Soluzioni distribuzionali di PDE a coefficienti costanti

Marco Inversi

10 Giugno 2020

Indice

Indice

Indice

Operatori differenziali a coefficienti costanti

Un operatore differenziale a coefficienti costanti è una scrittura del tipo

$$L(\cdot) \coloneqq \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha D^\alpha(\cdot), \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

con questa notazione:

$$D_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|} \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

Un operatore differenziale a coefficienti costanti è una scrittura del tipo

$$L(\cdot) \coloneqq \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha(\cdot), \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

con questa notazione:

$$D_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|}\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

L può essere applicato a qualsiasi oggetto che sappiamo derivare: funzioni, distribuzioni, ...

Operatori differenziali a coefficienti costanti

Un operatore differenziale a coefficienti costanti è una scrittura del tipo

$$L(\cdot) \coloneqq \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha(\cdot), \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

con questa notazione:

$$D_j = -i\partial_j, \quad D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \cdots D_n^{\alpha_n} = (-i)^{|\alpha|}\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n}.$$

L può essere applicato a qualsiasi oggetto che sappiamo derivare: funzioni, distribuzioni, ...

$$P(D) \coloneqq \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha D^\alpha.$$

è il simbolo dell'operatore $L \sim P(D)$.

Soluzioni distribuzionali

Data $\Phi \in \mathcal{D}'$ o in $\mathcal{S}'$, cerchiamo una soluzione distribuzionale di

$$L(u) = \Phi,$$

cioè distribuzione u (eventualmente temperata) tale che per ogni funzione test f ammissibile (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) valga

$$< L(u), f > = < \Phi, f > .$$

Soluzioni distribuzionali

Data $\Phi \in \mathcal{D}'$ o in $\mathcal{S}'$, cerchiamo una soluzione distribuzionale di

$$L(u) = \Phi,$$

cioè distribuzione u (eventualmente temperata) tale che per ogni funzione test f ammissibile (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) valga

$$< L(u), f > = < \Phi, f > .$$

Passando in trasformata, le equazioni differenziali diventano polinomiali.

Soluzioni distribuzionali

Data $\Phi \in \mathcal{D}'$ o in $\mathcal{S}'$, cerchiamo una soluzione distribuzionale di

$$L(u) = \Phi,$$

cioè distribuzione u (eventualmente temperata) tale che per ogni funzione test f ammissibile (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) valga

$$< L(u), f >=< \Phi, f > .$$

Passando in trasformata, le equazioni differenziali diventano polinomiali.

Formalmente, data una distribuzione Φ, vale

$$\hat{\Phi} = \widehat{L(u)} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha \hat{u} = P(\xi)\hat{u}.$$

Data $\Phi \in \mathcal{D}'$ o in $\mathcal{S}'$, cerchiamo una soluzione distribuzionale di

$$L(u) = \Phi,$$

cioè distribuzione u (eventualmente temperata) tale che per ogni funzione test f ammissibile (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) valga

$$< L(u), f >=< \Phi, f > .$$

Passando in trasformata, le equazioni differenziali diventano polinomiali.

Formalmente, data una distribuzione Φ, vale

$$\hat{\Phi} = \widehat{L(u)} = \sum_{|\alpha| \leq m} c_\alpha \xi^\alpha \hat{u} = P(\xi)\hat{u}.$$

Se ha senso, almeno come distribuzione temperata, vale che

$$u = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\hat{\Phi}}{P(\xi)}\right).$$

