

Compito di Meccanica Razionale 15 Settembre 2025

Esercizio 1. Si consideri il moto di un punto di massa $m = 1$ soggetto alla forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

dove

$$f(\rho) = -\frac{1}{\rho^2} - \frac{1}{2\rho^3}.$$

Trovare il valore della norma del momento angolare $|c|$ per cui si ha un'orbita circolare di raggio $\bar{\rho} = \frac{1}{2}$.

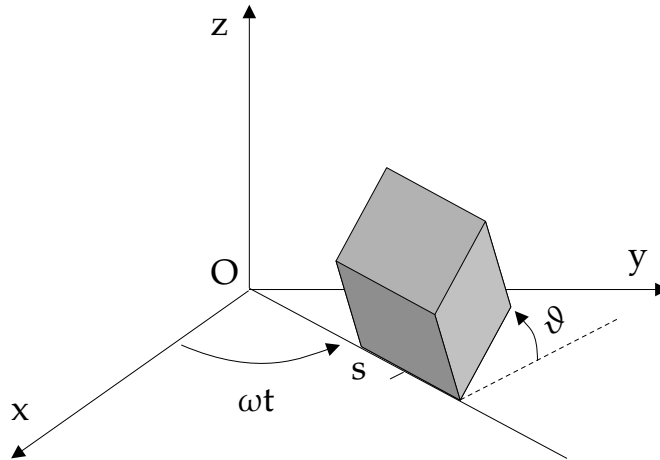
Inoltre, in corrispondenza di tale valore di $|c|$:

1. Scrivere l'equazione della traiettoria utilizzando la formula di Binet.
2. Trovare il valore dell'energia totale E per cui si ha un moto limitato all'interno della corona circolare di raggi

$$\rho_- = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \rho_+ = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

dove $\rho_{\pm}$ sono i punti di inversione del moto unidimensionale corrispondente a questo moto centrale.

Esercizio 2. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$, con asse Oz verticale ascendente. Una guida rettilinea, incernierata nell'origine O , ruota con velocità angolare costante ω nel piano Oxy . Lungo tale guida può scorrere un lato L , di lunghezza ℓ , di un cubo omogeneo di massa m . Sia s l'ascissa del punto medio del lato che scorre lungo la guida e sia ϑ l'angolo che una faccia del cubo, alla quale appartiene il lato L , forma con il piano Oxy (vedi figura). Calcolare l'energia cinetica del cubo.



Esercizio 3. Si fissi un sistema di riferimento $Oxyz$ e si consideri il sistema meccanico formato da due punti materiali P_1 e P_2 di massa m collegati da una molla di costante elastica $k > 0$. Il punto P_1 può scivolare sulla parabola

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) : z = y^2 - 1, x = 0\},$$

mentre il punto P_2 può scivolare sulla circonferenza

$$\mathcal{C} = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$$

Si usino come coordinate lagrangiane la coordinata y del punto P_1 e l'angolo θ che il punto P_2 descrive sulla circonferenza $\mathcal{C}$, assumendo $\theta = 0$ quando P_2 si trova nel punto di coordinare $(x, y, z) = (1, 0, 0)$.

1. Scrivere la lagrangiana e le equazioni di Lagrange del sistema.
2. Trovare le configurazioni di equilibrio e studiarne la stabilità.

Esercizio 1.

Iniziamo trovando $|c|$ come richiesto. Imponiamo la condizione per ottenere orbite circolari:

$$\ddot{\rho} = 0 \rightarrow f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow -\frac{1}{\rho^2} + \frac{2c^2 - 1}{2\rho^3} = 0 \rightarrow -2\rho + 2c^2 - 1 = 0.$$

Imponendo che $\rho = 1/2$, otteniamo $|c| = 1$.

1. Per trovare l'equazione polare della traiettoria, usiamo la seguente equazione (ottenuta a partire dalla formula di Binet):

$$u'' = g(u), \quad g(u) = -f\left(\frac{1}{u}\right) \frac{1}{4m\alpha^2 u^2} - u = \left(u^2 + \frac{u^3}{2}\right) \frac{1}{u^2} - u = -\frac{u}{2} + 1$$

dove $\alpha = c/(2m) = 1/2$ e $u(\theta) = 1/\rho(\theta)$ (θ è la variabile angolo delle coordinate polari sul piano del moto).

