;
- f'_G è MONOTONO, ossia:

$$\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x \rangle_x \geq 0 \quad \forall x, \xi \in X.$$

Similmente, sono fatti equivalenti:

- f è strettamente convessa;
- $f(\xi) > f(x) + \langle f'_G(x), \xi - x \rangle_x \quad \forall x, \xi \in X$;
- f'_G è STRETTAMENTE MONOTONO, ossia:

$$\langle f'_G(\xi) - f'_G(x), \xi - x \rangle_x > 0 \quad \forall x, \xi \in X, \xi \neq x.$$

Dim.
Dimostriamo solo la prima parte della proposizione, dato che la seconda parte è identica alla prima.

Dimostriamo che la prima affermazione implica la seconda.

Se f è convessa, i suoi rapporti incrementali in ogni direzione sono crescenti. Quindi:

$$f(\xi) - f(x) \geq \lim_{t \to 0^+} \frac{f(x + t(\xi - x)) - f(x)}{t} = {}_{X^*}\langle f'_G(x), \xi - x \rangle_X$$

Proviamo ora che la seconda affermazione implica la terza. Se $\xi, x \in X$, per ipotesi:

$$\begin{cases} f(\xi) \geq f(x) + {}_{X^*}\langle f'_G(x), \xi - x \rangle_X \\ f(x) \geq f(\xi) - {}_{X^*}\langle f'_G(\xi), x - \xi \rangle_X \end{cases}$$

Sommando e semplificando, si ha:

$${}_{X^*}\langle f'_G(x) - f'_G(\xi), \xi - x \rangle_X \geq 0 ,$$

ossia la tesi.

Per concludere, proviamo che l'ultima affermazione implica la prima.

Siano $x, \xi \in X$. Posto:

$$\varphi(\lambda) \overset{\text{def}}{=} f((1-\lambda)x + \lambda\xi) ,$$

per $\lambda \in [0,1]$, vale:

$$\varphi'(\lambda) = {}_{X^*}\langle f'_G((1-\lambda)x + \lambda\xi), \xi - x \rangle_X ,$$

per ogni $\lambda \in [0,1]$.

Allora, per $0 \leq \lambda \leq \mu \leq 1$ si ha:

$$\varphi'(\mu) - \varphi'(\lambda) = {}_{X^*}\langle f'_G((1-\mu)x + \mu\xi) - f'_G((1-\lambda)x + \lambda\xi), \xi - x \rangle_X =$$

$$= \frac{1}{\mu - \lambda} {}_{X^*}\langle f'_G((1-\mu)x + \mu\xi) - f'_G((1-\lambda)x + \lambda\xi), [(1-\mu)x + \mu\xi] - [(1-\lambda)x + \lambda\xi] \rangle_X \geq 0$$

Allora φ è crescente, dunque φ è convessa. Dunque:

$$\varphi(\lambda) \leq (1-\lambda)\varphi(0) + \lambda\varphi(1) ,$$

da cui:

$$f((1-\lambda)x + \lambda\xi) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(\xi) ,$$

ossia la tesi, c.v.d.

Diciamo ora che $f: X \to]-\infty, +\infty]$ è sottodifferenziabile in $x_0 \in X$ se esiste $\psi: X \to \mathbb{R}$ affine, cioè della forma:

$$\psi(x) = \varphi(x) + b,$$

con $\varphi \in X^*$ e $b \in \mathbb{R}$, tale che:

- $f(x_0) = \psi(x_0)$;
- $f(x) \geq \psi(x) \quad \forall x \in X$.

La funzione f è sottodifferenziabile in $x_0 \in X$ se e solo se $f(x_0) \in \mathbb{R}$, ed esiste $\varphi \in X^*$ tale che:

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

Infatti, se $\psi(x) = \varphi(x) + b$ è la funzione affine che verifica la definizione, allora $f(x_0) = \psi(x_0)$, e in più:

$$f(x) \geq \psi(x) = \varphi(x - x_0) + \varphi(x_0) + b = \varphi(x - x_0) + \psi(x_0) = \varphi(x - x_0) + f(x_0),$$

per ogni $x \in X$.

Viceversa, la relazione implica la sottodifferenziabilità in x_0, con:

$$\psi(x) = \varphi(x) + b,$$

con $b = f(x_0) - \varphi(x_0)$.

Se f è sottodifferenziabile in x_0, ogni $\varphi \in X^*$ che verifica:

$$f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \quad \forall x \in X$$

è detto SOTTOGRADIENTE di f in x_0.

L'insieme dei sottogradienti di f in x_0 è detto SOTTO-DIFFERENZIALE di f in x_0:

$$\partial f(x_0) \overset{\text{def}}{=} \{ \varphi \in X^* \mid f(x) \geq f(x_0) + \varphi(x - x_0) \ \forall x \in X \}$$

OSSERVAZIONE

$\partial f(x_0)$ può essere vuoto, ma in ogni caso è un convesso di X^*, chiuso nella topologia debole* di X^*.

