

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

# Accelerazione funzionale al calcolo dei vettori dell' HITS ExpertRank

Da un articolo di Yunkai Zhou

Gini Agnese

# Modello HITS (Hyperlink-Induced Topic Search)

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Il modello HITS descrive la struttura dei collegamenti ipertestuali tra le pagine tramite un GRAFO ORIENTATO, descritto dalla matrice di adiacenza del  $L \in \mathcal{M}(n)$ .

Le pagine sono in due categorie:

- Hubs
- Authorities

Denotiamo  $\mathbf{v}_h$  e  $\mathbf{v}_a$  rispettivamente l'Hub rank e l'Authority rank.

Si può dunque utilizzare, a partire dai dati iniziali  $\mathbf{v}_h^{(0)}$   $\mathbf{v}_a^{(0)}$ , una procedura iterativa per trovare  $\mathbf{v}_h$  e  $\mathbf{v}_a$

$$\mathbf{v}_a^{(k)} = L^T \mathbf{v}_h^{(k-1)} \quad , \quad \mathbf{v}_h^{(k)} = L \mathbf{v}_a^{(k-1)} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

E combinando le due equazioni si ottiene

$$\mathbf{v}_a^{(k)} = L^T L \mathbf{v}_a^{(k-1)} \quad , \quad \mathbf{v}_h^{(k)} = L L^T \mathbf{v}_h^{(k-1)}$$

$$L L^T \mathbf{v}_h = \lambda_{max} \mathbf{v}_h$$

$$L^T L \mathbf{v}_a = \lambda_{max} \mathbf{v}_a$$

Si può dunque utilizzare, a partire dai dati iniziali  $\mathbf{v}_h^{(0)}$   $\mathbf{v}_a^{(0)}$ , una procedura iterativa per trovare  $\mathbf{v}_h$  e  $\mathbf{v}_a$

$$\mathbf{v}_a^{(k)} = L^T \mathbf{v}_h^{(k-1)} \quad , \quad \mathbf{v}_h^{(k)} = L \mathbf{v}_a^{(k-1)} \quad , \quad k = 1, 2, 3 \dots$$

E combinando le due equazioni si ottiene

$$\mathbf{v}_a^{(k)} = L^T L \mathbf{v}_a^{(k-1)} \quad , \quad \mathbf{v}_h^{(k)} = L L^T \mathbf{v}_h^{(k-1)}$$

$$L L^T \mathbf{v}_h = \lambda_{max} \mathbf{v}_h$$

$$L^T L \mathbf{v}_a = \lambda_{max} \mathbf{v}_a$$

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Osservazione

- *Siamo di fronte ad un' istanza del metodo delle potenze;*
- *una volta calcolato il vettore  $\mathbf{v}_h$  possiamo considera il problema risolto, infatti  $\mathbf{v}_a = L^T \mathbf{v}_h$ ;*
- *$LL^T$  e  $L^T L$  sono simmetriche e definite positive, e dunque hanno spettro reale.*

## Osservazione

- *Siamo di fronte ad un' istanza del metodo delle potenze;*
- *una volta calcolato il vettore  $\mathbf{v}_h$  possiamo considera il problema risolto, infatti  $\mathbf{v}_a = L^T \mathbf{v}_h$ ;*
- *$LL^T$  e  $L^T L$  sono simmetriche e definite positive, e dunque hanno spettro reale.*

## Osservazione

- *Siamo di fronte ad un' istanza del metodo delle potenze;*
- *una volta calcolato il vettore  $\mathbf{v}_h$  possiamo considera il problema risolto, infatti  $\mathbf{v}_a = L^T \mathbf{v}_h$ ;*
- *$LL^T$  e  $L^T L$  sono simmetriche e definite positive, e dunque hanno spettro reale.*

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

$$\xi LL^T + \frac{1-\xi}{n} \mathbf{e}\mathbf{e}^T,$$

$$\xi L^T L + \frac{1-\xi}{n} \mathbf{e}\mathbf{e}^T,$$

dove  $\mathbf{e} = [1, 1, \dots, 1]^T$ .

# Polinomi di Chebyshev

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Il polinomio di grado  $k$  di Chebyshev di prima specie è definito

$$C_k(t) := \begin{cases} \cos(k \cos^{-1}(t)) & |t| \leq 1 \\ \cosh(k \cosh^{-1}(t)) & t > 1 \\ (-1)^k \cos(k \cosh^{-1}(-t)) & t < -1 \end{cases}$$

Che si traduce in una ricorrenza a tre termini

$$\begin{cases} C_{k+1}(t) = 2tC_k(t) - C_{k-1}(t) & t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N}^+ \\ C_0(t) = 1 \\ C_1(t) = t \end{cases}$$

## Proposizione

*Dato il polinomio di Chebyshev di prima specie  $C_k(t)$  vale che:*

- $|C_k(t)| < 1$  per  $t \in [-1, 1]$
- *ha crescita esponenziale per  $t \in \mathbb{R} \setminus [-1, 1]$*

# ALGORITMO

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'algoritmo è fatto di tre parti principali:

- Stima della banda per il filtraggio  
Lanczos\_bounds
- Costruzione filtro  
Chebyshev\_filter
- Main  
HITS\_Chebyshev

