

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PISA



DIPARTIMENTO DI MATEMATICA
Corso di Laurea in Matematica

Tesi di laurea triennale

GRUPPI DI RIFLESSIONE FINITI E
TEOREMA DI DELIGNE

RELATORE:
Prof. Filippo Callegaro

CANDIDATO:
Luca Bruni

ANNO ACCADEMICO 2017/2018

Introduzione

Preso un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} in uno spazio affine, gli possiamo associare il gruppo di riflessione W generato dalle riflessioni ortogonali rispetto agli iperpiani di \mathcal{H} . Viceversa, dato un tale gruppo W possiamo considerare l'arrangiamento di tutti gli iperpiani fissati da un elemento di $W - \{0\}$. Dato adesso uno spazio vettoriale reale V , sia $V_{\mathbb{C}}$ il suo complessificato. Lo scopo della trattazione è quello di dimostrare che se l'arrangiamento \mathcal{H} è associato a un gruppo di riflessione finito, lo spazio

$$Y = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{H \in \mathcal{H}} H_{\mathbb{C}}$$

ha rivestimento universale contraibile.

Questo risultato verrà dimostrato seguendo la traccia dell'articolo di Pierre Deligne "Les immeubles des groupes de tresses généralisés", ma per poter rendere accessibile la trattazione sono stati inseriti tutti i preliminari necessari, con relative dimostrazioni.

In particolare nel Capitolo 1 vengono enunciate delle definizioni di base su gruppi, azioni di gruppo e gruppi di Coxeter; inoltre vengono richiamate le definizioni di categoria e di complessi simpliciali.

Nella prima sezione del Capitolo 2 introduciamo una relazione di equivalenza sullo spazio affine E basata sull'arrangiamento di iperpiani. Introduciamo così una suddivisione dello spazio in *facette* e chiamiamo *camere* le facette che sono aperti non vuoti di V .

Nella seconda sezione associamo ad \mathcal{H} il gruppo W generato dalle riflessioni ortogonali rispetto agli iperpiani di \mathcal{H} . Nell'ipotesi che l'arrangiamento sia anche W -invariante e che W agisca in modo proprio su E , dimostriamo quindi che W agisce in modo semplicemente transitivo sull'insieme delle camere.

Diamo poi delle condizioni per la finitezza di W . Questa ipotesi è fondamentale per dimostrare che le camere sono dei coni simpliciali aperti: tale dimostrazione sarà svolta nella quarta sezione e sarà il collegamento con il Capitolo 3.

A completamento del Capitolo 2 richiamiamo la classificazione dei gruppi di riflessione finiti mediante i *grafi di Coxeter*, grazie ai quali sarà possibile dare una lista di tutti i possibili gruppi di riflessione.

Introduciamo nella prima sezione del Capitolo 3 il concetto di *galleria* ovvero un cammino tra camere *adiacenti*. Definiamo una distanza tra camere basata sulle gallerie. Grazie all'ipotesi di coni simpliciali possiamo definire la camera opposta a una camera

data rispetto a una qualsiasi intersezione di iperpiani di \mathcal{H} che sono muri di una camera C .

Nella seconda sezione diamo la definizione formale di *categoria delle gallerie*, cioè l'insieme di tutte le gallerie munite di una operazione naturale che è la composizione.

Partendo dalla categoria delle gallerie costruiamo nella terza sezione uno spazio \hat{T} contraibile. Infine, nell'ultima sezione, definiamo uno spazio \tilde{Y} che riveste il nostro spazio Y e mostriamo grazie al Lemma del nervo che \tilde{Y} ha lo stesso tipo di omotopia di \hat{T} completando la dimostrazione.

Indice

Introduzione	1
1 Preliminari	4
2 Arrangiamenti per gruppi di riflessione finiti	7
2.1 Arrangiamenti di iperpiani, faccette, camere, facce, muri	7
2.2 Riflessioni ortogonali e proprietà sui gruppi di riflessione	13
2.3 Teoremi di finitezza	19
2.4 Teorema di struttura simpliciale delle camere	23
2.5 Cenni sulla classificazione dei gruppi di riflessione finiti	24
3 Il Teorema di Deligne	31
3.1 Gallerie	31
3.2 Categoria delle gallerie	44
3.3 Costruzione di uno spazio contraibile	47
3.4 Rivestimenti	55
Bibliografia	64
Ringraziamenti	65

Capitolo 1

Preliminari

In questo primo capitolo vengono richiamate alcune definizioni e qualche risultato utile per il seguito della trattazione. Assumiamo come noti questi risultati senza dimostrarli.

Azioni di gruppo su un insieme

Definizione 1. Sia G un gruppo e X un insieme. Una *azione di G su X* è una mappa:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longmapsto g \cdot x \end{aligned}$$

che soddisfa le seguenti proprietà:

1. $id \cdot x = x$ per ogni $x \in X$;
2. $(g_1 g_2) \cdot x = g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$ per ogni $g_1, g_2 \in G, x \in X$.

Definizione 2. Sia G un gruppo che agisce su un insieme X . Chiamiamo *stabilizzatore di x* , $stab(x) = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$. Chiamiamo inoltre *orbita di x* , $orb(x) = \{y \in X \mid \exists g \in G, g \cdot y = x\}$.

Definizione 3. Sia G un'azione di un gruppo su un insieme X ; l'azione si dice:

Transitiva: se esiste una unica orbita: $\forall x, y \in X, \exists g \in G$ tale che $g \cdot x = y$;

Semplicemente transitiva: se $\forall x, y \in X, \exists! g \in G$ tale che $g \cdot x = y$.

Definizione 4. Sia X uno spazio topologico e G un gruppo topologico; allora una azione di G su X si dice *propria* se la mappa:

$$\begin{aligned} G \times X &\longrightarrow X \times X \\ (g, x) &\longmapsto (g \cdot x, x) \end{aligned}$$

è una mappa *propria* (i.e. controimmagine di compatti è compatta).

Definizione 5. Uno spazio topologico si dice *localmente compatto* se ogni punto ammette una base fondamentale di intorni compatti.

Cenni sui sistemi di Coxeter

Le dimostrazioni delle proposizioni enunciate si possono trovare in Bourbaki [3], Parte 4, Capitolo 1.

Definizione 6. Dato un gruppo W e un suo insieme di generatori S tale che ogni suo elemento abbia ordine 2, diciamo che la coppia (W, S) è un *sistema di Coxeter* se soddisfa la seguente condizione: per s, s' in S , sia $m(s, s')$ l'ordine dell'elemento ss' e sia I l'insieme delle coppie per cui $m(s, s')$ è finito; allora l'insieme generatore S e le relazioni $(ss')^{m(s, s')} = 1$ per $(s, s') \in I$ danno una presentazione di W .

Definizione 7. Sia (W, S) un sistema di Coxeter, la *lunghezza* di $w \in W$ (rispetto a S), indicata con $l_S(w)$ o semplicemente $l(w)$, è il più piccolo intero $q \geq 0$ tale che w è il prodotto di una sequenza di q elementi di S . Una decomposizione in *forma ridotta* di w è ogni sequenza $s = (s_1, \dots, s_q)$ di elementi di S tale che $w = s_1 \dots s_q$ e $q = l(w)$.

Definizione 8. Diremo che (W, S) soddisfa *l'exchange condition* se rispetta la seguente proprietà: siano $w \in W$ e $s \in S$ tali che $l(sw) \leq l(w)$. Per ogni forma ridotta (s_1, \dots, s_q) di w , esiste un intero j tale che $1 \leq j \leq q$ e

$$ss_1 \dots s_{j-1} = s_1 \dots s_{j-1} s_j$$

Proposizione 1. (W, S) è un sistema di Coxeter se e solo se soddisfa *l'exchange condition*.

Proposizione 2. Sia $(P_s)_{s \in S}$ una famiglia di sottoinsiemi di W che soddisfa le seguenti tre condizioni:

A' $1 \in P_s$ per ogni $s \in S$;

B' Gli insiemi P_s e sP_s sono disgiunti per ogni $s \in S$;

C Siano $s, s' \in S$, $w \in W$; se $w \in P_s$ e $ws' \in P_s$, allora $sw = ws'$;

Allora (W, S) è un sistema di Coxeter e P_s è formato dagli elementi $w \in W$ tali che $l(sw) > l(w)$.

Proposizione 3. Supponiamo che (W, S) sia un sistema di Coxeter. Per ogni $s \in S$, sia P_s l'insieme degli elementi $w \in W$ tali che $l(sw) > l(w)$, allora valgono le seguenti proprietà:

A $\bigcap_{s \in S} P_s = \{1\}$;

B Per ogni $s \in S$, gli insiemi P_s e sP_s danno una partizione di W .

Simplessi e CW-complessi

Definizione 9. Siano x_1, \dots, x_{n+1} , $n+1$ punti in posizione generale in uno spazio euclideo \mathbb{R}^m . Allora un *simplexso n -dimensionale* è l'involuppo convesso degli $n+1$ punti dati.

Definizione 10. Una *cella m -dimensionale* è uno spazio omeomorfo al disco B^m . Si dice che una cella è *aperta* se omeomorfa alla parte interna di B^m . In entrambi i casi m è univocamente determinato.

Definizione 11. Un *CW-complesso* è uno spazio X e una collezione di celle aperte disgiunte $\{e_\alpha\}$ la cui unione è X e tale che:

1. X è di Hausdorff;
2. per ogni m -cella aperta e_α , esiste una funzione continua $f_\alpha : B^m \rightarrow X$ che è un omeomorfismo tra la parte interna di B_m e e_α e manda il bordo di B^m in una unione finita di celle aperte di dimensioe minore di m ;
3. Un insieme A è chiuso in X se $A \cap \bar{e}_\alpha$ è chiuso in \bar{e}_α per ogni α .

Categorie e Funtori

Definizione 12. Una *categoria \mathcal{C}* è definita dai seguenti dati:

- Una classe $Ob(\mathcal{C})$ i cui elementi sono chiamati *oggetti* della categoria \mathcal{C} ;
- Una classe $Mor(\mathcal{C})$ i cui elementi sono chiamati *morfismi*. Indichiamo con $Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ i morfismi di *dominio* A e *codominio* B ;
- Una legge di composizione tra morfismi associativa;
- L'esistenza per ogni $A \in Ob(\mathcal{C})$ del *morfismo identico* $1_A : A \rightarrow A$ tale che per ogni $f \in Mor_{\mathcal{C}}(A, B)$ e per ogni $g \in Mor_{\mathcal{C}}(C, A)$ vale che

$$\begin{aligned} f \circ 1_A &= f \\ 1_A \circ g &= g \end{aligned}$$

Definizione 13. Siano \mathcal{C} e \mathcal{D} due categorie. Un *funtore* da \mathcal{C} in \mathcal{D} è una coppia di funzioni, generalmente indicate con lo stesso simbolo,

$$F = (F : Ob(\mathcal{C}) \rightarrow Ob(\mathcal{D}), F : Mor(\mathcal{C}) \rightarrow Mor(\mathcal{D}))$$

che verifichi le seguenti proprietà:

1. Se $A, A' \in Ob(\mathcal{C})$ e $f : A \rightarrow A'$, allora $F(f) : F(A) \rightarrow F(A')$;
2. Se $A, A', A'' \in Ob(\mathcal{C})$, $f : A \rightarrow A'$ e $g : A' \rightarrow A''$, allora $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$;
3. $F(1_A) = 1_{F(A)}$ per ogni $A \in Ob(\mathcal{C})$.

Definizione 14. Un funtore F si dice *fedele* se per ogni $A, B \in Ob(\mathcal{C})$, $F|_{Mor_{\mathcal{C}}(A, B)} : Mor_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow Mor_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ è iniettiva.

Capitolo 2

Arrangiamenti per gruppi di riflessione finiti

In questo secondo capitolo vengono date le definizioni di base degli elementi che costituiscono uno spazio affine E con associato un gruppo delle traslazioni T e un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} . In particolare verranno introdotti i concetti di *facchetta*, *camera*, *muro* e le loro principali proprietà. Ci concentreremo poi sul *gruppo di riflessione* generato a partire dall'arrangiamento di iperpiani, dando delle condizioni per la sua finitezza e mostrando il modo in cui il gruppo agisce sulle camere dello spazio. Grazie a questi preliminari, arriveremo ad un risultato fondamentale per il seguito della trattazione, ovvero la dimostrazione che per gruppi di riflessione finiti associati ad arrangiamenti essenziali, le camere sono coni simpliciali aperti. A completamento del capitolo verranno dati dei cenni sulla classificazione dei gruppi di riflessione finiti passando dai grafi di *Coxeter*.

2.1 Arrangiamenti di iperpiani, faccette, camere, facce, muri

Denotiamo con E lo spazio reale affine di dimensione d e chiamiamo T il gruppo delle traslazioni di E . Adesso $\forall e \in E$ si ha che la mappa da T ad E tale che $t \mapsto e + t$ è un omeomorfismo tra i due spazi.

Definizione 2.1.1. Un *arrangiamento* di iperpiani \mathcal{H} è un insieme di iperpiani affini dello spazio E . Un arrangiamento \mathcal{H} si dice *localmente finito* se per ogni punto $e \in E$ esiste un intorno I di e tale che I interseca solamente un numero finito di iperpiani di \mathcal{H} .

Osservazione 2.1. Ogni arrangiamento finito è localmente finito.

Esempio 2.1. Consideriamo $E = \mathbb{R}^2$ e \mathcal{H} l'insieme delle rette di coefficiente angolare $\frac{1}{n}$. Allora ogni punto della retta $\{y = 0\}$ non possiede l'intorno richiesto dalla definizione e dunque \mathcal{H} non è localmente finito.

Se non diversamente specificato, \mathcal{H} sarà sempre un arrangiamento localmente finito. Sia adesso H un iperpiano; lo spazio $E - H$ ha due componenti connesse che chiameremo *semispazi aperti* con frontiera H . Le loro chiusure prendono il nome di *semispazi chiusi* con frontiera H . $x, y \in E$ si dicono *dalla stessa parte di H* se appartengono allo stesso semispazio aperto; *da parti opposte di H* se appartengono a semispazi opposti. Sia A un insieme connesso e non vuoto di E ; per ogni iperpiano H che non interseca A , definiamo $D_H(A)$ l'unico semispazio aperto con frontiera H che contiene A . Se adesso \mathcal{N} è l'arrangiamento di iperpiani formato dagli $H \in \mathcal{H}$ tali che A non interseca H , poniamo:

$$D_{\mathcal{H}}(A) = \bigcap_{H \in \mathcal{N}} D_H(A)$$

Fissato un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} , definiamo una relazione su E che sarà di fondamentale importanza per tutto il resto della trattazione: $\forall x, y \in E$, x è in relazione con y ($x \sim y$) se e solo se:

per ogni iperpiano $H \in \mathcal{H}$, o x e y appartengono entrambi a H , o x e y sono dalla stessa parte di H .

Si verifica facilmente che la relazione \sim è di equivalenza su E e pertanto abbiamo una partizione dello spazio.

Definizione 2.1.2. Una *facchetta* di E relativa a \mathcal{H} è una classe di equivalenza relativa alla relazione sopra definita.

Consideriamo adesso una facchetta F e un punto $a \in F$; dalla relazione introdotta risulta che un iperpiano $H \in \mathcal{H}$ contiene F se e solo se $a \in H$. Questo vuol dire che l'insieme degli iperpiani che contengono una facchetta F è finito: infatti se l'insieme degli iperpiani che contiene F fosse infinito, dato un a appartenente a F allora $a \in H$ per infiniti H contro la locale finitezza di \mathcal{H} . Inoltre, sempre per come sono state definite le faccette, vale che per ogni $a, a' \in F$, $D_H(a) = D_H(a')$ e per ogni H che non contiene F , $\overline{D_H(a)} = \overline{D_H(a')}$.

Definizione 2.1.3. Sia \mathcal{H}_F l'insieme degli iperpiani che contengono una certa facchetta F . Chiamiamo *supporto affine* di F l'intersezione degli iperpiani in \mathcal{H}_F :

$$P = \bigcap_{H \in \mathcal{H}_F} H$$

Per quanto detto, P è una intersezione *finita*. Poniamo inoltre *dimensione di F* la dimensione del supporto affine P .

Osservazione 2.2. Sia $a \in F$, P il supporto affine di F , allora:

$$F = P \cap \bigcap_{H \in \{\mathcal{H} - \mathcal{H}_F\}} D_H(a)$$

$$\overline{F} = P \cap \bigcap_{H \in \{\mathcal{H} - \mathcal{H}_F\}} \overline{D_H(a)}$$

In entrambe le relazioni è chiaro che il membro di sinistra è contenuto in quello di destra. Vediamo l'altro contenimento. Nel primo caso sia a' nel membro di destra; vogliamo mostrare che $a' \in F$, cioè che $a' \sim a$, ovvero che si comporta come a rispetto a ogni iperpiano; dall'appartenenza a P si ha che sta in tutti gli iperpiani in cui sta anche a ; dall'appartenenza a $D_H(a)$ per ogni $H \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_F$ si ha che sta dalla stessa parte di a per ogni altro iperpiano; dunque $a \sim a'$. Nel secondo caso sia $a'' \in P \cap \bigcap_{H \in \{\mathcal{H} - \mathcal{H}_F\}} \overline{D_H(a)}$, allora il segmento aperto $]a'', a[$ è contenuto in P e in $D_H(a)$ per ogni $H \in \mathcal{H} - \mathcal{H}_F$ in quanto sono spazi convessi; dunque $]a'', a[\in F$ per la relazione sopra e $a'' \in \overline{F}$.

Esempio 2.2. Sia E lo spazio affine bidimensionale e $\mathcal{H} = \{H_1, H_2\}$ due rette incidenti; con riferimento alla Figura 2.1, si hanno le seguenti faccette:

- L'origine O (con supporto se stesso);
- Le 4 semirette aperte con inizio O e giacenti sulle rette H_1, H_2 (con supporto la retta su cui giacciono);
- I 4 coni aperti C_1, \dots, C_4 delimitati dalle rette H_1 e H_2 (con supporto tutto lo spazio).

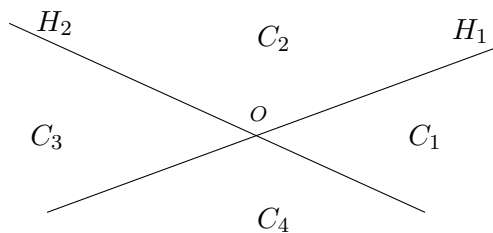


Figura 2.1: Esempio di faccette in uno spazio affine bidimensionale

Proposizione 2.1.4. *Sia F una faccetta e P il suo supporto affine, allora:*

1. *L'insieme F è un sottoinsieme aperto e convesso di P ;*
2. *La chiusura di F è unione di F e di faccette di dimensione strettamente minore della sua;*
3. *Nello spazio topologico P , l'insieme F è la parte interna della sua chiusura.*

Dimostrazione. 1. Dato che i semispazi e gli iperpiani sono sottoinsiemi convessi di E , allora anche F , che è intersezione di questi, è convessa. Mostriamo adesso che è aperta: sia $a \in F$ e sia U un intorno aperto convesso di a in E che non incontra nessun iperpiano nell'insieme $\mathcal{N} = \{H \in \mathcal{H} | a \notin H\}$ (l'intorno U esiste, si può prendere ad esempio $\bigcap_{H \in \mathcal{N}} D_H(a)$). Per ogni $H \in \mathcal{N}$, abbiamo dunque che $U \subset D_H(a)$, dunque $P \cap U \subset F$ e pertanto F è intorno di ogni suo punto in P ;

2. Sia $b \in \overline{F} - F$, appartenente alla faccetta F' e sia $\mathcal{N}' = \{H \in \mathcal{N} \mid b \in H\} = \{H \in \mathcal{H} \mid a \notin H, b \in H\}$. Poniamo $\mathcal{N}'' = \mathcal{N} - \mathcal{N}'$. Per ogni $H \in \mathcal{N}''$ abbiamo che $b \notin H$ e $b \in \overline{D_H(a)}$, dunque $b \in D_H(a)$ ($D_H(a) \cup H = \overline{D_H(a)}$) e $D_H(b) = D_H(a)$; dalle formule viste si ha adesso (posto $D_H(b) = D_H(a)$ per $H \in \mathcal{N}''$):

$$F' = P \cap \bigcap_{H \in \mathcal{N}'} H \cap \bigcap_{H \in \mathcal{N}''} D_H(a)$$

$$\overline{F} = P \cap \bigcap_{H \in \mathcal{N}'} \overline{D_H(a)} \cap \bigcap_{H \in \mathcal{N}''} \overline{D_H(a)}$$

quindi $F' \subset \overline{F}$. Non possiamo avere $\mathcal{N}' = \emptyset$, perché questo implicherebbe che $F = F'$ (contraddicendo l'ipotesi $b \notin F$ e $b \in F'$). Il supporto di F' è l'insieme $P' = P \cap \bigcap_{H \in \mathcal{N}'} H$; abbiamo adesso $a \in P$, ma $a \notin H$ per ogni $H \in \mathcal{N}'$, dunque $P' \neq P$ e finalmente $\dim P' < \dim P$;

3. Sia $H \in \mathcal{N}'$ e sia D il semispazio aperto con frontiera H e distinto da $D_H(a)$; abbiamo $b \in H \cap P$ ed è immediato osservare che $D \cap P$ è il semispazio di P con frontiera $H \cap P$. Di conseguenza, ogni intorno di b in P incontra $D \cap P$ e dato che $D \cap P$ è disgiunto da \overline{F} , osserviamo che il punto b di $\overline{F} - F$ non può appartenere alla parte interna di \overline{F} nello spazio topologico P . Dato che F è aperto in P abbiamo la tesi.

⊗

Corollario 2.1.5. *Siano F e F' due faccette. Se $\overline{F} = \overline{F'}$, allora le faccette F e F' sono uguali.*

Dimostrazione. Segue direttamente dal punto (3) della proposizione precedente. ⊗

Definizione 2.1.6. Una camera C di E relativa ad \mathcal{H} (o semplicemente una camera se \mathcal{H} è noto dal contesto) è una faccetta di E relativa ad \mathcal{H} che non è contenuta in nessun iperpiano di \mathcal{H} .

Esempio 2.3. Con riferimento alla Figura 2.1, le camere sono i coni aperti C_1, C_2, C_3, C_4 .

Sia U l'aperto di E fatto dai punti che non appartengono a nessun iperpiano di \mathcal{H} ; dato che un iperpiano di \mathcal{H} deve contenere ogni faccetta che incontra, allora le camere sono le faccette contenute in U . Dalla proposizione vista si ha che ogni camera è convessa (quindi connessa) in E , che ogni camera è parte interna della sua chiusura e che, dato che le camere partizionano U , sono proprio le sue componenti connesse. Ogni insieme non vuoto e convesso A di U è contenuto in una e una sola camera ed è chiaro che il supporto di una camera C è tutto lo spazio E . Le formule viste in generale diventano dunque (posto A un sottoinsieme non vuoto di C):

$$C = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} D_H(a) \qquad \overline{C} = \bigcap_{H \in \mathcal{H}} \overline{D_H(a)}$$

dove $D_H(a) = D_H(A)$ per ogni $a \in A$.

Proposizione 2.1.7. *Sia C un insieme non vuoto di E . Supponiamo che esista un sottoinsieme \mathcal{H}' di \mathcal{H} con le seguenti proprietà:*

- *Per ogni $H \in \mathcal{H}'$, esiste un semispazio aperto D_H con frontiera H tale che $C = \bigcap_{H \in \mathcal{H}'} D_H$;*
- *L'insieme C non interseca nessun iperpiano appartenente a $\mathcal{H} - \mathcal{H}'$.*

allora, sotto queste condizioni, C è una camera relativa ad \mathcal{H} e $D_H = D_H(C)$ per ogni $H \in \mathcal{H}$.

Dimostrazione. Le due condizioni mostrano come C sia un sottospazio convesso di U e dunque, per quanto già detto, esiste una camera C' che contiene C . Inoltre, abbiamo $D_H = D_H(C)$ per ogni $H \in \mathcal{H}'$ e dunque $C = D_{\mathcal{H}'}(C) \supset D_{\mathcal{H}}(C)$ (poiché $\mathcal{H}' \subset \mathcal{H}$). Ma dalle formule delle faccette abbiamo $D_{\mathcal{H}}(C) = C'$ e dunque $C = C'$. \times

Proposizione 2.1.8. *Ogni punto di E appartiene alla chiusura di almeno una camera.*

Dimostrazione. Sia $a \in E$ e siano H_1, \dots, H_m gli iperpiani che passano per a (sono in numero finito per la locale finitezza). Sempre per la locale finitezza esiste un intorno di a che interseca solamente gli iperpiani H_1, \dots, H_m . Sia adesso D un segmento passante per a , ma non contenuto in nessuno degli iperpiani H_i ; sia adesso $x \in D$ con $x \neq a$; se adesso x è sufficientemente vicino ad a , allora il segmento aperto $]a, x[$ non interseca nessuno degli H_i e pertanto sarà contenuto in U . Essendo un sottoinsieme connesso e convesso deve essere contenuto in una camera C e dunque $a \in \overline{C}$. \times

Proposizione 2.1.9. *Sia P un sottospazio affine di E e Ω un aperto non vuoto di P ; allora:*

1. *Esiste un punto $a \in \Omega$ che non appartiene a nessuno degli iperpiani di \mathcal{H} che non contengono P ;*
2. *Se P è un iperpiano e $P \notin \mathcal{H}$, allora esiste una camera che interseca Ω ;*
3. *Se P è un iperpiano e $P \in \mathcal{H}$, allora esiste un punto $a \in \Omega$ che non appartiene a nessun iperpiano $H \neq P$ di \mathcal{H} .*

Dimostrazione. Chiamiamo $\mathcal{N} = \{H \in \mathcal{H} | P \not\subset H\}$ e sia \mathcal{P} l'insieme degli iperpiani dello spazio affine P della forma $P \cap H$ con $H \in \mathcal{N}$. Il sottoinsieme \mathcal{P} è localmente finito in P e la proposizione precedente mostra che Ω incontra una camera Γ definita da \mathcal{P} in P . Se adesso $a \in \Gamma \cap \Omega$, allora $a \notin H$ per ogni $H \in \mathcal{N}$ e dunque si ha il punto (1).