Se ad esempio $f(x) = \|x\|$ in X, allora:

$$\partial f(0) = \{ \varphi \in X^* \mid \|\varphi\|_{X^*} \leq 1 \}$$

Infatti, fissato ogni $x \in X$ deve valere:

$$\|x\|_X \geq {}_{X^*}\langle \varphi, x \rangle_X ,$$

da cui si ha subito:

$$\|\varphi\|_{X^*} \leq 1$$

PROPOSIZIONE

Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, e sia $x_0 \in X$ tale che $f(x_0) \in \mathbb{R}$. Allora:

- Se f è G-differenziabile in x_0, allora:
$$\partial f(x_0) = \{ f'_G(x_0) \};$$
- Se f è continua in x_0 e $\partial f(x_0) = \{\varphi_0\}$, allora f è G-differenziabile in x_0, con $f'_G(x_0) = \varphi_0$.

Dim.

La dimostrazione della seconda parte non è affatto banale, e sfrutta il Teorema di Hahn-Banach: ometteremo pertanto tale dimostrazione.

Per quanto riguarda la prima parte, se $\varphi \in \partial f(x_0)$ si ha:
$\forall\, t \in \mathbb{R}, \forall\, v \in X$: $f(x_0 + tv) \geq f(x_0) + t\, {}_{X^*}\langle \varphi, v \rangle_X$

Se $t \neq 0$, dividendo per t si ha:

$$\begin{cases} \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \geq {}_{X^*}\langle \varphi, v \rangle_X , & t > 0 \\ \dfrac{f(x_0 + tv) - f(x_0)}{t} \leq {}_{X^*}\langle \varphi, v \rangle_X , & t < 0 \end{cases}$$

Per $t \to 0$, allora:

$$\forall\, v \in X : {}_{X^*}\langle f'_G(x_0), v \rangle_X = {}_{X^*}\langle \varphi, v \rangle_X$$

Per concludere $f'_G(x_0) \in \partial f(x_0)$, in quanto:

$$f(x) - f(x_0) \geq \lim \frac{f(x_0 + t(x - x_0)) - f(x_0)}{t} = {}_{X^*}\langle f'_G(x_0), x - x_0 \rangle_X$$

per ogni $x \in X$, c.v.d.

PROPOSIZIONE

Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ convessa. Se $x_0 \in X$, allora sono fatti equivalenti:

- $f(x_0) = \min_{x \in X} f(x)$;
- $\underline{0} \in \partial f(x_0)$.

Dim.

L'equivalenza segue immediatamente dalla definizione di sottodifferenziale, c.v.d.

FUNZIONE POLARE E FUNZIONE BIPOLARE

Sia X uno spazio di Hilbert, e sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa. La CONIUGATA o POLARE di f è la funzione:

$$f^*(y) \overset{\text{def}}{=} \sup_{x \in X} \left\{ \langle y, x \rangle_X - f(x) \right\},$$

per $y \in X$.

OSSERVAZIONE
f^* è convessa e inferiormente semicontinua (dunque debolmente inferiormente semicontinua).

Per definizione, vale la disuguaglianza di Young:
$\forall x, y \in X : \quad \langle y, x \rangle_X \leq f(x) + f^*(y)$

Vediamo ora alcuni esempi:

- Se $f(x) = \frac{\|x\|^p}{p}$, con $p \in]1, +\infty[$, allora $f^*(y) = \frac{\|y\|^q}{q}$, con $q \in]1, +\infty[$ tale che:
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;$$
- Se $f(x) = \|x\|$, allora:
$$f^*(y) = \tilde{\mathbb{1}}_{[-1,1]^c}(y) = \begin{cases} 0, & \|y\| \leq 1 \\ +\infty, & \|y\| > 1 \end{cases};$$
- Se $f(x) = ax$, con $a \in \mathbb{R}$, allora:
$$f^*(y) = \tilde{\mathbb{1}}_{\{a\}^c}(y) = \begin{cases} 0, & y = a \\ +\infty, & y \neq a \end{cases};$$
- Se $f(x) = e^x$, allora:
$$f^*(y) = \begin{cases} +\infty & , \ y < 0 \\ 0 & , \ y = 0 \\ y(\ln y - 1) & , \ y > 0 \end{cases}.$$

Sia ora X uno spazio di Hilbert, e sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$. La BIPOLARE di f non è altro che la polare di f^*:

$$f^{**}(z) \overset{\text{def}}{=} \sup_{y \in X} \left\{ \langle z, y \rangle_X - f^*(y) \right\}$$

OSSERVAZIONE

Dalla disuguaglianza di Young segue che:

$\forall\, z \in X : \quad f^{**}(z) \leq f(z)$

TEOREMA (DI FENCHEL - MOREAU) (SOLO ENUNCIATO)

Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione propria, ossia tale che:

$\forall\, x \in X : \quad f(x) < +\infty$

Allora f è convessa se e solo se $f^{**} = f$ in X.

PROPOSIZIONE

Sia $f : X \to]-\infty, +\infty]$ una funzione convessa, propria, inferiormente semicontinua. Allora per ogni $u, y \in X$ vale:

$$y \in \partial f(u) \iff u \in \partial f^*(y) \iff \langle u, y \rangle = f(u) + f^*(y)$$

Dim.

Si ha:

$$y \in \partial f(u) \iff f(v) \geq f(u) + \langle y, v - u \rangle_X \quad \forall\, v \in X \iff$$

$$\iff \langle y, v \rangle_X - f(v) \leq \langle y, u \rangle_X - f(u) \quad \forall\, v \in X \iff$$

$$\iff f^*(y) = \langle y, u \rangle_X - f(u)$$

Ora, usando la disuguaglianza di Young:

$$f^*(y) = \langle y, u \rangle_X - f(u) \iff$$

$$\iff f^{**}(u) = f(u) - f^*(y) \iff$$

$$\iff \forall\, v \in X : \ \langle u, v \rangle_X - f^*(v) \leq \langle u, y \rangle_X - f^*(y) \iff$$

$$\iff f^*(v) \geq f^*(y) + \langle u, v - y \rangle_X \quad \forall\, v \in X \iff u \in \partial f^*(y),$$

da cui la Tesi, c.v.d.