# ALGORITMO

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'algoritmo è fatto di tre parti principali:

- Stima della banda per il filtraggio

`Lanczos_bounds`

- Costruzione filtro

`Chebyshev_filter`

- Main

`HITS_Chebyshev`

# ALGORITMO

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'algoritmo è fatto di tre parti principali:

- Stima della banda per il filtraggio  
`Lanczos_bounds`
- Costruzione filtro  
`Chebyshev_filter`
- Main  
`HITS_Chebyshev`

# ALGORITMO

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'algoritmo è fatto di tre parti principali:

- Stima della banda per il filtraggio  
`Lanczos_bounds`
- Costruzione filtro  
`Chebyshev_filter`
- Main  
`HITS_Chebyshev`

# Stima della banda per il filtraggio

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Vogliamo mappare lo spettro in modo da

- mandare in  $[-1,1]$  la coda dello spettro
- mandare fuori da  $[-1,1]$  l'autovalore di modulo massimo

$$\lambda_{\max}(LL^T)$$

Dobbiamo trovare degli *estremi* che stimino la collocazione della coda.

# Stima della banda per il filtraggio

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Vogliamo mappare lo spettro in modo da

- mandare in  $[-1,1]$  la coda dello spettro
- mandare fuori da  $[-1,1]$  l'autovalore di modulo massimo  
 $\lambda_{max}(LL^T)$

Dobbiamo trovare degli *estremi* che stimino la collocazione della coda.

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'intervallo sarà della forma  $[0, u_l]$  .

Per stimare quello superiore  $u_l$  ci aiutano i seguenti risultati teorici:

### Definizione

Si dice, data  $A \in \mathcal{M}(N)$  e  $b \in \mathbb{R}^N$  sottospazio di Krylov

$$\mathcal{K}_R = \text{Span}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{R-1}b)$$

L'intervallo sarà della forma  $[0, u_l]$  .

Per stimare quello superiore  $u_l$  ci aiutano i seguenti risultati teorici:

### Definizione

Si dice, data  $A \in \mathcal{M}(N)$  e  $b \in \mathbb{R}^N$  **sottospazio di Krylov**

$$\mathcal{K}_R = \text{Span}(b, Ab, A^2b, \dots, A^{R-1}b)$$

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Definizione

Data una matrice hermitiana  $A$  non nulla il **quoziente di Rayleigh-Ritz** per  $x$  vettore nonnullo è

$$R(A, x) = \frac{x^H Ax}{x^H x} = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\langle x, x \rangle}.$$

## Teorema di Ritz-Rayleigh

Sia  $A \in \mathcal{M}(n)$  matrice Hermitiana e siano  
 $\lambda_{min} = \lambda_n < \dots < \lambda_2 < \lambda_1 = \lambda_{max}$  i relativi autovalori  $\implies$

$$\lambda_n x^H x \leq x^H A x \leq \lambda_1 x^H x \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$$

$$\lambda_{max} = \max_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} = \max_{x \neq 0} R(A, x) = \max_{x^H x = 1} x^H A x$$

$$\lambda_{min} = \min_{x \neq 0} \frac{x^H A x}{x^H x} = \min_{x \neq 0} R(A, x) = \min_{x^H x = 1} x^H A x$$

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Corollario: **Teorema minmax di Courant-Fisher**

Sia  $A \in \mathcal{S}(n)$  allora

$$\lambda_k(A) = \max_{\dim(S)=k} \min_{y \in S \setminus 0} \frac{x^t A x}{x^t x}.$$

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Passo 1

Determiniamo due valori  $0 < u_l < u_L$  tramite la procedura di Lanczos

### Definizione

È detto **metodo di approssimazione di Lanczos** il metodo per la ricerca di autocoppie di una matrice  $A$  che sfrutta la **decomposizione di Lanczos**

$$AV_k = V_k T_k + f_k e_k^T, \quad V_k^T V_k = I_k \quad \text{e} \quad V_k^T f_k = \mathbf{0}$$

dove  $V_k$  è la relativa ad una base ortonormale del sottospazio di Krylov  $\mathcal{K}_k(A, v)$ .

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Definizione

Si definisce inoltre la **coppia valore-vettore di Ritz**, date  $(\lambda_i, x_i) \forall i = 1, \dots, k$  le autocopie di  $T_k$  i  $\lambda_i$  sono detti **valori di Ritz** e i  $v_i = V_k x_i$  sono detti **vettori di Ritz**.  
(Vale che  $y^t(Av - \lambda v) = 0$ .)

# Lanczos\_bounds

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $k, V_0, L$

- 1 **for**  $i=1:k$  **do**
- 2 | costruzione decomposizione di Lanczos  $\rightarrow V_i, T_i$
- 3 **end**
- 4 determinazione massimo autovalore per  $T_k \rightarrow u_L$ ;
- 5 correzione  $u_L$ ;
- 6  $u_I = (\lambda_{\min}(T_k) + \lambda_{\max}(T_k))/2$ ;
- 7 determinazione massimo autovettore di Ritz  $\rightarrow V$ ;

**Output:**  $u_I, u_L, V$

Codice

# Lanczos\_bounds

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $k, V_0, L$

- 1 **for**  $i=1:k$  **do**
  - 2 | costruzione decomposizione di Lanczos  $\rightarrow V_i, T_i$
  - 3 **end**
  - 4 determinazione massimo autovalore per  $T_k \rightarrow u_L$ ;
  - 5 correzione  $u_L$ ;
  - 6  $u_I = (\lambda_{\min}(T_k) + \lambda_{\max}(T_k))/2$ ;
  - 7 determinazione massimo autovettore di Ritz  $\rightarrow V$ ;
- Output:**  $u_I, u_L, V$

Codice

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Osservazione

- L'ultimo passo dell' algoritmo da che  $u_j \leq \lambda_{\max}(T_{10}) < \lambda_{\max}(LL^T)$ , ossia  $u_j$  è l'estremo superiore;
- Fornisce un vettore che è condizione iniziale migliore.

