Primo compitino di Meccanica Razionale
29 Aprile 2025

Esercizio 1. Si consideri un punto materiale P di massa unitaria soggetto ad una forza centrale

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = f(\rho)\frac{\boldsymbol{x}}{\rho}, \qquad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}\,, \;\rho = |\boldsymbol{x}|,$$

$$f(\rho) = \frac{\log \rho}{\rho^2} - \frac{1}{\rho^3}.$$

Si supponga che il momento angolare rispetto al centro di forze O sia diverso da zero e si denoti con c la componente del momento angolare ortogonale al piano del moto.

i) Trovare il numero di orbite circolari al variare di c.

ii) Calcolare l'energia potenziale efficace e tracciare il ritratto di fase nello spazio delle fasi ridotto con coordinate $(\rho, \dot{\rho})$ al variare di c.

iii) Si considerino le condizioni iniziali

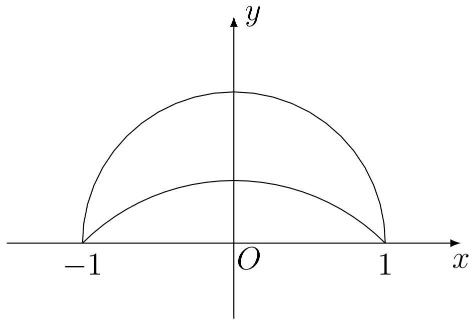
$$\boldsymbol{x}(0) = (a, 0, 0), \quad \dot{\boldsymbol{x}}(0) = (b, 1/a, 0), \qquad a \in \mathbb{R}^+, b \in \mathbb{R}.$$

Trovare l'insieme dei valori di a e b per cui l'orbita con queste condizioni iniziali è limitata.

Esercizio 2. In un piano dato si fissi un sistema di riferimento Oxy e si consideri in tale piano il corpo rigido omogeneo

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 1,\ -1 + \sqrt{2 - x^2} \le y \le \sqrt{1 - x^2}\}$$

con densità di massa $\sigma = 1$.



1. Trovare le direzioni principali di inerzia relative al polo O;
2. calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{\boldsymbol{e}}_2$;
3. calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{\boldsymbol{e}}_1$.

Esercizio 1.

i) Dalle ipotesi abbiamo che $c \neq 0$ e $m = 1$. Per trovare le orbite circolari, esplicitiamo l'equazione $\ddot{\rho} = 0$

$$f(\rho) + \frac{c^2}{\rho^3} = 0 \rightarrow \frac{\log \rho}{\rho^2} + \frac{c^2 - 1}{\rho^3} = 0 \rightarrow \rho \log \rho = 1 - c^2$$

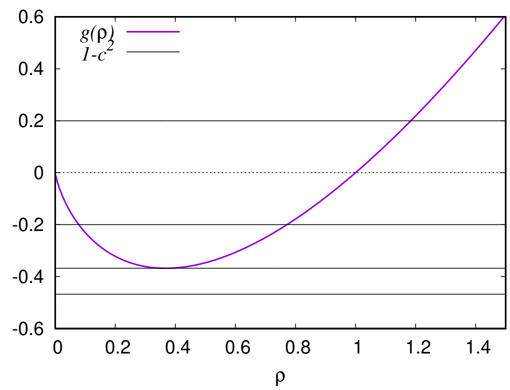
Per capire il numero di soluzioni, contiamo il numero di intersezioni per $\rho > 0$ tra il grafico della funzione $g(\rho) = \rho \log \rho$ e la retta orizzontale $h(\rho) = 1 - c^2$.
Per la funzione $g(\rho)$ vale che $g(1) = 0$,

$$\lim_{\rho \to 0^+} g(\rho) = 0^-, \quad \lim_{\rho \to +\infty} g(\rho) = +\infty$$

e che ha un unico punto stazionario (minimo) in

$$g'(\rho) = \log \rho + 1 = 0 \rightarrow \overline{\rho} = 1/e,$$

in cui la funzione vale $g(\overline{\rho}) = -1/e$. Perciò abbiamo i seguenti casi:



- se $c^2 > 1 + 1/e$ allora non ci sono intersezioni tra la retta e la funzione $g(\rho)$ (quindi nessuna orbita circolare).
- se $c^2 = 1 + 1/e$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 = 1/e$.
- se $1 < c^2 < 1 + 1/e$ allora ci sono due intersezioni (quindi due orbite circolari), una per $\rho_1 < 1/e$ e una per $1/e < \rho_2 < 1$.
- se $c^2 \leq 1$ allora c'è un'unica intersezione (quindi un'orbita circolare) con $\rho_1 \geq 1$ ($\rho_1 = 1$ nel caso $c^2 = 1$).

ii) L'energia potenziale efficace è

$$V_{\text{eff}}(\rho) = -\int f(\rho) d\rho + \frac{c^2}{2\rho^2} = \frac{\log \rho + 1}{\rho} + \frac{c^2 - 1}{2\rho^2}$$