La soluzione particolare per questa equazione differenziale è $u_0 = 2$, mentre possiamo ricavare la soluzione generale partendo dall'equazione caratteristica

$$\lambda^2 = -\frac{1}{2} \implies \lambda = \pm i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Perciò la soluzione completa è

$$u(\theta) = a \cos\left(\theta \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \sin\left(\theta \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2$$

con a e b costanti reali che dipendono dalle condizioni iniziali. L'equazione polare della traiettoria è quindi

$$\rho(\theta) = \frac{1}{a \cos\left(\theta \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + b \sin\left(\theta \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 2}$$

2. Per $|c| = 1$ l'energia potenziale efficace vale

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = -\frac{1}{\rho} + \frac{1}{4\rho^2}$$

Dal grafico di tale funzione (qui omissso) è facile capire che, per avere delle orbite limitate tra due corone circolari, è necessario che $E < 0$. Per trovare i punti di inversione, poniamo

$$\mathcal{V}_{\text{eff}}(\rho) = E \implies E + \frac{1}{\rho} - \frac{1}{4\rho^2} = 0 \implies 4E\rho^2 + 4\rho - 1 = 0$$

Imponendo che $\rho = 1 - \sqrt{2}/2$, otteniamo

$$4E \left(1 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = -3 + 2\sqrt{2}$$

Invece, imponendo $\rho = 1 + \sqrt{2}/2$, otteniamo

$$4E \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2} \right) = -3 - 2\sqrt{2}$$

Sottraendo le due equazioni, troviamo che

$$8\sqrt{2}E = -4\sqrt{2} \implies E = -\frac{1}{2}$$

Esercizio 2.

Per calcolare l'energia cinetica del cubo usiamo il teorema di Konig

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 + \frac{1}{2}\boldsymbol{\varpi} \cdot I_B \boldsymbol{\varpi}.$$

dove $\mathbf{v}_B$ è la velocità del baricentro, $\boldsymbol{\varpi}$ la velocità angolare del cubo e I_B la sua matrice di inerzia rispetto al baricentro. La posizione del baricentro è

$$(B - O) = (G - O) + (B - G) = s(\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_2) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell(-\cos(\vartheta + \pi/4)\sin(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_1 + \cos(\vartheta + \pi/4)\cos(\omega t)\hat{\mathbf{e}}_2 + \sin(\vartheta + \pi/4)\hat{\mathbf{e}}_3)$$

dove con G abbiamo indicato il punto medio di L . La velocità del baricentro è quindi

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_B = & \left(\dot{s}\cos(\omega t) - s\omega\sin(\omega t) + \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot{\vartheta}\sin(\vartheta + \pi/4)\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\omega\cos(\vartheta + \pi/4)\cos(\omega t) \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \\ & \left(\dot{s}\sin(\omega t) + s\omega\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot{\vartheta}\sin(\vartheta + \pi/4)\cos(\omega t) - \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\omega\cos(\vartheta + \pi/4)\sin(\omega t) \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \\ & \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\dot{\vartheta}\cos(\vartheta + \pi/4)\hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned}$$

Perciò

$$\frac{1}{2}m|\mathbf{v}_B|^2 = \frac{1}{2}m \left(\dot{s}^2 + s^2\omega^2 + \frac{1}{2}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\ell^2\omega^2\cos^2(\vartheta + \pi/4) - \sqrt{2}\ell\dot{s}\omega\cos(\vartheta + \pi/4) - \sqrt{2}\ell s\dot{\vartheta}\omega\sin(\vartheta + \pi/4) \right)$$

Si noti che si poteva calcolare $\mathbf{v}_B$ usando le formule di trasformazione della velocità da un sistema di riferimento all'altro (in particolare dal sistema Σ a quello solidale).

Per la parte rotazionale, iniziamo calcolando la matrice di inerzia del cubo rispetto al suo baricentro. Tale matrice è un multiplo dell'identità. Prendiamo infatti un sistema di riferimento centrato in B e con gli assi paralleli alle facce del cubo. Tale sistema è principale di inerzia, poichè tutti e tre gli assi sono di simmetria per rotazione, e tutti i momenti sono uguali in quanto la distribuzione di massa attorno a questi assi è identica. Basta quindi calcolarne solo uno. Sia $\rho = m/\ell^3$ la densità costante del cubo, allora

$$I_1 = \rho \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} (y^2 + z^2) dx dy dz = \frac{1}{6}\rho\ell^5 = \frac{1}{6}m\ell^2$$

Calcoliamo ora la velocità angolare del cubo. Essa equivale alla velocità angolare di un sistema di riferimento ad esso solidale. Ricostruiamo le rotazioni elementari che portano dal sistema $\Sigma = Oxyz$ al sistema Σ'' solidale con assi paralleli alle facce del cubo.