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Osservazione

- *L'ultimo passo dell'algoritmo da che*  
 $u_l \leq \lambda_{\max}(T_k) < \lambda_{\max}(LL^T)$ , *ossia*  $u_l$  **è l'estremo superiore;**
- *Fornisce un vettore che è* **condizione iniziale migliore**
- $u_L$  *può essere usato come* **fattore di scalo.**

## Osservazione

- *L'ultimo passo dell'algoritmo da che  $u_l \leq \lambda_{\max}(T_k) < \lambda_{\max}(LL^T)$ , ossia  $u_l$  è l'**estremo superiore**;*
- *Fornisce un vettore che è **condizione iniziale migliore***
- *$u_L$  può essere usato come **fattore di scalo**.*

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Osservazione

- *L'ultimo passo dell'algoritmo da che  $u_l \leq \lambda_{\max}(T_k) < \lambda_{\max}(LL^T)$ , ossia  $u_l$  è l'**estremo superiore**;*
- *Fornisce un vettore che è **condizione iniziale migliore***
- *$u_L$  può essere usato come **fattore di scalo**.*

# Mappa affine

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(t) = \left(t - \frac{u_l}{2}\right)(2/u_l).$$

## Proposizione

*Data  $A \in \mathcal{M}(n)$  con autovalori in  $[0, u_l]$  verrà mandata da tale mappa affine in in una  $\mathcal{L}(A)$  con autovalori in  $[-1,1]$ , il cui prodotto vettore associato è*

$$\mathcal{L}(A)v = \left(Av - \frac{u_l}{2}v\right)(2/u_l).$$

# Mappa affine

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

$$\mathcal{L} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathcal{L}(t) = \left(t - \frac{u_l}{2}\right)(2/u_l).$$

## Proposizione

*Data  $A \in \mathcal{M}(n)$  con autovalori in  $[0, u_l]$  verrà mandata da tale mappa affine in in una  $\mathcal{L}(A)$  con autovalori in  $[-1,1]$ , il cui prodotto vettore associato è*

$$\mathcal{L}(A)v = \left(Av - \frac{u_l}{2}v\right)(2/u_l).$$

## Passo 2

Raffiniamo  $u_l$  ad ogni iterazione usando una combinazione convessa con un quoziente di Rayleigh  $u_u$  calcolato tramite il filtro di Chebyshev.

$$u_l \leftarrow \beta u_l + (1 - \beta) u_u, \text{ con } \beta \in (0, 1)$$

# Costruzione filtro

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $V, m, u_l, L$

- 1 Mappa affine  $\rightarrow e = u_l/2$ ;
- 2 (Loop)  $Y = C_m(\mathcal{L}(LL^T))$  ;
- 3  $u_u = R(LL^T, Y)$ ;

**Output:**  $u_u, Y$

Chebyshev\_filter

# Costruzione filtro

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $V, m, u_l, L$

- 1 Mappa affine  $\rightarrow e = u_l/2$ ;
- 2 (*Loop*)  $Y = C_m(\mathcal{L}(LL^T))$  ;
- 3  $u_u = R(LL^T, Y)$ ;

**Output:**  $u_u, Y$

Chebyshev\_filter

# Costruzione filtro (scalato)

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $V, m, u_I, u_L, L$

- 1 Mappa affine  $\rightarrow e = u_I/2$ ;
  - 2 (Loop)  $Y = \frac{C_m(\frac{1}{e}(LL^T - eI))}{C_m(\frac{1}{e}(u_L - e))} V$  ;
  - 3  $u_U = R(LL^T, Y)$ ;
- Output:**  $u_U, Y$

Chebyshev\_filter\_scaled

# Costruzione filtro (scalato)

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Schema algoritmo

**Input:**  $V, m, u_I, u_L, L$

- 1 Mappa affine  $\rightarrow e = u_I/2$ ;
  - 2 (Loop)  $Y = \frac{C_m(\frac{1}{e}(LL^T - eI))}{C_m(\frac{1}{e}(u_L - e))} V$  ;
  - 3  $u_U = R(LL^T, Y)$ ;
- Output:**  $u_U, Y$

