

Compito di Meccanica Razionale 16 Giugno 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = f(\rho) \frac{\mathbf{x}}{\rho}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \quad \rho = |\mathbf{x}|,$$

$$f(\rho) = -2 + \frac{15}{\rho} - \frac{24}{\rho^2} - \frac{5}{\rho^3}.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

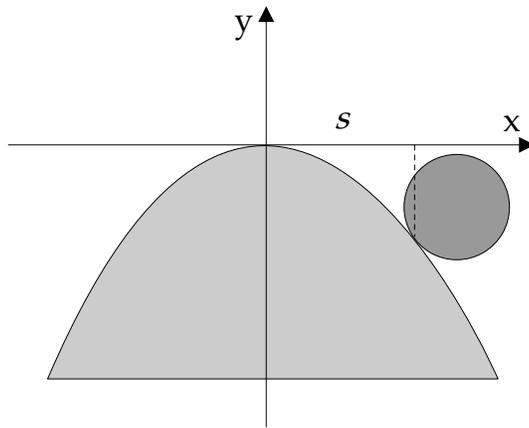
- i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c .
- ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c .
- iii) Si consideri l'orbita con condizioni iniziali

$$\mathbf{x}(0) = (2, 0, 0), \quad \dot{\mathbf{x}}(0) = (a, 2, 0), \quad a \in \mathbb{R}.$$

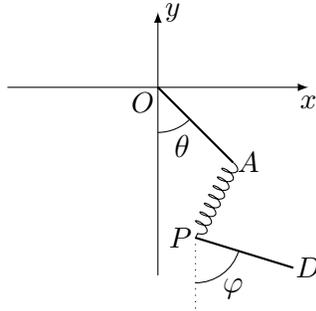
Trovare l'insieme dei valori di a per cui la distanza minima ρ_{\min} dell'orbita da O sia minore di 1.

Esercizio 2. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy , con asse Oy verticale ascendente. Prendiamo una lamina \mathcal{P} omogenea di massa M a forma di settore parabolico, la cui posizione rimane fissa ed è delimitata dalla parabola di equazione $y = -(1/2)x^2$ e la retta $y = -2$. Consideriamo inoltre un disco \mathcal{D} di raggio $r = 1/2$ che rotola senza strisciare sull'arco parabolico della lamina \mathcal{P} (si veda la figura).

- i) Calcolare i momenti principali di inerzia della lamina \mathcal{P} rispetto all'origine O .
- ii) Usando come coordinata l'ascissa s del punto di contatto del disco con la parabola, calcolare la velocità angolare del disco \mathcal{D} .



Esercizio 3. In un piano verticale si fissi un sistema di riferimento Oxy con asse Oy verticale ascendente. Si consideri in tale piano il sistema meccanico formato da due aste omogenee, entrambe di massa m e lunghezza 2ℓ . Un estremo della prima asta è incernierato nell'origine O , mentre l'altro estremo è collegato all'estremo P della seconda asta tramite una molla di costante elastica $k > 0$ e lunghezza a riposo nulla. Sul sistema agisce anche la forza di gravità, di accelerazione g . Si assume che tutti i vincoli siano ideali.



Usando come coordinate lagrangiane le coordinate x, y del punto P e gli angoli θ, φ che le due aste formano con la direzione verticale (vedi figura)

- i) determinare tutti i punti di equilibrio del sistema;
- ii) studiare la stabilità di tali equilibri.

Esercizio 1.

1. Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari risolvo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$-2 + \frac{15}{\rho} - \frac{24}{\rho^2} - \frac{5}{\rho^3} + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \quad \rightarrow \quad -2\rho^3 + 15\rho^2 - 24\rho + c^2 - 5 = 0$$

Studio il polinomio $P(\rho)$ definito sopra per capire quante radici reali positive possiede. Poiché $P(\rho)$ presenta due cambi di segno se $c^2 - 5 \leq 0$ e tre se $c^2 - 5 > 0$, dalla regola di Cartesio vale che $P(\rho)$ ha al massimo due e tre radici positive, rispettivamente. In più:

$$P(0) = c^2 - 5 \quad \text{e} \quad \lim_{\rho \rightarrow +\infty} P(\rho) = -\infty$$

Studiando i massimi e i minimi di $P(\rho)$ è possibile ricavare quante volte il grafico del polinomio attraversa l'asse delle ascisse. I punti stazionari sono:

$$P'(\rho) = -6\rho^2 + 30\rho - 24 = 0 \quad \implies \quad \rho = 1 \vee \rho = 4$$

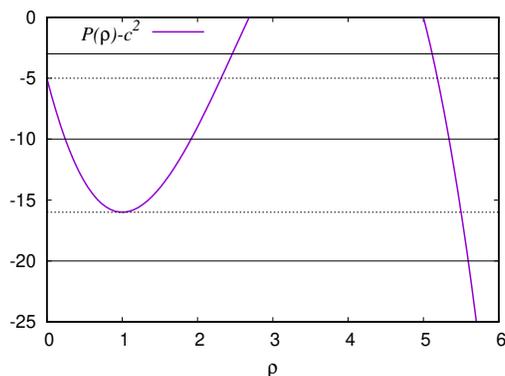
Dal valore del polinomio agli estremi del dominio ricavo che $\rho = 1$ è punto di minimo, mentre $\rho = 4$ di massimo. Valuto $P(\rho)$ nei punti stazionari:

$$P(1) = -2 + 15 - 24 + c^2 - 5 = c^2 - 16$$

$$P(4) = -128 + 240 - 96 + c^2 - 5 = c^2 + 11 > 0$$

A seconda del valore di c , il grafico del polinomio attraverserà il semiasse positivo delle ascisse un certo numero di volte (si veda la figura), che corrisponde al numero di orbite circolari. Ci sono le seguenti casistiche:

- $|c| \leq \sqrt{5}$, ci sono due attraversamenti, quindi due orbite circolari con $1 < \rho_2 < 4$ e $\rho_3 > 4$;
- $\sqrt{5} < |c| < 4$, tre orbite circolari con $\rho_1 < 1$, $1 < \rho_2 < 4$ e $\rho_3 > 4$;
- $|c| = 4$, due orbite circolari con $\rho_2 = 1$ e $\rho_3 > 4$.
- $|c| > 4$, un'unica orbita circolare con $\rho_3 > 4$.



2. L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = - \int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = 2\rho - 15 \log \rho - \frac{24}{\rho} + \frac{c^2 - 5}{2\rho^2}$$

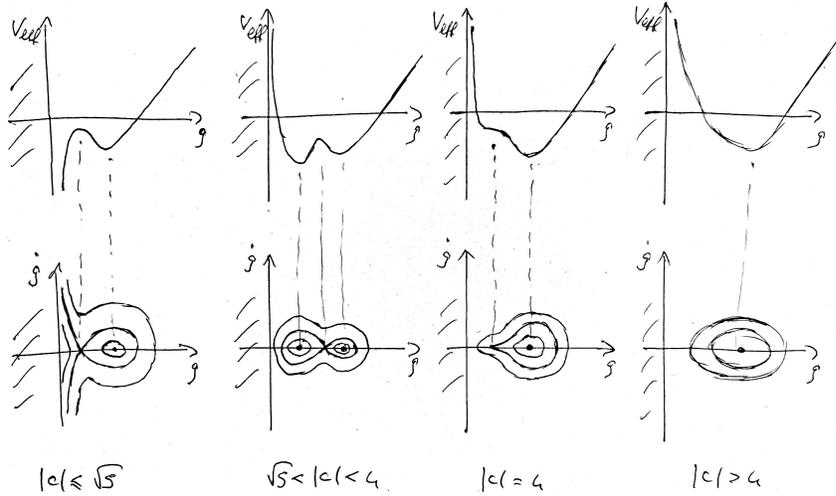
Per $\rho \rightarrow +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = +\infty$$

mentre per $\rho \rightarrow 0^+$ il termine dominante è l'ultimo (se $c^2 \neq 5$), perciò