Consideriamo prima la rotazione elementare $R_3^{\omega t}$ che porta Σ nel sistema di riferimento intermedio Σ' con asse x' lungo la guida. Per arrivare al sistema di riferimento solidale, consideriamo successivamente la rotazione R_1^ϑ . In questo modo abbiamo che tutti i versori $\hat{e}_1''$, $\hat{e}_2''$ e $\hat{e}_3''$ associati agli assi di Σ'' sono paralleli alle facce del cubo. Nota bene: per visualizzare meglio il sistema di riferimento solidale, può essere utile (anche se non necessario) trasportare Σ' e Σ'' in G (punto medio di L).

Per costruzione, la velocità angolare di Σ' rispetto a Σ è $\varpi' = \dot{\vartheta}\hat{e}_3$, mentre la velocità angolare di Σ'' rispetto a Σ' è $\varpi'' = \dot{\vartheta}\hat{e}_1'$.

Perciò la velocità angolare del corpo rigido sarà la somma delle due

$$\varpi = \varpi' + \varpi'' = \omega\mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}\mathbf{e}_1' = \omega\mathbf{e}_3 + \dot{\vartheta}R_3^{\omega t}\mathbf{e}_1 = \dot{\vartheta}\cos(\omega t)\mathbf{e}_1 + \dot{\vartheta}\sin(\omega t)\mathbf{e}_2 + \omega\mathbf{e}_3$$

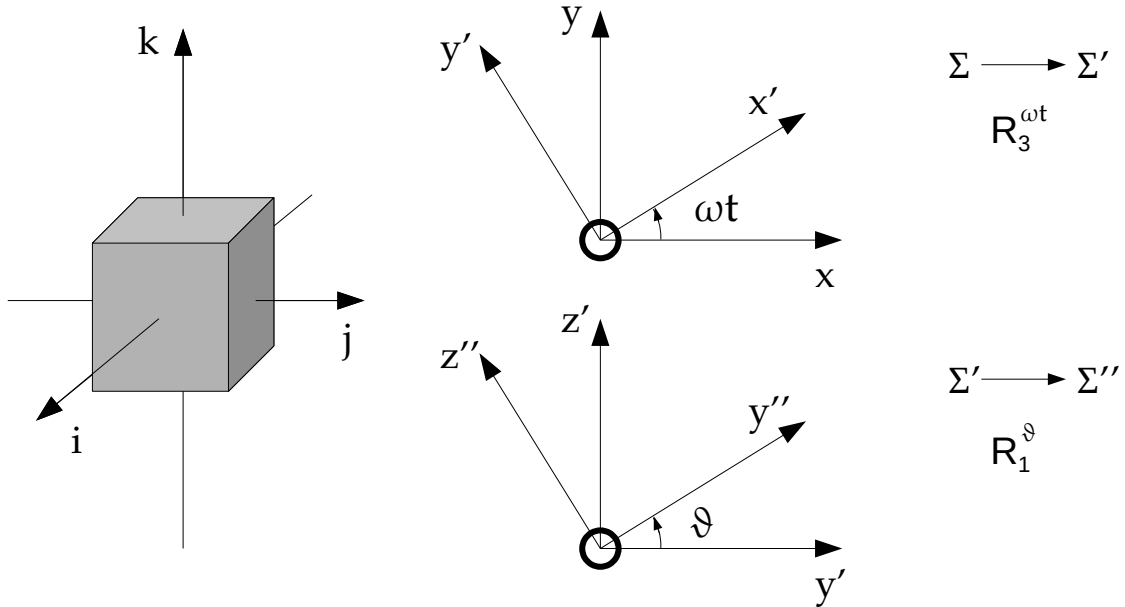
scritto nelle coordinate di Σ .