Supponiamo adesso che P sia un iperpiano; ogni iperpiano che lo contiene è uguale a P stesso; distinguiamo dunque due casi:

$P \notin \mathcal{H}$: allora $\mathcal{N} = \mathcal{H}$ e si ha $a \notin H$ per ogni $H \in \mathcal{H}$. Dunque a appartiene a una camera definita da \mathcal{H} in E e questo è il punto (2) della proposizione;

$P \in \mathcal{H}$: allora $\mathcal{N} = \mathcal{H} - \{P\}$ e dunque (3).

\times

Definizione 2.1.10. Sia C una camera di E . Una *faccia* di C è una faccetta contenuta nella chiusura di C il cui supporto è un iperpiano. Un *muro* di C è un iperpiano che è il supporto di una faccia di C . Indichiamo con \mathcal{M} l'insieme dei muri di C .

Osservazione 2.3. Ogni muro di C appartiene a \mathcal{H} . Un iperpiano $H \in \mathcal{H}$ è un muro di C se e solo se $C \neq D_{\mathcal{H}-H}(C)$. Inoltre, ogni muro di C è il supporto di una singola faccia di C (altrimenti C non sarebbe più convesso).

Esempio 2.4. Sempre con riferimento a Figura 2.1, fissata la camera C_1 , le sue facce sono le semirette aperte che partono da O e delimitano C_1 . I suoi muri sono i supporti di tali semirette, in questo caso H_1 e H_2 .

Proposizione 2.1.11. *Ogni iperpiano $H \in \mathcal{H}$ è muro di almeno una camera.*

Dimostrazione. Grazie al punto (3) della Proposizione 2.1.9, scegliendo $\Omega = H$ si ha che $\exists a \in H$ che appartiene solamente ad H e a nessun altro iperpiano di \mathcal{H} . Inoltre sappiamo che a appartiene alla chiusura di una certa camera C . Vorremmo allora dimostrare che H è muro della camera C e dunque, in particolare, che tutta la faccetta F che contiene a appartiene a \overline{C} (che poi il supporto sia H viene ancora dalla Proposizione 2.1.9). Dato che adesso \overline{C} è unione di faccette (Proposizione 2.1.4) e contiene a , allora contiene tutta F (perché a sta solo in F), dunque la tesi. \boxtimes

La seguente proposizione (di cui si può trovare la dimostrazione in Bourbaki [3], n. 1, Sezione 4, Proposizione 9) è utile a capire la struttura delle camere e verrà richiamata più avanti nel capitolo.

Proposizione 2.1.12. *Sia C una camera e sia \mathcal{M} l'insieme dei muri di C . Allora $C = D_{\mathcal{M}}(C)$ e ogni sottoinsieme \mathcal{N} di \mathcal{H} tale che $C = D_{\mathcal{N}}(C)$ contiene \mathcal{M} . Un sottoinsieme F di \overline{C} è una faccetta se e solo se è una faccetta di E relativa alla famiglia \mathcal{M} .*

Osservazione 2.4. Sia F una faccetta con supporto un iperpiano P ; vogliamo mostrare che F è faccia di due camere: sia \mathcal{N} l'insieme degli iperpiani $H \neq P$ appartenenti a \mathcal{H} . Poniamo $A = D_{\mathcal{N}}(F)$ e denotiamo con D^+ e D^- i due semispazi aperti con frontiera P . L'insieme A è aperto e contiene $F \subset P$ e dato che ogni punto di P sta nella chiusura di D^+ e di D^- , l'insieme $C^+ = A \cap D^+$ e $C^- = A \cap D^-$ sono non vuoti; queste sono camere (ho intersecato anche gli ultimi semispazi). Inoltre, l'iperpiano P incontra $D_{\mathcal{N}}(F) = D_{\mathcal{N}}(C^+)$; dunque, ragionando come nella Proposizione 2.1.11, si ha che P è muro di C^+ e F , che incontra $P \cap D_{\mathcal{N}}(F)$ è una faccia di C^+ . Allo stesso modo si ragiona per C^- .

Infine, sia C una camera di cui F è faccia e supponiamo per esempio $D^+ = D_P(C)$; l'insieme $D_{\mathcal{N}}(C)$ incontra F e dunque si può verificare che è uguale a $D_{\mathcal{N}}(F)$, quindi si ha:

$$C = D_{\mathcal{H}}(C) = D_P(C) \cap D_{\mathcal{N}}(C) = D^+ \cap D_{\mathcal{N}}(F) = C^+$$

Esempio 2.5. Consideriamo per semplicità uno spazio vettoriale reale V di dimensione d e sia v_1, \dots, v_d una base di V . Ogni vettore $w \in V$ si scrive in forma unica come

$$w = a_1 v_1 + \dots + a_d v_d$$

Chiamiamo $\pi_i : V \rightarrow \mathbb{R}$ il funzionale lineare tale che $\pi_i(w) = a_i$ e denotiamo con H_i gli iperpiani $\text{Ker}\pi_i$. Chiamiamo infine \mathcal{H} l'arrangiamento di iperpiani H_1, \dots, H_d .

Denotiamo con J ogni sottoinsieme di indici di $I = \{1, \dots, d\}$ e poniamo $H_J = \bigcap_{i \in J} H_i$. Inoltre, per ogni sequenza $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ con $\varepsilon_i \in \{-1, 0, 1\}$, poniamo $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ l'insieme dei $w \in V$ tali che il segno di $\pi_i(w)$ sia uguale a quello di ε_i per ogni $i \in I$. È immediato constatare che con questa notazione abbiamo individuato tutte le faccette relative a \mathcal{H} . Osserviamo anche che la faccetta $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ ha come supporto H_J dove J è l'insieme degli indici $i \in I$ tali che $\varepsilon_i = 0$ e che, in particolare, le camere sono le faccette $F(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_d)$ con $\varepsilon_i \neq 0$ per ogni i .

La camera $C = F(1, \dots, 1)$ formata dai vettori w che sono combinazioni lineari strettamente positive dei v_i prende il nome di *cono simpliciale aperto con vertice nell'origine definito dalla base* (v_1, \dots, v_d) . La sua chiusura consiste nei w tali che $\pi_i(w) \geq 0$ per ogni i . Per ogni sottoinsieme J di I poniamo C_J l'insieme dei vettori $w \in V$ tale che $\pi_i(w) = 0$ per $i \in J$ e $\pi_i(w) > 0$ per $i \in I - J$. Allora C_J è una faccetta con supporto H_J ed è un cono simpliciale aperto di vertice l'origine nel sottospazio H_J ; inoltre vale che:

$$\bar{C} = \bigcup_{J \subset I} C_J$$

In particolare, i muri di C sono gli iperpiani H_i con $i \in I$, e la faccia di C contenuta in H_i è proprio $C_{\{i\}}$.

Nessuna delle strutture analizzate nell'esempio cambia se viene manipolata la base moltiplicando ogni vettore v_i per uno scalare $\lambda_i > 0$.

2.2 Riflessioni ortogonali e proprietà sui gruppi di riflessione

Sia V uno spazio vettoriale e sia (\cdot, \cdot) un prodotto scalare definito positivo su V . Sia adesso $H_\alpha = \{v \in V \mid (v, \alpha) = 0\}$ con $\alpha \in V$, $\alpha \neq 0$.

Definizione 2.2.1. Posto H_α come sopra, una *riflessione* è un operatore lineare $s = s_{H_\alpha} : V \rightarrow V$ tale che manda α nel suo opposto e lascia invariato l'iperpiano H_α .

Lemma 2.2.2. *Posto H_α come sopra, una riflessione si può esprimere attraverso la seguente semplice formula: sia $v \in V$ allora:*

$$s_{H_\alpha}(v) = v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha$$

Inoltre, l'operatore s_{H_α} è ortogonale.

Dimostrazione. Sappiamo che $V = \text{span}(\alpha) \oplus H_\alpha$. La formula dà il risultato corretto sia per $v \in \text{span}(\alpha)$ ($s_{H_\alpha}(v) = -v$), sia per $v \in H_\alpha$ ($(v, \alpha) = 0$) e dunque, essendo ben definita su una base, è ben definita su tutto V . Mostriamo che s_H è ortogonale: per ogni $v, w \in V$:

$$(s_H(v), s_H(w)) = \left(v - \frac{2(v, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha, w - \frac{2(w, \alpha)}{(\alpha, \alpha)} \alpha\right) = (v, w)$$

⊠

D'ora in avanti parleremo di riflessione rispetto all'iperpiano H e non specificheremo il vettore α ortogonale. Scriveremo pertanto s_H al posto di s_{H_α} .

Osservazione 2.5. Ogni riflessione s_H ha ordine 2 ($s_H^2 = id$).

Possiamo definire le riflessioni ortogonali anche in uno spazio affine E con T spazio delle traslazioni. In particolare sia H un iperpiano affine di E , allora la *riflessione ortogonale* è la simmetria rispetto ad H che chiameremo ancora $s_H : E \rightarrow E$. Anche in questo caso abbiamo una comoda scrittura per s_H : dato che ogni punto x di E può essere scritto nella forma $x = h + v$ con $h \in H$ e v ortogonale ad H allora:

$$s_H(h + v) = h - v$$

Definizione 2.2.3. Dato un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} in uno spazio affine reale di dimensione d definiamo il *gruppo di riflessione* relativo ad \mathcal{H} il gruppo W generato dalle riflessioni ortogonali s_H con $H \in \mathcal{H}$.

Esempio 2.6. Sia $V = \mathbb{R}^2$ e sia \mathcal{H} l'insieme delle bisettrici e delle rette $\{x = 0\}$ e $\{y = 0\}$ come mostrato in Figura 2.2

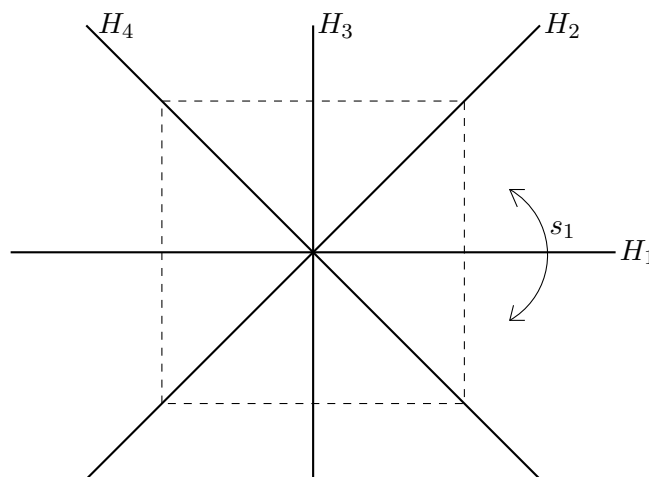


Figura 2.2: Il gruppo diedrale come gruppo di riflessione

Sia W generato dalle riflessioni ortogonali s_1, \dots, s_4 rispetto alle rette H_1, \dots, H_4 . Vorremo mostrare che $W \cong D_4 = \langle \sigma, \rho \mid \sigma^2 = id, \rho^4 = id, \sigma\rho\sigma^{-1} = \rho^{-1} \rangle$. Svolgendo dei facili conti si può mostrare che W è generato solamente da s_1 e s_2 . Adesso s_1s_2 ha ordine 4 e vale che $(s_2)(s_1s_2)(s_2)^{-1} = s_2s_1 = (s_1s_2)^{-1}$. Posto dunque $s_2 = \sigma$ e $s_1s_2 = \rho$ si ha l'isomorfismo con il gruppo diedrale D_4 .

D'ora in avanti e per tutto il resto della trattazione assumeremo che le seguenti condizioni siano sempre soddisfatte:

P1 Per ogni $w \in W$ e per ogni $H \in \mathcal{H}$, l'iperpiano $w(H)$ appartiene a \mathcal{H} ;

P2 Il gruppo W , munito della topologia discreta, agisce in modo proprio su E .

Se lo spazio E è localmente compatto segue da Osservazione 4, n.5 di Bourbaki [4], Capitolo 3 che la seconda condizione è equivalente a:

P2' Per ogni coppia di sottoinsiemi compatti K e L di E , l'insieme dei $w \in W$ tali che $w(K)$ interseca L è finito.

La proprietà **P1** esprime il fatto che le camere date dall'arrangiamento \mathcal{H} danno una tassellatura regolare dello spazio, ovvero sono ottenute l'una dall'altra tramite isometria come mostrato dalla figura seguente

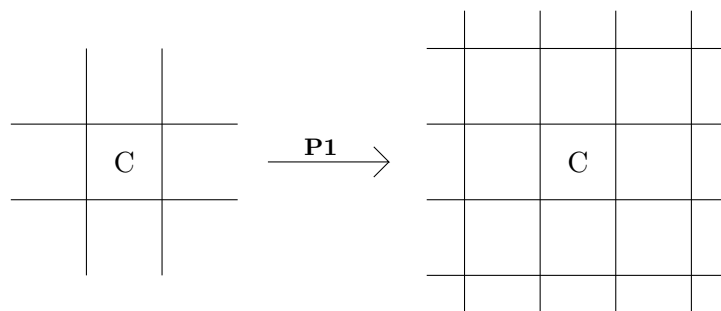


Figura 2.3: Ruolo della proprietà **P1**

La proprietà **P2** (o equivalentemente **P2'** dato che siamo in uno spazio localmente compatto) avrà un ruolo importante nei prossimi risultati, a partire dal seguente.

Lemma 2.2.4. *Un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} con le proprietà sopra è localmente finito.*

Dimostrazione. Sia K un sottoinsieme compatto di E . Se un iperpiano H di \mathcal{H} interseca K , anche l'insieme $s_H(K)$ incontra K dato che ogni punto di $K \cap H$ è fissato da s_H . L'insieme degli $H \in \mathcal{H}$ che incontrano K è dunque finito per la proprietà **P2'**. \bowtie

Grazie a quanto appena dimostrato possiamo utilizzare tutti i risultati della prima sezione: possiamo dunque parlare di faccette, camere, facce e muri relativi a W gruppo di riflessione associato a \mathcal{H} .

Osservazione 2.6. Ogni riflessione $w \in W$ agisce in modo naturale sui punti di E . In particolare, permuta le faccette, le camere, i muri e le facce relative a \mathcal{H} .

Nel nostro spazio E munito di T poniamo adesso $\|t\| = (t, t)^{\frac{1}{2}}$ la norma su T e $d(x, y) = \|x - y\|$ la distanza tra due punti di E .

Lemma 2.2.5. *Sia C una camera, allora:*

1. Per ogni $x \in E$, esiste un elemento $w \in W$ tale che $w(x) \in \overline{C}$;
2. Per ogni camera C' , esiste un elemento $w \in W$ tale che $w(C') = C$;
3. Il gruppo W è generato dall'insieme delle riflessioni ortogonali rispetto ai muri di C .

Dimostrazione. Chiamiamo \mathcal{M} l'insieme dei muri di C e sia $W_{\mathcal{M}}$ il sottogruppo di W generato dalle riflessioni rispetto ai muri di C .

1. Sia $x \in E$ e sia $orb_{\mathcal{M}}(x)$ l'orbita di x sotto l'azione naturale di $W_{\mathcal{M}}$. È dunque sufficiente provare che $orb_{\mathcal{M}}(x)$ interseca \overline{C} . Sia $a \in C$; esiste una palla chiusa B di centro a che interseca $orb_{\mathcal{M}}(x)$; dato che B è compatto, allora la proprietà **P2'** mostra che $B \cap orb_{\mathcal{M}}(x)$ è finito (altrimenti, in $B \cap orb_{\mathcal{M}}(x)$ avremmo almeno $w_i(x)$ per ogni $i \in \mathbb{N}$, $w_i \in W$ distinti e applicando la proprietà **P2'** ai compatti B, B si ha un assurdo). Dunque esiste $y \in orb_{\mathcal{M}}(x)$ tale che:

$$d(a, y) \leq d(a, y') \quad \forall y' \in orb_{\mathcal{M}}(x)$$

Vogliamo provare che $y \in \overline{C}$. Per farlo è sufficiente mostrare che se H è un muro di C , allora $y \in \overline{D_H(C)}$ e dunque la relazione segue dalla Proposizione 2.1.12. Se $s_H \in W_{\mathcal{M}}$, abbiamo $s_H(y) \in orb_{\mathcal{M}}(x)$ e dunque (grazie alla relazione precedente):

$$d(a, y)^2 \leq d(a, s_H(y))^2$$

Dunque esiste un $b \in H$ e due vettori t e u tali che $a = b + t$ e $y = b + u$ con u ortogonale a H . Allora $s_H(y) = b - u$, e la formula è equivalente a:

$$(t - u, t - u) \leq (t + u, t + u) \quad \longrightarrow \quad (t, u) \geq 0$$

e questa disuguaglianza implica che $y \in \overline{D_H(C)}$ e il punto (1);

2. Sia C' una camera e sia $a' \in C'$. Grazie a quello che abbiamo provato, esiste un $w \in W_{\mathcal{M}}$ tale che $\overline{w^{-1}(a')} \in \overline{C}$; dunque, la camera C' interseca la camera $\overline{w(C)}$; dato adesso che $\overline{w(C)}$ è l'unione di $w(C)$ e di faccette di dimensione strettamente minore di $w(C)$ (Proposizione 2.1.4) abbiamo che $C' = w(C)$;
3. Dobbiamo provare che $W = W_{\mathcal{M}}$ e per far questo è sufficiente mostrare che $s_{H'} \in W_{\mathcal{M}}$ per ogni $H' \in \mathcal{H}$. Adesso H' è muro di almeno una camera C' (Proposizione 2.1.11). Abbiamo visto allora che esiste $w \in W_{\mathcal{M}}$ tale che $C' = w(C)$; di conseguenza esiste un muro H di C tale che $H' = w(H)$ e dunque $s_{H'} = ws_Hw^{-1} \in W_{\mathcal{M}}$.

⊠

Il seguente teorema è di fondamentale importanza in quanto fornirà il collegamento tra il lavoro svolto fino ad adesso e la classificazione dei gruppi finiti di riflessione.

Teorema 2.2.6. *Sia C una camera e sia S l'insieme delle riflessioni rispetto ai muri di C . Allora:*

1. La coppia (W, S) è un sistema di Coxeter;
2. Sia $w \in W$ e sia H un muro di C . La relazione $l(s_H w) > l(w)$ implica che le camere C e $w(C)$ sono dalla stessa parte di H ;
3. Per ogni camera C' , esiste un unico elemento w tale che $w(C) = C'$;
4. L'insieme degli iperpiani H tali che $s_H \in W$ è uguale a \mathcal{H} .

Dimostrazione. Ogni elemento di S ha ordine 2 e il Lemma 2.2.5 mostra che S genera tutto W . Per ogni muro H di C , chiamiamo P_H l'insieme degli elementi $w \in W$ tali che le camere C e $w(C)$ siano dalla stessa parte di H . Vogliamo adesso verificare le condizioni **A'**, **B'** e **C** della Proposizione 2 presente nei preliminari:

A' $1 \in P_H$ è banale;

B' P_H e $s_H(P_H)$ sono disgiunti: infatti, $w(C)$ e $s_H w(C)$ sono da parti opposte di H , dunque se $w(C)$ è dalla stessa parte di H rispetto a C , allora non è dalla stessa parte di $s_H(C)$;

C Sia $w \in P_H$ e sia H' un muro di C tale che $ws_{H'} \notin P_H$; allora $ws_{H'} = s_H w$: per ipotesi, $w(C)$ è dalla stessa parte di C rispetto ad H e $ws_{H'}(C)$ è nel semispazio opposto. Dunque $ws_{H'}(C)$ e $w(C)$ sono da parti opposte di H ; allora le camere $s_{H'}(C)$ e C sono da parti opposte rispetto all'iperpiano $w^{-1}(H)$. Sia adesso a un punto della faccia di C con supporto H' . Il punto $a = s_{H'}(a)$ sta nella chiusura delle due camere C e $s_{H'}(C)$ che sono contenute rispettivamente nei due semispazi aperti con frontiera $w^{-1}(H)$. Dunque $a \in w^{-1}(H)$, quindi $H' = w^{-1}(H)$. Da questo deduciamo che $s'_H = w^{-1}s_H w$, cioè $ws_{H'} = s_H w$;

Grazie adesso alla Proposizione 2 si hanno i primi due punti del teorema. Inoltre, grazie alla Proposizione 3 abbiamo la proprietà:

$$\bigcap_{H \in \mathcal{M}} P_H = \{1\}$$

Il Lemma 2.2.5 mostra come W agisca in maniera transitiva sull'insieme delle camere. Inoltre, se $w \in W$ è tale che $w(C) = C$, allora $w \in P_H$ per ogni muro H di C e per la condizione appena vista, $w = 1$. Questo prova l'unicità: se infatti esistessero due elementi $w_1, w_2 \in W$ tali che $w_1(C) = w_2(C) = C'$, allora $w_2^{-1}w_1 = 1 \Rightarrow w_1 = w_2$.

Infine, sia H un iperpiano tale che $s_H \in W$. Se H non appartiene a \mathcal{H} , allora c'è almeno una camera C' che interseca H (Proposizione 2.1.9). Ogni punto di $H \cap C'$ è invariante sotto l'azione di s_H e dunque appartiene sia alla camera C' che alla camera $s_H(C')$. Questo vuol dire che $s_H(C') = C'$, che contraddice il punto (3) di questo teorema. \boxtimes

Osservazione 2.7. Grazie al punto (3) del teorema precedente si ha che il gruppo W agisce in modo semplicemente transitivo sull'insieme delle camere.

Definizione 2.2.7. Sia W un gruppo che agisce su un insieme E . Si chiama *dominio fondamentale* un qualsiasi sottoinsieme D di E tale che ogni orbita di W in E interseca D in esattamente un punto. Questa condizione è equivalente alle seguenti due:

A1 Per ogni $x \in E$, esiste un $w \in W$ tale che $w(x) \in D$;

A2 Se $x, y \in D$ e $w \in W$ sono tali che $w(x) = y$, allora $x = y$ (anche se $w \neq 1$).

Lemma 2.2.8. Sia C una camera, x, y due punti di \overline{C} e sia $w \in W$ tale che $w(x) = y$. Allora $x = y$ e w appartiene al sottogruppo $W_{\mathcal{N}}$, dove \mathcal{N} è l'insieme dei muri di C contenenti x .

Dimostrazione. Procediamo per induzione sulla lunghezza q di w (relativa all'insieme S di riflessioni rispetto ai muri di C); il caso $q = 0$ è ovvio. Se $q \geq 1$, allora esiste un muro H di C e un elemento $w' \in W$ tale che $w = s_H w'$ e $l(w') = q - 1$. Dato che $l(s_H w) < l(w)$, la camere C e $w(C)$ sono da parti opposte di H per il Teorema 2.2.6. Di conseguenza $\overline{C} \cap w(\overline{C}) \subset H$ e dunque $y \in H$. Quindi $y = w'(x)$ e l'ipotesi induttiva implica che $x = y$ e $w' \in W_{\mathcal{N}}$. Da $y \in H$, segue che $H \in \mathcal{N}$ e anche che $w = s_H w' \in W_{\mathcal{N}}$ e questo conclude la dimostrazione. \boxtimes

Teorema 2.2.9. Per ogni camera C , la chiusura \overline{C} di C è un dominio fondamentale per l'azione di W su E .

Dimostrazione. Segue direttamente dal Teorema 2.2.6 e dal Lemma 2.2.8. \boxtimes

Proposizione 2.2.10. Sia F una faccetta e C una camera tale che $F \subset \overline{C}$. Sia $w \in W$, allora le seguenti condizioni sono equivalenti:

1. $w(F)$ interseca F ;
2. $w(F) = F$;
3. $w(\overline{F}) = \overline{F}$;
4. w fissa almeno un punto di F ;
5. w fissa ogni punto di F ;
6. w fissa ogni punto di \overline{F} ;
7. w appartiene al sottogruppo di W generato dalle riflessioni rispetto ai muri di C che contengono F .

Dimostrazione. Sappiamo che due distinte faccette sono disgiunte e hanno chiusure distinte (si veda Corollario 2.1.5). Di conseguenza segue l'equivalenza (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3). D'altra parte, è evidente che vale (7) \Rightarrow (6) \Rightarrow (5) \Rightarrow (4) \Rightarrow (1) e infine il Lemma 2.2.8 mostra che (1) \Rightarrow (7). \boxtimes

2.3 Teoremi di finitezza

In questa sezione vogliamo dare delle condizioni affinché il gruppo di riflessione relativo ad un arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} in uno spazio affine sia finito.

