Osservazioni preliminari / notazioni

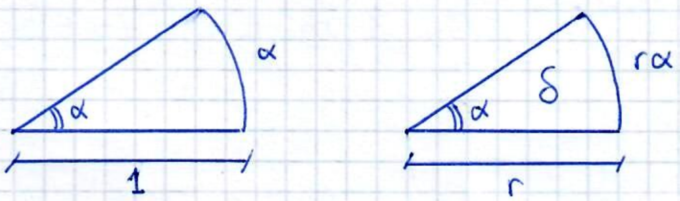
02/10/2023

- Insiemi di numeri
  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$
  $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \dots\}$
  $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : \begin{matrix} m \in \mathbb{Z} \\ n \in \{1, 2, \dots\} \end{matrix} \right\}$
  $\mathbb{R} \rightarrow$ reali (li affronteremo nel dettaglio)

- $\log x = \log_e x = \ln x$
  ↑ useremo questa notazione per il logaritmo in base e

- funzione esponenziale di riferimento: e^x
  $a^b = (e^{\log a})^b = e^{b \log a}$

- angoli solo in radianti



$\text{area}(\delta) = \frac{1}{2} r^2 \alpha$

$\cancel{\pi} r^2 \cdot \frac{\alpha}{2\cancel{\pi}} = \frac{1}{2} r^2 \alpha$

- $x^2 = 4 \rightarrow x = \pm 2$
  $\sqrt{4} = 2$ la radice è sempre positiva
  $\sqrt{a}$ definita per $a \geq 0$ indica la radice positiva di a
  IDEM per $\sqrt[n]{a}$ per n pari
  Per n dispari il problema non si pone

- a^b definita se $\begin{cases} b = 1, 2, 3 \dots \\ a \in \mathbb{R} \end{cases}$ $a^0 = 1$ per $a \neq 0$

  $\begin{cases} b = -1, -2, \dots \\ a \in \mathbb{R} - \{0\} \end{cases} \rightarrow A \setminus B = \{x \in A \mid x \notin B\}$

  $\begin{cases} b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},\ b > 0 \\ a \geq 0 \end{cases}$

  $\begin{cases} b \in \mathbb{R},\ b \notin \mathbb{Z}, \\ a > 0 \end{cases}$ ← qua b può essere anche negativo

$(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$
$(-8)^{\frac{2}{6}} = +2 \vee -2$? Non è ben definito

$b = \frac{m}{n}$
$a^b = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Si può elevare a un numero irrationale prendendo solo un certo numero di cifre di tale numero. Teoricamente questo metodo è giustificato dalla continuità dell'esponentiale.

$\sqrt[3]{x}$ è definita $\forall x \in \mathbb{R}$

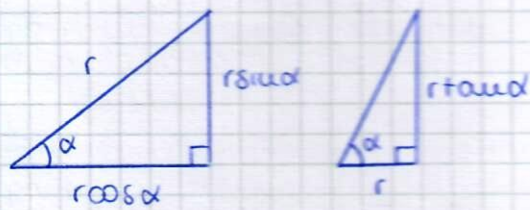
$x^{\frac{1}{3}}$ è definita per $x \geq 0$

- Funtioni trigonometriche

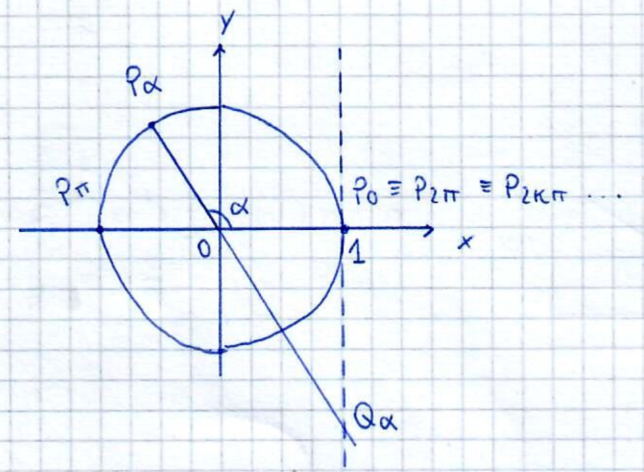
$\operatorname{sen}\alpha$
$\cos\alpha$
$\tan\alpha$

$0 \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$

DEFINITIONE GEOMETRICA



se $\alpha \geq \frac{\pi}{2}$



$P_\alpha(\cos\alpha, \sin\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$Q_\alpha(1, \tan\alpha) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$(\cos\alpha)^2 = \cos^2\alpha$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

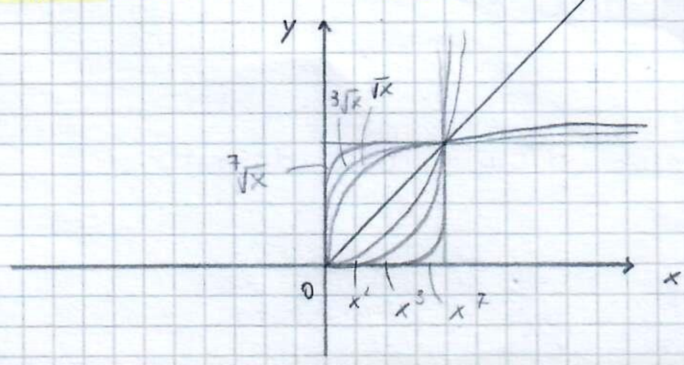
$$\tan\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}}$$ → posso ricavare il seno in funt. della tangente

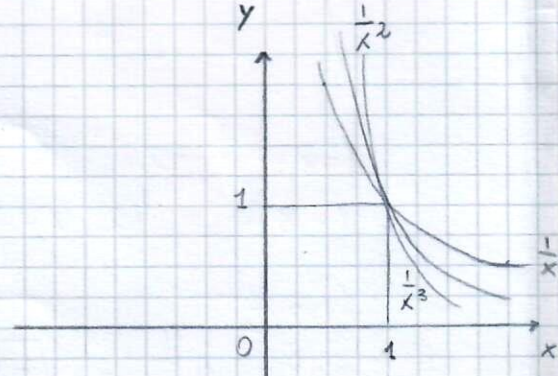
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha) = 2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha$

$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$





Operazioni su grafici

03/10/2023

Def $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$

Il grafico della funz. f, Γ_f è un insieme di punti del piano

$$\Gamma_f = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \subset I, \ y = f(x) \}$$

Dato $I \subset \mathbb{R}$, $f: I \to \mathbb{R}$ e Γ_f vogliamo disegnare il gracico di:

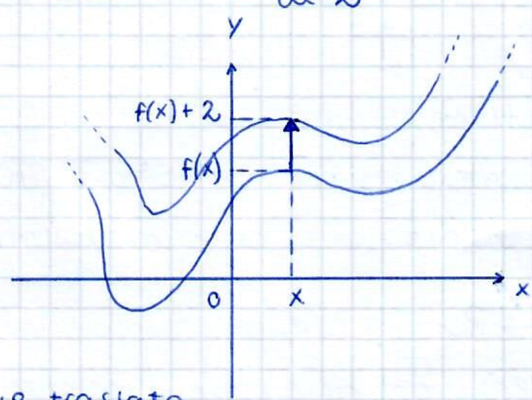
- i → $f(x) + c$ $c \in \mathbb{R}$
- ii → $f(x+c)$ $c \in \mathbb{R}$
- iii → $c f(x)$ $c > 0$
- iv → $f(cx)$ $c > 0$
- v → $-f(x)$ $\}$ → $-f(-x)$
- vi → $f(-x)$
- vii → $|f(x)|$
- viii → $f(|x|)$

i) $f(x) \to f(x) + c$

$\Gamma_{f(x)} \to (x, f(x))$

$\Gamma_{f(x)+c} \to (x, f(x)+c)$

$(c=2)$ Traslazione verticale di 2



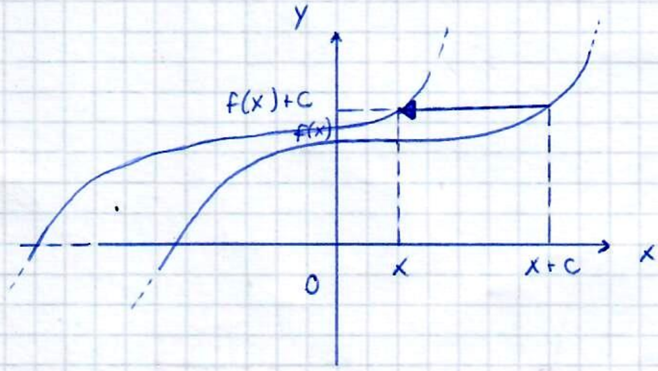
L'insieme di definizione rimane invariato, l'insieme immagine viene traslato