Siccome la matrice I_B è un multiplo dell'identità, essa è uguale in tutti i sistemi di riferimento (invarianza per rotazione). Perciò possiamo calcolare il contributo rotazionale all'energia cinetica senza dovere trasformare le coordinate della velocità angolare ϖ in Σ'' .

$$\frac{1}{2}\varpi \cdot I_B \varpi = \frac{1}{12}m\ell^2(\omega^2 + \dot{\vartheta}^2)$$

Infine l'energia cinetica totale è la somma dei due contributi precedentemente calcolati

$$\mathcal{T} = \frac{1}{2}m \left(\dot{s}^2 + \left(s^2 + \frac{1}{6}\ell^2 \right) \omega^2 + \frac{2}{3}\ell^2\dot{\vartheta}^2 + \frac{1}{2}\ell^2\omega^2 \cos^2(\vartheta + \pi/4) - \sqrt{2}\ell\dot{s}\omega \cos(\vartheta + \pi/4) - \sqrt{2}\ell s\dot{\omega} \sin(\vartheta + \pi/4) \right)$$



Esercizio 3.

1. Scriviamo le coordinate dei vettori posizione e velocità dei punti P_1 e P_2 .

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= y\mathbf{e}_2 + (y^2 - 1)\mathbf{e}_3, & \mathbf{v}_1 &= \dot{y}\mathbf{e}_2 + 2y\dot{y}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{x}_2 &= \cos\theta\mathbf{e}_1 + \sin\theta\mathbf{e}_2, & \mathbf{v}_2 &= -\sin\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_1 + \cos\theta\dot{\theta}\mathbf{e}_2.\end{aligned}$$

L'energia cinetica è la somma dell'energia cinetica dei due punti:

$$T = \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_1|^2 + \frac{1}{2}m|\mathbf{v}_2|^2 = \frac{1}{2}m\dot{y}^2(4y^2 + 1) + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2$$

L'energia potenziale dovuta alla molla vale (non c'è gravità):

$$V = \frac{1}{2}k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^2 = \frac{1}{2}k(\cos^2\theta + (y - \sin\theta)^2 + (y^2 - 1)^2) = \frac{1}{2}k(y^4 - y^2 - 2y\sin\theta + 2)$$

Perciò la lagrangiana è (a meno di costanti additive):

$$L = T - V = \frac{1}{2}m\dot{y}^2(4y^2 + 1) + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}k(y^4 - y^2 - 2y\sin\theta)$$

e le equazioni di Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} m\ddot{y}(4y^2 + 1) + 4m\dot{y}^2y + k(2y^3 - y - \sin\theta) = 0 \\ m\ddot{\theta} - ky\cos\theta = 0 \end{cases}$$

2. Per trovare i punti di equilibrio, calcoliamo i punti stazionari della funzione V :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial y} = k(2y^3 - y - \sin\theta) = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = -ky\cos\theta = 0 \end{cases}$$

Dalla seconda equazione otteniamo

$$y = 0 \vee \cos\theta = 0$$

Nel caso $y = 0$, dalla prima equazione otteniamo $\sin\theta = 0$, perciò troviamo le due configurazioni di equilibrio

$$(y, \theta) = (0, 0), (0, \pi)$$

Nel caso $\theta = \pi/2$, la prima equazione diventa $2y^3 - y - 1$, che ha come unica soluzione reale $y = 1$. Invece, se $\theta = 3\pi/2$, la prima equazione diventa $2y^3 - y + 1$,

che ha come unica soluzione reale $y = -1$. Perciò ci sono altre due configurazioni di equilibrio

$$(y, \theta) = (1, \pi/2), (-1, 3\pi/2)$$

Studiamo la stabilità delle quattro configurazioni di equilibrio. Calcoliamo la matrice hessiana di V :

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(y, \theta)^2} = k \begin{bmatrix} 6y^2 - 1 & -\cos \theta \\ -\cos \theta & y \sin \theta \end{bmatrix}$$

Valutiamo V''/k nelle quattro configurazioni di equilibrio.

$$V''(0, 0)/k = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det = -1 < 0$ e $\text{tr} = -1 < 0$

$\det < 0 \implies$ esiste autovalore $\lambda_i < 0 \implies (0, 0)$ è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(0, \pi)/k = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$\det = -1 < 0$ e $\text{tr} = -1 < 0$

$\det < 0 \implies$ esiste autovalore $\lambda_i < 0 \implies (0, \pi)$ è instabile perchè almeno un esponente di Lyapunov è positivo.

$$V''(1, \pi/2)/k = V''(-1, 3\pi/2)/k = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

autovalori $\lambda_1, \lambda_2 > 0 \implies (1, \pi/2)$ e $(-1, 3\pi/2)$ sono minimi stretti di V e quindi stabili per il teorema di Lagrange-Dirichlet.