Sia C una camera, sia $S = S(C)$ l'insieme delle riflessioni ortogonali rispetto ai muri di C e indichiamo con $m(s, s')$ l'ordine dell'elemento $ss' \in W$ con $s, s' \in S$. Sia adesso C' un'altra camera, allora l'unico elemento $w \in W$ tale che $w(C) = C'$ definisce una bigezione

$$s \mapsto f(s) = wsw^{-1}$$

da S a $S' = S(C')$ e si ha che $m(f(s), f(s')) = m(s, s')$. Segue che, se W agisce sull'insieme X delle coppie (C, s) , dove C è una camera e $s \in S(C)$:

$$w \cdot (C, s) = (w(C), wsw^{-1})$$

allora ogni orbita i di W in X incontra ognuno degli insiemi $\{C\} \times S(C)$ in esattamente un punto che denoteremo con $(C, s_i(C))$. Dunque, se I è l'insieme delle orbite e $i, j \in I$, il numero $m_{ij} = m(s_i(C), s_j(C))$ è indipendente dalla scelta della camera C . Dunque da ora in avanti potremmo fare riferimento agli ordini degli elementi del gruppo prendendo una camera qualsiasi C .

Sia C una camera; per ogni $i \in I$, denotiamo con $H_i(C)$ il muro di C tale che $s_i(C)$ è la riflessione rispetto a $H_i(C)$ e con $e_i(C)$ il vettore unitario ortogonale a $H_i(C)$ dalla stessa parte di $H_i(C)$. La mappa $i \mapsto H_i(C)$ prende il nome di *famiglia canonica dei muri di C* .

Proposizione 2.3.1. *Sia C una camera e siano $i, j \in I$ con $i \neq j$. Poniamo $s_i = s_i(C)$, $H_i = H_i(C)$ e $e_i = e_i(C)$ e allo stesso modo con j . Allora:*

1. *Se H_i e H_j sono paralleli, allora l'ordine di $s_i s_j$ (che denotiamo con m_{ij}) vale $m_{ij} = \infty$ e inoltre $e_i = -e_j$;*
2. *Se H_i e H_j non sono paralleli, allora m_{ij} è finito e vale:*

$$(e_i, e_j) = -\cos\left(\frac{\pi}{m_{ij}}\right)$$

3. *Vale che $(e_i, e_j) \leq 0$*

Dimostrazione. Se H_i è parallelo ad H_j allora $s_i s_j$ è una traslazione (e ha pertanto ordine infinito): infatti esiste un vettore v tale che $H_i + v = H_j$; pertanto se $a \in H_j \Rightarrow a - v \in H_i$. Sia allora $e = a + t$ con $a \in H_j$:

$$s_i s_j(a + t) = s_i(a - t) = s_i(a - v + v - t) = a - v - (v - t) = a + t - 2v$$

cioè $s_i s_j$ è la traslazione $-2v$. Inoltre deve valere che $e_i = e_j$, oppure $e_i = -e_j$. Adesso esiste un punto b (rispettivamente b') in \overline{C} che appartiene a H_i (rispettivamente a H_j), ma non ad H_j (rispettivamente ad H_i). Allora vale che $(b - b', e_i) > 0$ e $(b' - b, e_j) > 0$ che esclude il caso $e_i = e_j$ e prova (1).

Per il punto (2) rimandiamo a Bourbaki [3], n.3, Sezione 4, Proposizione 3.

Il punto (3) segue come banale conseguenza dei primi due punti. ⊠

Esempio 2.7. Sia $E = \mathbb{R}^2$ con il prodotto scalare euclideo e consideriamo l'arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} che tassella il piano mediante triangoli rettangoli isosceli come mostrato in figura

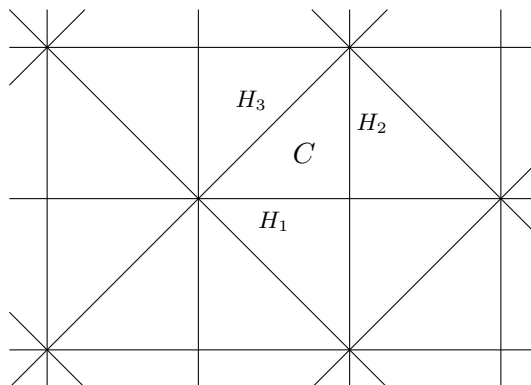


Figura 2.4: Tassellatura di \mathbb{R}^2 con camere che di forma triangoli rettangoli isosceli

Consideriamo la camera C indicata e i suoi muri H_1 , H_2 e H_3 . I suoi vettori unitari entranti sono dunque $e_1 = (0, 1)$, $e_2 = (-1, 0)$ e $e_3 = (-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2})$. Vediamo adesso i vari prodotti scalari: $(e_1, e_2) = 0$ e dunque, per la proposizione precedente, deve valere che $s_1 s_2$ ha ordine 2. Effettivamente questo è vero in quanto $s_1 s_2$ è la simmetria rispetto al punto di intersezione tra H_1 e H_2 che ha ordine 2. Il prodotto scalare (e_1, e_3) vale $-\frac{\sqrt{2}}{2}$: dovrebbe valere quindi che $m_{1,3} = 4$. Effettivamente $s_1 s_3$ non è altro che la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ rispetto all'intersezione tra H_1 e H_3 che ha ordine 4. Il discorso è analogo per quanto riguarda $s_2 s_3$.

Avremo bisogno del seguente lemma per poter raggiungere la maggior parte dei risultati di finitezza relativi al gruppo di riflessione W .

Lemma 2.3.2. *Sia A un insieme di vettori unitari in T . Se esiste un numero reale $\lambda < 1$ tale che $(a, a') \leq \lambda$ per ogni $a, a' \in A$ e $a \neq a'$, allora l'insieme A è finito.*

Dimostrazione. Per ogni $a, a' \in A$ con $a \neq a'$, si ha:

$$\|a - a'\| = 2 - 2(a, a') \geq 2 - 2\lambda > 0$$

Consideriamo adesso la sfera unitaria S di T ; essendo compatta esiste un ricoprimento finito di S di insiemi di "diametro" strettamente minore di $(2 - 2\lambda)^{\frac{1}{2}}$ e ognuno di questi insiemi contiene al massimo un punto di A , dunque la tesi. \square

Dato T spazio vettoriale delle traslazioni di E , chiamiamo U l'omomorfismo di gruppi $U : W \rightarrow GL(T)$ tale che $U(w)$ è l'automorfismo associato alla mappa $w \in W$ da E in se stesso. Abbiamo dunque per ogni $t \in T$ e per ogni $x \in E$:

$$w(x + t) = w(x) + U(w)(t)$$

La mappa U ha immagine interamente contenuta in $O(T)$. Per semplicità di notazione utilizzeremo la notazione $U(w) = U_w$. Osserviamo infine che $\text{Ker}(U)$ è l'insieme delle traslazioni appartenenti a W . $U(W)$ è dunque l'immagine di W visto come sottogruppo di $O(T)$.

Teorema 2.3.3. *Valgono i seguenti fatti:*

1. *L'insieme dei muri di una camera è finito;*
2. *L'insieme delle direzioni degli iperpiani appartenenti ad \mathcal{H} è finito;*
3. *Il gruppo $U(W)$ è finito.*

Dimostrazione. Il punto (1) segue direttamente dal lemma precedente e dalla Proposizione 2.3.1.

Sia C una camera e sia \mathcal{M} l'insieme dei suoi muri. Le faccette di \overline{C} (relative a \mathcal{H}) sono le stesse di quelle relative a \mathcal{M} in virtù della Proposizione 2.1.12. Dato che \mathcal{M} è finito, allora sono in numero finito. Dato che una faccetta incontra solo un numero finito di iperpiani appartenenti a \mathcal{H} , l'insieme degli iperpiani appartenenti ad \mathcal{H} e che intersecano \overline{C} è finito. Sia dunque $A(C)$ l'insieme dei vettori unitari di T che sono ortogonali a un qualche iperpiano di \mathcal{H} che incontra \overline{C} . Esiste per la Proposizione 2.3.1 un numero reale $\lambda < 1$ tale che $(a, a') \leq \lambda$ per ogni $a, a' \in A(C)$ e $a \neq a'$. Sia adesso A l'insieme dei vettori unitari di T ortogonali ad almeno uno degli iperpiani appartenenti ad \mathcal{H} . Siano $a, a' \in A$ con $a \neq a'$: se a e a' sono paralleli, allora $a = -a'$ e $(a, a') = -1$. Altrimenti, sia $H \in \mathcal{H}$ (risp. $H' \in \mathcal{H}$) tale che a (risp. a') è ortogonale a H (H'). Abbiamo $H \cap H' \neq \emptyset$ e se $x \in H \cap H'$ allora esiste un elemento $w \in W$ tale che $x \in w(\overline{C})$. I vettori $U_w(a)$ e $U_w(a')$ appartengono dunque ad $A(C)$ e abbiamo:

$$(a, a') = (U_w(a), U_w(a')) \leq \lambda$$

e l'insieme A è dunque finito per il Lemma 2.3.2.

Sia adesso B l'insieme dei vettori unitari di T ortogonali agli iperpiani appartenenti ad \mathcal{H} , sia $w \in W$ tale che $U_w(b) = b$ per ogni $b \in B$. Allora $U_w(t) = t$ per ogni t appartenente al sottospazio di T generato da B . Inoltre, se $t \in T$ è ortogonale ad B , abbiamo che $U_{s_H}(t) = t$ per ogni $H \in \mathcal{H}$, dunque $U_w(t) = t$ e infine $U_w = 1$. Dal fatto che $U_w(B) = B$ per ogni $w \in W$, deduciamo che $U(W)$ è isomorfo a un gruppo di permutazioni dell'insieme finito B , dunque la tesi. \boxtimes

Osservazione 2.8. Anche se il gruppo $U(W)$ è finito, non è detto che W lo sia. Se ad esempio \mathcal{H} è l'arrangiamento di iperpiani formato da infiniti iperpiani paralleli posti alla medesima distanza, allora il gruppo W è chiaramente infinito, ma il gruppo $U(W)$ è semplicemente \mathbb{Z}_2 .

Lemma 2.3.4. *Sia (\cdot, \cdot) un prodotto scalare definito positivo in uno spazio vettoriale V . Siano v_1, \dots, v_n elementi di V tali che $(v_i, v_j) \leq 0$ per ogni $i \neq j$; supponiamo esista una funzionale lineare $f : V \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $f(v_i) > 0$ per ogni i ; allora i vettori v_1, \dots, v_n sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Lasciata al lettore (si tratta di una semplice verifica). ⊠

Teorema 2.3.5. *Sia C una camera e sia \mathcal{N} un insieme di muri di C . Sia $W_{\mathcal{N}}$ il sottogruppo di W generato dalle riflessioni ortogonali rispetto agli elementi di \mathcal{N} . Per ogni $H \in \mathcal{N}$, denotiamo con e_H il vettore unitario ortogonale ad H e dalla stessa parte di C rispetto ad H . Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. Il gruppo $W_{\mathcal{N}}$ è finito;
2. Esiste un punto di E invariante rispetto a ogni elemento di $W_{\mathcal{N}}$;
3. Gli iperpiani appartenenti a \mathcal{N} hanno intersezione non vuota;
4. I vettori $(e_H)_{H \in \mathcal{N}}$ sono linearmente indipendenti in T .

Dimostrazione. Dalla proprietà **P2'** che abbiamo considerato, lo stabilizzatore in W di ogni punto di E è finito e dunque (2) \Rightarrow (1).

Dato che il gruppo $W_{\mathcal{N}}$ è generato dall'insieme delle riflessioni rispetto ai piani che appartengono a \mathcal{N} , i punti fissi di $W_{\mathcal{N}}$ sono i punti di E appartenenti a ogni iperpiano $H \in \mathcal{N}$; da questo si ottiene l'equivalenza tra (2) e (3).

Supponiamo che esista un punto a di E tale che $a \in H$ per ogni $H \in \mathcal{N}$ e sia $t \in T$ tale che $a + t \in C$. Da $(e_H, e_{H'}) \leq 0$ per $H, H' \in \mathcal{N}$ tali che $H \neq H'$ (Proposizione 2.3.1), e da $(t, e_H) > 0$ per ogni $H \in \mathcal{N}$, il lemma appena enunciato implica che gli e_H con $H \in \mathcal{N}$ sono linearmente indipendenti. Di conseguenza, (3) \Rightarrow (4).

Supponiamo infine che la famiglia $(e_H)_{H \in \mathcal{N}}$ sia libera. Sia a un punto di E . Per ogni iperpiano $H \in \mathcal{N}$, esiste un numero reale c_H tale che H è formato dai punti $a + t$ di E con $(t, e_H) = c_H$. Dato che la famiglia (e_H) è libera, esiste $t \in T$ tale che $(t, e_H) = c_H$ per ogni $H \in \mathcal{N}$ e il punto $a + t$ di E appartiene a tutti gli iperpiani $H \in \mathcal{N}$. Dunque (4) \Rightarrow (3).

Infine se $W_{\mathcal{N}}$ è finito allora possiamo prendere un punto qualsiasi $a \in E$ e fare la media su $W_{\mathcal{N}}$ definendo:

$$b = \frac{1}{|W_{\mathcal{N}}|} \sum_{w \in W_{\mathcal{N}}} w(a)$$

Allora il punto b che costruito è chiaramente $W_{\mathcal{N}}$ -invariante e quindi si ha (1) \Rightarrow (2). ⊠

Osservazione 2.9. Dato che l'insieme di riflessioni rispetto a tutti i muri di una camera genera W , se scegliamo come \mathcal{N} l'insieme dei muri di C , questo teorema ci fornisce un criterio per determinare se il gruppo W è finito oppure no. Osserviamo comunque che nella trattazione ci siamo messi nella forte ipotesi che l'arrangiamento di iperpiani sia W -invariante.

I risultati ottenuti sono relativi a spazi affini E ; se ci restringiamo a uno spazio vettoriale V (con spazio delle traslazioni uguale a se stesso) e consideriamo un arrangiamento di iperpiani omogeneo, allora il teorema precedente ci assicura che il gruppo W è finito in quanto esiste sempre un punto di intersezione di iperpiani omogenei (l'origine). Questo ci dice che le condizioni **P1** e **P2** sono sufficienti per avere un gruppo di riflessione finito dato un arrangiamento di iperpiani omogeneo e nel Capitolo 3 ci metteremo proprio in questa ipotesi.

2.4 Teorema di struttura simpliciale delle camere

In questa sezione enunciamo e dimostriamo il teorema di struttura simpliciale per arrangiamenti di iperpiani essenziali con associato un gruppo di riflessione finito; tale risultato sarà indispensabile per la trattazione seguente.

Definizione 2.4.1. Consideriamo T_0 il sottospazio di vettori dello spazio delle traslazioni di T invariante sotto l'azione di $U(W)$. Se vale che $T_0 = \{0\}$ allora diremo che W è *essenziale*.

Teorema 2.4.2. Sia C una camera, \mathcal{M} l'insieme dei muri di C e per ogni $H \in \mathcal{M}$ sia e_H il vettore unitario ortogonale ad H dalla stessa parte di C . Supponiamo che il gruppo di riflessione W sia essenziale e finito. Allora:

1. Esiste un unico punto a di E invariante sotto l'azione di W ;
2. La famiglia $(e_H)_{H \in \mathcal{M}}$ è una base di T ;
3. La camera C è un cono simpliciale aperto con vertice a ed è definito dalla base $(e'_H)_{H \in \mathcal{M}}$ di T tali che $(e_H, e'_{H'}) = \delta_{HH'}$.

Dimostrazione. 1. Dal Teorema 2.3.5, esiste un punto $a \in E$ invariante sotto l'azione di W . Sia adesso $t \in T$ tale che $t + a$ sia invariante sotto l'azione di W . Per ogni $w \in W$ si ha:

$$U_w(t) + a = w(t + a) = t + a$$

dunque $U_w(t) = t$; dato che W è essenziale, questo implica che $t = 0$, e questo mostra l'unicità di a ;

2. L'esistenza di un punto a di E invariante sotto l'azione di W mostra che la famiglia $(e_H)_{H \in \mathcal{M}}$ è linearmente indipendente (Teorema 2.3.5); dobbiamo adesso mostrare che tale famiglia genera T . Dall'essenzialità di W si ha che gli iperpiani che formano una camera C sono almeno $\dim T = n$: infatti per fare in modo che nessun punto di T sia fissato sotto l'azione di W è necessario avere almeno n iperpiani generati da direzioni ortogonali distinte. Da qui la tesi.
3. Sia a l'unico punto di E invariante sotto l'azione di W . Dato che $(e_H)_{H \in \mathcal{M}}$ è una base di T e, dal fatto che il prodotto scalare è non degenere su T , allora esiste una base $(e'_H)_{H \in \mathcal{M}}$ di T tale che $(e_H, e'_{H'}) = \delta_{HH'}$ per ogni $H, H' \in \mathcal{M}$. Ogni punto $x \in E$ può essere scritto in un unico modo come $x = t + a$ con

$$t = \sum_{H \in \mathcal{M}} \xi_H e'_H$$

con gli ξ_H reali. Allora x appartiene a C se e solo se per ogni iperpiano $H \in \mathcal{M}$, x è dalla stessa parte di H rispetto a e_H ; in altre parole, se e solo se $(t, e_H) = \xi_H$ è strettamente positivo. Da qui la tesi.

∞

2.5 Cenni sulla classificazione dei gruppi di riflessione finiti

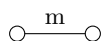
Da questo momento, e per tutta la sezione, ci metteremo in uno spazio vettoriale V e considereremo un arrangiamento di iperpiani omogeneo e il suo relativo gruppo di riflessione finito. Scopo di questa sezione è riuscire a classificare questo tipo di gruppi.

Come abbiamo visto, dato un gruppo di riflessione W , la coppia (W, S) con S insieme delle riflessioni ortogonali rispetto ai muri di una camera, è un sistema di Coxeter (Proposizione 2.2.6) e W è completamente determinato dall'insieme degli interi $m(s, s')$ con $s, s' \in S$ che sono gli ordini degli elementi $ss' \in W$. Un modo conveniente di utilizzare questa informazione è quello di costruire un grafo:

Definizione 2.5.1. Un grafo Γ si dice *grafo di Coxeter (finito)* associato a (W, S) se:

- I suoi vertici sono in bigezione con gli elementi di S ;
- Ogni coppia di vertici tali che $s \neq s'$ è unita da un lato se e solo se $m(s, s') \geq 3$; se non vi è un lato che li collega allora $m(s, s') = 2$;
- Sopra ogni rispettivo lato è posta l'etichetta $m(s, s')$ (se $m(s, s') = 3$ la ometteremo).

Esempio 2.8. Il grafo di Coxeter associato al gruppo diedrale D_m è:



Definizione 2.5.2. Diremo che un sistema di Coxeter è irriducibile se il grafo di Coxeter associato è connesso.

Più in generale, siano $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ le componenti connesse di Γ e per ogni Γ_i sia S_i il corrispondente insieme generatore. Per ogni $s \in \Gamma_i, s' \in \Gamma_j$, allora $m(s, s') = 2$ se $i \neq j$ e dunque $ss' = s's$. Grazie alla prossima proposizione, di cui non riportiamo la dimostrazione (per i dettagli si veda Humphreys [1], Capitolo 1, Sezione 2.2), potremmo ricondurci solamente allo studio dei grafi connessi:

Proposizione 2.5.3. Sia (W, S) un grafo di Coxeter con componenti connesse $\Gamma_1, \dots, \Gamma_r$ e siano S_1, \dots, S_r i corrispondenti sottoinsiemi di S . Allora W è prodotto diretto dei sottogruppi W_{S_1}, \dots, W_{S_r} e ogni sistema di Coxeter (W_{S_i}, S_i) è connesso.

Vogliamo adesso associare a un grafo di Coxeter con n vertici una matrice simmetrica: per semplificare la notazione, posto s_1, \dots, s_n l'insieme di generatori, chiamiamo $m_{ij} = m(s_i, s_j)$.

Definizione 2.5.4. La matrice $A = (a)_{i,j} = -\cos \frac{\pi}{m_{ij}}$ prende il nome di *matrice associata al grafo di Coxeter*.

Ricordiamo che ogni matrice simmetrica identifica un prodotto scalare e che tutti i suoi autovalori sono reali. Diremo che A è *definita positiva* se $x^t Ax > 0$ per ogni $x \neq 0$, o *semidefinita positiva* se $x^t Ax \geq 0$. Equivalentemente A è definita positiva se tutti

i suoi autovalori sono strettamente positivi e semidefinita positiva se i suoi autovalori sono non negativi. Diremo che A è di *tipo positivo* se è definita o semidefinita positiva. Per semplicità, useremo questi termini direttamente per il grafo di Coxeter a cui fa riferimento la matrice.

Esiste un'altra utile caratterizzazione delle matrici di tipo positivo che useremo più avanti ed è il *criterio dei minori principali*: i *minori principali di A* sono i determinanti delle sottomatrici ottenute rimuovendo le ultime k righe e le ultime k colonne ($0 \leq k < n$). Diremo allora che A è definita positiva (risp. semidefinita positiva) se e solo se ogni suo minore principale è positivo (risp. non negativo).

La seguente osservazione è il collegamento fondamentale tra le prime sezioni e la matrice di Coxeter e renderà possibile la classificazione dei gruppi finiti di riflessione.

Osservazione 2.10. Sia Γ il grafo di Coxeter ottenuto da un gruppo di riflessione finito W ; allora la matrice A è definita positiva in quanto rappresenta il prodotto scalare euclideo ristretto ai vettori linearmente indipendenti e_1, \dots, e_n che sono i vettori ortogonali agli iperpiani che formano i muri di una camera dell'arrangiamento, come mostrato dalla Proposizione 2.3.1, dal Teorema 2.3.5 e dal Teorema 2.4.2.

La strategia che adotteremo sarà quella di determinare tutti i grafi di Coxeter definiti positivi irriducibili: in questo modo avremo limitato tutti i possibili gruppi di riflessione. Dovremmo infine mostrare che ognuno dei grafi corrisponde a un gruppo di riflessione ben preciso, ma questa parte non sarà svolta nella trattazione.

Teorema 2.5.5. *I seguenti grafi sono tutti definiti positivi:*

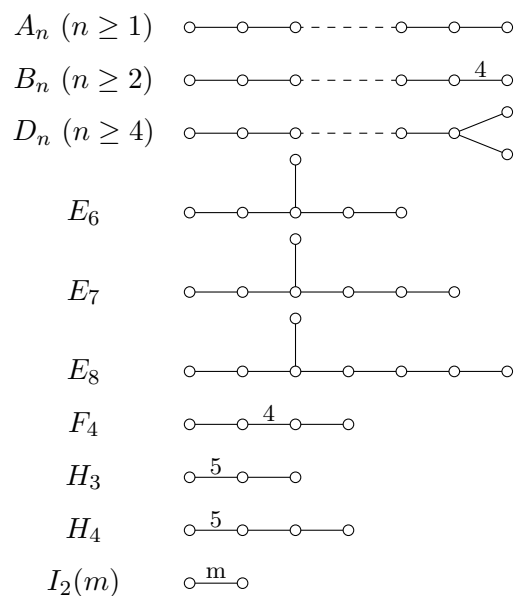


Figura 2.5: Grafi di Coxeter definiti positivi

Dimostrazione. Calcoliamo i minori principali delle corrispondenti matrici A . Dall'osservazione dei grafi, si può notare che ogni minore è il determinante di una matrice appartenente a uno dei grafi della figura precedente. Ragionando dunque per induzione su n numero di vertici, potremmo calcolare il determinante di A in ogni caso. Poiché il denominatore 2 compare molto spesso, è più conveniente calcolare $\det(2A)$. Il caso $n \leq 2$ si verifica direttamente. Per esempio, la matrice A che corrisponde al grafo $I_2(m)$ è la seguente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\cos \frac{\pi}{m} \\ -\cos \frac{\pi}{m} & 1 \end{pmatrix}$$

e dunque il determinante di $2A$ è $4(1 - \cos^2 \frac{\pi}{m}) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{m} > 0$.

Se $n \geq 3$, dando uno sguardo alla figura si nota che è possibile numerare i vertici in modo che l'ultimo vertice (numerato con n) è unito solo a un altro vertice (numerato $n - 1$) e il lato ha etichetta $m = 3$ o $m = 4$. Sia d_i il determinante della sottomatrice principale $i \times i$ di $2A$. Allora una espansione di $\det 2A$ lungo l'ultima riga mostra che

$$\det 2A = 2d_{n-1} - cd_{n-2} \tag{2.1}$$

dove $c = 1$ (risp. 2) se $m = 3$ (risp. 4). Tenendo adesso a mente che ogni matrice è moltiplicata per 2 è possibile completare induttivamente i valori delle seguenti tabelle:

Grafo	Det2A	Grafo	Det2A
A_n	$n + 1$	E_8	1
B_n	2	F_4	1
D_n	4	H_3	$3 - \sqrt{5}$
E_6	3	H_4	$\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$
E_7	2	$I_2(m)$	$4 \sin^2 \frac{\pi}{m}$

A titolo di esempio, vediamo i casi di H_3 e H_4 : per H_3 i minori più piccoli vengono dai grafi di tipo $I_2(5)$ e A_1 , dunque la formula (2.1) diventa:

$$\det 2A = 8 \sin^2 \frac{\pi}{5} - 2 = 3 - \sqrt{5}$$

Per H_4 i minori più piccoli vengono dai grafi H_3 e $I_2(5)$ e pertanto:

$$\det 2A = 2(3 - \sqrt{5}) - 4 \sin^2 \frac{\pi}{5} = \frac{7 - \sqrt{5}}{2}$$

⊠

Esempio 2.9. Il grafo:



rappresenta il grafo associato al gruppo simmetrico S_{n+1} che è dunque un gruppo di riflessione finito. In particolare sia V uno spazio vettoriale reale di dimensione $n + 1$ e consideriamo l'arrangiamento di iperipiani \mathcal{H} formato dagli iperipiani $H_{ij} = \{x_i - x_j = 0\}$. La riflessione ortogonale w_{ij} rispetto all'iperpiano H_{ij} permuta semplicemente la coordinata i con la coordinata j . Con un semplice calcolo si può mostrare che tali riflessioni commutano se permutano coordinate tutte distinte, altrimenti generano un elemento di ordine 3 (vedi grafo). Di conseguenza è facile creare un isomorfismo esplicito tra W e S_{n+1} : lo si fa mandando $w_{ij} \mapsto (i, j)$ e si ottiene il risultato cercato. Un altro modo per mostrare l'isomorfismo è quello di considerare l'azione di W su X insieme delle coordinate e mostrare che il morfismo $\varphi : W \rightarrow S_{|X|} = S_{n+1}$ indotto dall'azione è iniettivo e surgettivo.