Chebyshev\_filter\_scaled

# HITS\_Chebyshev

## Algoritmo Principale

### Schema algoritmo HITS\_Chebyshev

**Input:**  $Y, m, \beta, f, itmax, method, L$

```
1 Lanczos_bounds( $k, Y, L$ )--> [ $u_l, u_L, V$ ];
2  $u_u = u_L$ ;  $Y = V$ ; normalizzazione dato iniziale;
3 while (valutazione del passo <  $f$ ) & (iterazioni <  $itmax$ ) do
4   if  $method == scaled$  then
5      $u_L = \max(u_u, u_L)$ ;
6     Chebyshev_filter_scaled( $Y, m, u_l, u_L, L$ )-->
7     [ $X, uu$ ];
8   else
9     Chebyshev_filter( $Y, m, u_l, L$ )--> [ $X, uu$ ];
10  end
11  normalizzazione  $X$ ;  $u_l = \beta u_l + (1 - \beta)u_u$ ;
12 end
```

**Output:**  $X$

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo  
Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
**Main**

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



# HITS\_Chebyshev

## Algoritmo Principale

### Schema algoritmo HITS\_Chebyshev

**Input:**  $Y, m, \beta, f, itmax, method, L$

```
1 Lanczos_bounds( $k, Y, L$ )--> [ $u_l, u_L, V$ ];
2  $u_u = u_L$ ;  $Y = V$ ; normalizzazione dato iniziale;
3 while (valutazione del passo <  $f$ ) & (iterazioni <  $itmax$ ) do
4   | if  $method == scaled$  then
5   |   |  $u_L = \max(u_u, u_L)$ ;
6   |   | Chebyshev_filter_scaled( $Y, m, u_l, u_L, L$ )-->
7   |   | [ $X, uu$ ];
8   |   | else
9   |   |   | Chebyshev_filter( $Y, m, u_l, L$ )--> [ $X, uu$ ];
10  |   | end
11  |   | normalizzazione  $X$ ;  $u_l = \beta u_l + (1 - \beta)u_u$ ;
12 end
Output:  $X$ 
```

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo  
Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



# Costi

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Si ha un algoritmo più complesso del metodo delle potenze.  
Ognuno degli  $m$  prodotti matrice-vettore di  $(LL^T)^m X_0$  è  
sostituito da  $C_m(\mathcal{L}(LL^T))X_0$ .

Il numero di moltiplicazioni matrice vettore per passo è

- 6 metodo delle potenze **classico**
- 12 metodo delle potenze **filtrato**

Dal punto di vista della memoria c'è solo la memorizzazione di  
un vettore in più, per iterazione di Lanczos, rispetto al metodo  
delle potenze.

# Costi

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Si ha un algoritmo più complesso del metodo delle potenze.  
Ognuno degli  $m$  prodotti matrice-vettore di  $(LL^T)^m X_0$  è  
sostituito da  $C_m(\mathcal{L}(LL^T))X_0$ .

Il numero di moltiplicazioni matrice vettore per passo è

- 6 metodo delle potenze **classico**
- 12 metodo delle potenze **filtrato**

Dal punto di vista della memoria c'è solo la memorizzazione di  
un vettore in più, per iterazione di Lanczos, rispetto al metodo  
delle potenze.

# Derivazione Algoritmi

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Sia la mappa affine che porta un intervallo  $[a,b]$  in  $[-1,1]$

$$\mathcal{L}(t) = \frac{t - c}{e}, \text{ dove } c = \frac{b - a}{2} \text{ e } e = \frac{b + a}{2}.$$

E sia  $A \in \mathcal{M}(n)$  qualsiasi.

Si consideri ora la ricorrenza a tre termini di Chebyshev (7)  
applicata a  $\mathcal{L}(t)$ :

$$C_{k+1}(\mathcal{L}(t)) = 2\mathcal{L}(t)C_k(\mathcal{L}(t)) - C_{k-1}(\mathcal{L}(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \quad k = 1, 2, \dots$$

con  $C_0(t) \equiv 1$  e  $C_1(\mathcal{L}(t)) = \mathcal{L}(t)$ .

E definiamo

$$x_k = C_k(\mathcal{L}(A))x_0$$

↓

$$x_{k+1} = C_{k+1}(\mathcal{L}(A))x_0 = \frac{2}{e}(A - cI)x_k - x_{k-1}, \quad (\bullet)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

E definiamo

$$x_k = C_k(\mathcal{L}(A))x_0$$

↓

$$x_{k+1} = C_{k+1}(\mathcal{L}(A))x_0 = \frac{2}{e}(A - cI)x_k - x_{k-1}, \quad (\bullet)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

E definiamo

$$x_k = C_k(\mathcal{L}(A))x_0$$

↓

$$x_{k+1} = C_{k+1}(\mathcal{L}(A))x_0 = \frac{2}{e}(A - cI)x_k - x_{k-1}, \quad (\bullet)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

# Forma matriciale

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'iterazione può essere scritta anche come

$$X_k = \begin{bmatrix} x_k \\ x_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & \frac{2}{e}(A - cI) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{k-1} \\ x_k \end{bmatrix} = \mathcal{B}X_{k-1}$$