RITORNO AL PROBLEMA DI MINIMO

Torniamo ora al nostro problema di minimo.

Per una soluzione ottima nel paragrafo precedente, nel punto di minimo $u^*_{s,x}$ si ha:

$$0 \in \partial_u J_s(x, u^*_{s,x}) ,$$

ove ∂_u indica il sottodifferenziale rispetto alla variabile u.

Per determinare $\partial_u J_s(x, u^*_{s,x})$, però, ci servono due lemmi.

LEMMA

Sia:

$$G(u) = \int_s^T g(y(t))\, dt + \phi(y(T)) ,$$

ove $u \in L^2([s,T], U)$, e:

$$y(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma) B u(\sigma)\, d\sigma$$

verrà indicata con $y(t,u)$. Allora G è G-differenziabile, con:

$$\langle G'_G(u), v \rangle_{L^2([s,T],U)} = \langle B^* p, v \rangle_{L^2([s,T],U)} ;$$

con:

$$p(t) = G(T-t)^* \phi'(y(T)) + \int_t^T G(\sigma - t)^* g'(y(\sigma))\, d\sigma ,$$

per $t \in [s,T]$.

Dim.

Dato che g e ϕ sono di classe C^1, G è differenziabile secondo Fréchet, dunque G-differenziabile: quindi $\partial G(u)$ contiene un solo elemento. È più facile identificare tale elemento con la nozione del sottodifferenziale, piuttosto che derivando G. Si ha infatti:

$$G(v) - G(u) = \lim_{t \to 0^+} \frac{G(u+tv) - G(u)}{t} =$$

$$= \int_s^T \langle g'(y(t,u)),\, y(t,v) - y(t,u) \rangle_X\, dt + \langle \phi'(y(T,u)),\, y(T,v) - y(T,u) \rangle_X =$$

$$= \int_s^T \Big\langle g'(y(t,u)),\, \int_s^t G(t-\tau) B [v(\tau) - u(\tau)]\, d\tau \Big\rangle_X\, dt +$$

$$+ \langle \phi'(y(T,u)), \int_s^T G(T-\tau)\, B\left[v(\tau) - u(\tau)\right] d\tau \rangle_X =$$

$$= \int_s^T \langle B^* \int_\tau^T G(t-\tau)^*\, g'(y(t,u))\, dt\,,\, v(\tau) - u(\tau) \rangle_U \, d\tau +$$

$$+ \langle B^* \int_s^T G(T-\tau)^*\, \phi'(y(T,u))\,,\, v(\tau) - u(\tau) \rangle_U \, d\tau =$$

$$= \int_s^T \langle B^* p(\tau), v(\tau) - u(\tau) \rangle_U \, d\tau\,,$$

da cui la Tesi, c.v.d.

LEMMA (SOLO ENUNCIATO)

Sia $H(u) = \int_s^T h(u(\tau))\, d\tau$, con $u \in L^2([s,T],U)$. Allora:

$$\partial H(u) = \begin{cases} \{h'(u)\}\,, & h(u) \in L^1([s,T]),\ h'(u) \in L^2([s,T],U) \\ \phi\,, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

COROLLARIO

Per ogni $x \in X$ e $s \in [0,T[$ si ha:

$$\partial_u J_s(x,u) = \begin{cases} \{h'(u) + B^* p\}\,, & h(u) \in L^1([s,T]),\ h'(u) \in L^2([s,T],U) \\ \phi\,, & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Dim.

Se $h'(u) \notin L^2([s,T],U)$, oppure $h(u) \notin L^1([s,T])$, allora $J_s = G + H$, con G G-differenziabile, e H non ~~sotto~~differenziabile. Allora:

$$\partial_u J_s(x,u) = \phi$$

Se invece $h(u) \in L^1([s,T])$ e $h'(u) \in L^2([s,T],U)$, allora:

$$B^* p \in \partial G(u)\,, \quad h'(u) \in \partial H(u)\,,$$

da cui:

$$B^* p + h'(u) \in \partial G(u) + \partial H(u) \subseteq \partial_u J_s(x,u)$$

In questo caso, però, G e H sono G-differenziabili, da cui si ha la Tesi:

$$\partial_u J_s(x,u) = \{h'(u) + B^* p\}\,, \text{ c.v.d.}$$

Da questi risultati deduciamo che il punto di minimo $u^*_{s,x}$ di $J_s(x,\cdot)$ soddisfa quanto segue:

$$\begin{cases} B^* p^*_{s,x} + h'(u^*_{s,x}) = 0 \\ (p^*_{s,x})'(t) = -A^* p^*_{s,x} - g'(y^*_{s,x}), \quad [s,T[\\ p^*_{s,x}(T) = \phi'(y^*_{s,x}(T)) \end{cases};$$

mentre la funzione valore:

$$V(s,x) \overset{\text{def}}{=} \inf \left\{ J_s(x,u) \;\middle|\; u \in L^2([s,T],U) \right\}$$

verifica:

$$V(s,x) = \int_s^T \left[g(y^*_{s,x}(t)) + h(u^*_{s,x}(t)) \right] dt + \phi(y^*_{s,x}(T))$$

Concludiamo con una proposizione che non dimostriamo, essendo la dimostrazione uguale a una già vista nel caso quadratico.