Per dimostrare che i grafi definiti positivi connessi sono tutti e soli quelli già analizzati abbiamo bisogno di introdurre i seguenti grafi ausiliari:

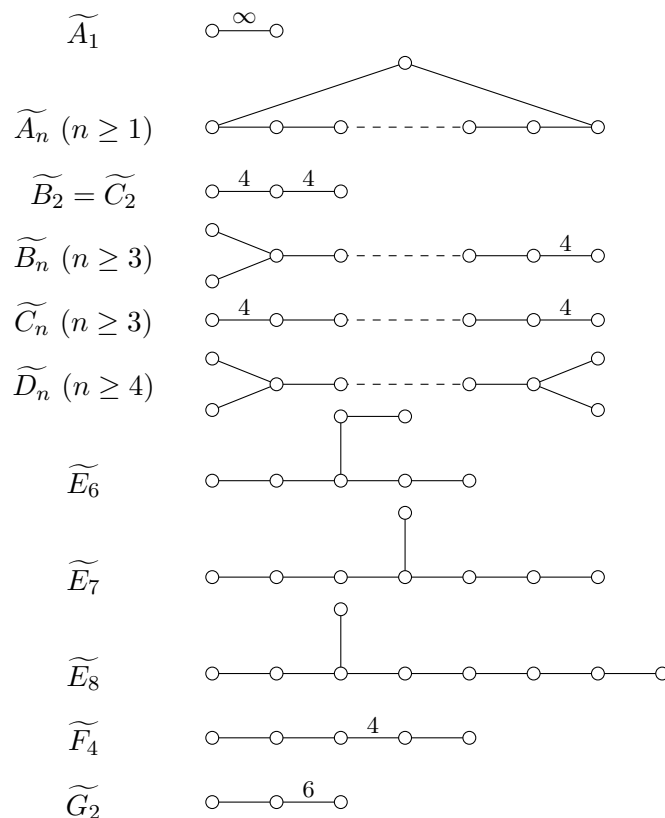


Figura 2.6: Grafi di Coxeter semidefiniti positivi

Dimostreremo che tutti questi grafi sono semidefiniti positivi (ma non definiti positivi). L'aspetto suggestivo è che ognuno di questi grafi è stato ottenuto da un grafo del

primo tipo, aggiungendo solamente un vertice. In ogni caso, il pedice n indica che il numero di vertici è $n + 1$.

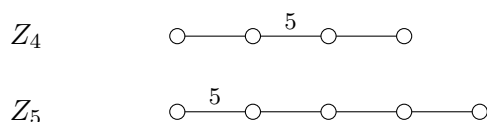
Proposizione 2.5.6. *Ogni grafo della figura precedente è semidefinito positivo.*

Dimostrazione. Dato che i grafi sono ottenuti aggiungendo un vertice ai grafi definiti positivi, è sufficiente calcolare il determinante di A e verificare che faccia 0. Questo è ovvio per quanto riguarda i tipi \widetilde{A}_n dato che la somma di tutte le righe di A è 0. Per gli altri tipi si può ancora utilizzare la formula induttiva (2.1) e la tabella riempita precedentemente. Per esempio consideriamo \widetilde{F}_4 : i sottografi rilevanti sono di tipo F_4 e B_3 e pertanto:

$$\det 2A = 2 - 2 = 0$$

Continuando in questo modo si ha la tesi. ⊠

Osservazione 2.11. Definiamo anche i seguenti due grafi:



Questi grafi non sono di tipo positivo come si può dedurre calcolando i determinanti delle matrici A associate. In particolare $\det 2A$ relativo a Z_4 vale $3 - 2\sqrt{5}$, mentre quello relativo a Z_5 vale $4 - 2\sqrt{5}$ ed entrambi sono strettamente negativi. Come al solito il loro calcolo deriva dalla formula (2.1) e dall'osservazione della tabella già compilata.

Definizione 2.5.7. Un *sottografo* di un grafo di Coxeter Γ è un grafo Γ' ottenuto eliminando o qualche vertice (e gli adiacenti lati), o diminuendo l'etichetta di uno o più lati, o entrambe le cose. Diremo anche che Γ *contiene* Γ' .

Abbiamo bisogno adesso di qualche nozione sulle matrici:

Definizione 2.5.8. Sia $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$, A è detta *irriducibile* se non esiste una partizione di indici in due insiemi non vuoti I, J tali che $a_{ij} = 0$ per ogni $i \in I, j \in J$.

Osservazione 2.12. Una matrice associata a un grafo di Coxeter è irriducibile esattamente quando il grafo è connesso.

Proposizione 2.5.9. *Sia A una matrice $n \times n$ reale simmetrica semidefinita positiva e irriducibile. Assumiamo che $a_{ij} \leq 0$ ogni volta che $i \neq j$; allora:*

1. *Detto $N = \{x \in \mathbb{R}^n | x^t A x = 0\}$ coincide con il nucleo di A e ha dimensione ≤ 1 ;*
2. *Il più piccolo autovalore di A ha molteplicità 1, e ha un autovettore le cui coordinate sono strettamente positive.*

La dimostrazione di questa proposizione non viene riportata, per ulteriori dettagli si rimanda a Humphreys [1], Capitolo 1, Sezione 2.6.

Corollario 2.5.10. *Sia Γ un grafo di Coxeter connesso di tipo positivo, allora ogni sottografo (proprio) è definito positivo.*

Dimostrazione. Sia Γ' un sottografo di Γ e denotiamo con A e A' le matrici associate, quindi A' è una matrice $k \times k$ per qualche $k \leq n$. Le etichette dei lati di Γ' soddisfano la relazione $m'_{ij} \leq m_{ij}$, da cui $a'_{ij} = -\cos \frac{\pi}{m'_{ij}} \geq -\cos \frac{\pi}{m_{ij}} = a_{ij}$. Supponiamo che A' non sia definito positivo; allora esiste un vettore $x \in \mathbb{R}^k$ tale che $x^t A' x \leq 0$. Chiamato adesso $\tilde{x} = (|x_1|, \dots, |x_k|, 0, \dots, 0)$ calcoliamo $\tilde{x}^t A \tilde{x}$ e otteniamo:

$$0 \leq \sum_{i,j \leq k} a_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} |x_i| |x_j| \leq \sum_{i,j \leq k} a'_{ij} x_i x_j \leq 0$$

dove per la penultima disuguaglianza abbiamo usato il fatto che $a'_{ij} \leq 0$ per $i \neq j$; si ha quindi che le disuguaglianze sono in realtà uguaglianze. Abbiamo dunque un vettore isotropo per A (e perciò un $\text{Ker} A$ non banale) che per la proposizione precedente è possibile solo se $k = n$ e tutte le coordinate di x sono diverse da 0; la seconda uguaglianza, però, forza $a_{ij} = a'_{ij}$, in contraddizione con l'assunzione che Γ' sia un sottografo proprio. \boxtimes

Teorema 2.5.11. *I grafi mostrati in Figura 2.5 e in Figura 2.6 sono gli unici grafi di Coxeter connessi di tipo positivo.*

Dimostrazione. Supponiamo che esista un grafo di Coxeter Γ connesso di tipo positivo non rappresentato nelle figure precedenti, allora, usando prepotentemente il corollario appena dimostrato, otterremo una contraddizione. Supponiamo che Γ abbia n vertici e che l'etichetta massima di un lato sia m , allora:

1. Tutti i grafi di Coxeter con numero di vertici 1 o 2 sono chiaramente di tipo positivo ($A_1, I_2(m), \widetilde{A}_1$), dunque si deve avere $n \geq 3$;
2. Dato che \widetilde{A}_1 non può essere un sottografo di Γ (corollario), si deve avere $m < \infty$;
3. Dato che \widetilde{A}_n non può essere un sottografo di Γ (corollario), Γ non contiene circuiti;
4. Supponiamo per il momento che $m = 3$, allora:
 - Dato che $\Gamma \neq A_n$, allora Γ deve avere una diramazione;
 - Γ non può contenere \widetilde{D}_n , $n > 4$, quindi ha un'unica diramazione;
 - Γ non può contenere \widetilde{D}_4 , quindi esattamente tre lati partono dalla diramazione (con $a \leq b \leq c$ il numero di vertici nelle tre direzioni della diramazione);
 - Dato che \widetilde{E}_6 non può essere un sottografo di Γ , $a = 1$;
 - Dato che \widetilde{E}_7 non può essere un sottografo di Γ , $b \leq 2$;
 - Dato che $\Gamma \neq D_n$, b non può essere 1 e dunque $b = 2$;
 - Dato che \widetilde{E}_8 non può essere un sottografo di Γ , $c \leq 4$;
 - Dato che $\Gamma \neq E_6, E_7, E_8$, il caso $m = 3$ è impossibile, dunque $m \geq 4$;
5. Γ non può contenere \widetilde{C}_n , dunque solo un lato può avere etichetta > 3 ;

6. Γ non può contenere \widetilde{B}_n , dunque Γ non ha diramazioni;
7. Supponiamo per il momento $m = 4$, allora:
 - Dato che $\Gamma \neq B_n$, i due lati estremali di Γ hanno etichetta 3;
 - Γ non può contenere \widetilde{F}_4 , quindi n deve essere 4;
 - Ma $\Gamma \neq F_4$, quindi il caso $m = 4$ è impossibile; dunque $m \geq 5$;
8. Dato che Γ non contiene \widetilde{G}_2 , si deve avere $m = 5$;
9. Γ non può contenere il grafo non positivo Z_4 , dunque il lato con etichetta 5 deve essere un lato estremo;
10. Γ non può contenere il grafo Z_5 , dunque $n \leq 4$;
11. Adesso Γ può essere solamente H_3 o H_4 e questo è assurdo.

Avendo eliminato ogni possibilità, si ha la tesi. ✕

Il teorema appena enunciato limita il numero di gruppi di riflessione finiti che possono esistere. Infatti, come abbiamo visto, a ogni gruppo di riflessione finito associamo un grafo di Coxeter definito positivo, e dato che i grafi di Coxeter connessi definiti positivi sono finiti, si ha la tesi. Il fatto che per ogni grafo di Coxeter esista un gruppo di riflessione finito ad esso associato non è trattato in questo lavoro, ma è un risultato vero di cui si possono trovare dettagli e dimostrazioni in Humphreys [1] e Bourbaki [3].

Capitolo 3

Il Teorema di Deligne

Siano $V_{\mathbb{C}}$ e $M_{\mathbb{C}}$ i complessificati dello spazio vettoriale euclideo V e di ogni iperpiano $M \in \mathcal{H}$. In questo capitolo vogliamo dimostrare che lo spazio

$$Y = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{H}} M_{\mathbb{C}}$$

ammette un rivestimento universale contraibile (ovvero sia un $K(\pi, 1)$), sotto l'ipotesi che le componenti connesse dello spazio Y siano coni simpliciali aperti; questo sarà il punto di collegamento tra il Capitolo 2 e il Capitolo 3. In particolare nel Capitolo 2 abbiamo visto che l'arrangiamento essenziale associato a un gruppo di riflessione finito ha come camere proprio dei coni simpliciali aperti. Pertanto potremmo applicare il teorema a un tale arrangiamento di iperpiani. Partiremo introducendo e approfondendo il concetto di *galleria* e di categoria delle gallerie. A partire da questa costruiremo uno spazio contraibile \hat{I} e troveremo un rivestimento di Y che dimostreremo avere lo stesso tipo di omotopia di \hat{I} grazie al Lemma del nervo.

3.1 Gallerie

Da qui in avanti faremo una ipotesi molto importante, che è quella che le camere siano dei coni simpliciali aperti. Questa ipotesi ci viene direttamente da quanto visto nel Capitolo 2 e cercheremo di porre l'attenzione ogni volta che entra in gioco.

In questa prima sezione introduciamo le gallerie, che non sono altro che i cammini tra una camera e l'altra dello spazio vettoriale. In tutto il seguito chiameremo \mathcal{H} l'arrangiamento di iperpiani omogenei di uno spazio vettoriale V e chiameremo gli iperpiani muri. Ricordiamo che $D_M(A)$ è l'unico semispazio aperto che contiene la camera A . Date inoltre due camere A, B poniamo:

$$D(A, B) = \bigcap_{M \in \mathcal{H}_{A, B}} D_M(A)$$

dove $M \in \mathcal{H}_{A, B}$ se A e B stanno dalla stessa parte rispetto M . Indicheremo inoltre con $\mathcal{M}(A, B)$ l'insieme dei muri che separano A da B .

Definizione 3.1.1. Sia C una camera, denotiamo con $-C$ la *camera antipodale*, ovvero la camera opposta a C rispetto all'origine.

Definizione 3.1.2. Due camere A, B si dicono *adiacenti* se hanno una faccia in comune.

Definizione 3.1.3. Siano A e B due camere; una *galleria di inizio A e fine B* (di lunghezza n) è una sequenza di camere $G = (C_0, \dots, C_n)$ con $C_0 = A$, $C_n = B$ e C_i adiacente a C_{i+1} per ogni $i = 0, \dots, n-1$. Due gallerie $G = (C_0, \dots, C_n)$, $G' = (C'_0, \dots, C'_m)$ si dicono *compatibili* se $C_n = C'_0$. La loro *composizione* la indicheremo con:

$$GG' = (C_0, \dots, C_n, C'_1, \dots, C'_m)$$

e sarà una galleria di lunghezza $n + m$.

Indicheremo inoltre con il simbolo $A.G$ la camera finale della galleria G che inizia con A .

Definizione 3.1.4. Sia $G = (C_0, \dots, C_n)$ una galleria; definiamo la *galleria opposta* di G come: $G^* = (C_n, \dots, C_0)$. Definiamo inoltre la *galleria antipodale* come: $-G = (-C_0, \dots, -C_n)$.

Osservazione 3.1. Date G, G' due gallerie valgono le seguenti utili relazioni:

$$(GG')^* = (G')^*(G)^* \quad -(GG') = (-G)(-G') \quad -(G^*) = (-G)^* = -G^*$$

Lemma 3.1.5. *Sia M un muro di una camera B ; allora esiste un'unica camera B' adiacente a B che abbia M come muro. M è l'unico muro che separa B da B'*

Dimostrazione. Segue direttamente dall'Osservazione 2.4 vista nel Capitolo 2 che mostra che una faccia, è faccia di esattamente due camere. \boxtimes

Lemma 3.1.6. *Siano B_1, B_2, B_3 tre camere e sia $\mathcal{M}(B_i, B_j)$ l'insieme dei muri che separano B_i da B_j . Allora:*

$$\mathcal{M}(B_1, B_3) = (\mathcal{M}(B_1, B_2) - \mathcal{M}(B_2, B_3)) \cup (\mathcal{M}(B_2, B_3) - \mathcal{M}(B_1, B_2))$$

Dimostrazione. Si tratta di semplici contenimenti insiemistici. Il membro di destra è l'elenco di tutte le possibilità di comportamento di un muro che separa B_1 da B_3 rispetto a una camera qualsiasi B_2 . \boxtimes

Possiamo a questo punto introdurre il concetto di distanza tra due camere:

Definizione 3.1.7. Siano A, B due camere, definiamo *distanza tra A e B* , $d(A, B)$, la lunghezza della galleria più corta che congiunge A e B . Una galleria G da A a B che verifica la distanza si dice *minimale*.

Proposizione 3.1.8. *Siano A e B due camere; la distanza $d(A, B)$ è il numero di muri che separano A da B . Una galleria è *minimale* se e solo se attraversa 1 volta i muri che separano A da B e 0 volte i rimanenti.*

Dimostrazione. È banale osservare che ogni galleria da A a B attraversa ogni muro che separa le due camere; è sufficiente dunque provare che esiste una galleria G da A a B di lunghezza esattamente $k =$ numero di muri che separano A da B . Procediamo per induzione su k . Se $k = 0$ allora $A = B$ e si prende la galleria $G = (A)$. Sia $k > 0$; allora esiste un muro M di A che separa A da B . Sia A' l'unica camera comunicante con A avente M per muro (esiste per il Lemma 3.1.5) ed M è l'unico muro che separa A da A' . Per ipotesi induttiva, $\exists G'$ galleria che collega A' e B (non passa da M , altrimenti si ha una contraddizione dei lemmi visti precedentemente) di lunghezza $k - 1$. Detta allora $G'' = (A, A')$ si ha che $G = G'G''$ è una galleria di lunghezza k da A a B . \square

Corollario 3.1.9. *Siano A, B, C tre camere. Allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. $d(A, C) = d(A, B) + d(B, C)$, ovvero esiste una galleria minimale da A a C passante per B ;
2. Un muro separa A da C se e solo se separa A da B o B da C ;
3. $B \subset D(A, C)$.

Dimostrazione. (1) \Leftrightarrow (2) è ovvia; proviamo adesso che (2) \Rightarrow (3); sia $M \in \mathcal{H}_{A,C}$, allora M non separa A da C allora (per ipotesi) M non separa A da B e non separa B da C . Dunque B si comporta bene rispetto a tutti i muri $M \in \mathcal{H}_{A,C}$ e dunque $B \subset D(A, C)$. Dimostriamo (3) \Rightarrow (2): sia M che separa A da C , allora $M \notin \mathcal{H}_{A,C}$ allora (ipotesi) M separa A da B oppure M separa B da C ; viceversa sia M che non separa A da C , allora $M \in \mathcal{H}_{A,C}$ e allora M non separa A da B e non separa B da C . \square

La prossima proposizione è molto importante in quanto permette di trasformare problemi n -dimensionali in problemi di dimensione minore attraverso proiezioni al quoziente. La dimostrazione viene omessa poiché solamente tecnica.

Proposizione 3.1.10. *Sia P una intersezione di muri; chiamiamo $V_P = V/P$ e definiamo la proiezione*

$$\pi^P : V \rightarrow V_P$$

Sia \mathcal{H}_P l'insieme degli iperpiani N di V_P tali che $(\pi^P)^{-1}(N)$ è un muro di \mathcal{H} . Chiamiamo $\mathcal{F}_{(V,\mathcal{H})}$ l'insieme delle faccette di (V, \mathcal{H}) e definiamo l'unica mappa

$$\pi'_P : \mathcal{F}_{(V,\mathcal{H})} \longrightarrow \mathcal{F}_{(V_P,\mathcal{H}_P)}$$

tale che $\pi^P(F) \subseteq \pi'_P(F)$ per ogni $F \in \mathcal{F}_{(V,\mathcal{H})}$. Valgono allora le seguenti proprietà:

1. La mappa π'_P trasforma camere in camere; se A e B sono due camere adiacenti in V , allora o $\pi'_P(A) = \pi'_P(B)$ oppure $\pi'_P(A)$ e $\pi'_P(B)$ sono adiacenti;
2. Sia F una faccetta di supporto P . Allora la restrizione di π'_P all'insieme $Et(F) = \{E \in \mathcal{F}_{(V,\mathcal{H})} | F \subseteq \overline{E}\}$ (tale insieme prende il nome di stella di F), è bigettiva. Chiamiamo

$$\pi_F : \mathcal{F}_{(V_P,\mathcal{H}_P)} \longrightarrow Et(F)$$

l'inversa di tale restrizione. π_F , così come la sua inversa, mantiene l'incidenza delle faccette e l'adiacenza fra le camere. Sempre con π_F denoteremo la bigezione tra le intersezioni dei muri in V_P e le intersezioni dei muri di V che contengono P ;

3. Sia $C = \pi_F(C')$; allora, per ogni camera X di (V, \mathcal{H}) si ha:

$$\pi_F^{-1}(D(C, X)) = D(C', \pi'_P(X)) \quad \pi_F^{-1}(\mathcal{M}(C, X)) = \mathcal{M}_P(C', \pi'_P(X))$$

Se inoltre $X = \pi_F(X')$, allora:

$$\pi_F(D(C', X')) = D(C, X) \quad \pi_F(\mathcal{M}_P(C', X')) = \mathcal{M}(C, X)$$

Inoltre π_F induce una bigezione tra le gallerie minimali di V_F e quelle di V fatte da camere la cui chiusura contiene F .

Data una faccetta F con supporto P useremo (con un piccolo abuso di notazione) $V_F, \mathcal{H}_F, \pi^F, \pi'_F$ al posto di $V_P, \mathcal{H}_P, \pi^P, \pi'_P$

Definizione 3.1.11. Siano P una intersezione di muri e C una camera. Supponiamo che esista una faccetta di C (cioè contenuta in \overline{C}) di supporto P . Questa faccetta è unica grazie all'ipotesi dei coni simpliciali; la denotiamo con $F(P)$ e poniamo

$$C.\Delta(P) = \pi_{F(P)}(-\pi_{F(P)}^{-1}(C))$$

Osservazione 3.2. Senza l'ipotesi di coni simpliciali non è detto che esista la faccetta $F(P)$ corrispondente a una intersezione di muri della camera C . Se ad esempio consideriamo in \mathbb{R}^3 l'arrangiamento $\mathcal{H} = \{\{x = \pm z\}, \{y = \pm z\}\}$ si crea una camera C che è un cono a "base quadrata". Se ora considero l'intersezione dei supporti di due facce opposte del cono, questa non è il supporto di alcuna faccetta contenuta nella chiusura della camera C .

Esempio 3.1. Consideriamo $V = \mathbb{R}^3$ e l'arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} costituito dai piani coordinati $H_x = \{x = 0\}$, $H_y = \{y = 0\}$ e $H_z = \{z = 0\}$ mostrato in Figura 3.1. Il gruppo associato è finito e l'arrangiamento essenziale ($W = \mathbb{Z}_2^3$), dunque le camere sono dei coni simpliciali aperti e siamo nelle ipotesi della trattazione. Chiamiamo, per fissare le idee, A_1, \dots, A_4 le camere superiori ($z > 0$) percorse in senso antiorario e B_1, \dots, B_4 le camere inferiori corrispettive. Consideriamo adesso $P = \{x = 0, y = 0\}$ ovvero l'asse z e facciamo il quoziente V_P : questo non è altro che \mathbb{R}^2 e la mappa π^P è la proiezione sulle prime due coordinate.

Nel quoziente si ha che le camere A_i coincidono con le camere B_i per ogni i (abbiamo proiettato lo spazio sul piano H_z); chiamiamo tali camere \tilde{A}_i . Fissiamo adesso la camera $C = A_1 \subset V$ e sia $F = \{x = 0, y = 0, z > 0\}$ faccetta contenuta in \overline{C} con supporto P ; cerchiamo di capire chi è $C.\Delta(P)$. Per farlo osserviamo che la bigezione $\pi_{F(P)} : (V_P, \mathcal{H}_P) \rightarrow Et(F)$ non è altro la mappa che associa le faccette del piano alle faccette superiori ($z > 0$) di V poiché sono quelle che contengono F . Seguendo adesso la definizione di $C.\Delta(P)$ si ha:

$$C = A_1 \longrightarrow \tilde{A}_1 \longrightarrow -\tilde{A}_1 = \tilde{A}_3 \longrightarrow A_3 = C.\Delta(P)$$

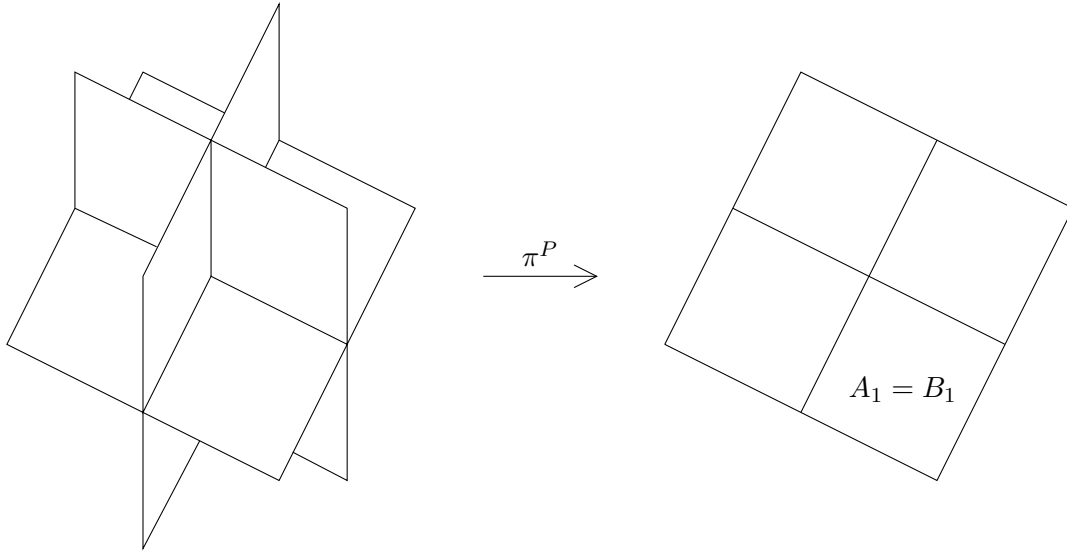


Figura 3.1: Proiezione su V_P con $P = \{x = y = 0\}$ di (V, \mathcal{H}) con \mathcal{H} arrangiamento formato dagli iperpiani coordinati

Osservazione 3.3. Con la definizione appena introdotta abbiamo descritto formalmente le camere opposte rispetto a ogni intersezione di iperpiani P tali che esiste una faccetta F di C con supporto P e le abbiamo chiamate $C.\Delta(P)$. Nei casi limite: $P = \{0\}$ e $P = V$ si ha rispettivamente $C.\Delta(P) = -C$ e $C.\Delta(P) = C$. L'ipotesi di camere che sono coni simpliciali aperti ci dice anche che le camere $C.\Delta(P)$ raggiungibili in \mathbb{R}^r sono esattamente 2^r .