In generale si tratta di una traslazione di vettore $\vec{v}(0; c)$

↑ se $c > 0$

↓ se $c < 0$

ii) $f(x) \to f(x+c)$



Traslazione di vettore $\vec{v}(-c; 0)$

← se $c > 0$

→ se $c < 0$

L'insieme di definizione viene traslato mentre l'immagine rimane invariata

$f: I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$

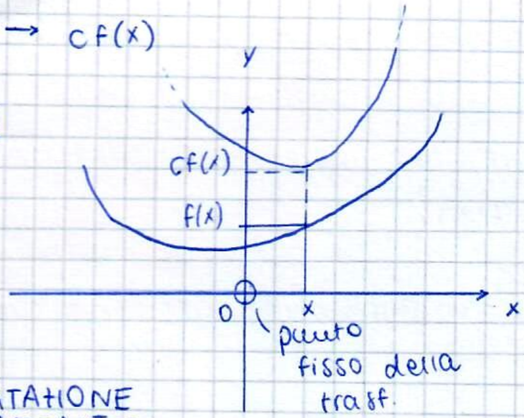
la funz. modificata è definita in

$$I' = \{ x' \in \mathbb{R} \mid x' + c \in I \}$$

$x' + c = x$ $x \in I$ $x' = x - c$

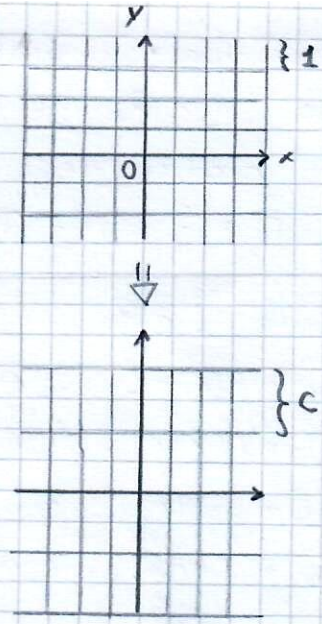
iii) $f(x) \to c f(x)$

$c > 1$



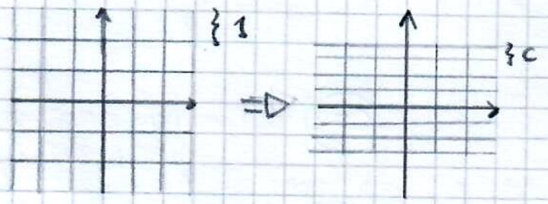
DILATAZIONE VERTICALE DI FATTORE C

(così come ogni punto di $y=0$)



$c < 1$

COMPRESSIONE VERTICALE DI FATTORE C



iv) $f(x) \to f(cx)$

$c > 1$: compressione orizzontale di fattore $\frac{1}{c}$

$c < 1$: dilatazione orizz. di fattore $\frac{1}{c}$

$f : I \to \mathbb{R} \quad I \subset \mathbb{R}$

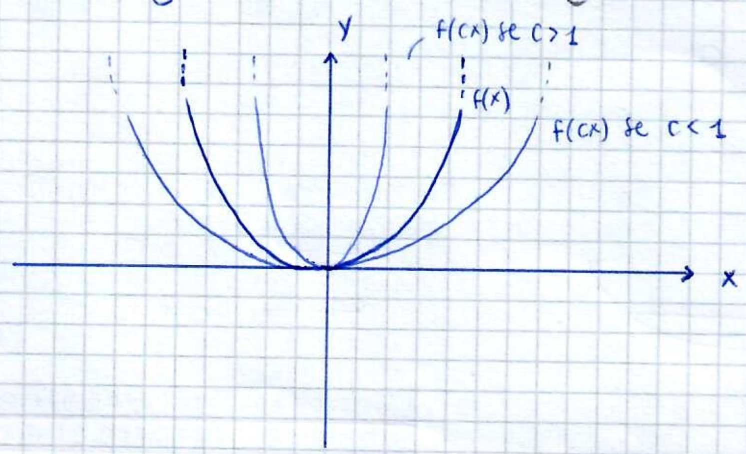
Per $f(cx)$ abbiamo che l'insieme di definizione è

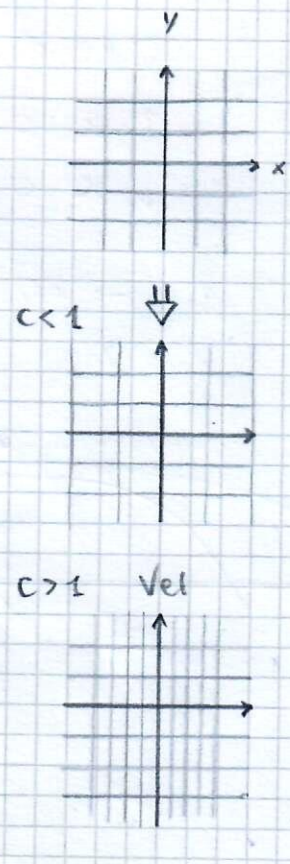
$I' = \{ x' \in \mathbb{R} \mid cx' \in I \}$

$cx' = x \quad x \in I$

$x' = \frac{x}{c}$

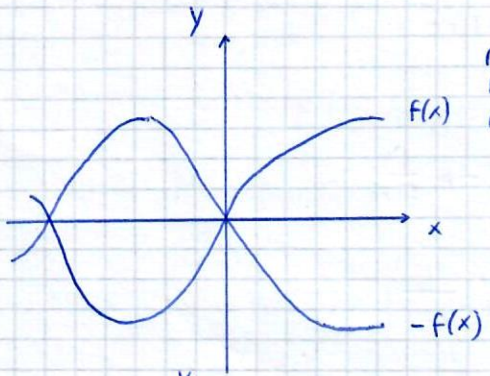
"$I' = \frac{1}{c} I$"



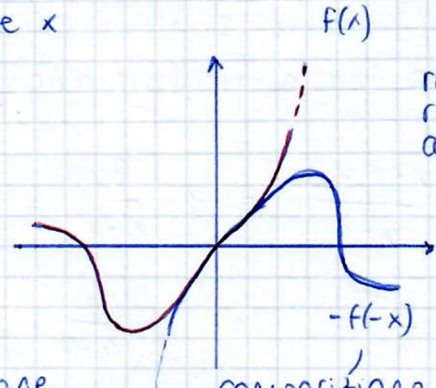


vi e v)

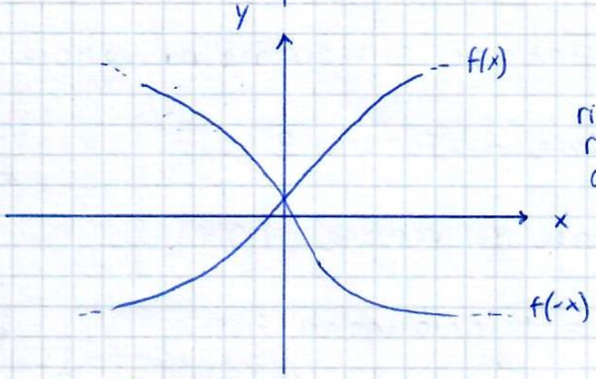
$f(x) \to -f(x)$
$f(x) \to f(-x)$
$f(x) \to -f(-x)$



riflessione rispetto all'asse x



riflessione rispetto all'origine



riflessione rispetto all'asse y

composizione delle due operazioni precedenti

[se e solo se $\iff$ "CARATTERIZZAZIONI"]

Def ⊛

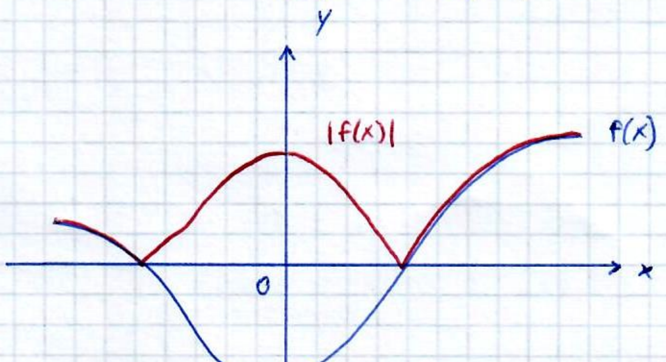
f pari $\quad f(x) = \cancel{\ }\ f(-x) \quad \forall x \in I$ → simmetriche rispetto all'asse y

f dispari $\quad f(-x) = -f(x) \quad$ o $\quad f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in I$ → simmetriche rispetto all'origine

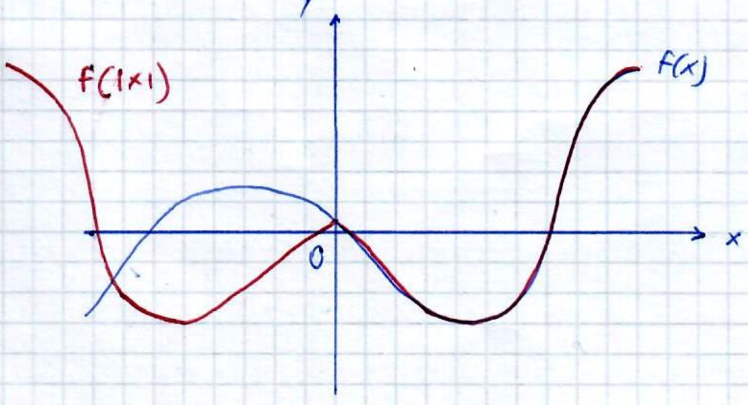
$f: I \to \mathbb{R}$ (I deve essere simmetrico)

vii e viii)

$f(x) \to |f(x)|$
$f(x) \to f(|x|)$



Riflessione rispetto all asse x delle parti della funz. del III e IV quadrante



Riflessione rispetto all'asse y delle parti della funz. del I e IV quadrante

le parti nel II e III quadrante vengono buttate

ESERCIZIO

- Disegnare f(x) senza studio di funzione e senza usare le caratteristiche dell' iperbole omografica

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

- Riflettere sulla trasformazione $f(x) \rightarrow \frac{1}{f(x)}$

- $f(x) = \frac{x-1+3}{x-1} = 1 + \frac{3}{x-1} = 1 + 3 \cdot \left(\frac{1}{x-1}\right)$

$f(a) = \frac{1}{a}$ $\quad f(a-1) = \frac{1}{a-1}$ traslazione orizzontale di vettore $\vec{v}(1,0)$

$3f(a-1) = 3\frac{1}{a-1}$ dilatazione verticale di fattore 3

$3f(a-1) + 1 \rightarrow$ traslazione verticale di vettore $(0,1)$

- I punti sulla retta $y = 1$ e $y = -1$ rimangono fissi
Quelli compresi tra le due rette si spostano fuori dalle 2 e viceversa

Grafici da sapere

05/10/2023

$f(x) = ax + b$

x^a

$a^x \quad (a > 0)$, in particorare e^x

$\log x$

$|x|$

$\sin x, \cos x, \tan x$

$\arcsin x, \arccos x, \arctan x$

$\mathbb{R}^2 \to$ insieme di tutte le coppie x, y con $x, y \in \mathbb{R}$

$\mathbb{R}^2 = \{ (x,y) \mid x, y \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^3 = \{ (x,y,z) \mid x, y, z \in \mathbb{R} \}$

$\mathbb{R}^d = \{ (x_1, x_2, \dots, x_d) \mid x_1, x_2, \dots, x_d \in \mathbb{R} \} \quad d = 2, 3, 4, \dots$

INTERVALLI IN $\mathbb{R}$

$a < b$

$[a, b] := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b \}$ intervallo chiuso

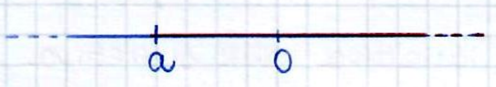
$(a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a < x < b \}$ intervallo aperto

$[a, b) := \{ x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b \}$ semi-aperto o semi-chiuso

$\{ x \in \mathbb{R} \mid x \geq a \} = [a, +\infty)$ similmente $(a, +\infty)$

$(-\infty, a)$

$(-\infty, a]$



Dati $X - Y$ insiemi (volendo $X, Y \subseteq \mathbb{R}$)

cos'è una funzione (f) da X in Y?