Soluzione fondamentale

Una soluzione fondamentale dell'operatore $P(D)$ a coefficienti costanti è una distribuzione Φ (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) tale che

$$P(D)\Phi = \delta_0.$$

Soluzioni fondamentali

Soluzione fondamentale

Una soluzione fondamentale dell'operatore $P(D)$ a coefficienti costanti è una distribuzione Φ (in $\mathcal{D}'$ o $\mathcal{S}'$) tale che

$$P(D)\Phi = \delta_0.$$

Proposizione

Se $\Phi \in \mathcal{D}'$ (oppure in $\mathcal{S}'$) è una soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$, data $f \in \mathcal{D}$ (oppure in $\mathcal{S}$), la funzione $u = f * \Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ è soluzione del problema

$$P(D)u = f \tag{1}$$

Infatti, si ha

$$P(D)(f * \Phi) = f * [P(D)\Phi] = f * \delta_0 = f.$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >=$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >= \ < \Phi, \Delta f >$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \Phi, \frac{1}{(2\pi)^n} \check{\widehat{\widehat{\Delta f}}} >$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >= \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} \check{\widehat{\Delta f}} >$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >= \; < \hat{\Phi}, -\frac{1}{(2\pi)^n}|\xi|^2 \check{\hat{f}} >$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} >$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \ < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \ \stackrel{?}{=} f(0)$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \; \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \hat{\check{\hat{f}}}(0)$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \overset{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \check{\hat{f}}(\xi) \, d\xi$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi)\check{\hat{f}} > \; \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(\xi)\check{\hat{f}}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f > = < \delta_0, f > = f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f > = \; < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \; \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(\xi)\check{\hat{f}}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

Possiamo ben definire $(n \geq 3)$ la distribuzione temperata

$$< \Psi, f > := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{|\xi|^2} \, d\xi.$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >= \ < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \ \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(\xi)\check{\hat{f}}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

Possiamo ben definire $(n \geq 3)$ la distribuzione temperata

$$< \Psi, f >:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{|\xi|^2} \, d\xi.$$

Poniamo $\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi)$; troviamo che

$$< \Delta\Phi, f >=< \Psi, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} >= f(0).$$

L'esempio del laplaciano

Cerchiamo soluzioni fondamentali associate all'operatore Δ in $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, cioè $\Phi \in \mathcal{S}'$ tale che $\Delta\Phi = \delta_0$ come distribuzioni, ovvero

$$< \Delta\Phi, f >=< \delta_0, f >= f(0) \quad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Il simbolo dell'operatore è $P(\xi) = -|\xi|^2$.

$$< \Delta\Phi, f >= \ < \hat{\Phi}, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} > \ \stackrel{?}{=} f(0) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{P(\xi)\check{\hat{f}}(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

Possiamo ben definire $(n \geq 3)$ la distribuzione temperata

$$< \Psi, f >:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{|\xi|^2} \, d\xi.$$

Poniamo $\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi)$; troviamo che

$$< \Delta\Phi, f >=< \Psi, \frac{1}{(2\pi)^n} P(\xi) \check{\hat{f}} >= f(0).$$

Calcoli espliciti mostrano che

$$\mathcal{F}^{-1}(\Psi) = \Phi(x) = c_n \frac{1}{|x|^{n-2}}, \quad n \geq 3$$

Cosa deduciamo?

Si può procedere come nell'esempio del laplaciano ogni volta che

$$< \Psi, f >:= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

è ben definita come distribuzione temperata: una soluzione fondamentale è data da

$$\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi).$$

Cosa deduciamo?

Si può procedere come nell'esempio del laplaciano ogni volta che

$$< \Psi, f > := \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(\xi)}{P(\xi)} \, d\xi$$

è ben definita come distribuzione temperata: una soluzione fondamentale è data da

$$\Phi = \mathcal{F}^{-1}(\Psi).$$

Questa formula non funziona sempre! Se P ha degli zeri, potrebbero esserci problemi...

Facendo attenzione agli zeri di P, possiamo adattare questa idea al caso generale.

Indice

Enunciato del teorema

Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti. Esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$.

Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti. Esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$.

La dimostrazione descrive la soluzione fondamentale tramite una formula "esplicita":

$$< u, f >:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi', \tag{2}$$

con la notazione $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti. Esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$.