Lemma 3.1.12. *Valgono i seguenti fatti:*

1. *Un muro M separa C da $C.\Delta(P)$ se e solo se $P \subseteq M$;*
2. *Sia M un muro di C , allora $C.\Delta(M)$ è l'unica camera adiacente a C che ha M per muro;*
3. *Siano $M \neq N$ due muri di C . Sia $P = M \cap N$ tale che P contiene una faccetta F di C aperta in P . Allora esistono esattamente due gallerie minimali da C a $C.\Delta(P)$: la prima comincia per $(C, C.\Delta(M))$, la seconda per $(C, C.\Delta(N))$.*

Dimostrazione. L'idea è quella di usare la Proposizione 3.1.10 e l'Osservazione 3.3: se P è contenuto in M , allora passando al quoziente V_P , P diventa l'origine e M un iperpiano di V_P . Dato che nel quoziente si passa all'opposto, l'immagine di M separa C dalla sua opposta e di conseguenza M separa C da $C.\Delta(P)$. Viceversa se P non è contenuto in M , allora passando a V_P , $M = V_P$ e, non essendo un iperpiano, non separa C dalla sua opposta. Questo ci da (1).

Se $M = P$ è un muro di C , allora in $V_P = \mathbb{R}$ esiste un unico muro che separa C dalla sua opposta. Di conseguenza $M \subset P$ (per il punto (1) di questo lemma e per la Proposizione 3.1.10) è l'unico muro che separa C da $C.\Delta(M)$.

Posto $P = M \cap N$, allora $V_P = \mathbb{R}^2$ e dunque esistono esattamente due gallerie minimali da C alla sua opposta. Di conseguenza (sfruttando anche il punto (2) di questa lemma) esistono esattamente due gallerie minimali da C a $C.\Delta(P)$ che iniziano rispettivamente per $(C, C.\Delta(M))$ e $(C, C.\Delta(N))$. \boxtimes

Osservazione 3.4. Data P una intersezione di muri, allora anche (V_P, \mathcal{H}_P) hanno camere che sono coni simpliciali aperti. Vedremo che questa osservazione sarà molto importante nel seguito della trattazione.

Introduciamo adesso una relazione tra le gallerie:

Definizione 3.1.13. Siano G, G' due gallerie con le stesse estremità. Diremo che G è *equivalente* a G' ($G \sim G'$) se esiste una sequenza di gallerie $G = G_0, \dots, G_n = G'$ con $n \geq 0$ tale che G_{j+1} si determina da G_j ($0 \leq j < n$) tramite le seguenti regole:

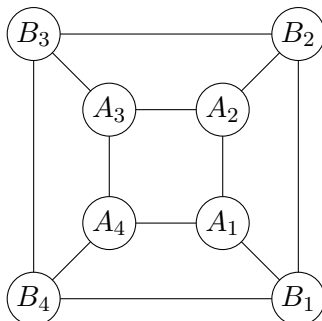
B1 Esistono delle decomposizioni di G_j, G_{j+1} tali che:

$$G_j = E_1 F E_2 \qquad G_{j+1} = E_1 F' E_2$$

B2 Esiste una camera C e due muri M e N di C tali che F e F' siano le due gallerie minimali da C a $C.\Delta(M \cap N)$.

Osservazione 3.5. La relazione introdotta è una relazione di equivalenza. La composizione tra gallerie, le applicazioni antipodale e opposto, le funzioni "inizio" e "fine" e la funzione lunghezza si comportano bene rispetto alla relazione e passano dunque al quoziente. Per indicare le classi di equivalenza si utilizzeranno le lettere minuscole. Diremo inoltre che una classe di equivalenza di gallerie *e comincia (o inizia)* per f se esiste g tale che $e = fg$. Equivalentemente diremo che *e termina* per f' se esiste g' tale che $e = g'f'$.

Esempio 3.2. Consideriamo come nell'esempio precedente $V = \mathbb{R}^3$ e l'arrangiamento di iperpiani \mathcal{H} costituito dai piani coordinati $H_x = \{x = 0\}$, $H_y = \{y = 0\}$ e $H_z = \{z = 0\}$. Indichiamo di nuovo con A_1, \dots, A_4 le camere tali che $z > 0$ percorse in senso antiorario e con B_1, \dots, B_4 le camere tali che $z < 0$ corrispettive. Un modo facile per visualizzare la situazione è il seguente grafo:



dove i lati fra due camere rappresentano l'adiacenza. In particolare i piani corrispondono ai 4 lati verticali, ai 4 orizzontali e ai 4 obliqui. Consideriamo adesso le due gallerie $G = (A_1, A_4, A_3, B_3)$ e $G' = (A_1, B_1, B_2, B_3)$ e mostriamo che sono equivalenti. Dobbiamo quindi costruire una sequenza di gallerie $G = G_0, \dots, G_n = G'$ che rispettino le condizioni **B1** e **B2**. Descriviamo il primo passo della costruzione nel dettaglio: in particolare vogliamo mostrare che $G_0 \sim G_1$ con $G_1 = (A_1, A_2, A_3, B_3)$. Poniamo quindi (con riferimento alla definizione) $E_1 = (A_1)$, $E_2 = (A_3, B_3)$ e infine $F = (A_1, A_4, A_3)$, $F' = (A_1, A_2, A_3)$; le camere F e F' soddisfano la proprietà **B2** in quanto, ponendo $M = H_x$ e $N = H_y$ (nel grafo stiamo contraendo le linee oblique), sono le gallerie minimali che collegano A_1 a $A_1 \cdot \Delta(H_x \cap H_y) = A_3$. Ripetendo questo ragionamento (possibile per ogni 4 vertici che formano un quadrilatero nel grafo) si costruisce la seguente successione di gallerie:

$$G = (A_1, A_4, A_3, B_3) \sim (A_1, A_2, A_3, B_3) \sim (A_1, A_2, B_2, B_3) \sim (A_1, B_1, B_2, B_3) = G'$$

e si ha la relazione tra G e G' .

Lemma 3.1.14. *Due gallerie equivalenti attraversano lo stesso numero di volte ogni muro.*

Dimostrazione. Mostriamo che due gallerie consecutive nella successione verificano la proprietà. Dato che $G_j = E_1 F E_2$ e $G_{j+1} = E_1 F' E_2$ è sufficiente verificare che il lemma è vero per F e F' che verificano la proprietà **B2**. Ma questo segue direttamente dalla riduzione al quoziente di dimensione 2 e dalla Proposizione 3.1.10. \boxtimes

Proposizione 3.1.15. *Due gallerie minimali con le stesse estremità sono equivalenti; dunque nel quoziente per \sim si ha l'unicità della galleria minimale.*

Dimostrazione. Siano $G = (C_0, \dots, C_n)$ e $G' = (C'_0, \dots, C'_n)$ minimali con le stesse estremità A e B . Procediamo per induzione sulla lunghezza delle gallerie minimali. Il caso $n = 0$ è ovvio (esiste un'unica galleria). Sia ora $n \geq 1$ e supponiamo che $C_1 = C'_1$, allora (C_1, \dots, C_n) e (C'_1, \dots, C'_n) sono minimali da C_1 a B ed equivalenti per ipotesi induttiva e dunque lo sono anche G e G' . Supponiamo dunque $C_1 \neq C'_1$. Chiamiamo M e M' i muri che separano rispettivamente A da C_1 e A da C'_1 e poniamo $C = A \cdot \Delta(M \cap M')$. I muri M e M' separano A da B . Grazie alla Proposizione 3.1.10 si ha che ogni muro che separa A da C , separa anche A da B . Siano adesso F e F' le gallerie minimali da A a C che passano rispettivamente per C_1 e C'_1 e sia E una galleria minimale da C a B . Allora le gallerie FE e $F'E$ sono minimali ed equivalenti. Adesso le gallerie G e FE sono equivalenti per ipotesi induttiva (iniziano entrambe per (A, C)) e allo stesso modo G' è equivalente a $F'E$. Dunque per la proprietà transitiva $G \sim G'$. \boxtimes

Osservazione 3.6. La relazione di equivalenza introdotta unisce in unica classe tutte le gallerie che per giungere da una camera all'altra attraversano gli stessi muri lo stesso numero di volte e per lo stesso verso di percorrenza.

Da ora in avanti utilizzeremo la notazione $u(A, B)$ per la galleria minimale che collega A e B nel quoziente. Inoltre, data P una intersezione di muri di una camera C , poniamo $\Delta(P) = u(C, C.\Delta(P))$ (di nuovo stiamo sfruttando l'ipotesi di coni simpliciali in quanto consideriamo $C.\Delta(P)$ con P intersezione di muri di una camera C). Poniamo infine $\Delta = u(C, -C)$ cioè la galleria che passa da tutti i muri dell'arrangiamento. Osserviamo anche che la notazione introdotta non dipende dalla camera C ; questo fatto sarà molto utile nella trattazione in quanto con questa notazione non avremo alcuna ambiguità.

Vediamo adesso un altro paio di importanti proposizioni:

Proposizione 3.1.16. *Siano A una camera e \mathcal{G} un insieme di classi di gallerie di lunghezza finita di partenza A . Supponiamo che \mathcal{G} verifichi le seguenti condizioni:*

- (a) $(A) \in \mathcal{G}$;
- (b) Se $gh \in \mathcal{G} \Rightarrow g \in \mathcal{G}$;
- (c) Siano g di fine B ; M, N due muri di B . Se $g\Delta(M)$ e $g\Delta(N)$ stanno in \mathcal{G} , allora anche $g\Delta(M \cap N)$ appartiene a \mathcal{G} ;

Allora $\exists!$ classe di gallerie x di partenza A tale che $\mathcal{G} = \{g|x \text{ comincia per } g\}$; cioè \mathcal{G} è formato da tutte le gallerie iniziali di x .

Dimostrazione. Dimostriamo prima l'unicità e poi l'esistenza:

Unicità: Siano x e y con $x \neq y$ verificanti la proprietà. Allora x comincia per y e y comincia per x , ma allora $x = y$, assurdo.

Esistenza: Fissiamo x di lunghezza massimale in \mathcal{G} (esiste per ipotesi in quanto \mathcal{G} è finito). Vogliamo dimostrare che tale x verifica la tesi. Per mostrarlo è sufficiente provare la seguente affermazione:

Siano g e M tali che:

1. x comincia per g ;
2. x non comincia per $g\Delta(M)$ e $g\Delta(M) \in \mathcal{G}$;

allora $\exists g'$ ed esiste M' che verificano ancora le condizioni precedenti con g' strettamente più lungo di g .

Dim. affermazione: Poiché $g\Delta(M) \in \mathcal{G}$ e poiché x è massimale, allora $g \neq x$ e pertanto x comincia per $g\Delta(N)$ per un opportuno muro N distinto da M (sto prolungando g). Grazie allora alla proprietà (c) di \mathcal{G} vale che $g\Delta(M \cap N) \in \mathcal{G}$. Poiché adesso, grazie al lemma precedente, sappiamo che $g\Delta(M \cap N)$ comincia per $g\Delta(M)$, allora x non può cominciare per $g\Delta(M \cap N)$. Poniamo ora (C_0, \dots, C_m) la galleria minimale da $A.g$ a $A.g\Delta(M \cap N)$ che comincia per $(A.g, A.g\Delta(N))$. Sia adesso i ($0 < i < m$) il più grande indice tale che x comincia per $g' = g(C_0, \dots, C_i)$; allora g' e il muro M' tra C_i e C_{i+1} verificano le condizioni (1) e (2) e la lunghezza di g' è strettamente maggiore di quella di g .

L'affermazione appena dimostrata prova la tesi: supponiamo infatti che esista h (di lunghezza minima) tale che x non comincia per h . Allora $h = g\Delta(M)$ per qualche $g \in \mathcal{G}$ tale che x comincia per g (minimalità di h). g e M verificano le proprietà (1) e (2) dell'affermazione e pertanto x dovrebbe avere lunghezza infinita, e ciò è assurdo. \times

Proposizione 3.1.17. *Siano A una camera e \mathcal{B} un insieme di camere; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. \mathcal{B} soddisfa le seguenti proprietà:

- (a) $A \in \mathcal{B}$;
- (b) Se $B \in \mathcal{B} \Rightarrow D(A, B) \subset \mathcal{B}$;
- (c) Siano M e N due muri di una camera B . Se A e B sono dalla stessa parte rispetto a M e N e $B.\Delta(M)$, $B.\Delta(N)$ appartengono a \mathcal{B} , allora anche $B.\Delta(M \cap N) \in \mathcal{B}$.

2. Esiste unica camera C tale che $\mathcal{B} = D(A, C)$.

Dimostrazione. (2) \Rightarrow (1): i punti (a) e (b) sono ovvi. Per quanto riguarda (c), consideriamo il quoziente in V_P con $P = M \cap N$; allora, usando la Proposizione 3.1.10, si ottiene la tesi poiché, nel quoziente bidimensionale, $B.\Delta(M)$ e $B.\Delta(N)$ sono le uniche due camere adiacenti a B e, affinché entrambe siano contenute in un $D(A, C)$, allora deve essere contenuto anche $B.\Delta(M \cap N)$;

(1) \Rightarrow (2): utilizziamo la Proposizione 3.1.16 appena dimostrata applicata all'insieme $\mathcal{G} = \{u(A, B) | B \in \mathcal{B}\}$: le ipotesi della proposizione sono implicate rispettivamente dalle ipotesi che abbiamo. Esiste dunque una classe di gallerie $x = u(A, X)$ massimale tale che ogni galleria di \mathcal{G} è inizio di x . Osserviamo adesso che restrizione di galleria minimale è ancora minimale e applicando adesso l'equivalenza $[d(A, C) = d(A, B) + d(B, C) \Leftrightarrow B \in D(A, C)]$ alla classe di gallerie massimale x ottenuta si ottiene la tesi. \boxtimes

Corollario 3.1.18. *Valgono i seguenti fatti:*

1. Siano A e B due camere adiacenti, separate dal muro M , e sia C una camera dalla stessa parte di B rispetto a M ($C \subset D_M(B)$). Allora esiste C' tale che

$$D(A, C) \cap D_M(B) = D(B, C');$$

2. Siano A, C_1, C_2 tre camere. Allora esiste C camera tale che:

$$D(A, C) = D(A, C_1) \cap D(A, C_2);$$

3. Siano A, C_1 due camere e M un muro di A . Allora esiste C' tale che:

$$D(A, C') = D(A, C_1) \cap D_M(A)$$

Dimostrazione. I punti (1) e (2) sono conseguenze della proposizione precedente; in particolare si deve verificare che le intersezioni verificano le ipotesi (a), (b), (c). Mostriamo a titolo di esempio che vale la proprietà (a) in $D(A, C) \cap D_M(B)$ (le altre si svolgono in modo simile, ma in maniera più tecnica). Dobbiamo dunque verificare che $B \in D(A, C) \cap D_M(B)$: ovviamente $B \in D_M(B)$; per mostrare il secondo contenimento basta far vedere che B si comporta nello stesso modo di A e C rispetto agli

iperpiani di $\mathcal{H}_{A,C}$. Supponiamo per assurdo che esista un iperpiano $H \in \mathcal{H}_{A,C}$ tale che $B \notin D_H(A) = D_H(C)$, allora H divide B da C e A da B . Ma l'unico iperpiano che divide A da B è M per la loro adiacenza; ma allora $H = M$ e B appartiene a $D_M(B) = D_M(C)$, assurdo. Il punto (3) si ottiene come caso particolare del punto (2) scegliendo $C_2 = -(A, \Delta(M))$. \boxtimes

Lemma 3.1.19. *Siano M, M', M'' tre muri distinti di una camera A . Poniamo:*

$$\begin{aligned} A_1 &= A, \Delta(M) & B &= A, \Delta(M \cap M' \cap M'') \\ B' &= A, \Delta(M \cap M') & B'' &= A, \Delta(M \cap M'') \end{aligned}$$

Sia C una camera. Se $B' \in D(A_1, C)$ e $B'' \in D(A_1, C)$, allora $B \in D(A_1, C)$.

Dimostrazione. Le faccette F di A , aperte in $M \cap M' \cap M''$ sono faccette di tutte le camere A, A_1, B, B', B'' e dunque applicando la Proposizione 3.1.10 è possibile ridursi ad uno spazio vettoriale di dimensione 3. Inoltre, grazie al corollario precedente punto (3), possiamo anche supporre che A_1 e C siano dalla stessa parte di M . Per ipotesi abbiamo che $B', B'' \in D(A_1, C)$. Poiché adesso M' (risp. M'') separa A_1 da B' (risp. B''), A_1 e C sono separati da M' e M'' (e sono dalla stessa parte di M). A e C sono quindi separate da M, M', M'' e vale che $C = -A = B$. \boxtimes

Proposizione 3.1.20. *Valgono i seguenti fatti:*

1. *Siano A, B, C tre camere, F una galleria da A a B e E_1, E_2 gallerie da B a C . Se $FE_1 \sim FE_2 \Rightarrow E_1 \sim E_2$;*
2. *Allo stesso modo, se $E_1E \sim E_2E \Rightarrow E_1 \sim E_2$;*
3. *Sia g una classe di gallerie di inizio A . Allora esiste un'unica camera C tale che g comincia per $u(A, B)$ se e solo se $B \in D(A, C)$.*

Dimostrazione. Il punto (2) dell'enunciato si deduce dal punto (1) per passaggio alle gallerie opposte. Siano dunque $G = (C_0, \dots, C_n)$ e $G' = (C'_0, \dots, C'_n)$ due gallerie di lunghezza n con le stesse estremità: $C_0 = C'_0$ e $C_n = C'_n$. Se adesso $n \geq 1$ poniamo $G_1 = (C_1, \dots, C_n)$ e $G'_1 = (C'_1, \dots, C'_n)$. Se inoltre vale che $C_1 \neq C'_1$, denotiamo con M e M' i muri che separano rispettivamente $C_0 = C'_0$ da C_1 e da C'_1 e poniamo infine $A = C_0, \Delta(M \cap M')$. Consideriamo adesso la seguente relazione definita sulle gallerie sopra esposte: diciamo che vale $R_n(G, G')$ se e solo se vale una delle seguenti:

- (α) $n = 0$;
- (β) $n \neq 0$, $C_1 = C'_1$ e $G_1 \sim G'_1$;
- (γ) $n \neq 0$, $C_1 \neq C'_1$ e esiste F galleria da A a $C_n = C'_n$ tale che $G_1 \sim u(C_1, A)F$ e $G'_1 \sim u(C'_1, A)F$

Vogliamo adesso provare per induzione su n che $R_n(G, G')$ è una relazione di equivalenza. Il caso $n = 0$ è banale. Supponiamo dunque che R_i sia relazione di equivalenza $\forall i < n$ e proviamo preliminarmente i seguenti fatti:

(i) Per le gallerie di lunghezza $i < n$, $R_i(G, G') \Leftrightarrow G \sim G'$: infatti si osserva che $R_i(G, G') \Rightarrow G \sim G'$ (l'unico caso non ovvio è il caso γ , ma basta accorgersi che attaccare una galleria di lunghezza 1 a una galleria minimale realizza una galleria minimale); viceversa, sfruttando la notazione della relazione di equivalenza, mostriamo che se $G \sim G'$, allora vale $R_i(G_j, G_{j+1})$ e questo è sufficiente sfruttando la transitività che deriva dall'ipotesi induttiva. In particolare se $G \sim G'$, prendiamo un passaggio della successione e, posto $G_j = F_1 E_j F_2$ e $G_{j+1} = F_1 E_{j+1} F_2$, mettiamoci nel caso (β). Dobbiamo allora mostrare che $(G_j)_1 \sim (G_{j+1})_1$ e questo è vero perché $(G_j)_1$ e $(G_{j+1})_1$ sono proprio nella forma richiesta dalla relazione di equivalenza a meno di accorciare F_1 .

Nel caso (γ), dalle ipotesi si ricava che F_1 è la galleria banale e dato che E_j ed E_{j+1} sono minimali, allora accorciandole di una sola camera all'inizio continuano ad essere minimali; questo fornisce una scrittura valida per $(G_j)_1$ e $(G_{j+1})_1$ e la tesi;

(ii) Il punto (1) della proposizione, con FG_1, FG_2 di lunghezza minore di n , è vero: infatti, per il punto (i) appena dimostrato $FG_1 \sim FG_2 \Rightarrow R_n(FG_1, FG_2)$ e per la seconda condizione di R_i (iterata più volte) si ottiene la tesi;

(iii) Vale il punto (3) della proposizione per g di lunghezza minore di n : infatti si applica la Proposizione 3.1.17 all'insieme $\mathcal{B} = \{B | g \text{ comincia per } u(A, B)\}$; è necessario però verificare l'ipotesi (c) della proposizione e questo lo si fa grazie a (ii), al lemma precedente e alla terza condizione di R_i .

Adesso rimane da dimostrare il passo induttivo e cioè che se R_i è relazione di equivalenza per ogni $i < n$, allora anche R_n è relazione di equivalenza. La proprietà riflessiva e quella simmetrica sono banali; vediamo dunque la proprietà transitiva: se G, G', G'' sono tre gallerie di lunghezza n che vanno da A a C e tali che $R_n(G, G')$ e $R_n(G, G'')$, allora $R_n(G', G'')$. Denotiamo con M, M', M'' i muri che separano $A = C_0 = C'_0 = C''_0$ da C_1, C'_1, C''_1 e distinguiamo due casi:

Caso 1: $C_1 \neq C'_1 = C''_1$: Sia $B = A.\Delta(M \cap M') = A.\Delta(M \cap M'')$, allora:

$$\begin{aligned} G_1 &= (C_1, \dots, C_n) \sim u(C_1, B)F' \sim u(C_1, B)F'' \\ G'_1 &= (C'_1, \dots, C'_n) \sim u(C'_1, B)F' \\ G''_1 &= (C''_1, \dots, C''_n) \sim u(C''_1, B)F'' \end{aligned}$$

Nella prima relazione, dato che $u(C_1, B)F'$ ha lunghezza $< n$, si può applicare l'ipotesi induttiva e si ottiene $F' \sim F''$. Sostituendo l'uguaglianza nelle ultime due relazioni e ricordandoci che siamo nel caso $C'_1 = C''_1$ si ha $R_n(G', G'')$;

Caso 2: $C_1 \neq C'_1, C_1 \neq C''_1$: Posti allora $B_1 = A.\Delta(M' \cap M'')$, $B' = A.\Delta(M \cap M')$, $B'' = A.\Delta(M \cap M'')$ e $B = A.\Delta(M \cap M' \cap M'')$. Si ha allora:

$$\begin{aligned} G_1 &= (C_1, \dots, C_n) \sim u(C_1, B')F' \sim u(C_1, B'')F'' \\ G'_1 &= (C'_1, \dots, C'_n) \sim u(C'_1, B')F' \\ G''_1 &= (C''_1, \dots, C''_n) \sim u(C''_1, B'')F'' \end{aligned}$$

In modo che la classe g_1 di G_1 cominci per $u(C_1, B')$ e $u(C_1, B'')$. Risulta allora dal punto **(iii)** (sfruttando l'ipotesi induttiva) e dal Lemma 3.1.19 che g_1 comincia per $u(C_1, B)$: $G_1 \sim u(C_1, B)F$. Dal punto **(ii)** dimostrato si ha inoltre che $F' \sim u(B', B)F$ e $F'' \sim u(B'', B)F$ e dunque $G_1 \sim u(C_1, B)F$, $G'_1 \sim u(C'_1, B)F$ e $G''_1 \sim u(C''_1, B)F$. Si ha infine (dato che il passaggio per B_1 delle gallerie $u(C'_1, B)$, $u(C''_1, B)$ è obbligato) che

$$\begin{aligned} G'_1 &\sim u(C'_1, B_1)u(B_1, B)F \\ G''_1 &\sim u(C''_1, B_1)u(B_1, B)F \end{aligned}$$

in modo che valga $R_n(G', G'')$.

⊠

Definizione 3.1.21. Data una classe di gallerie g , chiamiamo *camera indicatrice*, la camera C descritta nella Proposizione 3.1.20, ovvero quella camera C tale che, per ogni camera B , g comincia per $u(A, B)$ se e solo se $B \in D(A, C)$.