Caso semplice: $X = \{ x_1, \dots, x_n \}$ insieme finito di n elementi

$X =$

x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

In generale una funzione da X in Y è un insieme Γ di coppie (x,y) con $x \in X$ e $y \in Y$ con questa proprietà:

- $\forall x \in X$ esiste un unico $y \in Y$ tale che $(x,y) \in \Gamma$, chiamo questo y : $f(x)$

Γ è chiamato grafico di f

Intuitivamente $f(x)$ è una "procedura" che $\forall x \in X$ associa un elemento $y \in Y$

f → funzione nel suo complesso
f(x) → funz. calcolata in x

(*)

ESEMPI DI FUNZIONI

- date da una formula (es) $f(x) = \frac{e^{3x+2}}{\log x}$
- date da una serie di misurazioni sperimentali

(*) $f: X \to Y$

dominio ↓ codominio

Immagine di f = $Im(f) = \{ f(x) \mid x \in X \} \subseteq Y$

Insieme di definizione := { x tale che la formula ha senso }

In questo corso $X \subset \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{R}$, f data da una formula

Def $f: X \to Y$ si dice INIETTIVA se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ vale che $f(x_1) \neq f(x_2)$

si dice SURIETTIVA se $Im(f) = Y$ (cioè ogni $y \in Y$ è un valore di f)

$\forall y \in Y \ \exists x \in X \mid f(x) = y$

Si dice BIIETTIVA se è sia iniettiva che suriettiva

Def Date $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ allora g è l'inversa di f (e viceversa) se

→ $g(f(x)) = x$ $\forall x \in X$ e → $f(g(y)) = y$ $\forall y \in Y$

se X e Y sono finiti basta solo 1 di queste condizioni

Non tutte le funzioni ammettono l'inversa

Proposizione (i) l'inversa di f (se esiste) è unica e viene indicata con $f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$

(ii) l'inversa di f esiste se e solo se f è biiettiva

(iii) $f: X \to Y$ X, Y finiti

numero di elementi di X = num. elementi di Y

f iniettiva <=> f suriettiva

10/10/2023

(ii) f biiettiva $\Leftrightarrow$ f invertibile

$\Leftarrow$: dimostro prima che è suriettiva
"solo se" $\forall y \in Y$ vale $f(g(y)) = y$
allora se prendo $x = g(y)$ ho fatto vedere che $\exists x \in X$
(esattamente $g(y)$) $|$ $f(x) = y$
Ora dimostro che è iniettiva
$x_1 \neq x_2$ $\quad x_1, x_2 \in X$
Allora $x_1 = g(f(x_1))$ e $x_2 = g(f(x_2))$ dunque $g(f(x_1)) \neq g(f(x_2))$
$\Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

"se"
$\Rightarrow$ $\quad f: X \to Y$
Devo costruire $g \mid \forall y \in Y \quad f(g(y)) = y$
$\qquad\qquad\qquad\quad \forall x \in X \quad g(f(x)) = x$

$\forall y \in Y \quad \exists x \in X \mid f(x) = y$ (def. della suriettività)
(iniettività: x è unico)
$\forall y \in Y$: Definisco $g(y) = x$
Allora $f(g(y)) = y$ (per dimostrare questa prima proprietà
abbiamo usato solo la suriettività

$$f(g(f(x))) = f(x) \Rightarrow \underbrace{g(f(x)) = x}_{\text{iniettività di } f}$$

TROVARE LE INVERSE DI:

- $y = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1$
- $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$
- $f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{1+x^4} \end{cases}$ $\qquad f \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{1+(x-1)^4} \end{cases}$
- $y = e^{2x} + 4e^x$ (una volta def. adeguatamente dom. e cod.)

$y = x^9 - 3x^6 + 3x^3 - 1 = (x^3 - 1)^3$
$\sqrt[3]{y} = x^3 - 1 \quad , \quad x = \sqrt[3]{1 + \sqrt[3]{y}}$

$\dfrac{ax+b}{cx+d}$ $\qquad$ Dom: $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$

$(cx+d)y = ax+b$
$cxy - ax = b - dy$
$x = \dfrac{b-dy}{cy-a} \qquad cy - a \neq 0$

$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{-\frac{d}{c}\} \to \mathbb{R} \setminus \{\frac{a}{c}\} \\ x \mapsto \dfrac{ax+b}{cx+d} \end{cases}$$

FUNZIONI CONTINUE

Dato: $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$

Def. f si dice continua in $\bar{x}$ se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

Def. f si dice continua se è continua in ogni punto $\bar{x}$ del dominio

* Continuità = approssimazione / stabilità

una calcolatrice può calcolare solo i risultati di funz. continue

la def. con le disuguaglianze strette è equivalente

DIMOSTRARE (cambia la def. ma non il risultato)

* δ dipende da $\bar{x}$, da f e da ε

* trovo $\delta = \delta(\varepsilon)$ per un certo $\varepsilon > 0$

es. $\varepsilon = 10^{-20}$

nonostante sia piccolo non basta verificare la continuità e non esiste un ε minore di tutti gli altri.
Devo trovarlo per un numero ∞ di δ ma non necessariamente tutti (es. $\varepsilon = 10^{-n}$)

TEO
Tutte le funzioni elementari che abbiamo elencato sono continue nel loro insieme di definizione

f. elementari: $(a, |x|, a^x, \log x, \operatorname{sen} x, \dots)$

inoltre:

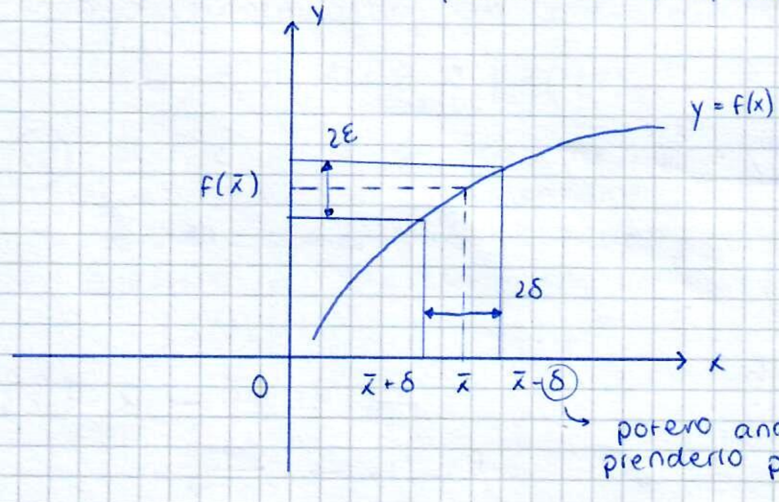
f e g continue $\Rightarrow$ $f+g$, $f \cdot g$, $f \circ g$ continue

$f \circ g : x \mapsto f(g(x))$

da queste si ricavano anche differenze e quozienti

Commenti sulla continuità
12/10/2023

- Continuità f. elementari
- Continuità di somma, prodotto e composizione



potevo anche prenderlo più piccolo a parità di δ

Dare un esempio di $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua | (*)

$$\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$$

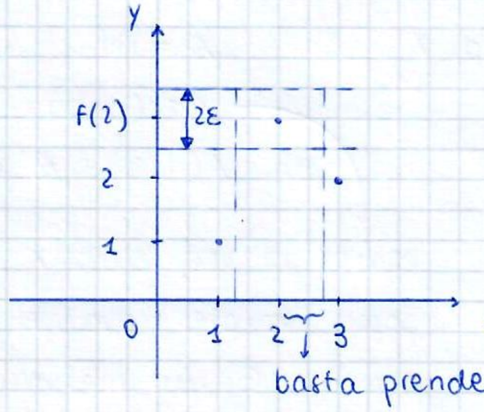
(*) dato $\varepsilon > 0$ NON ESISTE $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ t.c. $|x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

dipendente da ε ma non da $\bar{x}$

Per esempio per la funzione e^x non si può individuare un δ che dipenda solo da ε e non da x_0

Data $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cosa si può dire sulla continuità?

f è sempre continua



basta prendere $\delta < 1$

l'unico valore tra $\bar{x}-\delta$ e $\bar{x}+\delta$ è solo $\bar{x}$

Sia $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.c. $\forall \varepsilon \geq 0 \quad \exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

ho modificato questo

soddisfatta da

- funzioni da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$
- funzioni costanti

$\forall x \in \mathbb{R}$

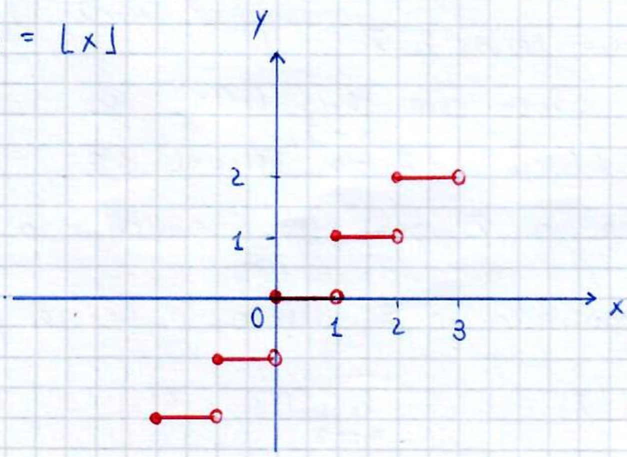
$\lceil x \rceil :=$ più piccolo intero $\geq x$