## Lemma

Sia  $M \in \mathcal{M}(n)$  con autovalori  $d_i$  con  $i = 1, \dots, n \Rightarrow$  gli autovalori della matrice  $\mathcal{M}(2n) \ni \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & M \end{bmatrix}$  sono

$$\frac{d_i \pm \sqrt{d_i^2 - 4}}{2} \quad i = 1, \dots, n.$$

Denotiamo dunque gli autovalori di  $A$   $\lambda_i(A) \Rightarrow$  applicando il Lemma con  $M = \frac{2}{\epsilon}(A - cI)$  e si ha

$$\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B}) = \frac{d_i \pm \sqrt{d_i^2 - 4}}{2}$$

dove  $d_i = \frac{2}{\epsilon}(\lambda_i(A) - c) \quad i = 1, \dots, n.$

## Lemma

Sia  $M \in \mathcal{M}(n)$  con autovalori  $d_i$  con  $i = 1, \dots, n \Rightarrow$  gli autovalori della matrice  $\mathcal{M}(2n) \ni \begin{bmatrix} 0 & I \\ -I & M \end{bmatrix}$  sono

$$\frac{d_i \pm \sqrt{d_i^2 - 4}}{2} \quad i = 1, \dots, n.$$

Denotiamo dunque gli autovalori di  $A$   $\lambda_i(A) \Rightarrow$  applicando il Lemma con  $M = \frac{2}{e}(A - cI)$  e si ha

$$\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B}) = \frac{d_i \pm \sqrt{d_i^2 - 4}}{2}$$

dove  $d_i = \frac{2}{e}(\lambda_i(A) - c) \quad i = 1, \dots, n.$

Che implica:

- Se  $\lambda_i(A) \in [a, b]$  si ha che  $\frac{2}{\epsilon}(\lambda_i(A) - c) \leq 2 \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono complessi coniugati e di modulo 1;
- se  $\lambda_i(A) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono reali e quello norma maggiore è fuori dall'intervallo  $[-1,1]$ .

Osservazione

*L'iterazione di Chebyshev è convergente.*

Che implica:

- Se  $\lambda_i(A) \in [a, b]$  si ha che  $\frac{2}{\epsilon}(\lambda_i(A) - c) \leq 2 \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono complessi coniugati e di modulo 1;
- se  $\lambda_i(A) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono reali e quello norma maggiore è fuori dall'intervallo  $[-1,1]$ .

### Osservazione

*L'iterazione di Chebyshev è convergente.*

Che implica:

- Se  $\lambda_i(A) \in [a, b]$  si ha che  $\frac{2}{\epsilon}(\lambda_i(A) - c) \leq 2 \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono complessi coniugati e di modulo 1;
- se  $\lambda_i(A) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono reali e quello norma maggiore è fuori dall'intervallo  $[-1,1]$ .

### Osservazione

*L'iterazione di Chebyshev è convergente.*

Che implica:

- Se  $\lambda_i(A) \in [a, b]$  si ha che  $\frac{2}{\epsilon}(\lambda_i(A) - c) \leq 2 \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono complessi coniugati e di modulo 1;
- se  $\lambda_i(A) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \implies$  i corrispondenti  $\lambda_i^{(1,2)}(\mathcal{B})$  sono reali e quello norma maggiore è fuori dall'intervallo  $[-1, 1]$ .

## Osservazione

*L'iterazione di Chebyshev è convergente.*

## Lemma

*Se l'autovalore massimo di una matrice hermitiana  $A$  unico e l'intervallo di filtraggio soddisfa*

$$a \leq \min_{i=1, \dots, n} \lambda_i(A)$$

e

$$b \leq \max_{i=1, \dots, n} \lambda_i(A)$$

*$\Rightarrow$  il termine  $k$ -esimo della  $(\bullet)$  converge all'autovettore principale di  $A$ .*

# Versione scalata

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

L'iterazione (11) può essere ulteriormente scalata in favore di una maggiore stabilità.

Sostituiamo  $x_k = C_k(\mathcal{L}(A))x_0$  con

$$\tilde{C}_k(\mathcal{L}(A)) := \frac{C_k\left(\frac{1}{e}(A - cI)\right)}{\rho_k}, \text{ dove } \rho_k := C_k\left(\frac{1}{e}(\tilde{b} - c)\right).$$

Dove  $\tilde{b}$  è un valore fuori da  $[a, b]$ .

Con alcune osservazioni si ottiene una ricorrenza a tre termini anche in questo caso:

$$\sigma_k := \rho_k / \rho_k$$

$$\tilde{C}_{k+1}(\mathcal{L}(A)) = \sigma_{k+1} \frac{2}{e} (A - cI) \tilde{C}_k(\mathcal{L}(A)) - \sigma_{k+1} \sigma_k \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{L}(A))$$

$$k = 1, 2, \dots$$

e

$$\sigma_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{e}{\tilde{b} - c}, \quad \sigma_{k+1} = \frac{C_k(\frac{1}{e}(\tilde{b} - c))}{C_{k+1}(\frac{1}{e}(\tilde{b} - c))} = \frac{1}{2/\sigma_1 - \sigma_k}.$$

Con alcune osservazioni si ottiene una ricorrenza a tre termini anche in questo caso:

$$\sigma_k := \rho_k / \rho_k$$

$$\tilde{C}_{k+1}(\mathcal{L}(A)) = \sigma_{k+1} \frac{2}{e} (A - cI) \tilde{C}_k(\mathcal{L}(A)) - \sigma_{k+1} \sigma_k \tilde{C}_{k-1}(\mathcal{L}(A))$$

$$k = 1, 2, \dots$$

e

$$\sigma_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} = \frac{e}{\tilde{b} - c}, \quad \sigma_{k+1} = \frac{C_k(\frac{1}{e}(\tilde{b} - c))}{C_{k+1}(\frac{1}{e}(\tilde{b} - c))} = \frac{1}{2/\sigma_1 - \sigma_k}.$$

$$\tilde{x}_1 = C_1(\mathcal{L}(A))\tilde{x}_0 = \frac{\sigma_1}{e}(A - cl)\tilde{x}_0$$