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c^2 > 5 \\ -\infty & \text{se } c^2 \leq 5 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), ho i seguenti casi:



3. Poiché le condizioni iniziali sono contenute nel piano $O\hat{e}_1\hat{e}_2$, esso è il piano del moto. In tale piano ad ogni tempo vale che

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta.$$

Inoltre è facile verificare che all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \mathbf{e}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \mathbf{e}_2$. Valutando le espressioni sopra all'istante iniziale ottengo

$$\rho(0) = 2, \quad \dot{\rho}(0) = a \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = 2,$$

da cui ricavo che $c = \rho^2 \dot{\theta} = 4$. Dal ritratto di fase corrispondente segue che tutte le orbite sono limitate e che per avere $\rho_{\min} < 1$ il valore dell'energia $E(\rho, \dot{\rho})$ dell'orbita deve essere superiore a $\bar{E} = E(1, 0) = V_{\text{eff}}(1) = -33/2$.

$$E = \frac{1}{2} \dot{\rho}(0)^2 + V_{\text{eff}}(\rho(0)) = \frac{1}{2} a^2 - 15 \log 2 - \frac{53}{8}$$

$$\implies |a| > \sqrt{30 \log 2 - \frac{79}{4}}$$

Esercizio 2.

1. Per calcolare i momenti principali di inerzia di \mathcal{P} rispetto ad O , individuo prima un sistema principale di inerzia. Considero il sistema di riferimento riportato nella figura dell'esercizio e prendo i versori $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ associati a Ox , Oy e Oz . Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto:

- $\hat{\mathbf{e}}_3$ è una direzione principale, perché il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano Oxy ;

- $\hat{\mathbf{e}}_1$ è una direzione principale, perché ortogonale al piano Oyz che è di simmetria per riflessione per il corpo;

- $\hat{\mathbf{e}}_2$ è una direzione principale, perché l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali.

I momenti principali di inerzia saranno quindi gli elementi diagonali della matrice di inerzia calcolati in questa base. Il supporto di \mathcal{P} è definito dall'insieme

$$\mathcal{P} = \{(x, y, z) \mid -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq -(1/2)x^2, z = 0\}$$

Calcolo prima l'area di \mathcal{P} per avere una relazione tra M e la densità omogenea σ della lamina:

$$A = \int_{-2}^2 \int_{-2}^{-(1/2)x^2} dy dx = \int_{-2}^2 \left(-\frac{1}{2}x^2 + 2 \right) dx = \frac{16}{3}$$

Perciò vale che $M = (16/3)\sigma$.

Calcolo i momenti principali di inerzia

$$I_1 = I_{11} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^{-(1/2)x^2} \sigma y^2 dy dx = \int_{-2}^2 \frac{\sigma}{3} \left(-\frac{1}{8}x^6 + 8 \right) dx = \frac{12}{7}M$$

$$I_2 = I_{22} = \int_{-2}^2 \int_{-2}^{-(1/2)x^2} \sigma x^2 dy dx = \int_{-2}^2 \sigma \left(-\frac{1}{2}x^4 + 2x^2 \right) dx = \frac{4}{5}M$$