La dimostrazione descrive la soluzione fondamentale tramite una formula "esplicita":

$$< u, f >:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi', \tag{2}$$

con la notazione $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

- Bisogna scegliere φ in modo che (2) abbia senso e u sia una soluzione fondamentale.

Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti. Esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$.

La dimostrazione descrive la soluzione fondamentale tramite una formula "esplicita":

$$< u, f > := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi', \tag{2}$$

con la notazione $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

- Bisogna scegliere φ in modo che (2) abbia senso e u sia una soluzione fondamentale.
- Se $\varphi \equiv 0$ fosse ammissibile, potremmo procedere come nell'esempio del laplaciano.

Teorema di Malgrange-Ehrenpreis

Sia $P(D)$ un operatore differenziale a coefficienti costanti. Esiste $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ soluzione fondamentale per l'operatore $P(D)$.

La dimostrazione descrive la soluzione fondamentale tramite una formula "esplicita":

$$< u, f >:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi', \tag{2}$$

con la notazione $\xi = (\xi_1, \xi') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

- Bisogna scegliere φ in modo che (2) abbia senso e u sia una soluzione fondamentale.
- Se $\varphi \equiv 0$ fosse ammissibile, potremmo procedere come nell'esempio del laplaciano.
- $\hat{f}$ è l'estensione olomorfa della trasformata di Fourier.

Aggirare le singolarità

- Senza perdita di generalità

$$P(\xi_1, \xi') = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} q_j(\xi')\xi_1^j.$$

- Senza perdita di generalità

$$P(\xi_1, \xi') = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} q_j(\xi')\xi_1^j.$$

- Fissato $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, siano $z_1(\xi'), \dots, z_k(\xi')$ le radici distinte in $\mathbb{C}$ del polinomio di grado m

$$\xi_1 \to P(\xi_1, \xi').$$

Aggirare le singolarità

- Senza perdita di generalità

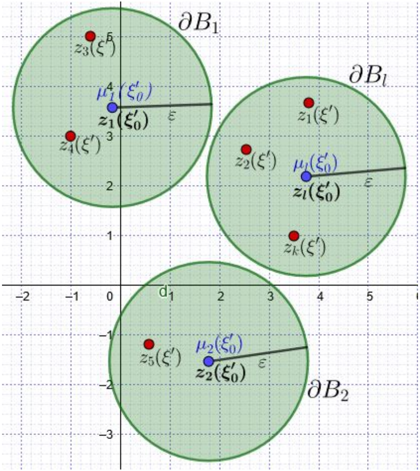
$$P(\xi_1, \xi') = \xi_1^m + \sum_{j=0}^{m-1} q_j(\xi')\xi_1^j.$$

- Fissato $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, siano $z_1(\xi'), \ldots, z_k(\xi')$ le radici distinte in $\mathbb{C}$ del polinomio di grado m

$$\xi_1 \to P(\xi_1, \xi').$$

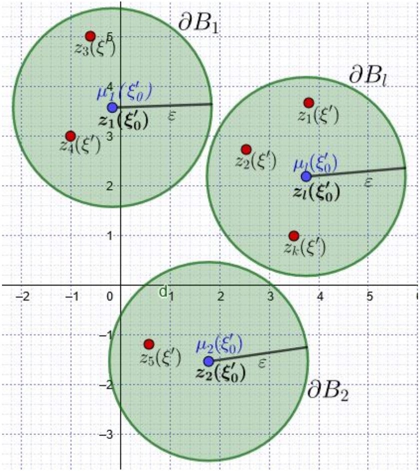
Lemma

Dati $\xi_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che, se $|\xi' - \xi_0'| < \delta$, ognuna delle radici $z_k(\xi')$ dista meno di ε da almeno una delle radici $z_l(\xi_0')$.



1. Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che, se

$$|\xi' - \xi'_0| < \delta \Rightarrow P(\cdot, \xi') \neq 0 \text{ su} \bigcup \partial B_j;$$

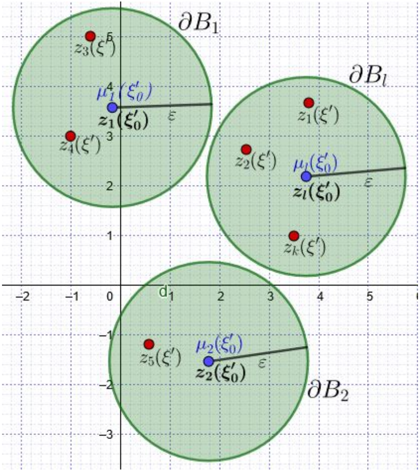


1. Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che, se

$$|\xi' - \xi'_0| < \delta \Rightarrow P(\cdot, \xi') \neq 0 \text{ su} \bigcup \partial B_j;$$

2. per $|\xi' - \xi'_0| < \delta$ è ben definito

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_j} \frac{\partial_1 P(z, \xi')}{P(z, \xi')}\, dz = \mu_j(\xi')$$



1. Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che, se

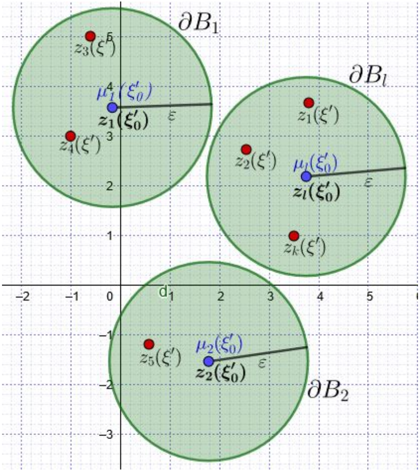
$$|\xi' - \xi'_0| < \delta \Rightarrow P(\cdot, \xi') \neq 0 \text{ su} \bigcup \partial B_j;$$

2. per $|\xi' - \xi'_0| < \delta$ è ben definito

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_j} \frac{\partial_1 P(z, \xi')}{P(z, \xi')}\, dz = \mu_j(\xi')$$

3. per il teorema dei residui, $\mu_j(\xi')$ è la somma delle molteplicità degli zeri di $P(\cdot, \xi')$ in B_j;

Aggirare le singolarità



1. Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che, se

$$|\xi' - \xi'_0| < \delta \Rightarrow P(\cdot, \xi') \neq 0 \text{ su} \bigcup \partial B_j;$$

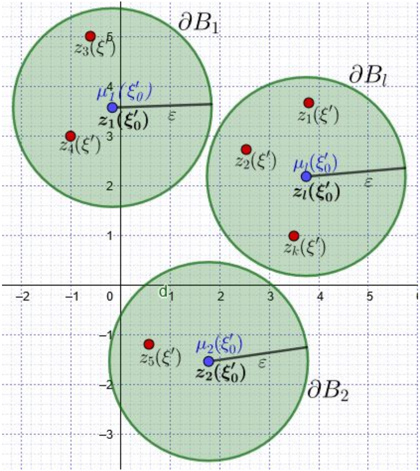
2. per $|\xi' - \xi'_0| < \delta$ è ben definito

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_j} \frac{\partial_1 P(z, \xi')}{P(z, \xi')}\, dz = \mu_j(\xi')$$

3. per il teorema dei residui, $\mu_j(\xi')$ è la somma delle molteplicità degli zeri di $P(\cdot, \xi')$ in B_j;
4. $\xi' \to \mu_j(\xi')$ è continua, quindi

$$\mu_j(\xi') = \mu_j(\xi'_0);$$

Aggirare le singolarità



1. Per continuità, esiste $\delta > 0$ tale che, se

$$|\xi' - \xi'_0| < \delta \Rightarrow P(\cdot, \xi') \neq 0 \text{ su} \bigcup \partial B_j;$$

2. per $|\xi' - \xi'_0| < \delta$ è ben definito

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial B_j} \frac{\partial_1 P(z, \xi')}{P(z, \xi')} \, dz = \mu_j(\xi')$$

3. per il teorema dei residui, $\mu_j(\xi')$ è la somma delle molteplicità degli zeri di $P(\cdot, \xi')$ in B_j;
4. $\xi' \to \mu_j(\xi')$ è continua, quindi

$$\mu_j(\xi') = \mu_j(\xi'_0);$$

5. $P(\cdot, \xi')$ ha m radici e ne ha almeno m (con molteplicità) in $\bigcup B_j$.