$\lfloor x \rfloor :=$ più grande intero $\leq x$

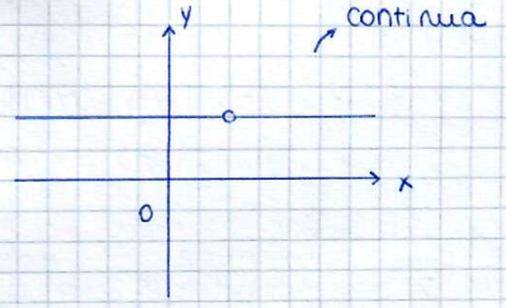
$\lceil \pi \rceil = 4$ $\quad\quad$ $\lceil -0{,}66 \rceil = 0$

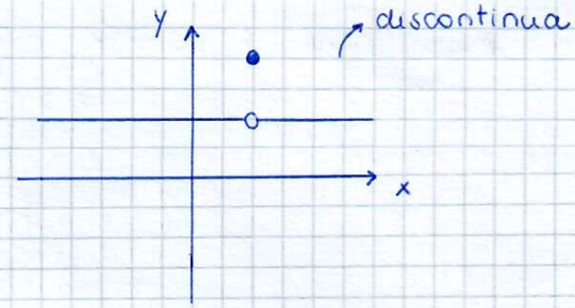
$\lfloor \pi \rfloor = 3$ $\quad\quad$ $\lfloor -0{,}66 \rfloor = -1$

$f(x) = \lfloor x \rfloor$



Continua in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$





LIMITI

Dato $X \subset \mathbb{R}$

- $\max X :=$ il più grande elemento di X → può non esisrere
- $\min X :=$ il più piccolo elemento di X

$X = \mathbb{N}$

$X = (a,b)$ (nei reali)

per $X(1,5) \cap \mathbb{Z}$ esiste il massimo

dato un elemento x posso sempre trovarne uno più grande $\in$ all'intervallo: $\frac{x+b}{2}$

Sia $X = I_1 \cup I_2 \cup \ldots \cup I_N$

intervalli con estremi a_N e b_N (chiusi o aperti)

- ESTREMO SUPERIORE

  $\sup X := \max \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$

- ESTREMO INFERIORE

  $\inf X := \min \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n\}$

- $\overline{X}$ = chiusura = $X \cup \{a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_N\}$

X = unione finita di intervalli

$f : X \to \mathbb{R}$

Def limite di $f(x)$ per x che tende a $\bar{x}$ $\left(f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L \right)$

Sia $\bar{x} \in \overline{X}$, sia $L \in \mathbb{R}$. Dico che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| \leq \delta \ \& \ x \neq \bar{x} \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$

"Più x si avvicina a $\bar{x}$, più $f(x)$ si avvicina a L"

(non è continua (?)

OSS Se $\bar{x} \in X$ e f è continua in $\bar{x}$, allora il limite

$$f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} f(\bar{x}) \qquad \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$$

Il limite può non esistere.

Def $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{X}$

Dico che $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \mid |x-\bar{x}| \leq \delta \ \& \ x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \geq M$

Dico che $\lim f(x) = -\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \mid |x-\bar{x}| \leq \delta \ \& \ x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \leq M$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \to$ non esiste

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ $\qquad$ $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Def LIMITE DESTRO / SINISTRO

Dico che $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}^+]{} L$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \mid |x-\bar{x}| \leq \delta \ \& \ \underbrace{x > \bar{x}} \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon$

(limite destro finito)

il limite sx ha $x < \bar{x}$

Caso infinito:

$f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}^+]{} +\infty$ se

$\forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \mid |x-\bar{x}| \leq \delta \ \& \ x > \bar{x} \Rightarrow f(x) \geq M$

Elencare le altre definizioni (9 totali)

Il limite può essere:

1) finito
2) $+\infty$
3) $-\infty$
4) non esistente
5) la domanda non ha senso (es. $\lim_{x \to 0^-} \log x$)

<u>OSS</u> Se $\bar{x} \notin \overline{X}$ è possibile che nell'intervallo non ci siano x nel dominio e il limite può essere qualsiasi cosa → viene a mancare l'unicità

Calcolo dei limiti

16/10/2023

"Regole di buon senso"

- CAMBIO DI VARIABILE (O COMPORTAMENTO RISPETTO ALLA COMPOSIZIONE)

$$\lim_{x \to \bar{x}} g(f(x)) = \lim_{y \to \bar{y}} g(y)$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$$

(es.)

- $\lim_{x \to -\infty} e^{x^2}$

$x \to -\infty \Rightarrow x^2 \to +\infty \Rightarrow e^x \to +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \cos\left(\frac{1}{e^x}\right)$

$e^x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{e^x} \to 0 \Rightarrow \cos\left(\frac{1}{e^x}\right) \to 1$

X, Y unione finita di intervalli

$f: X \to Y \qquad g: Y \to \mathbb{R}$

$\bar{x} \in \overline{X}$, supponiamo che

i) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$

ii) $\lim_{y \to \bar{y}} g(y)$ esiste

iii) (?)

(non è necessario mettere nelle hp che esista il limite per $x \to \bar{x}$ di $g(f(x))$, ciò è garantito dalle altre)

Allora vale la formula

"IL MISTERO DELLA III IPOTESI"

Esempio

$h(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad \lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ $\quad$ ma $\lim_{y \to 0} \frac{1}{y}$ non esiste

$\Downarrow$

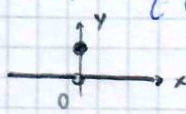
SERVE L'IPOTESI ii
(basterebbe mettere 0^+)

Domanda: serve chiedere per ip. che valga $\bar{y} \in \bar{Y}$? No, ciò è garantito dal primo limite

Non è garantito che $\bar{y} \in Y$

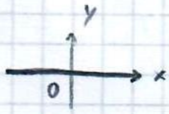
Così l'enunciato talvolta fallisce

$$g = \begin{cases} 1 & \text{se } x = 0 \\ 0 & \text{se } x \neq 0 \end{cases}$$



$f(x) = 0$

funt. costante



è una funzione costante $= 1$

$g(f(x)) \equiv 1 \quad \to \quad \lim_{x \to 0} g(f(x)) = \lim_{x \to 0} 1 = 1$

$\lim_{x \to 0} g(x) = 0$

$$\overset{1}{\overset{\shortparallel}{\lim_{x \to 0} g(f(x))}} \neq \lim_{y \to 0} g(y) = 0$$

per $x \to 0$, $f(x) \to 0$

$\Rightarrow$ aggiungo l'ip iii: se $\bar{y} \in Y$ richiediamo che g sia continua in $\bar{y}$

(Altra opzione $\to \bar{y} \neq f(x)$ vicino a $\bar{x}$)

- LIMITE DELLA SOMMA O SOMMA DI LIMITI

"Il limite della somma è la somma dei limiti"

Achtung! $+\infty - \infty = ?$

Sia X unione finita di intervalli

$f: X \to \mathbb{R} \quad g: X \to \mathbb{R} \quad \bar{x} \in \bar{X}$

Supponiamo che esistano finiti

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l_1 \quad \lim_{x \to \bar{x}} g(x) = l_2$

Allora $\lim_{x \to \bar{x}} (f+g)(x) = l_1 + l_2$

Dim $\quad \forall \varepsilon > 0, \ \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) \mid \forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta'$ con $x \neq \bar{x}$

$\Rightarrow |f(x) - l_1| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta^2 = \delta^2(\varepsilon) \mid \forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta^2$ con $x \neq \bar{x}$

$\Rightarrow |g(x) - l_2| < \varepsilon$

devo ottenere che $|(f+g)(x) - (l_1+l_2)| < \varepsilon$

$| f(x) - l_1 + g(x) - l_2 | \leq |f - l_1| + |g - l_2|$

$\boxed{\text{DISUGUALIANZA TRIANGOLARE}}$

Preso $\varepsilon > 0$, prendo $\delta = \min\{\delta'(\frac{\varepsilon}{2}), \delta^2(\frac{\varepsilon}{2})\}$

$\forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta'$, $x \neq \bar{x}$

$|f+g - (l_1+l_2)| \leq |f - l_1| + |g - l_2| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Oppure:

Fisso $\varepsilon > 0$ qualsiasi, prendo $\delta = \min\{\delta'(\varepsilon), \delta^2(\varepsilon)\}$

Allora $\forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \varepsilon$, $x \neq \bar{x}$, vale

$|f+g - (l_1+l_2)| \leq |f - l_1 + g - l_2| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$

Per l'arbitrarietà di ε concludiamo

↓

esercizio

Scrivere un LEMMA che esprima questo

<= È sottointeso che quando ho $f(\varepsilon)$ che tende a 0 se ε tende a 0 posso scegliere opportunamente un valore che mi da, alla fine, ε

Posso rimuovere la condizione l_1, l_2 finiti?

CASO 1

l_1 finito / $l_2 = \pm\infty$

$l_1 + \infty = +\infty$

$l_1 - \infty = -\infty$

CASO 2

Entrambi sono infiniti

$+\infty + \infty = +\infty$

$-\infty - \infty = -\infty$

$+\infty - \infty$ → forma indeterminata (può essere sia finito che ∞)

Cosa succede se un limite esiste e uno no?