PROPOSIZIONE

Risulta, per $s \in [0,T[$ e $x \in X$:

- $u^*_{0,x}|_{[s,T]} = u^*_{s,x^*_{0,x}(s)}$;
- $y^*_{0,x}|_{[s,T]} = y^*_{s,y^*_{0,x}(s)}$;
- $p^*_{0,x}|_{[s,T]} = p^*_{s,y^*_{0,x}(s)}$;
- $V(s,x) = \int_s^t \left[g(y^*_{s,x}(\tau)) + h(u^*_{s,x}(\tau)) \right] d\tau + V(t, y^*_{s,x}(t)) \quad \forall t \in [s,T[$;
- $V(s,x) = \inf \left\{ \int_s^t \left[g(y(\sigma)) + h(u(\sigma)) \right] d\sigma + V(t, y(t)) \right.$

$$\left. u \in L^2([s,T],U),\ y' = Ay + Bu \text{ in } [s,T],\ y(s) = x \right\},$$

per ogni $t \in [s,T[$.

STIME SU v, $u^*_{0,x}$, $y^*_{0,x}$, $p^*_{0,x}$

Innanzitutto, osserviamo che g, ϕ, h sono Lipschitziane sui limitati. Per ogni $r>0$, in altre parole, esiste $M_r \geq 0$ tale che:

$$\forall x, y \in B_X(\underline{0}, r) : \|g(x) - g(y)\|_X + \|\phi(x) - \phi(y)\|_X \leq M_r \|x - y\|_X,$$

e:

$$\forall u, v \in B_U(\underline{0}, r) : \|h(u) - h(v)\|_U \leq M_r \|u - v\|_U$$

Per quanto riguarda $u^*_{0,x}$, osserviamo quanto segue.

Per ipotesi, $h \in C^1$ è strettamente convessa, con:

$$h(u) \geq a \|u\|^2_U + b$$

per $a > 0$ e $b \in \mathbb{R}$. Dunque, in particolare, h' è strettamente monotona. Allora $\partial h^*(z)$ ha un solo elemento per ogni $z \in U$. Infatti:

$$u_1, u_2 \in \partial h^*(z) \Leftrightarrow z \in \partial h(u_1) \cap \partial h(u_2) = \{h'(u_1)\} \cap \{h'(u_2)\},$$

e dato che h' è iniettiva, l'ultima intersezione è non vuota se e solo se $u_1 = u_2$. Quindi:

$$\partial h^*(z) = (h^*)'_G(z) \quad \forall z \in U$$

Allora, dalla condizione necessaria $B^* p + h'(u) = 0$, si ha:

$$-B^* p \in \partial h(u),$$

ossia:

$$u \in \partial h^*(-B^* p),$$

ossia:

$$u = (h^*)'_G(-B^* p)$$

Notiamo ora che:

$$h^*(y) = \sup_{u \in U} \{ \langle y, u \rangle_U - h(u) \} \leq \sup_{u \in U} \{ \langle y, u \rangle_U - a\|u\|^2_U - b \} = \frac{\|y\|^2}{4a} - b \quad \forall y \in U,$$

quindi h^*, essendo convessa, è limitata sui limitati di U. Lo stesso allora vale per $(h^*)'_G$ (omettiamo la dimostrazione di ciò).

Ciò premesso, si ha la seguente proposizione.

PROPOSIZIONE

Per ogni $r>0$ esiste $C_r>0$ tale che, se $\|x\|_X \le r$, allora:

- $V(s,x) \le C_r \quad \forall\, s \in [0,T[$;
- $\int_s^T \|u^*_{s,x}(t)\|^2_U \, dt \le C_r$;
- $\|y^*_{s,x}(t)\|_X \le C_r \quad \forall\, t \in [s,T]$;
- $\|p^*_{s,x}(t)\|_X \le C_r \quad \forall\, t \in [s,T]$;
- $\|u^*_{s,x}(t)\|_X \le C_r \quad \forall\, t \in [s,T]$.

Dim.

Sappiamo che:

$$V(s,x) \le J_s(x,0) = \int_s^T [g(G(t-s)x) + h(0)]\, dt + \phi(G(t-s)x),$$

quindi dato che g, ϕ, h sono limitate sui limitati, si ottiene la tesi (il primo punto).

Ora, dal primo punto:

$$C_r \ge V(s,x) \ge \int_s^T h(u^*_{s,x}(t))\, dt \ge$$

$$\ge a \int_s^T \|u_{s,x}(t)\|^2_U \, dt + b(T-s),$$

da cui si ottiene il secondo punto, eventualmente ridefinendo C_r.

Ora, per ogni $t \in [s,T]$:

$$\|y^*_{s,x}(t)\|_X \le He^{\omega T}\left[\|x\|_X + \int_s^t \|B\| \|u^*_{s,x}(\sigma)\|_U \, d\sigma\right] \le$$

$$\le He^{\omega T}\left[\|x\| + \|B\|\sqrt{T}\left(\int_s^T \|u^*_{s,x}(t)\|^2_U \, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right],$$

da cui si ha anche il terzo punto, eventualmente ridefinendo C_r.