$$I_3 = I_{33} = I_{11} + I_{22} = \frac{88}{35}M$$

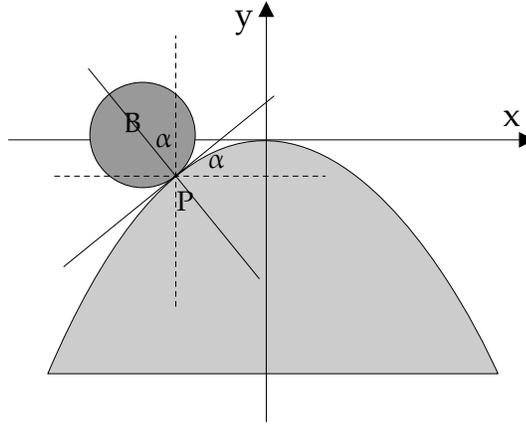
2. Per calcolare la velocità angolare del disco uso la formula fondamentale della cinematica rigida. Poiché il punto di contatto P appartiene alla parabola, vale che

$$(P - O) = s\hat{\mathbf{e}}_1 - (1/2)s^2\hat{\mathbf{e}}_2$$

In più, per ipotesi, la sua velocità come punto solidale al disco è nulla.

La posizione del baricentro B del disco può essere calcolata a partire dalla posizione del punto P e calcolando l'angolo di pendenza α della retta tangente alla

parabola, che in questo caso sta tra -90° a 90° . Per convenienza considero il disegno riportato sotto, in cui il disco si trova a sinistra dell'asse Oy , in modo da avere un angolo di pendenza della retta tra 0 e 90° .



Il coefficiente angolare della retta sarà semplicemente la derivata della parabola nel punto, cioè $-s$. La relazione tra l'angolo α e s è

$$\tan \alpha = -s \implies \alpha = \arctan(-s)$$

Posso scrivere il vettore posizione del baricentro B in questo modo

$$(B - O) = (P - O) + (B - P) = \left(s - \frac{1}{2} \sin \alpha\right) \hat{e}_1 + \left(-\frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{2} \cos \alpha\right) \hat{e}_2$$

e la sua velocità sarà

$$\mathbf{v}_B = \dot{s} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{\cos \alpha}{1 + s^2}\right) \hat{e}_1 + \dot{s} \left(-s - \frac{1}{2} \frac{\sin \alpha}{1 + s^2}\right) \hat{e}_2$$

Sia $\boldsymbol{\omega} = \omega \hat{e}_3$ la velocità angolare del disco, dalla formula fondamentale della cinematica rigida ottengo

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \hat{e}_3 \times (B - P) = -\frac{1}{2} \omega \cos \alpha \hat{e}_1 - \frac{1}{2} \omega \sin \alpha \hat{e}_2$$

Da cui ricavo (proiettando su \hat{e}_1 , o su \hat{e}_2 per $\sin \alpha \neq 0$)

$$\omega = -\dot{s} \left(\frac{2}{\cos \alpha} + \frac{1}{1 + s^2}\right).$$

Si noti che si ha la relazione $\cos \alpha = 1/\sqrt{1 + s^2}$ e $\sin \alpha = -s/\sqrt{1 + s^2}$.

Esercizio 3.

1. Scrivo prima le coordinate dei punti A , P e dei baricentri delle due aste:

$$\begin{aligned}(A - O) &= 2\ell \sin \theta \mathbf{e}_1 - 2\ell \cos \theta \mathbf{e}_2, & (P - O) &= x \mathbf{e}_1 + y \mathbf{e}_2 \\ (B_1 - O) &= \ell \sin \theta \mathbf{e}_1 - \ell \cos \theta \mathbf{e}_2, & (B_2 - O) &= (x + \ell \sin \varphi) \mathbf{e}_1 + (y - \ell \cos \varphi) \mathbf{e}_2\end{aligned}$$

L'energia potenziale del sistema è la somma dell'energia potenziale gravitazionale delle due aste e dell'energia potenziale associata alla molla

$$\begin{aligned}V &= -mgl \cos \theta + mg(y - \ell \cos \varphi) + \frac{1}{2}k((x - 2\ell \sin \theta)^2 + (y + 2\ell \cos \theta)^2) \\ &= -mgl \cos \theta - mgl \cos \varphi + mgy + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2) + 2k\ell(y \cos \theta - x \sin \theta) + \text{costante}\end{aligned}$$