Definire φ

- Sia $\eta_k(\xi') = \Im(z_k(\xi'))$.

Definire φ

- Sia $\eta_k(\xi') = \Im(z_k(\xi'))$.
- Fissato $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, esiste $\nu(\xi'_0) \in [-m-1, m+1]$ tale che

$$|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi'_0)| > 1.$$

Definire φ

- Sia $\eta_k(\xi') = \Im(z_k(\xi'))$.
- Fissato $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, esiste $\nu(\xi'_0) \in [-m-1, m+1]$ tale che

$$|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi'_0)| > 1.$$

- Per il lemma, esiste $\delta_{\xi'_0} \in (0,1)$ tale che

$$|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in B_{\delta_{\xi'_0}}(\xi'_0) \quad \forall k.$$

Definire φ

- Sia $\eta_k(\xi') = \Im(z_k(\xi'))$.
- Fissato $\xi_0' \in \mathbb{R}^{n-1}$, esiste $\nu(\xi_0') \in [-m-1, m+1]$ tale che

$$|\nu(\xi_0') - \eta_k(\xi_0')| > 1.$$

- Per il lemma, esiste $\delta_{\xi_0'} \in (0,1)$ tale che

$$|\nu(\xi_0') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in B_{\delta_{\xi_0'}}(\xi_0') \quad \forall k.$$

- Estraiamo un sotto-ricoprimento di $\mathbb{R}^{n-1}$ localmente finito e numerabile $\left\{B_i := B_{\delta_{\xi_i'}}(\xi_i')\right\}_{i \in \mathbb{N}}$. Prendiamo un raffinamento disgiunto $\{V_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ tale che $V_i \subseteq B_i$ per ogni i.

Definire φ

- Sia $\eta_k(\xi') = \Im(z_k(\xi'))$.
- Fissato $\xi'_0 \in \mathbb{R}^{n-1}$, esiste $\nu(\xi'_0) \in [-m-1, m+1]$ tale che

$$|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi'_0)| > 1.$$

- Per il lemma, esiste $\delta_{\xi'_0} \in (0,1)$ tale che

$$|\nu(\xi'_0) - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in B_{\delta_{\xi'_0}}(\xi'_0) \quad \forall k.$$

- Estraiamo un sotto-ricoprimento di $\mathbb{R}^{n-1}$ localmente finito e numerabile $\left\{B_i := B_{\delta_{\xi'_i}}(\xi'_i)\right\}_{i\in\mathbb{N}}$. Prendiamo un raffinamento disgiunto $\{V_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ tale che $V_i \subseteq B_i$ per ogni i.
- Detto $\nu_i = \nu(\xi'_i)$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

Definire φ

- Detto $\nu_i = \nu(\xi_i')$, poniamo
$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi'). \tag{3}$$
- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).