Per il quarto punto, si ha:

$$p^*_{s,x}(t) = G(T-t)^* \phi'(y^*_{s,x}(T)) + \int_t^T G(\sigma-t)^* g'(y^*_{s,x}(\sigma))\, d\sigma,$$

e si sfrutta la continuità di g' e ϕ' per ottenere la tesi, eventualmente ridefinendo C_r.

Infine, dato che:

$$u^*_{s,x}(t) = (h^*)^{-1}_G(-B^* p^*_{s,x}(t)),$$

poiché $-B^* p_{s,x}(t)$ è a valori in un limitato (per il punto precedente), e poiché $(h^*)^{-1}_G$ è limitata sui limitati, si ottiene la tesi, eventualmente ridefinendo C_R, c.v.d.

Concludiamo il paragrafo con alcune proposizioni sulla regolarità lipschitziana della funzione valore V, che però non dimostriamo.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Per ogni $r>0$ esiste $C_{1,r}>0$ tale che, per $\|x\|_X \le r$ e $\|x'\|_X \le r$:

$$\forall s \in [0,T[: \; |V(s,x') - V(s,x)| \le C_{1,r}\|x - x'\|_X$$

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Per ogni $r>0$ esiste $C_{2,r}>0$ tale che, per $\|x\|_X \le r$:

- $|V(t,x) - V(s,x)| \le C_{2,r}[|t-s| + \|G(t-s)x - x\|_X]$ per ogni $t,s \in [0,T[$;
- $|V(t,x) - V(s,x)| \le C_{2,r}|t-s|$ per ogni $t,s \in [0,T[$, e $x \in D(A)$.

PROPOSIZIONE (SOLO ENUNCIATO)

Risulta, per ogni $s \in [0,T[$ e $x \in X$:

$$p^*_{0,x}(s) \in \partial_x V(s, y^*_{0,x}(s))$$

EQUAZIONE DI HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Come nel caso lineare quadratico, anche nel caso lineare convesso la funzione valore:

$$V(s,x) = \inf_{u \in L^2([s,T],U)} J_s(x,u)$$

risolve, sotto determinate ipotesi e in un senso opportuno, un'equazione differenziale, chiaramente più complicata di quella vista nel caso lineare quadratico.

PROPOSIZIONE

Supponiamo che $(h$ sia continua. Sia $x \in D(A)$, e supponiamo che per $s \in [0,T[$ esistano $V_s(s,x) \in \mathbb{R}$ e $V_x(s,x) \in X$. Allora vale:

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)) = 0$$

Dim.

Partiamo dalla seguente relazione, enunciata in teorema:

$$0 \le V(s,x) = \inf_{u \in L^2([s,T],U)} \left\{ \int_s^t [g(y(\sigma)) + h(u(\sigma))]\, d\sigma + V(t, y(t)) \right\},$$

per ogni $t \in [s,T[$, dove naturalmente:

$$y(\tau) = G(\tau - s)x + \int_s^\tau G(\tau - \sigma) B u(\sigma)\, d\sigma,$$

per $\tau \in [s,t]$.

Scegliamo allora un controllo costante:

$$u(\tau) \equiv \bar{u} \in U$$

Usando la formula di Taylor al primo ordine, si ottiene:

$$0 \le V(t, y(t)) - V(s,x) + \int_s^t [g(y(\tau)) + h(\bar{u})]\, d\tau =$$

$$= V_s(s,x)(t-s) + \langle V_x(s,x), y(t) - x \rangle_X +$$

$$+ \int_s^t [g(y(\tau)) - g(x)]\, d\tau + [g(x) + h(\bar{u})](t-s) +$$

$$+ o(|t-s|) + o(\|y(t) - x\|_X)$$

Per $t \searrow s^+$, allora:

$$\lim_{t \searrow s^+} \frac{y(t) - x}{t-s} = \lim_{t \searrow s^+} \frac{G(t-s)x}{t-s} + \frac{1}{t-s} \int_s^t G(t-\sigma) B \bar{u}\, d\sigma = Ax + B\bar{u}$$

dunque:

$$y(t) - x = (t-s)\left[Ax + B\bar{u}\right] + o(|t-s|),$$

osservando che $o(|t-s|) = o(\|y(t) - x\|)$. Inoltre:

$$\int_s^t \left[g(y(\tau)) + g(x)\right] d\tau = o(|t-s|)$$

Ne segue, per $t \to s^+$, che:

$$0 \leq \left[V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B\bar{u}\rangle_x + g(x) + h(\bar{u})\right](t-s) + o(|t-s|),$$

e dividendo per $(t-s)$:

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B\bar{u}\rangle_x + g(x) + h(\bar{u}) \geq 0,$$

per ogni $\bar{u} \in U$. Dunque:

$$0 \leq V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax\rangle_x + \inf_{\bar{u}\in U}\left\{\langle B^* V_x(s,x), \bar{u}\rangle_x + h(\bar{u})\right\} + g(x) = V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax\rangle_x + g(x) - h^*(-B^* V(s,x))$$