- $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$ può esistere

- LIMITE DEL PRODOTTO O PRODOTTO DEL LIMITE

X unione di intervalli $f: X \to \mathbb{R}$, $g: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{X}$

Supponiamo che esistano finiti $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = l_2$ $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l_1$

Allora $\lim_{x \to \bar{x}} (fg)(x) = l_1 l_2$

Dim

$|fg - l_1 l_2| = |fg \pm g l_1 - l_1 l_2| = |g(\overset{\varepsilon_1}{\uparrow} f - l_1) + l_1(g \overset{\varepsilon_2}{\uparrow} - l_2)| \leq$ ε_2 => posso farlo decrescere a piacere

$|g(f - l_1)| + |l_1(g - l_2)| \leq \underbrace{|g(x)|}_{\text{il problema è questo termine}} | f(x) - l_1 | + |l_1| |g(x) - l_2| < \varepsilon$

$|g(x)| < c$

$-c < g(x) < c \rightarrow g(x)$ è limitata vicino alle x vicine a $\bar{x}$

Tutti gli addendi sono finiti → la dim. è conclusa

Posso togliere l_1 e l_2 finiti?

- $0 \cdot (\pm\infty) \rightarrow$ forma indeterminata
- $+\infty \cdot +\infty = +\infty$
- $-\infty \cdot -\infty = +\infty$
- $-\infty \cdot |l| = -\infty$
- $+\infty \cdot |l| = +\infty$
- $+\infty \cdot (-|l|) = -\infty$
- $-\infty \cdot (-|l|) = +\infty$
- $+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} x e^{-x} = +\infty \cdot 0$ ∄ole (per ora)

$\rightarrow \lim_{x \to +\infty} e^{x^2} \cdot e^{-x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x^2 - x} = \lim_{x \to +\infty} e^{x(x-1)} = e^{\infty} = \infty$

- $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = l$ (finito) $l \neq 0 \Rightarrow \lim_{x \to \bar{x}} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{l}$

$\frac{1}{+\infty} = \frac{1}{-\infty} = 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste ; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

stesso caso

$\lim_{x \to \pi} \frac{1}{\sin x}$ non esiste (ma esistono i limiti per $x \to \pi^+$ e $x \to \pi^-$)

FORME INDETERMINATE

$\frac{\pm\infty}{\mp\infty}$, $+\infty - \infty$, $\pm\infty \cdot 0$, 1^{∞}

TEOREMA DEL CONFRONTO

X insieme finito di intervalli $f, g, h \; X \rightarrow \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{X}$

o a un intorno di $\bar{x}$

$\forall x \in X$ vale $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

Inoltre $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \lim_{x \to \bar{x}} h(x) = l$

Allora $\lim_{x \to \bar{x}} g(x) = l$

Ip $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta' = \delta'(\varepsilon) \mid \quad \forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta'$ vale $|f(x) - \ell| < \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta^2 = \delta^2(\varepsilon) \mid \quad \forall x$ t.c. $|x - \bar{x}| < \delta^2$ vale $|g(x) - \ell| < \varepsilon$

Allora fissato $\varepsilon > 0$ scelgo $\delta = \min\{\delta', \delta^2\}$

$$-\varepsilon < f(x) - \ell \leq g(x) - \ell \leq h(x) - \ell < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |g(x) - \ell| < \varepsilon$$

posso "localizzare" le Ip.

OSSERVAZIONI

- $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ può essere vera localmente vicino a $\bar{x}$ e non necessariamente $\forall x \in X$
- se $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = +\infty$, non serve $g(x) \leq h(x)$
- se $\lim_{x \to \bar{x}} h(x) = -\infty$, non serve $f(x) \leq g(x)$

17/10/2023

Non abbiamo parlato di

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x)^{g(x)}$ perché può essere trasformata in

$e^{\log(f^g)} = e^{g \log f}$ (non serve la forma indeterminata 1^∞, ci riconduciamo a quella del prodotto)

ESEMPI DI CALCOLO DEI LIMITI

- $\lim_{x \to +\infty} x^3 - x^2 = +\infty - \infty$ (F.I.)

$$\lim_{x \to +\infty} x^2(x-1) = +\infty \cdot +\infty = +\infty$$

- $\lim_{x \to 0} \sin(x) + e^x = \lim_{x \to 0} \sin(x) + \lim_{x \to 0} e^x = 0 + 1 = 1$

- $\lim_{x \to +\infty} x \cdot e^x = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

$\downarrow$

- $\lim_{x \to -\infty} x e^x = -\infty \cdot 0 \rightarrow$ forma indeterminata (non risolvibile con quello che abbiamo visto fino ad adesso)

- $\lim_{x \to +\infty} x + \sin x$

$$x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$$

teo. del confronto

$\lim_{x \to +\infty} x - 1 = \lim_{x \to +\infty} x + 1 = +\infty \Rightarrow \lim_{x \to +\infty} x + \sin x = +\infty$

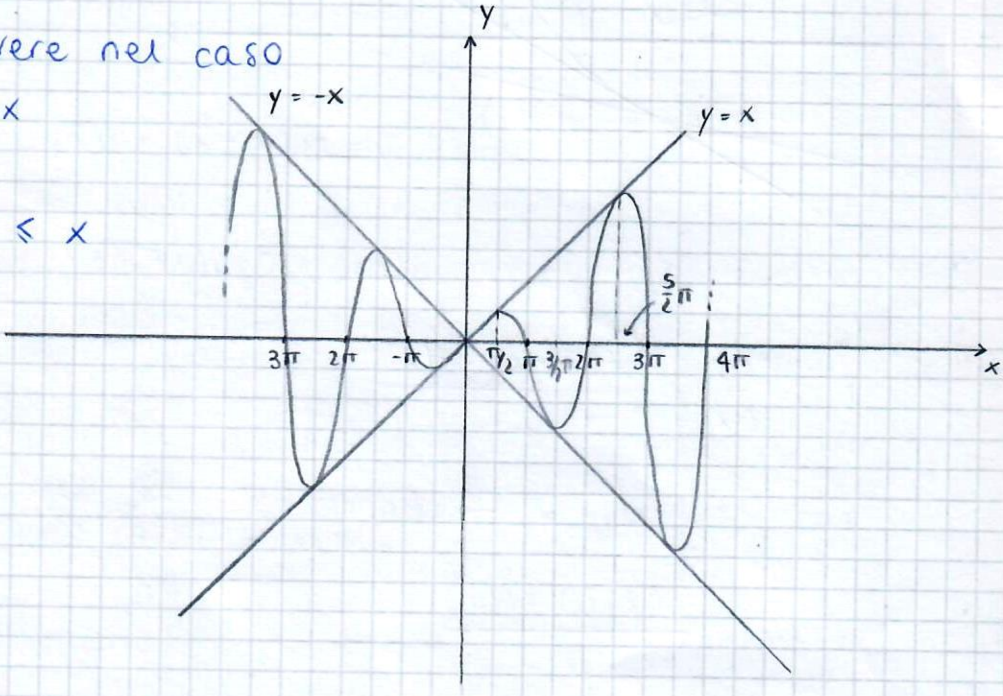
- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x}$

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \to +\infty} -\frac{1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0 \implies \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$$

Non riesco a risolvere nel caso

$$\lim_{x \to +\infty} x \sin x$$
$$\downarrow$$
$$-x \leq \sin x \leq x$$



- $\lim_{x \to +\infty} x^x = \lim_{x \to +\infty} e^{x \log x} = e^{+\infty} = +\infty$

- $\lim_{x \to +\infty} \sqrt[x]{2} = 2^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} e^{\frac{1}{x}\log 2} = e^0 = 1$

- $\lim_{x \to +\infty} \frac{\sin(\log(x^3+3)) + \cos x}{\sqrt{x}}$

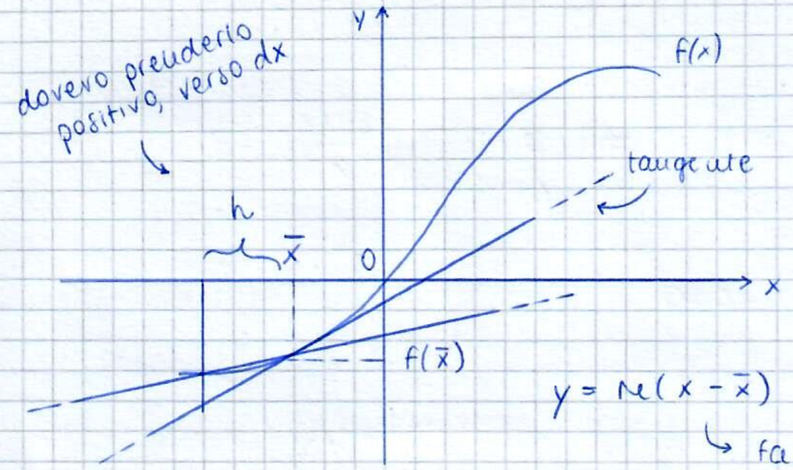
$$\frac{-2}{\sqrt{x}} \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{-2}{\sqrt{x}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0 \overset{\text{teo. del confronto}}{\implies} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$$

- $\lim_{x \to +\infty} x^2 + x\sin(x) = \lim_{x \to +\infty} x(x + \sin x) = +\infty \cdot (+\infty) = +\infty$

DERIVATE

Presa $f(x)$ nel piano ci chiediamo l'eq. della tangente in $\bar{x}$



$y = m(x - \bar{x}) + f(\bar{x})$

↳ fascio di rette con centro $(\bar{x}, f(\bar{x}))$

QUANTO VALE m?

$$m_h = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

$m = \lim_{h \to 0} m_h =$ → RAPPORTO INCREMENTALE

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(\bar{x} + h) - f(\bar{x})}{h}$$

Sia P un punto in movimento nel piano

$d(t)$ = dist. percorsa da P dall'istante 0 all'istante t

velocità (scalare) media nell'intervallo da t a $t + \Delta t$

↳ $$v_m = \frac{d(t - \Delta t) - d(t)}{\Delta t}$$

SCALARE!!!

velocità (scalare) istantanea

↳ $$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t + \Delta t) - d(t)}{\Delta t}$$

P punto nello spazio

$P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ → posizione

$$\underline{v}(t) = \frac{P(t + \Delta t) - P(t)}{\Delta t}$$

è un vettore

= velocità vettoriale media

$\lim_{\Delta t \to 0} \underline{v}(t)$ = velocità vettoriale istantanea

Def Data $f: X \to \mathbb{R}$
$\uparrow$
unione finita di intervalli

dato $x \in X$, la derivata di f in x è

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

(se il limite esiste)

OSS

- $f'(x)$ può essere finita / $\pm\infty$ / non esistere

DERIVABILE = la derivata della funz. esiste ed è finita

- f' è una funzione con insieme di definizione contenuto in X (e non necessariamente uguale) a valore in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
li intendo come numeri

NOTAZIONE

f'; $\dot{f}$; Df; $\frac{df}{dx}$ o $\frac{dy}{dx}$

f'', $\ddot{f}$ $\quad D^2 f$, $D^3 f$, $D^4 f$, ...