Definire φ

- Detto $\nu_i = \nu(\xi_i')$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k. \tag{3}$$

Definire φ

- Detto $\nu_i = \nu(\xi_i')$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k.$$

Per ogni $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$\tag{3}$$

Definire φ

- Detto $\nu_i = \nu(\xi'_i)$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k.$$

Per ogni $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$|P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')| \tag{3}$$

- Detto $\nu_i = \nu(\xi'_i)$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k.$$

Per ogni $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$|P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')| = \prod_k |\xi_1 + i\varphi(\xi') - z_k(\xi')| \tag{3}$$

Definire φ

- Detto $\nu_i = \nu(\xi_i')$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k.$$

Per ogni $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$|P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')| \geq \prod_k |\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| \tag{3}$$

- Detto $\nu_i = \nu(\xi_i')$, poniamo

$$\varphi(\xi') = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i \chi_{V_i}(\xi').$$

- φ è misurabile e limitata (da $m+1$).
- Per costruzione, vale

$$|\varphi(\xi') - \eta_k(\xi')| > 1 \quad \forall \xi' \in \mathbb{R}^{n-1} \quad \forall k.$$

Per ogni $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$, si ha

$$|P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')| > 1. \tag{3}$$

Dimostrazione del teorema di M-E

Data $f \in \mathcal{D}$, poniamo

$$< u, f > := \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi'. \tag{4}$$

Data $f \in \mathcal{D}$, poniamo

$$< u, f >:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi'. \tag{4}$$

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \, dx, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{5}$$

Data $f \in \mathcal{D}$, poniamo

$$< u, f >:= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi'. \tag{4}$$

$$\hat{f}(\mathbf{z}) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \, dx, \quad \mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{C}^n. \tag{5}$$

Per verificare che u è ben definito ed è in $\mathcal{D}'$, bisogna stimare $\hat{f}$!

Per costruzione, il denominatore è sotto controllo!

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \tag{6}$$

(7)

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \; dx \right| \tag{6}$$

(7)

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)| e^{\Im(\mathbf{z}) \cdot x} \, dx \tag{6}$$

(7)

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \int_{B_r} |f(x)| \, dx \tag{6}$$

(7)

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

(7)

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \tag{7}$$

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})| r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(-iz_j)^N e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \, dx \right| \tag{7}$$

(8)

(9)

Dimostrazione del teorema di M-E

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \partial_{x_j}^N e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \, dx \right| \tag{7}$$

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} \partial_j^N f(x) e^{-i\mathbf{z}\cdot x} \, dx \right| \tag{7}$$

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

(8)

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$\left(1 + \sum_{j=1}^{N} |z_j|^N\right) |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|} \|f\|_{B_r,N} \tag{8}$$

(9)

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r,N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1+|\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$\tag{9}$$

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r,N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1+|\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$|< u, f >| \tag{9}$$

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})| r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})| r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r, N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1 + |\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$|< u, f >| = \left| \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\hat{f}(-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi' \right| \tag{9}$$

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r,N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1+|\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$|< u, f >| \leq C_n \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\|f\|_{B_r,n+1} r^n e^{r|\varphi(\xi')|}}{(1+|\xi_1|+|\xi'|+|\varphi(\xi')|)^{n+1}} \, d\xi_1 \right) d\xi' \tag{9}$$

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r,N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1+|\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$|< u, f >| \leq C_n \|f\|_{B_r,n+1} r^n e^{(m+1)r} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(1+|\xi|)^{n+1}} \, d\xi \tag{9}$$

Sia $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r.

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{6}$$

$$|z_j|^N |\hat{f}(\mathbf{z})| \leq \omega_n r^n \|\partial_j^N f\|_\infty e^{|\Im(\mathbf{z})|r} \tag{7}$$

$$|\hat{f}(\mathbf{z})| \leq C_n \frac{\|f\|_{B_r,N} r^n e^{r|\Im(\mathbf{z})|}}{(1+|\mathbf{z}|)^N} \tag{8}$$

$$|< u, f >| = C_{n,r} \|f\|_{B_r,n+1} \tag{9}$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$< P(D)u, f >$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f >=< \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$< P(D)u, f > \; =< u, P(-D)f >$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f >=< \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$< P(D)u, f > \; = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[P\widehat{(-D)}f](-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \, d\xi_1 \right) \, d\xi'$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$< P(D)u, f > \; = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{[\check{P}\hat{f}](-\xi_1 - i\varphi(\xi'), -\xi')}{P(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')} \; d\xi_1 \right) \; d\xi'$$