Per provare la disuguaglianza opposta, partiamo dalla relazione seguente, anch'essa enunciata in forma:

$$V(s,x) = \int_s^t \left[g(y^*_{s,x}(\tau)) + h(u^*_{s,x}(\tau))\right] d\tau + V(t, y^*_{s,x}(t)),$$

per $t \in [s, T[$, e dalla formula seguente:

$$u^*_{s,x}(t) = (h^*)'_G(-B^* p^*_{s,x}(t)), \quad t \in [s,T[$$

Ora, ricordiamo che per $u, z \in U$ vale:

$$u = h'_G(z) \iff z = (h^*)'_G(u),$$

da cui si deduce che $(h^*)'_G$ è continua, poiché:

$$(h^*)'_G = (h'_G)^{-1},$$

e questa funzione è continua per ipotesi. Inoltre $p^*_{s,x}$ è continua. Dalla continuità di $u^*_{s,x}$ si ottiene allora che:

$$\lim_{t\to s^+} \frac{y^*_{s,x}(t) - x}{t-s} = \lim_{t\to s^+} \frac{G(t-s)x - x}{t-s} + \frac{1}{t-s}\int_s^t G(t-\sigma) B u^*_{s,x}(\sigma)\, d\sigma =$$

$$= Ax + B u^*_{s,x}(s)$$

Possiamo allora scrivere, usando la formula di Taylor e la convessità di g e h:

$$0 = V(t, y^*_{s,x}(t)) - V(s,x) + \int_s^t \left[g(y^*_{s,x}(\sigma)) + h(u^*_{s,x}(\sigma)) \right] d\sigma =$$

$$= V_s(s,x)(t-s) + \langle V_x(s,x), y^*_{s,x}(t) - x \rangle_X +$$

$$+ \int_s^t \left[g(y^*_{s,x}(\sigma)) - g(x) + h(u^*_{s,x}(\sigma)) - h(u^*_{s,x}(s)) \right] d\sigma +$$

$$+ (t-s)\left[g(x) + h(u^*_{s,x}(\,)) \right] + o(|t-s|) \geq$$

$$\geq \left[V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax + B u^*_{s,x}(s) \rangle_X + g(x) + \right.$$

$$\left. + h(u^*_{s,x}(s)) \right](t-s) + \int_s^t \langle g'(x), y^*_{s,x}(\sigma) - x \rangle_X \, d\sigma +$$

$$+ \int_s^t \langle h'(u^*_{s,x}(s)), u^*_{s,x}(\sigma) - u^*_{s,x}(s) \rangle_U \, d\sigma + o(|t-s|)$$

Per $t \to s^+$, poi:

- $\int_s^t \langle g'(x), y^*_{s,x}(\tau) - x \rangle_X \, d\tau = o(|t-s|)$;
- $\int_s^t \langle h'(u^*_{s,x}(s)), u^*_{s,x}(\tau) - u^*_{s,x}(s) \rangle_U \, d\tau = o(|t-s|)$.

Concludiamo allora che:

$$0 \geq (t-s)\left[V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) + \right.$$

$$\left. + \langle B^* V_x(s,x), u^*_{s,x}(s) \rangle_U + h(u^*_{s,x}(s)) \right] +$$

$$+ o(|t-s|),$$

per $t \to s^+$ (dividendo per $(t-s)$):

$$0 \geq V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) + \langle B^* V_x(s,x), u^*_{s,x}(s) \rangle_U +$$

$$+ h(u^*_{s,x}(s)) \geq V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) +$$

$$+ \inf_{u \in U} \left\{ \langle B^* V_x(s,x), u \rangle_U + h(u) \right\} =$$

$$= V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)),$$

da cui la tesi, c.v.d.

L'EQUAZIONE DI HAMILTON - JACOBI - BELLMAN è dunque:

$$V_s(s,x) + \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) - h^*(-B^* V_x(s,x)) = 0,$$

per $x \in D(A)$ e $s \in [0,T]$.

OSSERVAZIONE

La dimostrazione precedente si applica a problemi molto più generali, in cui:

$$J_s(x,u) = \int_s^T L(t, y(t), u(t))\, dt + \phi(y(T)),$$

con:

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t), u(t)) \quad , t \in [s,T] \\ y(s) = x \end{cases}$$

In questo caso si definisce HAMILTONIANA del sistema:

$$H(t,x,p) = \inf_{u \in U} \left\{ \langle p, f(t,x,u) \rangle_X + L(t,x,u) \right\},$$

e l'equazione di Hamilton - Jacobi - Bellman diventa:

$$V_s(s,x) + H(s,x, V_x(s,x)) = 0 \quad , s \in [0,T[$$

In entrambe le situazioni (caso convesso e caso generale) si ha la seguente condizione finale:

$$V(T,x) = \phi(x)$$

È chiaro che, nel caso convesso, in cui:

$$f(t,y,u) = Ax + Bu$$

e:

$$L(t,y,u) = g(y) + h(u),$$

si ritrova:

$$H(s,x,V_x(s,x)) = \inf_{u \in U} \left\{ \langle V_x(s,x), Ax + Bu \rangle g(x) + h(u) \right\} =$$

$$= \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X + g(x) = h^*(-B^* V_x(s,x))$$

INTRODUZIONE ALLE SOLUZIONI DI VISCOSITÀ

In che senso, nel corso lineare cercheremo, la funzione valore risolve l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman? Nel senso delle SOLUZIONI DI VISCOSITÀ, che andiamo a introdurre nel caso generale di un'equazione della forma:

$$F(x, u, u') = 0,$$

con $x \in \Omega \subseteq X$ (aperto), dove:

$$F : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

è una funzione continua fissata.