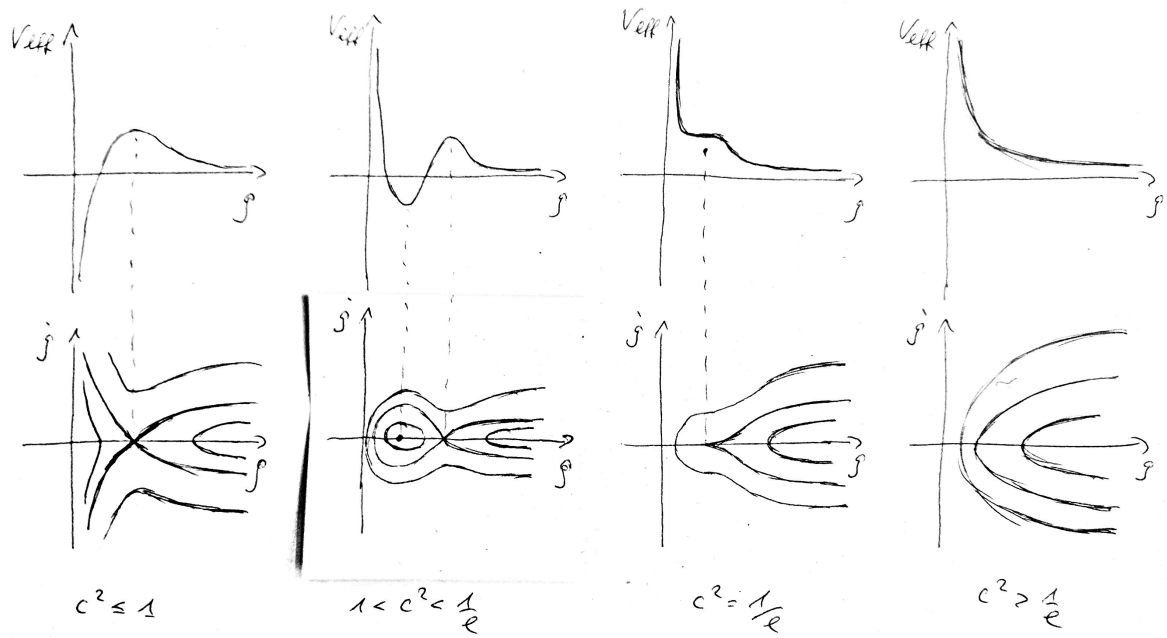
Per $\rho \to +\infty$ il termine dominante è il primo, perciò

$$\lim_{\rho \to +\infty} V_{\text{eff}}(\rho) = 0^+$$

mentre per $\rho \to 0^+$ il termine dominante è il secondo (se $c^2 \neq 1$), perciò

$$\lim_{\rho \to 0^+} V_{\text{eff}}(\rho) = \begin{cases} +\infty & \text{se } c^2 > 1 \\ -\infty & \text{se } c^2 \leq 1 \end{cases}$$

Considerando i diversi numeri di punti stazionari di V_{eff} (corrispondenti alle orbite circolari trovate in precedenza), abbiamo i seguenti casi:



iii) Siccome sappiamo che ad ogni tempo vale

$$\mathbf{x} = \rho \hat{\mathbf{e}}_\rho \quad \text{e} \quad \dot{\mathbf{x}} = \dot{\rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \rho \dot{\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta,$$

e che in questo caso all'istante iniziale $\hat{\mathbf{e}}_\rho = \hat{\mathbf{e}}_1$ e $\hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_2$, valutando le espressioni sopra all'istante iniziale otteniamo

$$\rho(0) = a, \quad \dot{\rho}(0) = b \quad \text{e} \quad \rho(0)\dot{\theta}(0) = 1/a.$$

Possiamo calcolare il valore di c e dell'energia totale E dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} c &= \rho^2 \dot{\theta} = 1 \\ E &= \frac{1}{2}\dot{\rho}^2 + V_{\text{eff}}(\rho) = \frac{1}{2}b^2 + V_{\text{eff}}(a) = \frac{1}{2}b^2 + \frac{\log(a) + 1}{a} \end{aligned}$$

Dal ritratto di fase ottenuto in precedenza nel caso $c^2 = 1$, sappiamo che per avere orbite limitate è necessario che $a = \rho(0) \leq \rho_1 = 1$, e che il livello di energia E sia $\leq$ dell'energia totale nel punto $(\rho, \dot{\rho}) = (\rho_1, 0)$: $E(\rho_1, 0) = V_{\text{eff}}(1) = 1$.
Perciò l'insieme degli a e b tali che l'orbita è limitata è definito dalle condizioni

$$a \leq 1 \quad \wedge \quad b^2 \leq 2 - 2\frac{\log(a) + 1}{a}$$

Esercizio 2.

i) Determiniamo una base principale per il corpo rigido rispetto al polo O.