Corollario 3.1.22. Siano A una camera e \mathcal{G} un insieme di classi di gallerie di lunghezza finita di partenza A . Supponiamo che $\exists!$ classe di gallerie x di partenza A tale che $\mathcal{G} = \{g|x \text{ comincia per } g\}$; allora \mathcal{G} verifica le seguenti condizioni:

- (a) $(A) \in \mathcal{G}$;
- (b) Se $gh \in \mathcal{G} \Rightarrow g \in \mathcal{G}$;
- (c) Siano g di fine B ; M, N due muri di B . Se $g\Delta(M)$ e $g\Delta(N)$ stanno in \mathcal{G} , allora anche $g\Delta(M \cap N)$ appartiene a \mathcal{G} ;

Ovvero la Proposizione 3.1.16 è in realtà un se e solo se.

Dimostrazione. Supponiamo dunque che $\mathcal{G} = \{g|x \text{ comincia per } g\}$. Le proprietà **(a)** e **(b)** sono immediate. Supponiamo che $x = gh$ (con h di inizio B) e che $g\Delta(N)$, $g\Delta(M)$ stiano in \mathcal{G} . Risulta allora dalla proposizione precedente punto (1) che h comincia per $\Delta(N)$ e $\Delta(M)$. Sia C la camera indicatrice relativa alla classe di gallerie h . Poiché M e N separano B da C , $\pi'_{M \cap N}(C)$ non può essere che $\pi'_{M \cap N}(B) \cdot \Delta$ e dunque la tesi segue dalla Proposizione 3.1.10 sui quozienti. ⊠

Osservazione 3.7. La Proposizione 3.1.20 mostra che una classe di gallerie g di inizio A determina in modo naturale uno spazio $D(A, C)$ in cui tutte le camere che ne fanno parte sono tali che $u(A, B)$ è segmento iniziale di g .

Osservazione 3.8. Riportiamo adesso un algoritmo per il calcolo della camera indicatrice C : siano $G = (A_0, \dots, A_n)$ una galleria di lunghezza $n \geq 1$, $G_1 = (A_1, \dots, A_n)$ e M il muro che separa A_0 da A_1 , C la camera indicatrice relativa a G e C_1 la camera indicatrice relativa a G_1 . Possiamo calcolare C per induzione utilizzando la formula

$$D(A_1, C) = D_M(A_1) \cap D(A_1, C_1).$$

Poiché $A_1 \in D(A, C)$, M separa effettivamente A da C e $C \in D_M(A_1)$. Grazie ora al punto (1) della Proposizione 3.1.20, si ha anche $D(A_1, C) \subset D(A_1, C_1)$ con l'inclusione che viene dal fatto che C_1 è la camera indicatrice di G_1 . Infine, se $B \in D_M(A_1) \cap D(A_1, C_1)$, allora G_1 comincia per $u(A_1, B)$ e G comincia per $u(A, A_1)u(A_1, B) = u(A, B)$.

Esempio 3.3. Vediamo adesso con un esempio come ci si comporta per la costruzione della camera indicatrice. Consideriamo come al solito $V = \mathbb{R}^3$ e l'arrangiamento di iperpiani $\mathcal{H} = \{H_x, H_y, H_z\}$. Chiamiamo A_1, \dots, A_4 le camere superiori numerate in senso antiorario e B_1, \dots, B_4 le camere inferiori corrispondenti; diciamo inoltre che A_1 è la camera che ha tutte le coordinate positive. Supponiamo di avere $G = (A_1, A_2, B_2, A_2)$ galleria e calcoliamone la camera indicatrice: seguiamo passo passo l'osservazione precedente e troviamo per induzione tale camera. Chiamiamo $G = G_1$, $G_2 = (A_2, B_2, A_2)$, $G_3 = (B_2, A_2)$ e $G_4 = (A_2)$; applichiamo il ragionamento induttivo descritto sopra partendo da G_4 e arrivando fino a G . Ovviamente la camera indicatrice C_4 di G_4 è A_2 . Applichiamo adesso la formula induttiva per G_3 ; allora la sua camera indicatrice verifica:

$$D(A_2, C_3) = D_{H_z}(A_2) \cap D(A_2, A_2) = \{A_2\}$$

e l'unica camera che verifica tale relazione è $C_3 = A_2$. Continuiamo a risalire: sia C_2 la camera indicatrice di G_2 , allora vale che:

$$D(B_2, C_2) = D_{H_z}(B_2) \cap D(B_2, A_2) = \{A_2, B_2\}$$

e l'unica camera che verifica la relazione è $C_2 = B_2$. Calcoliamo infine C_1 camera indicatrice di $G_1 = G$. Applicando sempre la solita relazione:

$$D(A_2, C_1) = D_{H_x}(A_2) \cap D(A_2, B_2) = \{A_2, B_2\}$$

e dunque $C_1 = B_2$. Abbiamo quindi scoperto che la camera indicatrice della galleria $G = (A_1, A_2, B_2, A_2)$ è B_2 e lo spazio identificato da G è $D(A_1, B_2) = D_{H_y}(A_1)$.

Corollario 3.1.23. *Siano G e H due gallerie componibili. Siano A la provenienza di G , B la provenienza di H e C la camera indicatrice di H . Si ha dunque $H \sim u(B, C)H'$ con H' eventualmente la galleria vuota; allora per ogni camera D la classe di GH inizia per $u(A, D)$ se e solo se quella di $Gu(B, C)$ comincia per $u(A, D)$.*

Dimostrazione. Basta osservare che l'unica cosa che conta è la camera indicatrice. \bowtie

La prossima proposizione mostra il comportamento al quoziente di quanto visto fino ad adesso.

Proposizione 3.1.24. *Siano A una camera, P una intersezione di muri di A , $F = F(P)$ e g una classe di gallerie di inizio A . Allora esiste una classe g' di (V_P, \mathcal{H}_P) di inizio $\pi_F^{-1}(A)$ tale che, per tutte le gallerie H di (V_P, \mathcal{H}_P) , g comincia per $\pi_F(H)$ se e solo se g' comincia per H .*

Dimostrazione. Sia \mathcal{G} l'insieme delle classi h di inizio $\pi_F^{-1}(A)$ di (V_P, \mathcal{H}_P) tali che g comincia per $\pi_F(h)$. Applichiamo adesso la Proposizione 3.1.16 a \mathcal{G} in (V_P, \mathcal{H}_P) . Grazie alla Proposizione 3.1.10 sono verificate le ipotesi e dunque esiste la classe di gallerie x tale che ogni $h \in \mathcal{G}$ è segmento iniziale di x . Segue dunque la tesi. \bowtie

3.2 Categoria delle gallerie

Possiamo vedere l'insieme delle gallerie come l'insieme delle frecce (morfismi) di una categoria $Gal_0(V, \mathcal{H})$ con le camere come oggetti. Allo stesso modo, le classi di equivalenza delle gallerie sono le frecce di una categoria quoziente $Gal_+(V, \mathcal{H})$. L'operazione $G \mapsto G^*$ (rispettivamente $G \mapsto -G$) inducono una antiequivalenza (risp. una equivalenza) di $Gal_0(V, \mathcal{H})$ o di $Gal_+(V, \mathcal{H})$ in se stesso e induce l'identità (risp. $C \mapsto -C$) sugli oggetti. Se non ci sarà ambiguità non indicheremo lo spazio vettoriale e l'arrangiamento.

Osservazione 3.9. Nel nostro setting di gruppo finito di riflessione, possiamo interpretare le gallerie Gal_0 come particolari stringhe di elementi del gruppo W . In particolare se s_1, \dots, s_n sono le riflessioni associate agli iperpiani H_1, \dots, H_n dell'arrangiamento, allora una $G \in Gal_0$ di inizio C corrisponde a una stringa $s_{i_1} \dots s_{i_k}$ con la regola dell'*adiacenza* ovvero che s_{i_j} deve essere una riflessione associata a uno dei muri della camera $(s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}}(C))$, dove con questa scrittura intendiamo una azione destra dell'elemento $s_{i_1} \dots s_{i_{j-1}}$ su C . Unica precisazione in questa scrittura è quella che se s_i è la riflessione che manda la camera A nella camera B e viceversa, allora scrivere $s_i s_i s_i$ corrisponde alla galleria (A, B, A, B) ; ovvero nella stringa gli elementi non si semplificano; sono soltanto dei simboli formali che nella notazione corrispondono agli elementi di W , ma non vivono dentro a W . Potremmo dunque scrivere $s_i s_i s_i = s_i^3$. Le gallerie in Gal_+ possono essere viste allo stesso modo con annesse le relazioni indotte dalla relazione di equivalenza \sim descritta. In particolare le relazioni non alterano partenza, arrivo e lunghezza della galleria, ma possono agire all'interno della scrittura dell'elemento riordinando le riflessioni poiché, come osservato, in Gal_+ contano soltanto passaggi e numeri di passaggi tra i muri.

Lemma 3.2.1. *Valgono i seguenti fatti:*

1. $\forall g \in Gal_+$, vale che $g\Delta = \Delta(-g)$;
2. Per ogni g, h di inizio A in Gal_+ , esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $g\Delta^n$ comincia per h . Se h è composta da k gallerie $u(A_i, A_{i+1})$ si può prendere $n = k$.

Dimostrazione. Ragionando per induzione si ottiene facilmente la tesi (è sufficiente vedere g come composizione di due gallerie più corte); basta quindi mostrare il caso base e cioè quando g è di lunghezza 1: $g = (B, C)$; allora:

$$\begin{aligned} g\Delta &= u(B, C)u(C, -C) = u(B, C)u(C, -B)u(-B, -C) = \\ &= u(B, -B)u(-B, -C) = \Delta(-g) \end{aligned}$$

Qualunque sia la camera B , $\Delta = u(A, -A)$ comincia per $u(A, B)$, questo ci fa notare che la camera indicatrice per Δ è proprio la sua antipodale. Mostriamo come questa osservazione implichi la tesi: decomponiamo h in $h = x_1 \dots x_k$ con x_1, \dots, x_k tali che attraversano i loro muri al massimo una volta. Consideriamo $g\Delta^k = \Delta(-g)\Delta^{k-1}$; per quanto osservato vale anche che $\Delta(-g)\Delta^{k-1} = x_1 y_1 (-g)\Delta^{k-1}$ per una certa galleria y_1 . Iterando allora il procedimento k volte portiamo h all'inizio della galleria e otteniamo la tesi. ⊠

A questo punto vogliamo definire una categoria Gal associata alla categoria Gal_+ già introdotta: in particolare lo facciamo rendendo invertibili tutte le gallerie di Gal_+ .

Definizione 3.2.2. Sia $\mathcal{H} = \{H_1, \dots, H_n\}$ l'arrangiamento di iperpiani finito e sia s_i la riflessione associata a H_i . Abbiamo visto che Gal_+ sono le parole nelle lettere s_1, \dots, s_n senza semplificazioni, con la regola dell'adiacenza e con le relazioni provenienti da \sim . Definiamo allora Gal categoria delle gallerie formata come oggetti dagli stessi di Gal_+ e come morfismi dalle parole nelle lettere $s_1, \dots, s_n, s_1^{-1}, \dots, s_n^{-1}$ con la regola dell'adiacenza e le relazioni provenienti da \sim . Le semplificazioni sono adesso lecite fra lettere *inverse*. Esiste una $\varphi : Gal_+ \rightarrow Gal$ naturale e gli elementi della sua immagine prendono il nome di *gallerie positive*.

Esempio 3.4. Per poter visualizzare meglio la categoria Gal definita, immaginiamo di essere all'interno di una camera C_0 e di voler fare un percorso tra camere. Supponiamo di voler fare il cammino (C_0, C_1, C_0) che rispetta la regola dell'adiacenza e che il muro da attraversare sia H_1 . Ci troviamo dunque nella camera C_0 e dobbiamo attraversare H_1 . Immaginiamoci adesso di avere due porte davanti a noi; la prima segnata con un segno $+$ e la seconda con un segno $-$ (e dalle parti opposte le proprie duali).

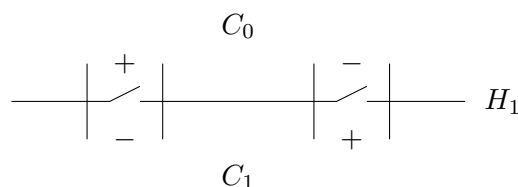


Figura 3.2: Modi di passare da una camera all'altra dell'arrangiamento

Attraversare il muro tramite la porta $+$ significa fare s_1 , attraversare quella col segno $-$ significa fare s_1^{-1} . Dato che vogliamo la galleria positiva (C_0, C_1, C_0) scelgo la porta con il $+$. Mi trovo adesso nella camera C_1 e voglio tornare nella camera C_0 . Ho di nuovo due porte davanti: quella da cui sono venuto (questa volta ha un segno $-$) e la seconda col segno $+$. Visto che il cammino che voglio fare è tutto positivo sceglierò di nuovo la camera con il $+$ che corrisponde ancora a s_1 . Se avessi scelto di tornare in C_0 attraverso la solita porta avrei ottenuto un s_1^{-1} e dunque, nel complesso, una galleria banale. La creazione di Gal è dunque una estensione dei possibili percorsi: se in Gal_+ potevo soltanto attraversare porte segnate con un $+$, adesso è possibile attraversare ogni possibile porta.

Osservazione 3.10. Grazie al lemma precedente è possibile mettere ogni $g \in Gal$ nella forma $g = g_1 \Delta^{-n} = \Delta^{-n} g_2$ con g_1, g_2 positivi (appartenenti a Gal_+).

Per tutti i muri M , il numero di volte che $g \in Gal_+$ attraversa M è ben definito (si veda la Proposizione 3.1.14). Questa funzione di g si prolunga in maniera naturale a $g \in Gal$. Più in generale, per tutte le intersezioni di muri P , si può utilizzare la proprietà

universale di Gal per definire i funtori:

$$\pi'_P : Gal(V, \mathcal{H}) \longrightarrow Gal(V_P, \mathcal{H}_P)$$

Siano A una camera, P una intersezione di muri di A e $F = F(P)$. La funzione π_F induce un funtore:

$$\pi_F : Gal_0(V_P, \mathcal{H}_P) \longrightarrow Gal_0(V, \mathcal{H})$$

L'immagine del funtore è stabile per la relazione di equivalenza e dunque viene indotto un funtore fedele:

$$\pi_F : Gal_+(V_P, \mathcal{H}_P) \longrightarrow Gal_+(V, \mathcal{H})$$

Infine, grazie alla costruzione di Gal , risulta che anche il seguente funtore è fedele:

$$\pi_F : Gal(V_P, \mathcal{H}_P) \longrightarrow Gal(V, \mathcal{H})$$

Lemma 3.2.3. *Siano C una camera, I, J due insiemi di muri di C , $K = I \cap J$, P, Q e R le intersezioni di muri di I, J e K rispettivamente e sia $h \in Hom_{Gal_+}(A, B)$ che comincia sia per $(\Delta^n \Delta(P)^{-n})$ che per $(\Delta^n \Delta(Q)^{-n})$, allora h comincia per $(\Delta^n \Delta(R)^{-n})$.*

Dimostrazione. Sia $A(P) = A.\Delta.\Delta(P)$ (analogo per Q e R). La galleria $\Delta\Delta(P)^{-1}$ è in realtà $u(A, A(P))$ e questo si può facilmente dedurre da come è stato definito lo spazio Gal ; quella di inizio $A(P)$ è $u(A(P), A)$. Dal Lemma 3.2.1 e dall'uso della notazione scelta $\Delta(P)$ risulta che $\Delta\Delta(P) = \Delta(P)\Delta$ e dunque si ha:

$$\Delta^n \Delta(P)^{-n} = u(A, A(P))u(A(P), A)u(A, A(P))\dots \quad n \text{ volte}$$

Mostriamo adesso che $A(R) \in D(A(P), A(Q))$: sia $\mathcal{M}(A.\Delta, A(P))$ l'insieme dei muri che contengono P e $\mathcal{M}(A.\Delta, \Delta(Q))$ l'insieme di quelli che contengono Q . Adesso $\mathcal{M}(A(P), A(Q))$ è l'insieme di quelli che contengono P o Q , ma non R , che non è altro che $\mathcal{M}(A(P), A(R)) \cup \mathcal{M}(A(Q), A(R))$ e si applichi adesso il Corollario 3.1.9.

Adesso per la Proposizione 3.1.20, una classe di gallerie che comincia per $\Delta\Delta(P)^{-1}$ e $\Delta\Delta(Q)^{-1}$ comincia anche per $\Delta\Delta(R)^{-1}$; dimostriamo adesso l'ultimo fatto che ci farà raggiungere (tramite induzione) la tesi del lemma:

Siano P e R intersezioni di muri di una camera A , con $P \subset R$. Sia $h \in Gal_+$ di inizio A . Se h comincia sia per $\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ ($n > 0$), sia per $\Delta\Delta(R)^{-1}$, allora h comincia per $(\Delta\Delta(R)^{-1})(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-1}$

Infatti: supponiamo $n \geq 2$ e poniamo $h = (\Delta\Delta(P)^{-1})h'$. Con le notazioni precedenti allora h' comincia sia per $\Delta\Delta(P)^{-1} = u(A(P), A)$, sia per $u(A(P), A(R))$. Applichiamo dunque la Proposizione 3.1.20 punto (3). La camera indicatrice C è allora separata da $A(P)$ da tutti i muri che separano $A(P)$ da A (cioè $M \not\supset P$) o $A(P)$ da $A(R)$ (cioè $M \supset P$ e $M \not\supset R$). La camera C non è dunque separata da $A(P)\Delta$ se non dai muri $M \supset R$ e $C \in D(A(P).\Delta, A(P).\Delta\Delta(R))$. Da queste osservazioni, h' comincia sia per $(\Delta\Delta(R)^{-1})$ che per $(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-2}$, da cui h comincia per $(\Delta\Delta(P)^{-1})(\Delta\Delta(R)^{-1})(\Delta\Delta(P)^{-1})^{n-2}$ e si conclude osservando che vale:

$$\Delta\Delta(P)^{-1}\Delta\Delta(R)^{-1} = \Delta\Delta(R)^{-1}\Delta\Delta(P)^{-1}$$

⊠

Proposizione 3.2.4. *Siano C una camera, I, J due insiemi di muri di C , $K = I \cap J$, P, Q e R le intersezioni di muri di I, J e K rispettivamente e $F(P), F(Q)$ e $F(R)$ le faccette corrispondenti di C . La faccetta $F(R)$ è la più piccola faccetta contenente $F(P)$ e $F(Q)$. Nel gruppoide $Gal(V, \mathcal{H})$ si ha:*

$$\pi_{F(P)}(Gal(V_p, \mathcal{H}_p)) \cap \pi_{F(Q)}(Gal(V_Q, \mathcal{H}_Q)) = \pi_{F(R)}(Gal(V_R, \mathcal{H}_R))$$

Dimostrazione. Una camera che ammette $F(P)$ e $F(Q)$ come faccette, ammette anche $F(R)$ come faccetta. e questo prova la proposizione per gli oggetti. Sia adesso $g \in Hom_{Gal}(A, B)$ e supponiamo $g = \pi_{F(P)}(g'_1) = \pi_{F(Q)}(g'_2)$. Dalla definizione di Gal e dall'Osservazione 3.10, si ha che $g'_1 = \Delta(P)^{-n}g''_1$ e $g'_2 = \Delta(Q)^{-n}g''_2$ con i g''_i positivi per $n \geq 0$ abbastanza grande. Siano $g_1 = \pi_{F(P)}g''_1$ e $g_2 = \pi_{F(Q)}g''_2$; adesso dal Lemma 3.2.1 (trasformando con $*$) si ha $\Delta^n \Delta(P)^{-n}$ positivo e si ha dunque in $Gal_+(V, \mathcal{H})$:

$$(\Delta^n \Delta(P)^{-n})g_1 = (\Delta^n \Delta(Q)^{-n})g_2 = (\Delta^n \Delta(Q)^{-n})g_3$$

dove l'ultima uguaglianza segue direttamente dal lemma precedente (g_3 positivo). Si ha dunque $g = \Delta(R)^{-n}g_3$. Adesso la galleria positiva $g_3 = \Delta(R)^n g$ appartiene all'immagine di $\pi_{F(P)}$ e di $\pi_{F(Q)}$. Grazie a quanto detto sui muri attraversati, ne deduciamo che non attraversa nessuno dei muri che non contengono P o Q , cioè che non contengono R ; ne deduciamo che appartiene all'immagine di $\pi_{F(R)}$. \times

3.3 Costruzione di uno spazio contraibile

Siano (V, \mathcal{H}) come già definito munito di una qualsiasi struttura euclidea, sia $r = dim V$ e sia S la sfera unitaria (possiamo identificare S come $V/(\mathbb{R}^*)^+$). Gli iperpiani $M \in \mathcal{H}$ generano una triangolazione di S che chiameremo ancora spazio simpliciale (o schema simpliciale) corrispondente e questa realizzazione geometrica. Useremo su S la terminologia che abbiamo utilizzato per V (cioè camere, faccette, adiacenza, gallerie) facendo attenzione al fatto che adesso la dimensione delle varie faccette è diminuita di 1.

Scegliamo una *camera fondamentale* $A_0 \subset S$ e data una classe di gallerie g , indichiamo con g^{end} l'ultima camera di g , che è un simpleso di dimensione $r - 1$; definiamo dunque il seguente spazio:

Definizione 3.3.1. Definiamo lo spazio I_+ munito di una mappa $q : I_+ \rightarrow S$ come segue:

1. Chiamiamo \mathcal{Z}_+ l'insieme delle classi di equivalenza delle gallerie g di inizio A_0 :

$$\mathcal{Z}_+ = \bigsqcup_B Hom_{Gal_+}(A_0, B)$$

2. Chiamiamo Z_+ la somma digiunta, indicizzata sui $g \in \mathcal{Z}_+$, della chiusura dei semplici g^{end} :

$$Z_+ = \bigsqcup_{g \in \mathcal{Z}_+} \overline{g^{end}}$$

e chiamiamo $q' : Z_+ \rightarrow S$ l'evidente applicazione associata allo spazio (associa al semplice di Z_+ il corrispondente semplice di S);

3. Definiamo I_+ (munito di q) come quoziente di Z_+ (munito di q') tramite i seguenti incollamenti: se g è una classe di gallerie da A_0 a B e C è una camera adiacente a B , si attacchi $\overline{g^{end}}$ con $\overline{[g(BC)]^{end}}$ secondo la faccia chiusa comune alle loro immagini in S .

Lo spazio I_+ è decomposto in faccette, che sono le immagini di faccette di Z_+ e ogni faccetta si immerge in maniera bigettiva su una faccetta di S . Le sue camere (risp. facce, vertici) sono faccette di dimensione $r - 1$ (risp. $r - 2, 0$) dato che ho costruito lo spazio a partire da S e non da tutto V .

I vertici di una faccetta F sono i vertici contenuti nella chiusura \overline{F} di F . Le camere di I_+ sono indicizzate su Z_+ ; denotiamo con $\widetilde{A_0}.g$ quelle di indice g e con $\widetilde{A_0}$ quella di indice la galleria (A_0) .

Siano adesso $g \in Hom_{Gal_+}(A_0, A)$, $\widetilde{A} = \widetilde{A_0}.g$ e $H = (C_0, \dots, C_n)$ una galleria da A a B di classe h . Poniamo allora $\widetilde{A}.h = \widetilde{A_0}.gh$.

Le gallerie $\widetilde{A}.(C_0, \dots, C_i)$ per $0 \leq i \leq n$ formano una galleria appartenente a I_+ . Chiameremo tali gallerie *positive*.