Calcolo delle derivate

Es. di calcolo diretto: (a partire dalla definizione)

- $f(x) = ax + b$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{ax} + ah + \cancel{b} - \cancel{ax} - \cancel{b}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a\cancel{h}}{\cancel{h}} = a$$

- $f(x) = x^2$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2xh - \cancel{x^2}}{h} = \lim \frac{\cancel{h}(h + 2x)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (h + 2x) = 2x$$

- $f(x) = |x|$ $\quad f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{per } x > 0 \\ \text{N.E.} & \text{per } x = 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$ → da dimostrare a partire dalla def. di modulo e di derivata

- $f(x) = \sqrt{x} \to f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{x}} & \text{se } x > 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$ / da dimostrare

Calcolo vero: elenco delle derivate elementari
regole di derivazione

f	f'
a	0
x^a	ax^{a-1}
a^x	$\log a \cdot a^x$
e^x	e^x
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

quando a è compreso tra 0 e 1 (in 0 non è definita (mentre +a sì) che succede?)

non dà la derivata -1, 1 negli estremi

non sono opposte ma le derivate lo sono

Regole di derivazione

f, g funzioni $a, b \in \mathbb{R}$

① $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$ ⊛

LINEARITÀ DELLA DERIVATA

$(af(x) + bg(x))' = af'(x) + bg'(x)$
comb. di ① e (1')

L'associare in uno spazio di funzioni a ognuna la sua derivata è una applicazione lineare

(1') $(af(x))' = af'(x)$

⊛ a parole
date f e g sullo stesso dominio e derivabili in x allora esiste anche la derivata nella somma in x ed è data dalla formula

② $(fg)' = f'g + fg'$

③ $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \xrightarrow[\text{particolare}]{\text{caso}} \left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

MANCA LA DERIVATA DELL'INVERSA

④ $(f(g(x)))' = f'(\overbrace{g(x)}^{y}) \cdot g'(x) = f'(y)g'(x)$

es. $(\log(\overbrace{\sin x}^{y}))' = (\log y)'(\sin x)' = \frac{1}{y}\cos x = \frac{\cos x}{\sin x} = \cancel{\text{arc}}\tan^{-1} x$

- $(x^x)' = (e^{x\log x})' = e^{x\log x} \cdot (x\log x)' = e^{x\log x}\left(\log x - x\frac{1}{x}\right) =$
$x^x(\log x - 1)$

- $(\log(\overbrace{\log(\underbrace{\log x}_{})}^{y}))' = (\log y)' \cdot (\log(\overbrace{\log x}^{z}))' =$
$= \frac{1}{y} \cdot (\log z)' \cdot (\log x)' = = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{\log(\log x)}$

$(f(ax))' = a f'(ax)$

DIMOSTRAZIONI

1) $(ax+b)' = a$ (fatta) → direttamente con il rapporto incrementale

2) $(f+g)' = f' + g'$

sia X unione finita di intervalli

$f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabili in x e $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
(fa parte della tesi)

Parto dal rapporto incrementale di $f+g$ (in x)
la valutazione è un omomorfismo

$$\frac{(f+g)(x+h) - (f+g)(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$\downarrow$ se $h \to 0$ $\qquad \downarrow$ se $h \to 0$ $\qquad \downarrow$ se $h \to 0$

$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$

3) $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$$\frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) - f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}{h}$$

$$= \frac{g(x+h)\cdot(f(x+h) - f(x))}{h} + \frac{f(x)(g(x+h) - g(x))}{h} =$$

$g(x+h) \xrightarrow{h\to 0} g(x)$

sto usando la continuità di g → ma so che è derivabile in x e dunque continua

$\downarrow h \to 0 \qquad \downarrow h \to 0$

$= g(x)f'(x) + f(x)g'(x)$

NOTA $(af + bg)' = af' + bg'$

4) $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

dim (circa)

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \text{''} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{g(x+h) - g(x)} =$$

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}$$

$y := g(x) \qquad K := g(x+h) - g(x) \Rightarrow g(x+h) = y + K$

$$\underbrace{\frac{f(y+K) - f(y)}{K}}_{\downarrow K \to 0 \quad f'(y)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\downarrow h \to 0 \quad g'(x)} =$$

ma se $K \to 0$
$h \to 0$ per continuità di g

Se $h \to 0$ segue che $K \to 0$

Questa dimostrazione ha un serio problema
$g(x+h) - g(x)$ deve essere $\neq 0$
ma se g è costante non lo è

$= f'(g(x)) \cdot g'(x)$

5) $(e^x)' = e^x$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \frac{e^x(e^h - 1)}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h - 1}{h}}_{\downarrow h \to 0 \quad 1}$$

limite notevole

Definisco (in modo molto in-metodico) e come il numero reale che ha questa proprietà

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

6) Sia $f: X \to Y$ invertibile con inversa $g: Y \to X$

prendo $x \in X$ $y \in Y$ | $y = f(x)$ o $(x = g(y))$

$\Rightarrow g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad f'(x) \neq 0$

Dim ($\sim$ OK)

$g(f(x)) = x \; (\forall x) \Rightarrow (g(f(x)))' = (x)' = 1$

$g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$

$g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$

DEBOLEZZA:
assume la derivabilità di g senza dimostrarla

$\arcsin(\sin x) = x$

$[\arcsin(\sin x)]' = 1$

$\arcsin'(\sin x) \cdot \cos x = 1$

$\arcsin'(\sin x) = \frac{1}{\cos x}$

$\sin x = y \Rightarrow \cos x = \sqrt{1-y^2}$

$[\arcsin y]' = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

7) $(\log x)' = \frac{1}{x}$

Dim

$$(\log y)' \overset{⑥}{=} \frac{1}{(e^x)'} \overset{⑤}{=} \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}$$

8) $(a^x)' = a^x \log a$

$a^x = e^{x \log a} \qquad (e^{x \log a})' = e^{x \log a} \cdot (x \log a)' = \overset{a^x}{\cancel{e^{x \log a}}} \cdot \log a$

9)

$$(x^a)' = e^{a\log x} = e^{a \log x} \cdot (a \log x)' = e^{a\log x} \cdot \frac{a}{x} = \frac{x^a \cdot a}{x} = a x^{a-1}$$

$\downarrow$

suppone $x > 0$ ma
la formula con $a \in \mathbb{Z}$ vale
anche con i negativi (da completare)

se $a > 0$ va bene anche $x = 0$

10) $$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\frac{1}{g(x)} = f(g(x)) \xrightarrow{\text{dove}} f(y) = \frac{1}{y}$$

$$\left(\frac{1}{g(x)}\right)' = (f(g(x)))' = f'(y) \cdot g'(x) = \frac{-1}{y^2} \cdot g'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)}$$

11) $$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \left(f(x)\frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x)\frac{1}{g(x)} + f(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

$$= \frac{f'(x)}{g(x)} + \underbrace{\frac{f(x)(-g'(x))}{g^2(x)}}_{(10)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

23/10/2023

Dimostrazioni derivate (conclusione)

12) $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

dimostrazione

Rapporto incrementale

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} = \frac{\cos x \operatorname{sen} h + \operatorname{sen} x \cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

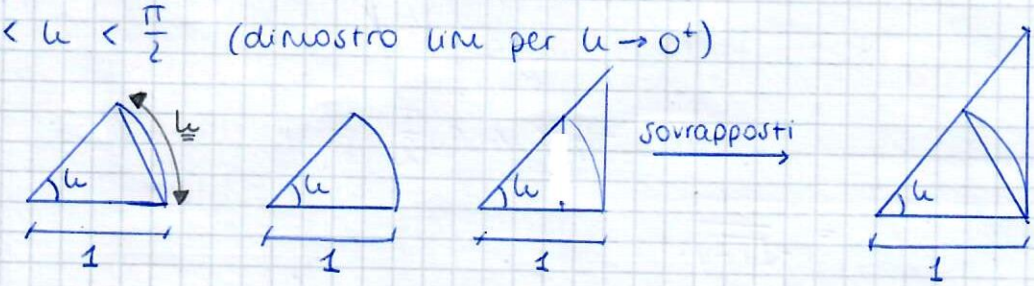
limiti notevoli

$$= \cos x \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{① \ \xrightarrow{h \to 0} \ 1} - \operatorname{sen} x \underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{② \ \xrightarrow{h \to 0} \ 0} \xrightarrow{h \to 0} \cos x$$

①

$$\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}$$

- $0 < h < \frac{\pi}{2}$ (dimostro lim per $h \to 0^+$)



A_1 A_2 A_3

Confronto le aree

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & & A_2 & & A_3 \\ \cancel{\tfrac{1}{2}}\operatorname{sen} h & \leq & \cancel{\tfrac{1}{2}} h & \leq & \cancel{\tfrac{1}{2}}\tan h \end{array}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen} h} \geq \frac{1}{h} \geq \frac{\cos h}{\operatorname{sen} h}$$

$$1 \geq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \geq \underbrace{\cos h}_{\downarrow h \to 0 \atop 1}$$