Consideriamo il sistema di riferimento riportato nella figura dell'esercizio e prendiamo i versorsi $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$ associati a Ox, Oy e Oz. Tale sistema di riferimento è principale di inerzia in quanto:

- $\hat{\mathbf{e}}_3$ è una direzione principale, perchè il corpo rigido è piano ed è interamente contenuto nel piano Oxy;

- $\hat{\mathbf{e}}_1$ è una direzione principale, perchè ortogonale al piano Oyz che è di simmetria per riflessione per il corpo;

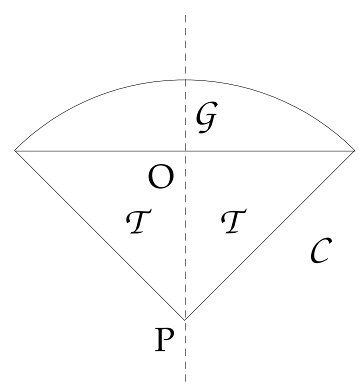
- $\hat{\mathbf{e}}_2$ è una direzione principale, perchè l'ultimo versore della terna ortonormale, dove già gli altri due sono direzioni principali.

ii) Il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_2$ corrisponde all'entrata I_{22} della matrice di inerzia considerando il sistema di riferimento esplicitato nel punto i), perciò corrisponde ad un momento principale di inerzia. Possiamo calcolare tale momento di inerzia partendo da quello del semidisco $\mathcal{S}$ di raggio $R = 1$ e togliendo quello del segmento circolare $\mathcal{G}$

$$I_{22} = \frac{1}{8}\sigma\pi R^4 - \int_{\mathcal{G}} \sigma x^2 dxdy = \frac{\pi}{8} - \int_{-1}^{1}\int_{0}^{-1+\sqrt{2-x^2}} x^2 dydx = \frac{\pi}{8} + 2\int_0^1 \left(1 - \sqrt{2-x^2}\right) x^2 dx$$

Siccome questo integrale non è semplicissimo, possiamo procedere in un altro modo. Consideriamo infatti come polo il centro $P = (0, -1)$ del disco di cui il segmento circolare fa parte. Tale punto sta sempre sull'asse delle Oy, possiamo quindi calcolare il momento rispetto a tale asse prendendo come polo P invece di O. In questo modo possiamo vedere il momento assiale del segmento circolare come il momento assiale di un settore circolare $\mathcal{C}$ di raggio $R' = \sqrt{2}$ meno quello di due triangoli rettangoli $\mathcal{T}$ con cateti $\ell = 1$ (vedi figura):

$$I^{\mathcal{G}}_{22,O} = I^{\mathcal{C}}_{22,P} - 2I^{\mathcal{T}}_{22,O} = \int_0^{\sqrt{2}}\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \sigma r^3 \cos^2\theta drd\theta - 2\frac{1}{12}\sigma\ell^4 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}$$



Quindi il momento richiesto vale

$$I_{22} = \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} - \frac{\pi}{8}$$

iii) Il momento di inerzia rispetto all'asse $O\hat{\mathbf{e}}_1$ corrisponde all'entrata I_{11} della matrice di inerzia considerando il sistema di riferimento esplicitato nel punto i), perciò corrisponde ad un momento principale di inerzia. Possiamo calcolare tale momento di inerzia partendo da quello del semidisco $\mathcal{S}$ di raggio $R = 1$ e togliendo quello del segmento circolare $\mathcal{G}$

$$\begin{aligned}
I_{11} =& \frac{1}{8}\sigma\pi R^4 - \int_{\mathcal{G}} \sigma y^2 dxdy = \frac{\pi}{8} - \int_{-1}^{1}\int_{0}^{-1+\sqrt{2-x^2}} y^2 dydx = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}\int_0^1 \left(1 - \sqrt{2-x^2}\right)^3 dx = \\
=& \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3}\int_0^1 1dx - 2\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx + 2\int_0^1 (2-x^2)dx - \frac{2}{3}\int_0^1 \sqrt{2-x^2}^3 dx
\end{aligned}$$

Risolviamo i due integrali con le radici:

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}dx = 2\int_0^{\pi/4} \cos^2 tdt = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$$

in cui abbiamo usato la sostituzione $x = \sqrt{2}\sin t$. In maniera analoga

$$\int_0^1 \sqrt{2-x^2}^3 dx = 4\int_0^{\pi/4} \cos^4 tdt = 4\int_0^{\pi/4} \cos^2 tdt - \int_0^{\pi/4} \sin^2(2t)dt = 1 + \frac{3}{8}\pi$$

Quindi il momento richiesto vale

$$I_{11} = \frac{\pi}{8} + \frac{2}{3} - \left(1 + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{10}{3} - \left(\frac{2}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{3} - \frac{5}{8}\pi$$

N.B.: per risolvere gli integrali abbiamo usato che

$$\begin{aligned}
\int \cos^2 xdx =& (1/2)(x + \cos x \sin x) \\
\int \sin^2 xdx =& (1/2)(x - \cos x \sin x)
\end{aligned}$$