Per trovare i punti di equilibrio, calcolo i punti stazionari della funzione V :

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial x} = kx - 2k\ell \sin \theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial y} = mg + ky + 2k\ell \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} = mgl \sin \theta - 2k\ell y \sin \theta - 2k\ell x \cos \theta = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi} = mgl \sin \varphi = 0 \end{cases}$$

Dall'ultima equazione si ottiene che $\varphi = 0 \vee \varphi = \pi$ (seconda asta verticale). Dalla prima e seconda equazione segue che

$$\begin{cases} x = 2\ell \sin \theta \\ y = -mg/k - 2\ell \cos \theta \end{cases}$$

e una volta sostituite alla terza

$$mgl \sin \theta + 2mgl \sin \theta + 4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta - 4k\ell^2 \sin \theta \cos \theta = 0 \implies \sin \theta = 0$$

da cui le uniche soluzioni per θ sono $\theta = 0 \vee \theta = \pi$ (prima asta verticale).

Le configurazioni di equilibrio sono quindi le quattro seguenti

$$\begin{aligned}(x, y, \theta, \varphi) &= (0, -mg/k - 2\ell, 0, 0), (0, -mg/k - 2\ell, 0, \pi), \\ &= (0, -mg/k + 2\ell, \pi, 0), (0, -mg/k + 2\ell, \pi, \pi)\end{aligned}$$

2. Per studiare la stabilità di tali configurazioni, calcolo la matrice hessiana di V e la valuto in tali punti

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial(x, y, \theta, \varphi)^2} = \begin{bmatrix} k & 0 & -2k\ell \cos \theta & 0 \\ 0 & k & -2k\ell \sin \theta & 0 \\ -2k\ell \cos \theta & -2k\ell \sin \theta & mgl \cos \theta - 2k\ell y \cos \theta + 2k\ell x \sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mgl \cos \varphi \end{bmatrix}$$

Dall'ultimo elemento della matrice, noto che per le due configurazioni con $\varphi = \pi$ uno degli autovalori vale $mg\ell \cos \varphi = -mg\ell < 0$, perciò esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo. Quindi le configurazioni $(0, -mg/k - 2\ell, 0, \pi)$ e $(0, -mg/k + 2\ell, \pi, \pi)$ sono instabili.

Per le altre due configurazioni di equilibrio la matrice hessiana vale

$$V''(0, -mg/k - 2\ell, 0, 0) = \begin{bmatrix} k & 0 & -2k\ell & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ -2k\ell & 0 & 3mg\ell + 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

$$V''(0, -mg/k + 2\ell, \pi, 0) = \begin{bmatrix} k & 0 & 2k\ell & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 2k\ell & 0 & -3mg\ell - 4k\ell^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mg\ell \end{bmatrix}$$

Poiché V'' è simmetrica, per entrambe le matrici vale che almeno tre autovalori sono positivi, in quanto il minore principale 2x2 è definito positivo e in più l'autovalore $mg\ell$ è positivo. Per concludere sulla stabilità di queste due configurazioni, basta quindi controllare il segno del determinante, da cui segue il segno dell'ultimo autovalore.

Per la configurazione $(0, -mg/k - 2\ell, 0, 0)$ vale che

$$\det = mg\ell (k^2(3mg\ell + 4k\ell^2) - 4k^3\ell^2) = 3(mg\ell)^2 k^2 > 0$$

perciò la configurazione è stabile per Lagrange-Dirichlet, in quanto il punto è un minimo stretto di V essendo tutti gli autovalori di V'' positivi.

Per la configurazione $(0, -mg/k + 2\ell, \pi, 0)$ vale che

$$\det = mg\ell (k^2(-3mg\ell - 4k\ell^2) - 4k^3\ell^2) < 0$$

perciò la configurazione è instabile, in quanto un autovalore di V'' è negativo e quindi esiste almeno un esponente di Lyapunov positivo.