Come vedremo, le soluzioni di viscosità sono associate alla DINAMICA F, più che all'equazione $F = 0$. Infatti una soluzione di viscosità per $F = 0$ può non essere soluzione di viscosità per $-F = 0$ (vedremo un esempio a riguardo).

Sia $u \in C^1(\Omega)$. Diciamo che u è SOLUZIONE DI VISCOSITÀ per l'equazione $F(x, v, v') = 0$ (nell'incognita v) se:

- Per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di massimo della funzione $u - \varphi$ (si intende localmente), allora:
$$F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \leq 0;$$
- Per ogni $x_0 \in \Omega$ e per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ tale che x_0 sia punto di minimo locale della funzione $u - \varphi$, si ha:
$$F(x_0, u(x_0), \varphi'(x_0)) \geq 0.$$

Se u soddisfa solo la prima proprietà, si parla di SUBSOLUZIONE DI VISCOSITÀ, mentre se u soddisfa solo la seconda proprietà si parla di SUPERSOLUZIONE DI VISCOSITÀ.

Osserviamo subito che ogni soluzione $u \in C^1(\Omega)$ di $F(x, u, u') = 0$ è anche soluzione di viscosità; viceversa, una soluzione di viscosità $u \in C^1(\Omega)$ è soluzione classica. In entrambi i , infatti, per ogni $\varphi \in C^1(\Omega)$ ammissibile si ha $\varphi'(x_0) = u'(x_0)$, e da qui si giunge facilmente

agli assetti.

La nozione di soluzione di viscosità, dunque, è una generalizzazione della definizione classica di soluzione.

UN ESEMPIO

Consideriamo il seguente funzionale:

$$F :]-1,1[\times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$F(x,u,u') = -|u'(x)| + 1$$

Verifichiamo che $\bar{u}(x) = |x|$ è soluzione di minorità dell'equazione:

$$-|u'(x)| + 1 = 0$$

Infatti, se $x \in]-1,1[- \{0\}$, allora esiste $u'(x)$, e $|u'(x)| = 1$, quindi è verificata entrambe le condizioni (in virtù di quanto detto nello scorso paragrafo).

Se invece $x = 0$, sia $\varphi \in C^1(]-1,1[)$ tale che $\bar{u} - \varphi$ abbia minimo locale in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:
$\forall |x| < \delta : |x| - \varphi(x) \leq -\varphi(0)$,
per cui:

- Per $x \in]0, \delta[$:
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \geq 1 ;$$
- Per $x \in]-\delta, 0[$:
$$\frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \leq -1 .$$

Allora deve valere $\varphi'(0) \geq 1$ e $\varphi'(0) \leq -1$, e ciò è assurdo.

La prima condizione è allora nuovamente verificata.

Sia ora $\varphi \in C^1(]-1,1[)$ tale che $\bar{u} - \varphi$ abbia minimo locale in 0. Allora esiste $\delta > 0$ tale che:
$\forall |x| < \delta : |x| - \varphi(x) \leq \varphi(0)$

In particolare, si ottiene, con passaggi analoghi a quelli già visti, che $|\varphi'(0)| \leq 1$, da cui:

$$-|\varphi'(x)| + 1 \geq 0 ,$$

da cui si ha che anche la seconda condizione è verificata.

Notiamo invece che $\bar{u}(x) = |x|$ non è soluzione di viscosità di:

$$|u'(x)| - 1 = 0$$

Infatti, se $\varphi \equiv 0$, allora $\bar{u} - \varphi = \bar{u}$ ha minimo locale in 0, ma:

$$|\varphi'(0)| - 1 = -1 < 0$$

RITORNO ALL'EQUAZIONE DI HAMILTON - JACOBI - BELLMAN

TEOREMA

Sia $(h'_6)^*$ continua. Allora la funzione valore $V(s,x)$ è soluzione di viscosità in $]0,T[\times D(A)$ dell'equazione di Hamilton - Jacobi - Bellman:

$$-V_s(s,x) - \langle V_x(s,x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^* V_x(s,x)) = 0$$

Dim.

Dobbiamo provare i seguenti due fatti:

- se (s,x) è punto di massimo locale per $V - \varphi$, con $\varphi \in C^1([0,T] \times D(A))$, allora:

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^* \varphi_x(s,x)) = 0;$$

- se (s,x) è punto di minimo locale per $V - \varphi$, con $\varphi \in C^1([0,T] \times D(A))$, allora:

$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax \rangle_X - g(x) + h^*(-B^* \varphi_x(s,x)) = 0.$$

Il calcolo è simile a quello di una dimostrazione vista in precedenza.

Se (s,x) è punto di massimo locale per $V - \varphi$, allora se $|t-s| + \|y-x\|_{D(A)} \leq \delta$, con $\delta > 0$ opportuno, si ha:

$$V(t,y) - \varphi(t,y) \leq V(s,x) - \varphi(s,x)$$

Fissiamo ora $\bar{u} \in U$. Sia quindi:

$$\bar{y}(\tau) \overset{\text{def}}{=} G(\tau - s)x + \int_s^\tau G(\tau - \sigma) B \bar{u} \, d\sigma,$$

per $\tau \in [s,T]$.

Vale allora il seguente lemma, che enunciamo solamente.