↓

$$\tilde{x}_{k+1} = 2\frac{\sigma_{k+1}}{e}(A - cl)\tilde{x}_k - \sigma_{k+1}\sigma_k\tilde{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\bullet\bullet).$$

↓

Che come per il caso precedente può essere espressa in termini matriciali

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\sigma_{k+1}\sigma_k I & \frac{2\sigma_{k+1}}{e}(A - cl) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k-1} \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix} = \tilde{B}\tilde{X}_{k-1}$$

$$\tilde{x}_1 = C_1(\mathcal{L}(A))\tilde{x}_0 = \frac{\sigma_1}{e}(A - cI)\tilde{x}_0$$

↓

$$\tilde{x}_{k+1} = 2\frac{\sigma_{k+1}}{e}(A - cI)\tilde{x}_k - \sigma_{k+1}\sigma_k\tilde{x}_{k-1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (\bullet\bullet).$$

↓

Che come per il caso precedente può essere espressa in termini matriciali

$$\tilde{X}_k = \begin{bmatrix} \tilde{x}_k \\ \tilde{x}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -\sigma_{k+1}\sigma_k I & \frac{2\sigma_{k+1}}{e}(A - cI) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_{k-1} \\ \tilde{x}_k \end{bmatrix} = \tilde{B}\tilde{X}_{k-1}$$

## Lemma

*Se l'autovalore massimo di una matrice hermitiana  $A$  è unico, l'intervallo di filtraggio soddisfa*

$$a \leq \min_{i=1,\dots,n} \lambda_i(A) \text{ e } b \leq \max_{i=1,\dots,n} \lambda_i(A),$$

*sapendo che gli autovalori della matrice  $\tilde{B}$  in (18) sono*

$$\lambda_i^{(1,2)}(\tilde{B}) = \frac{\sigma_{k+1} d_i \pm \sqrt{(\sigma_{k+1} d_i)^2 - 4\sigma_{k+1}\sigma_k}}{2},$$

*dove  $d_i = \frac{2}{e}(\lambda_i(A) - c)$   $i = 1, \dots, n$  e se  $\tilde{b} > b \implies \tilde{x}_k$  della (••) converge all'autovettore principale di  $A$ .*

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

## Teorema

*Supponiamo che  $LL^T$  fine abbia un solo autovalore principale. Allora algoritmo HITS\_Chebyshev produce un vettore che converge all'autovettore principale di  $LL^T$ .*

Osserviamo che:

- Alla  $j$ -esima iterazione dell'HITS\_Chebyshev con estremi  $0$  e  $w_j$ , il gap-ratio della matrice filtrata  $C_m(\mathcal{L}_j(LL^T))$  è

$$\xi_{mj} = \frac{\max_{i \neq 1} \|C_m(\frac{2}{w_j}(\lambda_i(LL^T) - \frac{w_j}{2}))\|}{C_m(\frac{2}{w_j}(\lambda_1(LL^T) - \frac{w_j}{2}))}$$

- Se poniamo  $\xi_m := \sup_j \xi_{mj}$ , si impiegano solo  $O(\ln \tau / \ln \xi_m)$  passi dell'algoritmo per portare l'errore sotto la tolleranza data  $\tau$ .

Osserviamo che:

- Alla  $j$ -esima iterazione dell'HITS\_Chebyshev con estremi 0 e  $u_j$ , il gap-ratio della matrice filtrata  $C_m(\mathcal{L}_j(LL^T))$  è

$$\xi_{m_j} = \frac{\max_{i \neq 1} \|C_m(\frac{2}{u_j}(\lambda_i(LL^T) - \frac{u_j}{2}))\|}{C_m(\frac{2}{u_j}(\lambda_1(LL^T) - \frac{u_j}{2}))},$$

- Se poniamo  $\xi_m := \sup_j \xi_{m_j}$ , si impiegano solo  $O(\ln \tau / \ln \xi_m)$  passi dell'algoritmo per portare l'errore sotto la tolleranza data  $\tau$ .

Osserviamo che:

- Alla  $j$ -esima iterazione dell'HITS\_Chebyshev con estremi 0 e  $u_j$ , il gap-ratio della matrice filtrata  $C_m(\mathcal{L}_j(LL^T))$  è

$$\xi_{m_j} = \frac{\max_{i \neq 1} \|C_m(\frac{2}{u_j}(\lambda_i(LL^T) - \frac{u_j}{2}))\|}{C_m(\frac{2}{u_j}(\lambda_1(LL^T) - \frac{u_j}{2}))},$$

- Se poniamo  $\xi_m := \sup_j \xi_{m_j}$ , si impiegano solo  $O(\ln \tau / \ln \xi_m)$  passi dell'algoritmo per portare l'errore sotto la tolleranza data  $\tau$ .