Esempio 3.5. Per avere una idea dello spazio I_+ che stiamo costruendo consideriamo $V = \mathbb{R}^2$ e l'arrangiamento dato dagli iperpiani coordinati: $\mathcal{H} = \{H_x = \{x = 0\}, H_y = \{y = 0\}\}$ e intersechiamo con la sfera unitaria:

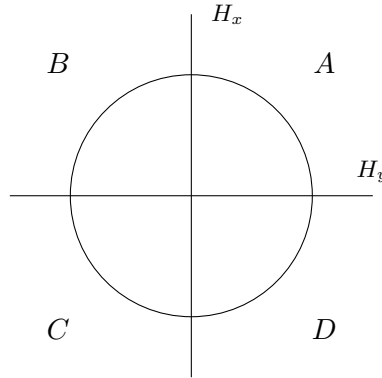


Figura 3.3: Arrangiamento $\mathcal{H} = \{H_x, H_y\}$ in \mathbb{R}^2

Scegliamo $A_0 = A$ come camera fondamentale e chiamiamo s_x e s_y le riflessioni rispetto a H_x e H_y . Costruiamo lo spazio I_+ in modo induttivo: consideriamo prima le gallerie di lunghezza 0, poi di lunghezza 1 e così via e incolliamo, secondo la relazione descritta, le camere di lunghezza n allo spazio già costruito. Abbiamo la seguente tabella (indichiamo con $l(g)$ la lunghezza della galleria):

$l(g)$	Galleria come succ. di camere	g^{end}	Riflessioni associate
0	(A)	A_0^0	
1	(A, B) (A, D)	B_0^1 D_1^0	s_x s_y
2	(A, D, A) (A, B, C) \sim (A, D, C) (A, B, A)	A_0^2 C_1^1 A_2^0	s_x^2 $s_x s_y = s_y s_x$ s_y^2
3	(A, B, A, B) (A, B, C, D) \sim (A, D, C, D) \sim (A, B, A, D) (A, B, C, B) \sim (A, D, C, B) \sim (A, D, A, B) (A, D, A, D)	B_0^3 D_1^2 B_2^1 D_3^0	s_x^3 $s_x s_y s_x = s_y s_x^2 = s_x^2 s_y$ $s_x s_y^2 = s_y s_x s_y = s_y^2 s_x$ s_y^3

Diamo adesso due rappresentazioni grafiche di I_+ : la prima ricalca passo passo la costruzione fatta anche a livello visivo. In particolare le copie delle gallerie (l'apice indica quante s_x compongono la galleria e il pedice quante s_y) vengono attaccate nel seguente modo: prendiamo la galleria di lunghezza 0 e ne creiamo la copia A_0^0 . A questo punto prendiamo le gallerie di lunghezza 1, creiamo le g^{end} e le attacchiamo in modo che in I_+ sia possibile percorrere in maniera naturale le gallerie da cui le g^{end} provengono. Si procede in questo modo per ogni lunghezza di galleria; Dunque la costruzione sarà (fino a gallerie di lunghezza 3):

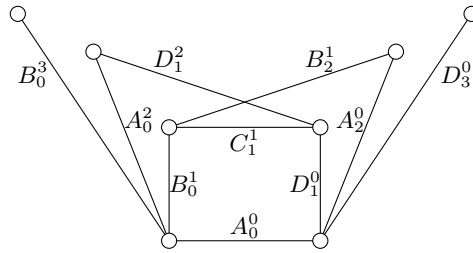


Figura 3.4: Rappresentazione di I_+

Un altro modo di pensare lo spazio I_+ in questa situazione particolare, è quello di identificare le g^{end} con i punti di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ in quanto, come si può facilmente osservare, una g è univocamente determinata dal numero di s_x e dal numero di s_y da cui è composta (cioè dai loro esponenti). Possiamo dunque vedere lo spazio I come rappresentato in Figura 3.5 dove però è necessario puntualizzare il seguente fatto: la relazione di equivalenza su I_+ fa sì che tutti i collegamenti tra una medesima riga o una medesima colonna collassino in un unico punto. Ad esempio se ci troviamo in A_0^0 e vogliamo andare in B_0^3 nella prima riga, allora posso farlo direttamente, cioè non ci sono altre camere in mezzo (come si può facilmente constatare anche dalla prima rappresentazione di I_+).

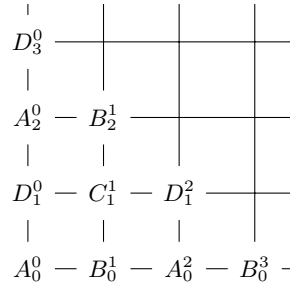


Figura 3.5: Rappresentazione duale di I_+

Lemma 3.3.2. *Sia F una faccetta di S , A e B due camere di S aventi F per faccetta, $g \in \text{Hom}_{\text{Gal}_+}(A_0, A)$ e $h = \text{Hom}_{\text{Gal}_+}(A_0, B)$; allora le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1. *In I_+ , le faccette $q^{-1}(F)$ di $\widetilde{A}_0.g$ e $\widetilde{A}_0.h$ coincidono;*
2. *$g^{-1}h \in \text{Hom}_{\text{Gal}}(A, B)$ appartiene a $\pi_F(\text{Gal})$;*
3. *Esistono g_1 e h_1 in $\pi_F(\text{Gal}_+)$ tali che $gg_1 = hh_1$.*

Dimostrazione. 1 \Rightarrow 2) Se le faccette $q^{-1}(F)$ di $\widetilde{A}_0.g$ e $\widetilde{A}_0.h$ coincidono, allora vuol dire che $g^{-1}h$ è una galleria che è una successione di camere che contengono tutte la faccetta F . Di conseguenza $g^{-1}h \in \pi_F(\text{Gal})$.

2 \Rightarrow 3) Adesso se $g^{-1}h \in \pi_F(\text{Gal})$, allora $\exists g'$ tale che $\pi_F(g') = g^{-1}h$. Per quanto osservato sullo spazio delle gallerie possiamo scrivere $\pi_F(g') = g''\Delta_F^{-n}$ dove $g_1 \in \pi_F(\text{Gal}_+)$ e $\Delta_F \in \pi_F(\text{Gal}_+)$ in quanto corrisponde alla simmetria rispetto a P supporto di F . Ma allora, posto $\Delta_F = h_1$:

$$\pi_F(g') = g^{-1}h \Leftrightarrow g_1\Delta_F^{-n} = g^{-1}h \Leftrightarrow gg_1 = hh_1^n$$

3 \Rightarrow 1) Per le definizioni date l'ipotesi implica che è possibile passare da g a h aggiungendo o eliminando in coda alla galleria, camere che contengono F e dunque la faccetta $q^{-1}(F)$ in I_+ sarà sempre la medesima. \boxtimes

Grazie adesso al lemma precedente e alla Proposizione 3.2.4 si può dedurre il seguente importante risultato:

Osservazione 3.11. Ciascuna faccetta di I_+ è univocamente determinata dall'insieme dei suoi vertici. Possiamo dunque esprimere I_+ come la realizzazione geometrica del seguente schema simpliciale:

- (a) Sia x un vertice di S , indichiamo con $\mathcal{G}(x)$ l'insieme dei $g \in \text{Gal}_+$ di inizio A_0 e di fine una camera di cui x è vertice. Sia $\mathcal{G}(x)/\pi_x$ il quoziente di $\mathcal{G}(x)$ rispetto alla relazione di equivalenza (2) del lemma precedente (per $F = x$). Allora l'insieme dei vertici è dato da:

$$\bigsqcup_x \mathcal{G}(x)/\pi_x$$

(b) Un insieme E di vertici è un simpleso se e solo se esiste una galleria g di inizio A_0 tale che, per ogni $y \in E$, g appartenga a $\mathcal{G}(q(y))$ e che y sia l'immagine di g in $\mathcal{G}(q(y))/\pi_{q(y)}$.

Proposizione 3.3.3. *Sia F una faccetta di I_+ ; allora esiste una classe di gallerie g tale che F è una faccetta di una camera $B = \widetilde{A_0}.h$ se e solo se $h = g\pi_F(h')$ per un opportuno $h' \in Gal_+$.*

Dimostrazione. Sia g galleria di lunghezza minima tale che F sia una faccetta di $A = \widetilde{A_0}.g$. Sia $B = \widetilde{A_0}.h$ una camera di cui F è faccetta. Dal Lemma 3.3.2 ((1) \Leftrightarrow (3)), esistono gallerie h_1, h_2 in $(V_{q(F)}, \mathcal{H}_{q(F)})$ con $g\pi_F(h_1) = h\pi_F(h_2)$. Applichiamo adesso la trasformazione $g \mapsto g^*$: per la minimalità di g si trova che h_1 finisce per h_2 : $h_1 = h'h_2$. Adesso dalla Proposizione 3.1.20 si ha che $g\pi_F(h') = h$ e questa è la tesi. \square

Vogliamo adesso definire a partire da I_+ uno spazio contraibile: sia A una camera di I_+ . Chiamiamo $S(A)$ l'unione delle camere chiuse $\overline{A.u(qA, B)}$ con B camera di S . La mappa $q_{|S(A)} : S(A) \rightarrow S$ è un isomorfismo in quanto non fa altro che dare un nome alle copie della sfera S scegliendo però una camera di partenza.

Definizione 3.3.4. Definiamo lo spazio \widehat{I}_+ indotto da I_+ "tappando" le sfere $S(A)$, ovvero rendendo piene le sfere $S(A)$.

Per essere precisi, sia B^r una palla di cui S è il bordo. Definiamo \widehat{I}_+ da I_+ come unione di una famiglia di copie $b(A)$ di B^r , indicizzata sull'insieme delle camere di I_+ . Le applicazioni associate sono:

$$\partial b(A) \xrightarrow{\sim} S \xleftarrow{q_{\sim}} S(A)$$

Tali applicazioni sono isomorfismi e possiamo osservare che \widehat{I}_+ appare ancora come la realizzazione geometrica di uno schema simpliciale (di vertici quelli di I_+ e i centri delle varie palle). Lo spazio \widehat{I}_+ è munito di una applicazione evidente $q : \widehat{I}_+ \rightarrow B^r$.

Osservazione 3.12. Lo spazio I_+ è il bouquet di sfere $S(A)$, lo spazio \widehat{I}_+ + il bouquet di palle $b(A)$.

Esempio 3.6. Con riferimento alla Figura 3.4 e alla Figura 3.5, si ha che

$$\begin{aligned} b(A_0^0) &= \text{palla delimitata da } A_0^0, B_0^1, D_1^0, C_1^1 \\ b(B_0^1) &= \text{palla delimitata da } B_0^1, C_1^1, A_0^2, D_1^2 \end{aligned}$$

e così via. Osserviamo che in questo caso specifico è molto facile descrivere le sfere $S(A)$ e le palle $b(A)$: si tratta di prendere la camera di riferimento E_m^n e $S(E_m^n)$ non è altro che la sfera delimitata da $E_m^n, G_m^{n+1}, F_{m+1}^n, L_{m+1}^{n+1}$ dove G e F sono le camere adiacenti e L è la camera antipodale.

Chiamiamo $(I_+)_n$ l'unione delle camere chiuse $\overline{\widetilde{A_0}.g}$ con g di lunghezza minore uguale a n e sia $(\widehat{I}_+)_n$ l'unione di $(I_+)_n$ e dell'insieme di palle $b(A)$ tali che $\partial b(A) \subset (I_+)_n$. Si ha che $(\widehat{I}_+)_0 = \overline{A_0}$ che è contraibile e

$$\widehat{I}_+ = \lim_{n \rightarrow \infty} (\widehat{I}_+)_n$$

Lemma 3.3.5. *Poniamo $A = \widetilde{A}_0.g$ e F una faccetta di A . Supponiamo che esista una camera $B = \widetilde{A}_0.h$ in $(I_+)_{n+1}$ distinta da A di cui F sia una faccetta. Esiste allora una camera $B' = \widetilde{A}_0.h'$ in $(I_+)_n$ e un muro M di qB' (contenente qF) tale che $A = B'.\Delta(M)$*

Dimostrazione. Sia g_0 la galleria considerata nella Proposizione 3.3.3. Si ha

$$g = g_0\pi_F(g_1) \qquad h = g_0\pi_F(h_1)$$

Le ipotesi implicano che la lunghezza $lg(g_1)$ sia diversa da 0 (altrimenti, poiché $A \neq B$, si avrebbe $lg(h) > lg(g) = n+1$). Per un opportuno M di qA , si ha allora che $g_1 = h'.\Delta(M)$ e dunque poniamo $B' = \widetilde{A}_0.h'$. \boxtimes

Lemma 3.3.6. *$(\widehat{I}_+)_n$ è un retratto per deformazione di $(\widehat{I}_+)_{n+1}$.*

Dimostrazione. Dobbiamo costruire una famiglia $(\varphi_t)_{0 \leq t \leq 1}$ di applicazioni continue da $(\widehat{I}_+)_{n+1}$ in se stesso con $\varphi_0 = id$, $(\varphi_t)|_{(\widehat{I}_+)_n} = id$ e $\varphi_1((\widehat{I}_+)_{n+1}) = (\widehat{I}_+)_n$. Siano $A = \widetilde{A}_0.g$ una camera di $(I_+)_{n+1}$ che non sta in $(I_+)_n$ e F una faccetta di A .

Consideriamo la camera chiusa \overline{A} ; $\overline{A} \cap (I_+)_n$ è quindi unione non vuota di facce chiuse e, in $(I_+)_{n+1}$, i punti di $\overline{A} - (\overline{A} \cap (I_+)_n)$ appartengono alla sola camera chiusa \overline{A} . Distinguiamo adesso due casi:

Caso 1: $\overline{A} \cap (I_+)_n \neq \partial\overline{A}$: In questo caso non esiste una sfera $S(B)$ con $A \subset S(B) \subset (I_+)_{n+1}$. Prendiamo per $(\varphi_t)|_{\overline{A}}$ la proiezione di \overline{A} su $\overline{A} \cap (I_+)_n$;

Caso 2: $\overline{A} \cap (I_+)_n = \partial\overline{A}$: Poniamo $A = \widetilde{A}_0.g$. Per ogni muro M di qA , risulta allora dal lemma appena fatto, che g finisce per $\Delta(M)$. Dalla Proposizione 3.1.20 g finisce per Δ ; si ha quindi $A = B.\Delta$ con B univocamente determinato per A sempre dalla Proposizione 3.1.20. Quando passiamo da $(\widehat{I}_+)_{n+1}$ a $(\widehat{I}_+)_n$, la camera A e la parte interna della palla $b(B)$ possono essere retratte per deformazione grazie al fatto che la sfera è stata tappata. Prendiamo allora per $(\varphi_t)|_{b(B)}$ una proiezione di $b(B)$ su $S(B) - A$. Ci riconduciamo dunque al caso 1 poiché una volta che sono svanite tutte le palle, rimangono solamente situazioni descritte nel caso 1.

Questo completa la costruzione di φ_t e dimostra il lemma. \boxtimes

Grazie ai due lemmi appena dimostrati si ha il seguente importante risultato:

Proposizione 3.3.7. *Lo spazio \widehat{I}_+ è contraibile.*

Definizione 3.3.8. Definiamo lo spazio I munito di una mappa $q : I \rightarrow S$ allo stesso modo di I_+ rimpiazzando Gal_+ con Gal :

1. Si pongono

$$\mathcal{Z} = \bigsqcup_B Hom_{Gal}(A_0, B)$$

$$Z = \bigsqcup_{g \in \mathcal{Z}} \overline{g^{end}}$$

e chiamiamo $q' : Z \rightarrow S$ l'evidente applicazione associata allo spazio (associa al simpleso Z il corrispondente simpleso in S);

2. Definiamo I (munito di q) come quoziente di Z (munito di q'): in particolare se $g \in \mathcal{Z}$ è una galleria da A_0 a B e C è una camera adiacente a B , si attacchi $\overline{g^{end}}$ con $[\overline{g(BC)}]^{end}$ secondo la faccia chiusa comune alle loro immagini in S . In altri termini, se due camere B e C hanno una faccetta in comune F , se $g \in Hom_{Gal}(A_0, B)$ e $h \in Hom_{Gal}(A_0, C)$, allora, in I , le faccette chiuse $(q')^{-1}(F)$ di $\overline{g^{end}}$ e di $\overline{h^{end}}$ sono identificate se e solo se

$$hg^{-1} \in \pi_F(Hom_{Gal}(\pi_F^{-1}(B), \pi_F^{-1}(C)))$$

Analogamente a I_+ definiamo le camere, le facce, le faccette aperte e chiuse di I . Definiamo \widetilde{A}_0 e $\widetilde{A}.h$ (per \widetilde{A} camera e h in Gal con inizio $q\widetilde{A}$) come per I_+ . L'analogo del Lemma 3.3.2 vale anche per I . Inoltre le faccette (sempre come in I_+) sono univocamente determinate dall'insieme dei loro vertici e I appare come la realizzazione geometrica di uno schema simpliciale che ammette una descrizione analoga a quella di I_+ . Per ogni camera A di I , definiamo, come per I_+ , una sfera $S(A)$ e q induce un isomorfismo da $S(A)$ a S . Definiamo infine il complesso \widehat{I} , munito di una mappa $q : \widehat{I} \rightarrow B^r$, come il riempimento di tutte le sfere $S(A)$.

Esempio 3.7. Consideriamo ancora $V = \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{H} = \{H_x, H_y\}$ come nell'esempio precedente e rappresentiamo anche lo spazio I . Si può facilmente compilare una tabella come quella fatta per I_+ ; questa volta però dobbiamo identificare le g^{end} non come i punti di $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, ma come i punti di $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ in quanto una galleria è determinata dagli esponenti di s_x e s_y che la compongono e in I tali esponenti possono essere anche negativi. Si ha dunque lo spazio rappresentato in Figura 3.6.

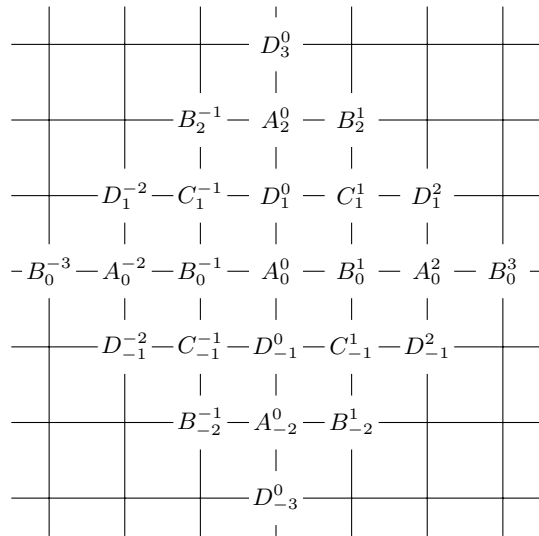


Figura 3.6: Rappresentazione di I

Come possiamo notare da questo esempio, lo spazio I_+ si immerge in maniera naturale su I . Vedremo più avanti alcuni dettagli importanti di questa immersione. Come

in I_+ , dobbiamo immaginare che nella realizzazione geometrica effettiva le camere su una stessa riga o su una stessa colonna si incollano tutte sul medesimo vertice che è rappresentato dalla riga o dalla colonna di collegamento.

Osservazione 3.13. Possiamo descrivere attraverso le gallerie alcuni degli automorfismi di $I = I_{A_0}$. Consideriamo $\tilde{B} \in I$ una camera tale che $\tilde{B} = \tilde{A}_0.h$. Supponiamo inoltre che $q(\tilde{B}) = B_0$. Abbiamo la seguente mappa:

$$\varphi : \bigsqcup_C \text{Hom}_{Gal}(B_0, C) \longrightarrow I_{B_0} \\ g \longmapsto \tilde{B}.g$$

Che induce in modo naturale la mappa:

$$\Phi : I_{B_0} \longrightarrow I_{A_0} \\ \tilde{B}.g \longmapsto \tilde{A}_0.h.g$$

Allora vale banalmente che Φ è un isomorfismo tra I_{B_0} e I_{A_0} . Se pertanto fissiamo $\tilde{B} \in I$ tale che $q(\tilde{B}) = A_0$ la mappa Φ determina un automorfismo non banale di $I = I_{A_0}$.

Definizione 3.3.9. Per ogni A di I tali che $q(A) = A_0$, definiamo una applicazione

$$i_A : I_+ \rightarrow I \qquad \text{rispettivamente } \hat{i}_A : \hat{I}_+ \rightarrow \hat{I}$$

compatibile con la proiezione su S (rispettivamente su B^r) che manda le camere chiuse $\overline{A}.g$ di I_+ (rispettivamente le palle $b(A.g)$ di \hat{I}_+) nelle camere (palle) con lo stesso nome in I (rispettivamente \hat{I}).

Proposizione 3.3.10. *Valgono i seguenti fatti:*

1. i_A identifica I_+ come un sottospazio chiuso di I e \hat{i}_A identifica \hat{I}_+ come un sottospazio chiuso di \hat{I} ;
2. Vale che:

$$I = \lim_n i_{\tilde{A}_0, \Delta^{-2n}}(I_+) \qquad \hat{I} = \lim_n \hat{i}_{\tilde{A}_0, \Delta^{-2n}}(\hat{I}_+)$$

Dimostrazione. I risultati per \hat{I}_+ e \hat{I} seguono facilmente da quelli di I_+ e I ; proviamo dunque (1) per I_+ e I . Mostriamo che I_+ è un sottospazio: siano B e C due camere di S aventi una faccetta in comune F . Siano $g \in \text{Hom}_{Gal_+}(A, B)$ e $h \in \text{Hom}_{Gal_+}(A, C)$. Supponiamo che le faccette $q^{-1}(F)$ di $\overline{A}.g$ e $\overline{A}.h$ siano uguali in I ; si ha allora

$$g^{-1}h = \pi_F(e)$$

per $e \in \text{Hom}_{Gal}(\pi_F^{-1}(B), \pi_F^{-1}(C))$. Grazie a 3.2.1 possiamo scrivere $e = e_1 e_2^{-1}$ con $e_i \in Gal_+$. Dalle relazioni functoriali trovate in precedenza si ha $g \pi_F(e_1) = h \pi_F(e_2)$ in Gal_+ e le faccette $q^{-1}(F)$ di $\overline{A}.g$ e $\overline{A}.h$ sono dunque già uguali in I_+ . La chiusura segue in maniera immediata dalla costruzione simpliciale degli spazi I e I_+ .

Per provare (2) è sufficiente osservare che tutte le gallerie g di inizio A_0 in Gal si possono scrivere come $g = \Delta^{-2n} g'$ con $g' \in Gal_+$. \(\times\)

Dato che adesso \widehat{I} è un CW - complesso che possiamo ottenere come limite di sottocomplessi chiusi contraibili (gli \widehat{I}_+), si può dedurre il seguente fondamentale risultato (per una dimostrazione dettagliata di quanto appena enunciato si rimanda ad Hatcher [8], Capitolo 4):

Teorema 3.3.11. *Lo spazio \widehat{I} è contraibile.*

3.4 Rivestimenti

In questa sezione costruiamo il rivestimento per lo spazio Y e dimostriamo, grazie al Lemma del nervo, che ha la stessa omotopia di \widehat{I} ottenendo la contraibilità.

Sia $V_{\mathbb{C}}$ il complessificato di V e $M_{\mathbb{C}}$ di M per ogni $M \in \mathcal{H}$ e chiamiamo

$$Y = V_{\mathbb{C}} - \bigcup_{M \in \mathcal{H}} M_{\mathbb{C}}$$

Costruiremo per incollamento lo spazio \widetilde{Y} che riveste Y . L'idea della costruzione sarà descritta con l'aiuto di I e \widehat{I} e, proprio grazie a questo fatto, faremo vedere che \widehat{I} è il nervo di \widetilde{Y} . Le faccette di S e le faccette di V (tranne l'origine) sono in bigezione canonica e dunque le appelleremo indistintamente. In generale chiameremo allo stesso modo le faccette corrispondenti. In caso di ambiguità useremo la notazione $F \rightarrow [F]$.

Lemma 3.4.1. *Siano A, B, C tre camere di I con $C \subset S(A) \cap S(B)$. Allora q induce un isomorfismo tra $S(A) \cap S(B)$ e l'intersezione di S con i semispazi chiusi $\overline{D_M(qC)}$ contenenti qC e limitati da un muro che separa qA da qB .*

Dimostrazione. L'intersezione dei $\overline{D_M(qC)}$ è unione di camere chiuse. Se C' è una di queste, qA e qB sono dalla stessa parte di tutti i muri che separano qC da C' . Se ne deduce che i prolungamenti su $S(A)$ o $S(B)$ di una galleria minimale da qC a C' coincidono e $\overline{C'} \subset q(S(A) \cap S(B))$. Adesso, se una faccetta F non sta nell'intersezione dei $\overline{D_M(qC)}$, esiste un muro M tale che $F \not\subset M$ e che separa qA da qB e F da qC . Supponiamo per assurdo che $F \subset q(S(A) \cap S(B))$. Siano D una camera di S di cui F è una faccetta e (C_0, \dots, C_{n+1}) una galleria da qC a D . Sia M_i il muro che separa C_i da C_{i+1} e α_i (risp. β_i) = ± 1 a seconda che C_{i+1} e A (risp. B) sono o meno dalla stessa parte di M_i . Per ipotesi F è faccetta di $C \cdot \Delta(M_0)^{\alpha_0} \dots \Delta(M_n)^{\alpha_n}$ e di $C \cdot \Delta(M_0)^{\beta_0} \dots \Delta(M_n)^{\beta_n}$ in quanto è lo stesso cammino tra camere passando però da porte positive e negative diverse. Allora dal Lemma 3.3.2 e dalla Proposizione 3.1.24 si ha (poiché $F \not\subset M$):

$$\sum_{M_i=M} \alpha_i = \sum_{M_i=M} \beta_i$$

e questo è assurdo in quanto un membro vale 1 e l'altro vale -1 per quanto già osservato. \boxtimes

Lemma 3.4.2. *Siano $\Re : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V$ e $\Im : V_{\mathbb{C}} \rightarrow V$ le applicazioni parte reale e parte immaginaria. Sia $v \in V_{\mathbb{C}}$, F una faccetta di V tale che $\Re(v) \in F$. Allora $v \in Y$ se e solo se $\pi^F(\Im(v))$ appartiene a una camera di (V_F, \mathcal{H}_F) .*

Dimostrazione. \Rightarrow) Sia $v \in Y$, allora $v \notin M_{\mathbb{C}}$ per ogni M iperpiano appartenente all'arrangiamento e dunque, dato che $\mathfrak{R}(v) \in F$, vale che per ogni $M \supset F$, $\mathfrak{S}(v) \notin M$. Passando dunque al quoziente, $\pi^F(\mathfrak{S}(v))$ non può appartenere a nessun iperpiano di \mathcal{H}_F e dunque appartiene a una camera.