=> Per il teo del confronto

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$$

Devo dimostrare che il lim per $h \to 0^-$ è uguale, ma basta osservare che $\frac{\sin h}{h}$ è una funtione pari, in 0 unite dx e sx sono uguali. ⊛

13) $(\cos x)' = \operatorname{sen} x$

(basta usare $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$)

| usando

- derivata f. composta
- derivata del seno
- derivata di $x + \frac{\pi}{2}$

} già dimostrata

⊛ Ci siamo scordati

$$\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}$$

$$\frac{1-\cos h}{h} \cdot \frac{1+\cos h}{1+\cos h} = \frac{1-\cos^2 h}{h \cdot (1+\cos h)} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\downarrow h \to 0 \atop 1} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{1+\cos h}}_{\downarrow h \to 0 \atop 0}$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1-\cos h}{h} = 0$$

14) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

15) $\boxed{(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}}$

arctan y inversa di tan x

$$(\arctan y)' = \frac{1}{(\tan x)'} = \frac{1}{1+(\tan x)^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

16) $(\arcsin y)' = \frac{1}{(\operatorname{sen} x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\underbrace{\operatorname{sen}^2 x}_{y}}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$

Posso escludere il meno, why?

perchè $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$ => il coseno è sempre positivo

17) $(\arccos x)' = \frac{1}{-\sqrt{1-y^2}}$

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

VERSIONE EASY $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Quando entrambe vanno a 0 o a $\pm\infty$

(anche a $+\infty$ la 1ª e $-$ la seconda o viceversa)

VERSIONE PRECISA $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

se

- il limite è nella forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$
- il limite per $x \to \bar{x}$ di $\frac{f'(x)}{g'(x)}$ esiste
- f e g definite su $I \setminus \bar{x}$

intervallo che contiene $\bar{x}$ nella sua chiusura

$\bar{x} \in \bar{I}$

es. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \cos x = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{2} = +\infty$

Caso patologico:

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^3}}$ → a ogni passaggio si complica

$\lim_{x \to 0^+} \cancel{\frac{\log x}{x} = \lim_{x \to 0^+}} \frac{\frac{1}{x}}{1} = +\infty$

non si applica,
non è una forma $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + 2\operatorname{sen}x}{\log x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 + 2\cos x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to +\infty} x(1 + 2\cos x)$

↓ esiste $= +\infty$ (sotto $\frac{x + 2\operatorname{sen}x}{\log x}$)

↓ non esiste (sotto $x(1 + 2\cos x)$)

$\frac{x + 2\operatorname{sen}x}{\log x} \geq \frac{x - 2}{\log x} \xrightarrow[\text{quade l'Hop.}]{\text{applicando}} \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = x = +\infty$

24/10/2023

NOTAZIONE DI LANDAU

DEF (trascurabilità / o piccolo)

serve solo per poter fare il limite

X unione finita di intervalli, $x_0 \in \overline{X}$,

$f, g : X \to \mathbb{R}$ Diciamo che f è trascurabile rispetto a g per $x \to x_0$ (f è o piccolo di g per $x \to x_0$) se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

abuso di notazione, dovrebbe essere $\in$

In simboli scriviamo $f \ll g$ o $f = o(g)$ → indica una classe di funzioni

I casi di interesse sono $x_0 = \pm\infty$, $x_0 = 0$

Vale che $f \ll g,\ g \ll h \Rightarrow f \ll h$ per $x \to x_0$

Relazione transitiva

Infiniti e infinitesimi

GERARCHIE

$x_0 = +\infty$

a) $x^a \ll x^b$ se $a < b$

b) $a^x \ll b^x$ se $0 < a < b$

b bis) $e^{ax} \ll e^{bx}$ se $0 < a < b$

c) $(\log x)^a \ll x^b$ $b > 0$, $a \in \mathbb{R}$

d) $x^a \ll b^x$ $b > 1$, $a \in \mathbb{R}$

$x_0 = 0^+$

e) $x^a \ll x^b$ se $a > b$

f) $|(\log x)|^a \ll \frac{1}{x^b}$ se $b > 0$, $a \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{(|\log x|)^a}{1/x^b} =$

x^{-b}

$\lim_{x \to 0} (|\log x|)^a x^b = 0$

Dim

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} x^{a-b} = 0$

negativo per ip.

b) $\lim_{x \to +\infty} \frac{a^x}{b^x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^x = 0$

minore di 1

c) CASO $a = 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^b} \xrightarrow{\text{de l'Hop.}} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{b x^{b-1}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{b x^b} = 0$$

CASO $a > 0$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\log x}{x^{b/a}}\right)^a = 0$$

CASO $a \leq 0$ (b sempre > 0 per ip.)

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^a}{x^b} = 0$$ (non è una forma indeterminata)

d) $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^a}{b^x}$

1° metodo: applicare de l'Hopital a volte

oppure: $y = e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log y)^a}{y^{\log b}} = 0$$

$\hookrightarrow b^x = e^{\log b^x} = e^{x \log b} = (e^x)^{\log b} = y^{\log b}$

e) $\lim_{x \to 0} \frac{x^a}{x^b} = \lim_{x \to 0} x^{\underbrace{a-b}_{>0}} = 0$

f) $\lim_{x \to 0^+} \frac{|\log x|}{\frac{1}{x^b}}$ ← caso $a=1$

$-\log x$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\log x|}{x^{-b}} \xrightarrow{\text{de l'Hop}} \lim_{x \to 0^+} \frac{-\frac{1}{x}}{-b x^{-b-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{-1}{-b x^{-b}} = 0$$

Se $f << g$ per $x \to x_0$
$f \to 0$, $g \to +\infty$ o $-\infty$; $x_0 = +\infty$

└ va bene sia + che $-\infty$

es. • $\lim_{x \to 0^+} x^2 \log x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^{-2}} = 0$; $= \log x / \frac{1}{x^2}$

• $\lim_{x \to -\infty} x^2 e^x = \lim_{y \to +\infty} y^2 e^{-y} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y^2}{e^y} = 0$

$y = -x$

OSS $y^2 << e^y$ per $y \to +\infty$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{\log(\log x)} = \lim_{y \to +\infty} \frac{y}{\log y} = +\infty$

$y = \log x$; $(\log y << y)$

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\log x)^2}{e^x} = 0$

DEF (asintotica equivalenza)

X unione finita di intervalli, $x_0 \in \bar{X}$

$f, g : X \to \mathbb{R}$ Diciamo che f è asintoticamente equivalente a g per $x \to x_0$ ($f \sim g$) se

rel. di equivalenza

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

commutativa
se $f \sim g \Rightarrow g \sim f$

(es.) • $\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

• $x + \log x \sim x$ per $x \to +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{x + \log x}{x} = 1$ (posso sempre buttare via il logaritmo)

$\sim$ è una relazione di equivalenza tra funzioni definite sullo stesso dominio

• $f \sim f$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{f} = 1$

• $f \sim g$ e $g \sim h \Rightarrow f \sim h$ $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{h} \cdot \frac{g}{g} = \lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right) \cdot \lim_{x \to x_0} \left(\frac{g}{h}\right) = \cancel{0}\ 1$

• $f \sim g \Leftrightarrow g \sim f$

$\lim_{x \to x_0} \frac{g}{f} = \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = \lim_{x \to x_0} \frac{1}{\left(\frac{f}{g}\right)} = 1$

DEF [PARTE PRINCIPALE]

La parte principale per $x \to 0^+$ / $x \to +\infty$ di $f(x)$ (se esiste) è il monomio ax^b ($a \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$) tale che

$f \sim ax^b$ per $x \to 0^+$ / per $x \to +\infty$

0 non è mai una parte principale

la p.p. può non esistere

(es.) p.p di e^x per $x \to 0$ è 1

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x}{1} = 1$

p.p. per $x \to 0$ di $\sin x$ è x

p.p. per $x \to 0$ di $\cos x$ è 1

p.p. per $x \to 0$ di $\cos x - 1$ è $\frac{1}{2} x^2$ $\lim_{x \to 0^+} \frac{\cos x - 1}{-\frac{1}{2} x^2} = 1$

PROPRIETÀ DI $\sim$

PRINCIPIO DI SOSTITUZIONE NEI LIMITI

X unione finita di intervalli, $x_0 \in \overline{X}$

tutte le funz. sono da X in $\mathbb{R}$ e consideriamo sempre $x \to x_0$

1) $\boxed{f \sim g \Leftrightarrow f = g + o(g)}$ O EQUIVALENTEMENTE $g = f + o(f)$

(chiamo $r = f - g$, vale che $r \ll g$)

2) Se $f \sim g \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$

Inoltre se uno dei 2 limiti non esiste non esiste neanche l' altro

3) $f_1 \sim f_2$ e $g_1 \sim g_2$, allora $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$, $\frac{f_1}{g_1} \sim \frac{f_2}{g_2}$; $f_1^\alpha \sim f_2^\alpha$
$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (se α non intero assumiamo $f_1, f_2 > 0$)

4) $f_1 \sim f_2$, $g_1 \sim g_2$ $\quad \lim_{x \to x_0} f_1 g_1 = \lim_{x \to x_0} f_2 g_2$
(2)+(3)

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{g_1} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_2}{g_2}$$

$$\lim_{x \to x_0} f_1^\alpha = \lim_{x \to x_0} f_2^\alpha$$

CASI CATTIVI.