# Risultati numerici

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

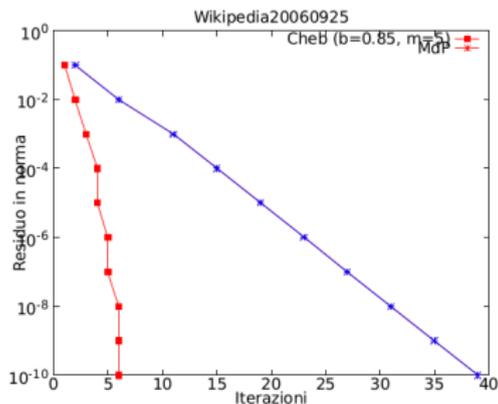
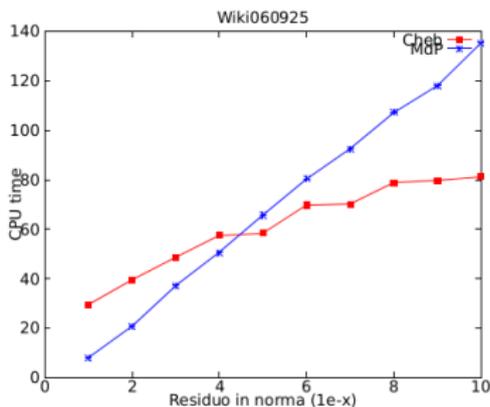
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

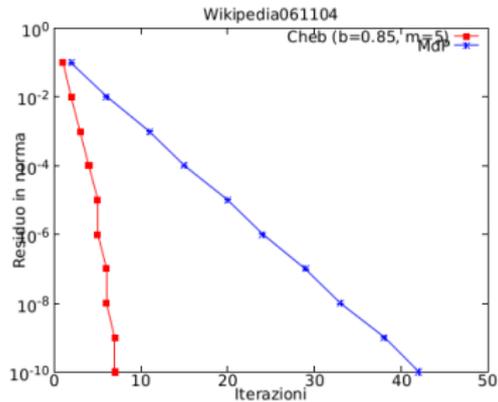
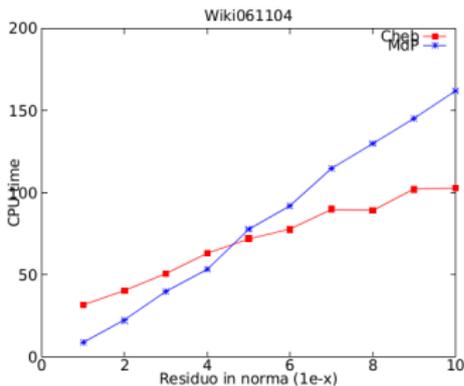
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

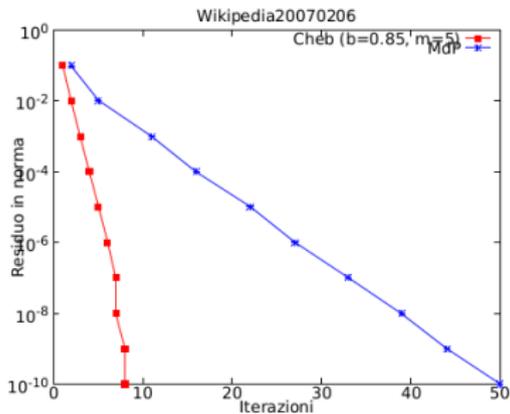
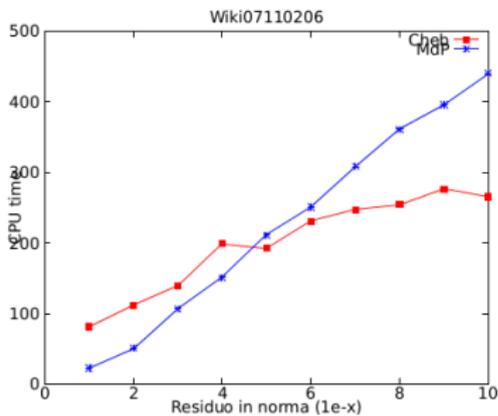
Derivazione

Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

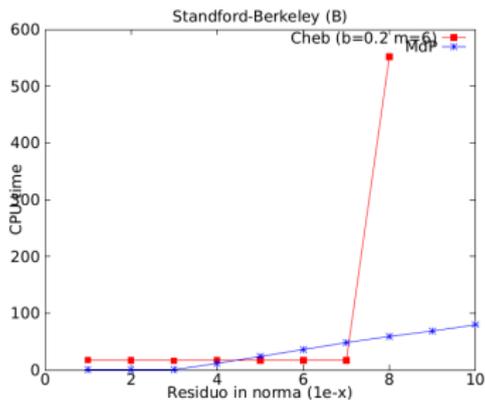
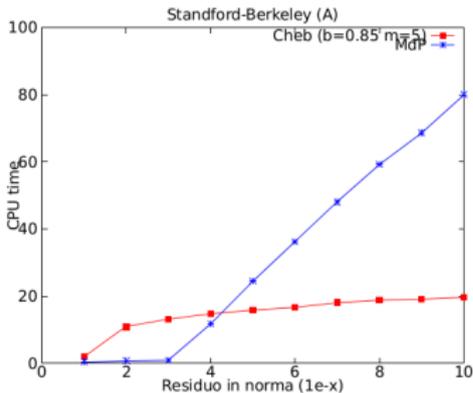
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab



Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

Grazie per l'attenzione.