Dimostrazione del teorema di M-E

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$< P(D)u, f > \; = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi') \; d\xi_1 \right) \; d\xi'$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$\begin{aligned} < P(D)u, f > &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')\ d\xi_1 \right) d\xi' \\ &\overset{?}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1, \xi')\ d\xi_1 \right) d\xi' \end{aligned}$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

$$\begin{aligned}
< P(D)u, f > &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi') \, d\xi_1 \right) d\xi' \\
&\stackrel{?}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1, \xi') \, d\xi_1 \right) d\xi' \\
&= f(0)
\end{aligned}$$

Dobbiamo verificare che

$$< P(D)u, f > = < \delta_0, f > \quad \forall f \in \mathcal{D}.$$

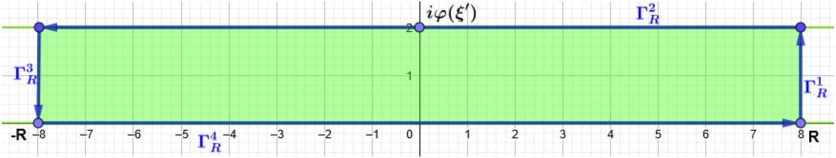
$$\begin{aligned}
< P(D)u, f > &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi') \, d\xi_1 \right) \, d\xi' \\
&\overset{?}{=} \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1, \xi') \, d\xi_1 \right) \, d\xi' \\
&= < \delta_0, f >
\end{aligned}$$

Siano $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r e $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Concludiamo se mostriamo che

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi')\ d\xi_1 \overset{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1, \xi')\ d\xi_1$$

Siano $f \in \mathcal{D}$ con supporto in B_r e $\xi' \in \mathbb{R}^{n-1}$. Concludiamo se mostriamo che

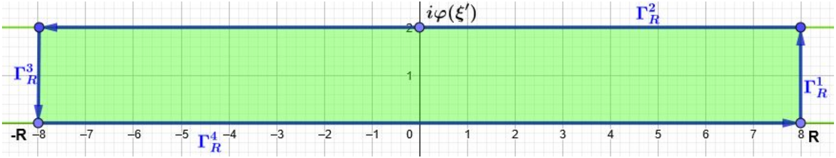
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1 + i\varphi(\xi'), \xi') \, d\xi_1 \stackrel{?}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \check{\hat{f}}(\xi_1, \xi') \, d\xi_1$$

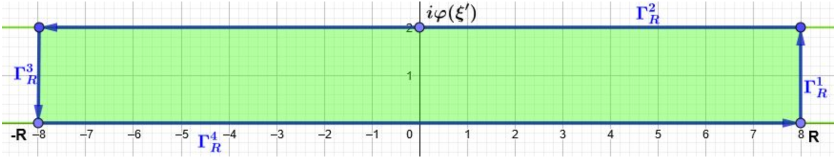


La funzione $z \to \check{\hat{f}}(z, \xi')$ è olomorfa:

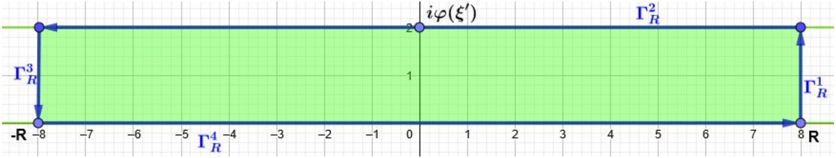
$$0 = \int_{\Gamma_R^1} \check{\hat{f}}(z, \xi') \, dz + \int_{\Gamma_R^2} \check{\hat{f}}(z, \xi') \, dz + \int_{\Gamma_R^3} \check{\hat{f}}(z, \xi') \, dz + \int_{\Gamma_R^4} \check{\hat{f}}(z, \xi') \, dz.$$