LEMMA (SOLO ENUNCIATO)

Vale $\bar{y}(\tau) \in D(A)$, per ogni $\tau \in [s,T]$, con:

$$A\bar{y}(\tau) = G(\tau - s)Ax + [G(\tau - s) - I]B\bar{u}$$

Come conseguenza:

$$\bar{y} \in C([s,T], D(A))$$

Se dunque $t \in [s, s+\eta]$ con $\eta > 0$ opportuno, allora:

$$\|\bar{y}(t) - x\|_{D(A)} < \delta$$

Per una proposizione precedente, allora:

$$\varphi(t, \bar{y}(t)) - \varphi(s,x) \geq V(t, \bar{y}(t)) - V(s,x) \geq$$
$$\geq - \int_s^t \left[g(y(\sigma)) + h(\bar{u}) \right] d\sigma$$

Dividendo per $(t-s)$, per $t \to s^+$ si ha:

$$\left[\frac{d}{dt} \varphi(t, \bar{y}(t)) \right]_{t=s} \leq - g(x) + h(\bar{u}),$$

ossia:

$$g(x) + h(\bar{u}) \geq - \varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), \bar{y}'(s) \rangle_x =$$
$$= - \varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax + B\bar{u} \rangle_x$$

Quindi, per ogni $\bar{u} \in U$:

$$- \varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax \rangle_x - g(x) \leq$$
$$\leq \langle \varphi_x(s,x), B\bar{u} \rangle_x + h(\bar{u}),$$

da cui:

$$- \varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax \rangle_x - g(x) + h^*(-B^* \varphi_x(s,x)) \leq 0$$

La prima condizione è dunque verificata.

Sia ora (s,x) un punto di minimo locale per $V - \varphi$, con $\varphi \in C^1([0,T] \times D(A))$. Allora, per $|t-s| + \|y - x\|_{D(A)} < \delta$, con $\delta > 0$ opportuno, vale:

$$V(t,y) - \varphi(t,y) \geq V(s,x) - \varphi(s,x)$$

Consideriamo allora il controllo ottimale $u^*_{s,x}$, che è limitato in $[s,T]$, e il corrispondente stato $y^*_{s,x}$.

> LEMMA (SOLO ENUNCIATO)
> Estendiamo su tutto $\mathbb{R}$ $u^*_{s,x}$, ponendo $u^*_{s,x}(\sigma) = 0$ per $\sigma \notin [s,T]$. Poniamo quindi per $\varepsilon > 0$:
>
> $$u_\varepsilon(t) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathbb{R}} \varphi_\varepsilon(t-\sigma) u^*_{s,x}(\sigma)\, d\sigma = (\varphi_\varepsilon * u^*_{s,x})(t),$$

dove φ_ε è un mollificatore scalare standard. Allora, per $\varepsilon \to 0^+$:

- per ogni $p \in [1, +\infty[$:
$$(u_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \to u^*_{s,x}$$
in $L^p([s,T], U)$;
- $\forall \varepsilon > 0$, $\forall t \in [s,T]$: $\|u_\varepsilon(t)\|_U \le \|u^*_{s,x}\|_U$;
- posto:
$$y_\varepsilon(t) = G(t-s)x + \int_s^t G(t-\sigma) B u_\varepsilon(\sigma)\, d\sigma,$$
per $t \in [s,T]$, vale:
$$(y_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \to \|\cdot\|_\infty\ y^*_{s,x},$$
uniformemente in $[s,T]$, e per ogni $t \in [s,T]$:
$$\int_s^t [g(y_\varepsilon(\sigma)) + h(u_\varepsilon(\sigma))]\, d\sigma \xrightarrow[\varepsilon \to 0^+]{} \int_s^t [g(y^*_{s,x}(\sigma)) + h(u^*_{s,x}(\sigma))]\, d\sigma$$

Concludiamo la dimostrazione del teorema. Fissato $\vartheta > 0$, per $\varepsilon \in]0, \hat{\varepsilon}(\vartheta)]$ si ha:

$$\varphi(s,x) - \varphi(t, y_\varepsilon(t)) \ge V(s,x) - V(t, y_\varepsilon(t)) \ge$$
$$\ge V(s,x) - V(t, y^*_{s,x}(t)) - \vartheta(t-s) =$$
$$= \int_s^t [g(y^*_{s,x}(\sigma)) + h(u^*_{s,x}(\sigma))]\, d\sigma - \vartheta(t-s) \ge$$
$$\ge \int_s^t [g(y_\varepsilon(\sigma)) + h(u_\varepsilon(\sigma))]\, d\sigma - 2\vartheta(t-s)$$

Dividendo per $(t-s)$, allora, per $t > s^+$ si ha:
$$\left[\frac{d}{dt}\varphi(t, y_\varepsilon(t))\right]\Big|_{t=s} \ge g(x) + h(u_\varepsilon(s)) - 2\vartheta,$$
ossia:
$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), y'_\varepsilon(s)\rangle_X =$$
$$= -\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax + Bu_\varepsilon(s)\rangle_X \ge$$
$$\ge g(x) + h(u_\varepsilon(\sigma)) - 2\vartheta$$

Dunque, in particolare,
$$-\varphi_s(s,x) - \langle \varphi_x(s,x), Ax\rangle_X - g(x) + h^*(-B^*\varphi_x(s,x)) \ge 2\vartheta,$$

e la tesi si ottiene per arbitrarietà di $\vartheta > 0$, c.v.d.

OSSERVAZIONE

Nel caso lineare quadratico, l'equazione di Hamilton-Jacobi-Bellman diventa l'equazione di Riccati (differenziale: non diamo i dettagli di ciò.