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

# Codice Matlab

# Lanczos\_bounds ●

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

```
1 function [uL, uL, v0]=Lanczos_bounds(k, v0, L)
2 %costrizione decomposizione parziale di Lanczos
3 V(:,1)=v0/(norm(v0,2));
4 V(:,2)=L*(L'*V(:,1));
5 a=V(:,2)'*V(:,1);
6 V(:,2)=V(:,2)-a*V(:,1);
7 T(1,1)=a;
8 m=min(k,5);
9 for j=2:m,
10     h=norm(V(:,j));
11     V(:,j)=V(:,j)/h;
12     V(:,j+1)=L*(L'*V(:,j));
13     V(:,j+1)=V(:,j+1)+h*V(:,j-1);
14     a=V(:,j+1)'*V(:,j);
15     V(:,j+1)=V(:,j+1)-a*V(:,j);
16     T(j,j-1)=h;
17     T(j-1,j)=h;
18     T(j,j)=a;
19 end
20 [Q,D]=eig(T(1:m,1:m)); %ricerca massimo autovettore per T
21 d=diag(D);
22 [uL,idx]=max(d); %aggiornamento valori stima
23 uL=(min(d) + uL)/2;
24 uL=uL+h*Q(end,idx);
25 v0=V(:,1:m)*Q(:,idx);
26 s=sign(v0);
27 v0=s(1)*v0;
28 end
```

# Costruzione filtro ●

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

```
1 function [Y,uu]=Chebyshev_filter(X,m,ul,L)
2 %Mappa affine
3 e=ul/2;
4 Y=(L*(L'*X))/e-X;
5 %calcolo del polinomi fino al grado m-1
6 for i=1:(m-1)
7     Z=(L*(L'*Y)-e*Y)*(2/e) - X;
8     X=Y;
9     Y=Z;
10 end
11 Z=L*(L'*Y);
12 uu=(Z'*Y)/(Y'*Y); %quoziente di Rayleigh
13 Y=(Z-e*Y)*(2/e)-X; %polinomio di grado m
14 end
```

# Costruzione filtro (scalato) ●

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

```
1 function [Y,uu]=Chebyshev_filter_scaled(X,m,uL,uL,L)
2 %Mappa affine
3 e=uL/2;
4 s=e/(uL-e);
5 t=2/s;
6 Y=(L*((L')*X)-e*X)*(s/e);
7 %calcolo del polinomio fino al grado m-1
8 for i=1:(m-1)
9     sn=1/(t-s);
10    Z=(L*((L')*Y)-e*Y)*(2*sn/e) -(s*sn)*X;
11    X=Y;
12    Y=Z;
13    s=sn;
14 end
15 sn=1/(t-s);
16 Z=L*((L')*Y);
17 uu=((Z')*Y)/(Y'*Y); %quoziente di Rayleigh
18 Y=(Z-e*Y)*(2*sn/e)-(s*sn)*X; %polinomio di grado m
19 end
```

# HITS\_Chebyshev

## Algoritmo Principale

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio  
Costruzione  
filtro  
Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

```
1 function [X,it]=HITS_Chebyshev(X0, m, b, f, itmax, method, L)
2 tic
3 k=5; % # iterazioni lanczos
4 [uL, uL, X0]=Lanczos_bounds(k, X0, L);
5 uu=uL;
6 it=0;
7 X0=X0/(norm(X0,1)); %normalizzazione dato iniziale
8 for i=1:itmax %iterazioni metodo
9     if (method=='scaled')
10         uL=max(uu, uL);
11         [X,uu]=Chebyshev_filter_scaled(X0,m, uL, uL, L);
12     else
13         [X,uu]=Chebyshev_filter(X0,m, uL, L);
14     end
15     %normalizzazione vettore attuale
16     o=sign(X);
17     X=o(1)*X/(norm(X,1));
18     %valutazione del passo per condizione di arresto
19     if (norm((X-X0),1)<f) break
20     end
21     X0=X;
22     uL=b*uL+(1-b)*uu;
23     it=it+1;
24 end
25 if (norm((X-X0),1)>f) disp('itmax') %controllo
26 end
27 toc
28 end
```

# Metodo delle potenze

Accelerazione  
funzionale al  
calcolo dei  
vettori  
dell' HITS  
ExpertRank

Gini Agnese

Modello HITS

Polinomi di  
Chebyshev

Algoritmo

Stima della  
banda per il  
filtraggio

Costruzione  
filtro

Main

Derivazione  
Algoritmi

Semplice  
Scalato

Risultati  
numerici

Codice Matlab

```
1 function [lambda , x , iter]=MetPotenze(A, tol ,kmax ,x0)
2 tic
3 x0=x0/norm(x0);
4 lambda=x0 '(A*((A')*x0));
5 err=tol*abs(lambda)+1;
6 iter=0;
7 while (err > tol*abs(lambda) & abs(lambda)~=0 & iter <=kmax)
8 x=A*((A')*x0);
9 x=x/norm(x);
10 lamnew=x '(A*((A')*x));
11 err=abs(lamnew-lambda);
12 lambda=lamnew;
13 x0=x;
14 iter=iter+1;
15 end
16 toc
17 end
```