Dimostrazione del teorema di M-E



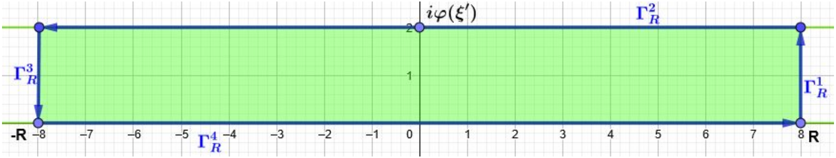


$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\,dz=-\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\,d\xi'$$



$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = -\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\ d\xi'$$

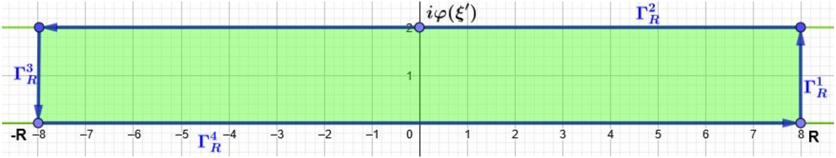
$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\ d\xi'$$



$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = -\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\ d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\ d\xi'$$

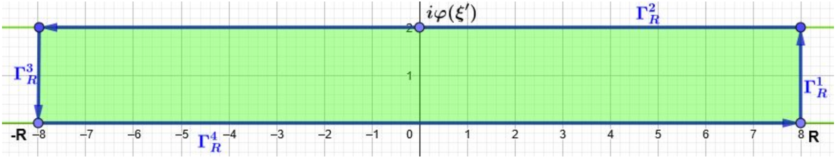
$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^1}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz\right|$$



$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = -\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\ d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\ d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^1}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz\right| = \lim_{R\to+\infty}\left|\int_0^{|\varphi(\xi')|}\check{\hat{f}}(R+it,\xi')\ dt\right|$$

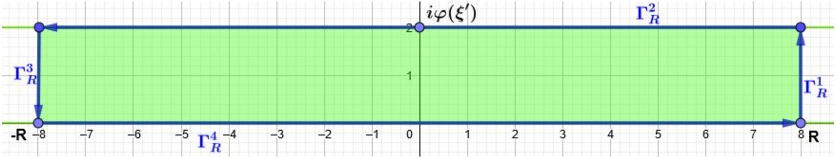


$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\,dz = -\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\,d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\,dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\,d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^1}\check{\hat{f}}(z,\xi')\,dz\right| \le \lim_{R\to+\infty}|\varphi(\xi')|\sup_{t\in[0,|\varphi(\xi')|]}\left[C_n\frac{\|f\|_{B_r,1}r^n e^{r|\varphi(\xi')|}}{1+|R+it|+|\xi'|}\right]$$

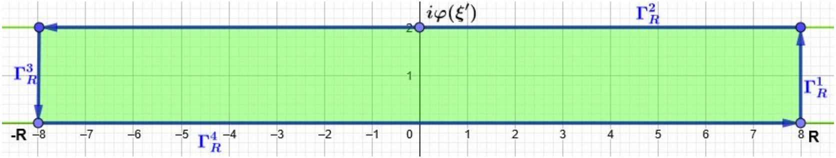
Dimostrazione del teorema di M-E



$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = -\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\ d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz = \int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\ d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^1}\check{\hat{f}}(z,\xi')\ dz\right| = 0$$



$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^2}\check{\hat{f}}(z,\xi')\;dz=-\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1+i\varphi(\xi'),\xi')\;d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\int_{\Gamma_R^4}\check{\hat{f}}(z,\xi')\;dz=\int_{-\infty}^{+\infty}\check{\hat{f}}(\xi_1,\xi')\;d\xi'$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^1}\check{\hat{f}}(z,\xi')\;dz\right|=0$$

$$\lim_{R\to+\infty}\left|\int_{\Gamma_R^3}\check{\hat{f}}(z,\xi')\;dz\right|=0 \qquad \blacksquare$$

Grazie per l'attenzione!