\Leftarrow) Sia $\pi^F(\mathfrak{S}(v))$ in una camera di (V_F, \mathcal{H}_F) , allora $\mathfrak{S}(v) \notin M$ per ogni M tale che $F \subset M$. Dunque $\mathfrak{R}(v) \in M$ e $\mathfrak{S}(v) \notin M$ e pertanto $v \notin M_{\mathbb{C}}$. Di conseguenza $v \in Y$. \bowtie

Definizione 3.4.3. • Sia C una camera di (V, \mathcal{H}) . Chiamiamo $Y(C)$ l'aperto di Y formato dagli $x \in V_{\mathbb{C}}$ che verificano la seguente condizione:

Se F è una faccetta di V tale che $\mathfrak{R}(x) \in F$, allora $\pi^F(\mathfrak{S}(x)) \in \pi'_F(C)$

Equivalentemente, se consideriamo $V_{\mathbb{C}} = V \times V$, si ha che

$$Y(C) = \bigcup_{F \text{ faccetta}} F \times (\pi^F)^{-1}[\pi'_F(C)]$$

- Siano A e B due camere di I . Se $S(A) \cap S(B)$ contengono una camera C , denotiamo provvisoriamente con $Y'(A, B)$ l'intersezione dei semispazi aperti $D_M(qC)$ per M come nel Lemma 3.4.1. Osserviamo che, sempre per il lemma, $Y'(A, B)$ non dipende dalla camera C . Poniamo:

$$Y(A, B) = Y(qA) \cap Y(qB) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Y'(A, B)) \subset V_{\mathbb{C}}$$

Equivalentemente, attraverso passaggi insiemistici, si ha che

$$Y(A, B) = \bigcup_{\substack{F \text{ faccetta} \\ F \subset \text{int}(q(S(A) \cap S(B)))}} \{F \times (\pi^F)^{-1}[\pi'_F(qA) \cap \pi'_F(qB)]\}$$

Se $S(A) \cap S(B)$ non contiene camere C , poniamo $Y(A, B) = \emptyset$;

- Per F una faccetta di V , la *stella* $Et(F)$ è l'unione delle faccette (aperte) G di (V, \mathcal{H}) tali che $F \subset \overline{G}$;
- Per F una faccetta di V e C una camera di (V_F, \mathcal{H}_F) poniamo:

$$V(F, C) = \{v \in V_{\mathbb{C}} \mid \mathfrak{R}(v) \in Et(F), \pi^F(\mathfrak{S}(v)) \in C\}$$

Equivalentemente:

$$V(F, C) = Et(F) \times (\pi^F)^{-1}(C)$$

Osservazione 3.14. Tutte le definizioni sono ben poste grazie al Lemma 3.4.2.

Lemma 3.4.4. *Sia G una faccetta di V . Le $V(F, C)$ per F una faccetta tale che $G \subset \overline{F}$ e C una camera di V_F formano un ricoprimento aperto di $Y \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(G))$. In particolare, scegliendo $G = \{0\}$, le $V(F, C)$ ricoprono Y .*

Dimostrazione. Se $x \in Y \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(G))$ e $\mathfrak{R}(x) \in F$, allora x appartiene a uno dei $V(F, C)$ e questo da la tesi. Inoltre è banale osservare che le $V(F, C)$ sono aperte. \bowtie

Sia adesso Y' la somma disgiunta, indicizzata sulle palle $b(A)$ di \widehat{I} :

$$Y' = \bigsqcup_{b(A)} Y(qA)$$

Denotiamo con $Y'(b(A))$ la componente di indice $b(A)$. Abbiamo una proiezione naturale $p' : Y' \rightarrow Y$ cioè quella che associa a $Y'(b(A))$ il corrispettivo $Y(qA)$.

Sia adesso R la seguente relazione su Y' :

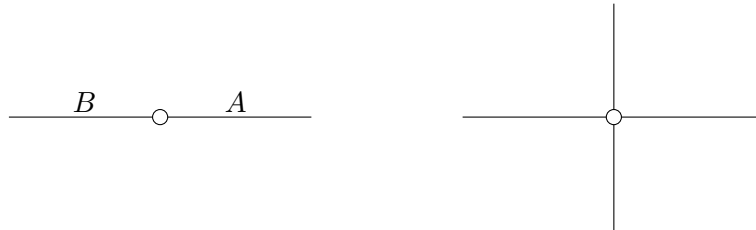
Sia $x \in Y'(b(A))$ e $y \in Y'(b(B))$: allora vale $R(x, y)$ se e solo se $p'(x) = p'(y)$ e $p'(x) \in Y(A, B)$

Questa è una relazione di equivalenza: la proprietà riflessiva e quella simmetrica sono banali; per la transitività è sufficiente osservare che $Y(A, B) \cap Y(B, C) \subset Y(A, C)$ e questo si vede facilmente dalla definizione insiemistica di $Y(A, B)$.

Definizione 3.4.5. Chiamiamo $\widetilde{Y} = Y'/R$ munito della evidente proiezione $p : \widetilde{Y} \rightarrow Y$. Per tutte le palle $b(A)$ di \widehat{I} , denotiamo con $\widetilde{Y}(b(A))$ l'immagine di $Y'(b(A))$ in \widetilde{Y} .

Prima di addentrarsi nella dimostrazione tecnica finale e mostrare che effettivamente \widetilde{Y} è rivestimento contraibile di Y , è utile fare un esempio.

Esempio 3.8. Sia $V = \mathbb{R}$ e $\mathcal{H} = \{0\}$; lo spazio è formato da solamente due camere e il suo complessificato è $Y = \mathbb{R}^2 - \{0\}$:

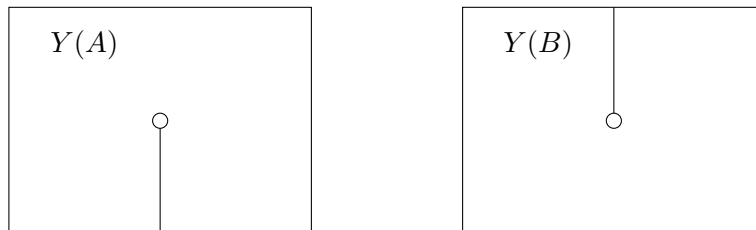


Utilizzando le definizioni insiemistiche date si ottiene che:

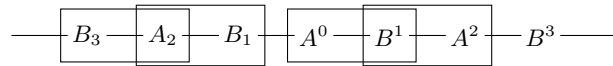
$$Y(A) = [\{0\} \times (0, +\infty)] \cup [(-\infty, 0) \times \mathbb{R}] \cup [(0, +\infty) \times \mathbb{R}]$$

$$Y(B) = [\{0\} \times (-\infty, 0)] \cup [(-\infty, 0) \times \mathbb{R}] \cup [(0, +\infty) \times \mathbb{R}]$$

che non sono altro che i seguenti insiemi del piano:



Lo spazio Y' è formato da copie di $Y(A)$ e $Y(B)$ disgiunte. Per incollarle nel modo giusto abbiamo bisogno del complesso I che abbiamo costruito nella precedente sezione: questo è dovuto al fatto che l'incollamento è definito da $Y(A, B)$ (e dipende dunque da I). Si osserva facilmente che I è di questa forma:



Con le stesse identificazioni che avevamo già osservato nell'Esempio 3.5. Adesso, come mostrato in figura, le intersezioni fra sfere di I (i rettangoli) possono essere di tre tipi: o si intersecano in una camera che sta sopra A , o si intersecano in una camera che sta sopra B o non si intersecano. Di conseguenza abbiamo soltanto due possibili tipologie di $Y(A, B)$ che sono le seguenti:

$$Y(B_3, A_2) = (0, +\infty) \times \mathbb{R}$$

$$Y(A^0, B^1) = (-\infty, 0) \times \mathbb{R}$$

che non sono altro che il semispazio destro e sinistro rispetto alla retta $\{x = 0\}$. Avendo definito tutto il necessario, possiamo adesso attaccare le varie componenti secondo la relazione di equivalenza R . Come prima osservazione notiamo che, fissata una $Y'(b(C))$, questa si può attaccare solamente con componenti $Y'(b(D))$ tali che D e C sono adiacenti in I (altrimenti $S(C) \cap S(D)$ è vuota). Prendiamo allora $Y'(b(A_2))$; questa si attaccherà con $Y'(b(B_3))$ e $Y'(b(B_1))$ nei semispazi corrispondenti univocamente determinati da $Y(B_3, A_2)$ e $Y(A_2, B_1)$. Ripetendo il medesimo ragionamento per ogni copia $Y'(b(C))$ e attaccando consequenzialmente semispazi destri e sinistri si ottiene lo spazio \tilde{Y} .

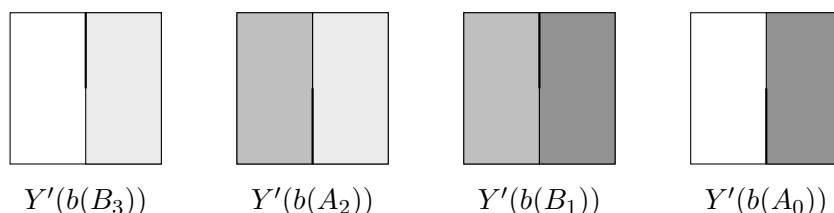


Figura 3.7: Incollamento delle componenti $Y'(b(C))$: tonalità di grigio uguali indicano una identificazione

Per come è definito lo spazio è possibile muoversi da una $Y'(b(C))$ all'altra passando per ogni iperpiano *tagliato*, girando intorno al taglio. Se immaginiamo adesso di porre le $Y'(b(C))$ ad altezze diverse nello spazio e a provare di identificarle con una spezzata che mima proprio il cammino che gira intorno ai vari tagli otteniamo la seguente figura:

Data adesso la costruzione esplicita dello spazio \tilde{Y} si osserva facilmente che non stiamo facendo altro che rivestire $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ (che ha la stessa omotopia a S^1) con uno spazio \tilde{Y} che non è altro che un'elica ingrassata. Di fatto stiamo quindi mimando la

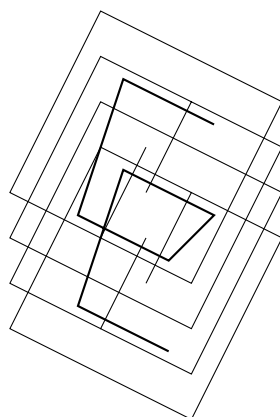


Figura 3.8: Rappresentazione di \tilde{Y}

costruzione del rivestimento universale di S^1 mediante la retta \mathbb{R} che si avvolge sopra di lei. Un'altra osservazione importante da fare è quella che l'omotopia dello spazio \tilde{Y} coincide con quella di \hat{I} che forma la struttura portante di \tilde{Y} .

Vogliamo adesso dimostrare che il risultato è vero in generale; per farlo dobbiamo dare la seguente

Definizione 3.4.6. Sia X uno spazio topologico e sia \mathcal{U} un ricoprimento di X fatto con insiemi aperti. Il *nervo* di \mathcal{U} , denotato con $N(\mathcal{U})$ è il complesso simpliciale definito con le seguenti proprietà:

1. I vertici di $N(\mathcal{U})$ sono gli elementi di \mathcal{U} ;
2. Ogni insieme finito non vuoto di vertici $\{U_0, \dots, U_p\}$ è un simpleso in $N(\mathcal{U})$ se $U_0 \cap \dots \cap U_p \neq \emptyset$

ed enunciare il seguente risultato la cui dimostrazione si può trovare in Hatcher [8], Sezione 4G:

Lemma 3.4.7 (Lemma del nervo). *Sia X uno spazio paracompatto e sia \mathcal{U} un ricoprimento aperto tale che ogni intersezione finita, non vuota di elementi di \mathcal{U} sia contraibile. Allora la realizzazione geometrica del nervo di \mathcal{U} è omotopicamente equivalente a X .*

Quello che vogliamo fare è mostrare che p è un rivestimento e che \hat{I} è il nervo di \tilde{Y} completando così la dimostrazione grazie alla contraibilità di \hat{I} .

Teorema 3.4.8. \tilde{Y} è rivestimento contraibile di Y .

Svolgeremo la dimostrazione in 4 passi:

(A) \tilde{Y} è un rivestimento di Y .

Mostriamo che $p^{-1}(V(F, C))$ è somma di copie disgiunte di $V(F, C)$:

- (a) Fissate F e C , sia $b(A)$ una palla di \widehat{I} ; per ogni B camera tale che $F \subset \overline{B}$, consideriamo le camere di I

$$C'_B = A.u(A, B)u(\pi_F(C), B)^{-1}$$

Per costruzione, $B \subset q(S(A) \cap S(C'_B))$ e in particolare, se $F \neq \{0\}$, allora

$$[F] \subset q(S(A) \cap S(C'_B))$$

Proviamo che:

$$\widetilde{Y}(b(A)) \cap p^{-1}(V(F, C)) \subset \bigcup_{F \subset \overline{B}} \widetilde{Y}(b(C'_B))$$

Sia x nel membro di sinistra e sia G la faccetta di V alla quale appartiene $\mathfrak{R}(p(x))$; si ha che $F \subset \overline{G}$ cioè $G \in Et(F)$. Prendiamo come B una camera di cui G è faccetta, di conseguenza $F \subset \overline{B}$. Per ipotesi (x appartiene alle due componenti del membro di sinistra) si ha:

$$\pi^G(\mathfrak{S}(p(x))) \in \pi'_G(A) \qquad \pi^F(\mathfrak{S}(p(x))) \in C$$

Si ha dunque $\pi'_G(A) = \pi'_G(\pi_F(C))$. Se ne deduce allora, grazie al Lemma 3.4.1 che tutte le camere di cui G è faccetta stanno in $q(S(A) \cap S(C'_B))$ e che $p(x)$ sta in $Y(A, C'_B)$ e che dunque $x \in \widetilde{Y}(b(C'_B))$ per la definizione di \widetilde{Y} .

- (b) Poniamo

$$Y'(F, C) = \bigcup_{q(C')=\pi_F(C)} (Y'(b(C')) \cap (p')^{-1}(V(F, C)))$$

Dal punto (a) si ha l'uguaglianza

$$p^{-1}(V(F, C)) = Y'(F, C)/R$$

Questo è un isomorfismo di spazi topologici e si può osservare che $Y'(F, C)$ è aperto in Y' . Di nuovo dal Lemma 3.4.1, la relazione di equivalenza indotta da R su $\bigcup_{q(C')=\pi_F(C)} Y'(b(C'))$ è banale. Concludiamo osservando che, per tutte le camere C' tale che $q(C') = \pi_F(C)$,

$$V(F, C) \subset Y(b(C'))$$

(B) Costruzione di un ricoprimento di \widetilde{Y} .

Introduciamo due notazioni: per F una faccetta di I poniamo:

$$\widetilde{Y}(F) = \bigcup_{C|F \subset S(C)} (\widetilde{Y}(b(C)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(qF))))$$

Inoltre per $o(A)$ centro di una palla $b(A)$ di \widehat{I} poniamo:

$$\widetilde{Y}(o(A)) = \widetilde{Y}(b(A)) \cap p^{-1}(V(\{0\}, A))$$

Lemma 3.4.9. *Siano F_i per $i = 1, 2$ due faccette di I e C_i ($i = 1, 2$) due camere di I tali che $F_i \subset S(C_i)$ e che:*

$$(\tilde{Y}(b(C_1)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(qF_1)))) \cap (\tilde{Y}(b(C_2)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(qF_2)))) \neq \emptyset$$

ovvero, guardando la definizione, tali che:

$$\tilde{Y}(F_1) \cap \tilde{Y}(F_2) \neq \emptyset$$

Allora F_1 e F_2 definiscono univocamente una faccetta F di I (l'unicità deriva dalla costruzione simpliciale di I_+ e I); $F \subset S(C_i)$ grazie al fatto che l'intersezione è non vuota e l'intersezione precedente coincide con:

$$\tilde{Y}(b(C_1)) \cap \tilde{Y}(b(C_2)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(F)))$$

Dimostrazione. Per ipotesi abbiamo (applicando p):

$$Y(C_1, C_2) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(qF_1)) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(qF_2)) \neq \emptyset$$

F_1 e F_2 stanno in $S(C_1) \cap S(C_2)$ e definiscono una faccetta F . Inoltre $Et(qF_1) \cap Et(qF_2) = Et(qF)$; da qui la formula annunciata. \boxtimes

Lemma 3.4.10. *Se $o(A) \neq o(B)$, allora $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(o(B)) = \emptyset$.*

Dimostrazione.

$$\begin{aligned} \text{Se } qA = qB &\implies \tilde{Y}(b(A)) \cap \tilde{Y}(b(B)) = \emptyset \\ \text{Se } qA \neq qB &\implies p\tilde{Y}(o(A)) \cap p\tilde{Y}(o(B)) = \emptyset \end{aligned}$$

dove la prima implicazione deriva dal fatto che, essendo i centri diversi, ho due componenti diverse in \tilde{Y} , mentre la seconda discende dal fatto che se $qA \neq qB$, allora $V(\{0\}, qA)$ è disgiunto da $V(\{0\}, qB)$. \boxtimes

Lemma 3.4.11. *Se $F \not\subset S(A)$, allora $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F) = \emptyset$.*

Dimostrazione. Se $F \subset S(B)$, si ha $F \not\subset S(A) \cap S(B)$ e vale

$$Et(qF) \cap Y(A, B) = Et(qF) \cap p(\tilde{Y}(b(A)) \cap \tilde{Y}(b(B))) = \emptyset$$

\boxtimes

Osservazione 3.15. Notiamo che se $F \subset S(A)$, allora p induce un isomorfismo tra $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ e $Y(qA) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(qF))$.

Lemma 3.4.12. *Per tutte le faccette F di V e per tutte le camere A vale che:*

$$Y(A) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(F))$$

è contraibile.

Dimostrazione. Sia v_0 un vettore tale che $\mathfrak{R}(v_0) \in F$ e che $\mathfrak{S}(v_0) \in A$. Allora per $0 \leq t \leq 1$, $\varphi_t : v \mapsto v_0 + t(v - v_0)$ è una applicazione da $Y(A)$ e da $\mathfrak{R}^{-1}(Et(F))$ in loro stessi. Si ha che $\varphi_0(Y(A) \cap \mathfrak{R}^{-1}(Et(F))) = \{v_0\}$ e $\varphi_1 = id$. \boxtimes

Proposizione 3.4.13. *Valgono i seguenti fatti:*

1. Le $\tilde{Y}(s)$ per s vertice di \hat{I} (ovvero i centri delle palle $b(A)$ e vertici di S) formano un ricoprimento di \tilde{Y} di cui \hat{I} è il nervo (i.e. una famiglia $\tilde{Y}(s)$ ha intersezione non vuota se e solo se le s corrispondenti sono i vertici di una faccetta di \hat{I});
2. Se una faccetta F di I ha per vertici s_0, \dots, s_p , allora:

$$\tilde{Y}(F) = \tilde{Y}(s_0) \cap \dots \cap \tilde{Y}(s_p)$$

3. Se $F \subset S(A)$, allora $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$ è contraibile; $\tilde{Y}(o(A))$ è contraibile.

Dimostrazione. Da quanto dimostrato nel Lemma 3.4.9 si deduce che $\tilde{Y}(F_1) \cap \tilde{Y}(F_2)$ è vuoto se F_1 e F_2 non tendono la faccetta comune F . Altrimenti vale:

$$\bigcup_{F \subset S(C)} [\tilde{Y}(b(C)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(F)))] = \tilde{Y}(F)$$

Questo prova (2). Inoltre, grazie al Lemma 3.4.10 e al Lemma 3.4.11 si deduce il punto (1). Il punto (3) è una semplice applicazione del Lemma 3.4.12 e dell'Osservazione 3.15 per quanto riguarda $\tilde{Y}(o(A)) \cap \tilde{Y}(F)$; la contraibilità di $\tilde{Y}(o(A))$ segue direttamente dalla definizione. \boxtimes

(C) Studio di $\tilde{Y}(F)$ con F faccetta di I .

Dal Lemma 3.4.4 e da quanto osservato nel punto (A) si ottiene

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{F \subset \bar{B}} \tilde{Y}(b(B)) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(F)))$$

Scegliamo una camera fondamentale $A_{F,0}$ in (V_F, \mathcal{H}_F) e denotiamo con I_F il complesso corrispondente. Scegliamo anche $\tilde{A}_{F,0}^I$ in I sopra $\pi_F(A_{F,0})$. Per ogni camera $B = \tilde{A}_0 \cdot g_F$ di I_F , denotiamo con $\pi_F(B)$ la camera $\tilde{A}_{F,0}^I \cdot \pi_F(g_F)$ di I . Dalla definizione di I e da quanto notato all'inizio della parte (C) si può riscrivere:

$$\tilde{Y}(F) = \bigcup_{B \subset I_F} \tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(F)))$$

Definiamo adesso

$$Y_F = (V_F)_C - \bigcup_{M \in \mathcal{H}_F} M_C$$

e \tilde{Y}_F il rivestimento di Y_F definito con l'aiuto di I_F (sto riducendo la dimensione dei miei spazi). Qualunque siano B e C in I_F , dal fatto che il funtore $\pi_F : Gal(V_P, \mathcal{H}_P) \rightarrow$

$Gal(V, \mathcal{H})$ è fedele, risulta che le camere di S in $Y(\pi_F(B), \pi_F(C)) \cap Et(F)$ sono esattamente le $\pi_F(D)$, per $D \in Y_F(B, C)$. Gli incollamenti che definiscono $\tilde{Y}(F)$ e \tilde{Y}_F sono dunque compatibili e dunque esiste un diagramma:

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Y}_F & \longleftarrow & \tilde{Y}(F) \\ \downarrow & & \downarrow \\ Y_F & \xleftarrow{\pi^F} & \mathfrak{R}^{-1}(Et(F)) \subset Y \end{array}$$

Che manda $\tilde{Y}(b(\pi_F(B))) \cap p^{-1}(\mathfrak{R}^{-1}(Et(F))) \subset \tilde{Y}(F)$ in $\tilde{Y}_F(b(B))$ per B una camera di I_F . Le frecce verticali sono dei rivestimenti per quanto già mostrato nel punto **(A)**. Si verifica facilmente che l'applicazione π^F rappresentata nel diagramma è una equivalenza omotopica, da cui si ha che \tilde{Y}_F e $\tilde{Y}(F)$ hanno lo stesso tipo di omotopia.

(D) Conclusione

Proveremo adesso per induzione su $r = \dim V$ che il rivestimento \tilde{Y} è contraibile. Sia \mathcal{U} il ricoprimento di \tilde{Y} fatto dai $\tilde{Y}(s)$ con s vertici di \hat{I} . Dalla Proposizione 3.4.13, punto (1) si ottiene che \hat{I} è il nervo di \mathcal{U} . Dalle relazioni trovate nella parte **(B)** della dimostrazione (in particolare $\tilde{Y}(F) = \tilde{Y}(s_0) \cap \dots \cap \tilde{Y}(s_p)$) e dall'ipotesi induttiva, si ha che le intersezioni non vuote di aperti appartenenti a \mathcal{U} sono contraibili. Dunque per il Lemma del nervo 3.4.7, \tilde{Y} e $\hat{I} = N(\mathcal{U})$ hanno lo stesso tipo di omotopia e grazie al fatto che \hat{I} è contraibile, si ha la tesi.

Bibliografia

- [1] James E. Humphreys, *Reflection Groups and Coxeter Groups*, Cambridge University Press, 1992.
- [2] Marco Manetti, *Topologia*, Springer, 2014.
- [3] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics - Lie Groups and Lie Algebras - Chapters 4-6*, Springer, 2002.
- [4] Nicolas Bourbaki, *Elements of Mathematics - General Topology - Chapters 1-4*, Springer, 1966.
- [5] Giacomo Mezzedimi, *Appunti di Geometria Analitica e Algebra Lineare*, Appunti, 2013.
- [6] Pierre Deligne, *Les immeubles des groupes de tresses généralisés*, Springer-Verlag, 1972.
- [7] Luis Paris, *$K(\pi, 1)$ conjecture for Artin groups*, arXiv, 2012.
- [8] Allen Hatcher, *Algebraic topology*, Cambridge University Press, 2009

Ringraziamenti

Non so se so fare dei ringraziamenti, a volte ringrazio le persone anche quando mi offendono... proviamoci!

Un primo, grande grazie va al mio relatore, il Professor Filippo Callegaro: senza la sua disponibilità e soprattutto senza la sua infinita pazienza, non avrei mai portato a termine questo piccolo lavoro.

Un grazie speciale va a Viola; sinceramente non riesco nemmeno a immaginare come sarebbero stati questi anni senza di lei. Ringrazio lei, ma soprattutto il suo cervello; è incredibile come riesce sempre a mettere in crisi il mio! Ma poi come ci riesce dato che si addormenta sempre?

Un grazie alla Matematica e al Dipartimento di Matematica; qua dentro ho conosciuto persone uniche e la passione che ci accomuna è per me qualcosa di incredibile. In particolare grazie alle nuove leve, alla loro curiosità e alla loro voglia di esplorare questo mondo e grazie ai senatori, sempre pronti a dare una mano e a farti sentire a casa. Grazie inoltre ai professori: non penso esista un altro dipartimento in cui il rapporto tra studenti e insegnanti sia così stretto.

Un grazie a chi *Invade Casa Borchì*, a chi *Ama il Mela*, a chi ogni anno organizza le *Holidays*, a coloro a cui il *Frobenius* piace proprio e a tutti quelli che hanno l'*Autostima* molto alta: sono i compagni migliori che potessero capitarmi.

Un grazie a chi mi ha regalato per la prima volta la penna con cui scrivo ancora oggi, a chi è duro come il *ferro*, a chi: "*Luha, quest'anno a Cesenatico non ci chiamano mai*" e a chi si è stesa clamorosamente di bicicletta prima della maturità. Ah dimenticavo, mille grazie a chi ha trascritto gli Appunti di Analisi 2!

Un grazie alla Mila, a Paolo, ad Alessandro e a Nicola: la famiglia non te la scegli, ma io ho avuto una grande fortuna.