In generale NON VALE

$f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$ $\not\Rightarrow$ $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$

$x \to +\infty$ $\quad f_1 = x^4 - x^3$ $\quad f_2 = -x^4$ $\quad f_1 + f_2 = -x^3$

$g_1 = x^4 + x^2$ $\quad g_2 = -x^4$ $\quad g_1 + g_2 = x^2$

$f \sim g$ $\not\Rightarrow$ $\varphi(f) \sim \varphi(g)$

$f = x^2$ $\quad g = x^2 + x$ $\quad x \to +\infty$

$\varphi(f) = e^{x^2}$ $\quad \varphi(g) = e^{x^2 + x} = e^{x^2} \cdot e^x$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x^2}}{e^{x^2} \cdot e^x} = 0 \neq 1$$

Dimostrazioni:

(1) $\Rightarrow$ So che $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$

Devo dimostrare che $\lim_{x \to x_0} \frac{r}{g} = 0$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f-g}{g} = \lim \frac{f}{g} - \lim \frac{g}{g} = 1 - 1 = 0$$

$\Leftarrow$ $f = g + o(g)$, devo dimostrare $\lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g + o(g)}{g} = 1 + \underbrace{\lim \frac{o(g)}{g}}_{0} = 1$$

(2) $f \sim g$, supponto che $\lim_{x \to x_0} f(x)$ esista ~~= $\lim_{x \to x_0}$~~

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim f(x) \frac{g(x)}{g(x)} = \underbrace{\lim \frac{f(x)}{g(x)}}_{1} \cdot \lim g(x) = \lim_{x \to x_0} g(x)$$

(3) $\lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2} = 1 \quad \lim_{x \to x_0} \frac{g_1}{g_2} = 1 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f_1 g_1}{f_2 g_2} = \lim \frac{f_1}{f_2} \cdot \lim \frac{g_1}{g_2} = 1$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_1/g_1}{f_2/g_2} = \lim_{x \to x_0} \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{g_2}{g_1} = 1$$

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f_1}{f_2}\right)^\alpha = \lim_{x \to x_0} \frac{(f_1)^\alpha}{(f_2)^\alpha} = 1$$

26/10/2023

DEF. Dare $f, g : X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in \bar{X}$ dico che f è "O grande" di g per
(unione finita di intervalli)

O-GRANDE $x \to \bar{x}$ $\quad (f(x) = O(g(x)))$ se

$$\exists \delta > 0, \exists M > 0 \mid |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$$

(scrivere la def. quando $\bar{x} = +\infty \vee \bar{x} = -\infty$)

$\boxed{x = +\infty}$: $\exists K > 0 \ \exists M > 0 \mid x \geq K \Rightarrow |f(x)| \leq M |g(x)|$

Prop Se esiste $L := \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)}$ allora $f(x) = O(g(x)) \iff L$ è finito

in particolare $f(x) = o\, g(x) \Rightarrow f(x) = O\, g(x)$

dim $(\Leftarrow)$ So che $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in \mathbb{R}$

per la def. di limite con $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0 \mid |x - \bar{x}| \leq \delta \Rightarrow$

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| \leq 1$$

$$-|L| - 1 \leq L - 1 \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq L + 1 \leq |L| + 1 \Rightarrow \left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq |L| + 1$$

Quindi la def di O grande è soddisfatta da $M = |L| + 1$

$(\Rightarrow)$ Do per scontato che il limite del rapporto esista

Hp: $f(x) = O(g(x)) \underset{\text{def.}}{\Rightarrow} \exists \delta > 0, \exists M > 0 \mid |f(x)| \leq M |g(x)|$ se $|x - \bar{x}| \leq \delta$

cioè $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \Rightarrow -M \leq \frac{f(x)}{g(x)} \leq M$

se il rapporto è compreso tra 2 costanti lo è anche il limite

$\Rightarrow -M \leq L \leq M$ (≠ dal teo. del confronto, in questo caso devo sapere che il limite esiste)

ESEMPIO

1) $\operatorname{sen} x = O(x)$ per $x \to 0$ $\quad$ (perché $\frac{\operatorname{sen} x}{x} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 1$)

2) $2x^2 + \log x = O(-x^2)$ per $x \to +\infty$

perché $\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^2 + \log x}{-x^2} = -2$

3) $\sin(x) = O(1) \quad x \to +\infty$

$\left| \frac{\sin(x)}{1} \right| \leq 1$ (direttamente dalla definizione)

"f si controlla con g"

4) se $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \quad \forall x$ allora $f(x) = O(g(x))$

(ovviamente f e g non possono essere scambiate)

$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M \Rightarrow \left| \frac{g(x)}{f(x)} \right| \geq \frac{1}{M}$ NON È TRANSITIVA!

5) Dire quali implicazioni valgono tra questi enunciati $(x \to +\infty)$

a) $f(x) = o(x^3)$ b) $f(x) = O(x^3)$ c) $f(x) = O(x^2)$

o piccolo — O grande

(**) $a \Rightarrow b$ (già vista)

vale $b \Rightarrow a$ (?) NO!

(*) $c \Rightarrow a$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x^3} = \lim \underbrace{\frac{f(x)}{x^2}}_{\text{limitata}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x}}_{\text{va a } 0} = 0$$

limitata (non serve che esista il limite di $f(x)/x^2$)

(*) + (**) : $c \Rightarrow b$

ma $b \not\Rightarrow c$ (basta prendere $f(x) = x^{5/2}$)

$x^2 < x^{\frac{5}{2}} < x^3$

In conclusione

$c \Rightarrow a \Rightarrow b$

$\not\Leftarrow \quad \not\Leftarrow$

Ora considero gli enunciati ma con $x \to 0$

a) $f(x) = o(x^3)$ b) $f(x) = O(x^3)$ c) $f(x) = O(x^4)$

$a \Rightarrow b \quad b \not\Rightarrow a$ (basta prendere x^3)

$c \Rightarrow a$ (*) $\quad a \not\Rightarrow c$

$f(x) = x^{\frac{7}{2}}$

(*) $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^4} = M$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^3} = \lim_{x \to 0} \underbrace{\frac{f(x)}{x^4}}_{=M} \cdot \underbrace{x}_{=0} = 0$$

Derivate di ordine superiore

$f' = Df$

$f'' = D^2 f$

...

$D^k f$ = derivata di ordine k di f

$\underbrace{D(D(D(\dots Df)\dots)}_{k \text{ derivate}}$

Si pone anche

$D^0 f = f$

Polinomio di Taylor in 0: Data $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo che contiene 0. $d \in \mathbb{N}$, f derivabile in 0 d volte

(fino a $d-1$ in tutto I e in 0 a d)

Il polinomio di Taylor di grado d di f in 0 è

$$P_d(x) = \frac{f(0)}{0!} + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{D^d f(0)}{d!}x^d =$$

$$= \boxed{\sum_{k=0}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k}$$

d può essere $= 0$

[derivata d-esima calcolata in 0 diviso d fattoriale per la potenza d-esima di x]

si può omettere la funz.

$P_d f(x)$

Resto di Taylor

$R_d = f(x) - P_d(x)$

cioè $f(x) = P_d(x) + R_d(x)$

TEOREMA 1 (dello sviluppo di T)

FORMULE DI PEANO DEL RESTO
a) $R_d(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^d} \cdot \frac{1}{x} \underset{\text{per la (b)}}{=} L$$

allora dato che $\frac{1}{x} \to \infty$

$\frac{R_d(x)}{x^d} \to 0$ quindi (b) $\Rightarrow$ (a)

ma (a) $\not\Rightarrow$ (b)

b) se f è derivabile d+1 volte in 0 allora $R_d(x) = O(x^{d+1})$

(questa informazione è meglio della a)

più precisamente $\lim_{x\to 0} \frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \frac{D^{d+1} f(0)}{(d+1)!}$

(coeff. di x^{d+1})

$$P_d f(x) = \sum_{k=0}^{d} \frac{D^k f(0)}{k!} x^k$$

$$R_d(x) = f(x) - P_d(x)$$

DIM Teo. 1 (a) per $d=3$

Tesi: $\lim_{x\to 0} \frac{R_3(x)}{x^3} = 0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{f(x) \overbrace{- f(0) - f'(0)x - f''(0)x^2\frac{1}{2} - \frac{1}{6}f'''(0)x^3}^{-P_d(x)}}{x^3}$

Hôp $\to \lim_{x\to 0} \frac{f'(x) - f'(0) - f''(0)x - \frac{1}{2}f'''(0)x^2}{3x^2}$

forma indeterminata $0/0$

di nuovo Hôp $\to \lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - f''(0) - f'''(0)x}{6x}$ (*) $\xrightarrow{\text{Hôp}} \lim_{x\to 0} \frac{f'''(x) - f'''(0)}{6} = 0$

non è più una forma indet.

(richiede qualcosa di più, che la derivata 3ª non esiste in 0 ma in un intervallo)

(*) $\frac{1}{6}\left(\lim_{x\to 0} \frac{f''(x) - f''(0)}{x}\right) - \frac{f'''(0)}{6} = \frac{1}{6}f'''(0) - \frac{1}{6}f'''(0) = 0$

derivata III in 0 per def.

Per d qualunque?

LEMMA 2 $(P_d f(x))' = P_{d-1} f'(x)$ la derivata del polinomio di Taylor di grado d è il polinomio di grado d-1 della derivata della funzione

Dim $(P_d f(x))' = \left(\sum_{k=1}^{d} \frac{D^k(f(0))}{k!} x^k \right)' = \sum_{k=1}^{d} \frac{D^{k-1}f'(0)}{(k-1)!} x^{k-1} \underset{\uparrow\, h=k-1}{=} \sum_{h=0}^{d-1} \frac{D^h f'(0)}{h!} x^h$

(tanto per $k=0$ è una costante, $D^{k-1}(f'(0))$

$= \sum_{k=1}^{d} \frac{D^k(f(0))}{(k-1)!} x^{k-1} =$

$\boxed{\text{Caso } d=1}$ Passo base

$$\lim_{x\to 0} \frac{R_1 f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)-f'(0)x}{x} = \left(\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}\right) - f'(0) = 0$$

per def $f'(0)$

Passo induttivo:

Supponiamo che $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_{d-1}(x)}{x^{d-1}} = 0$

voglio mostrare $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-P_{d+1}(x)}{x^d} = 0$

$\downarrow$ Hôp

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)-(P_d f(x))'}{d x^{d-1}} \overset{\text{lemma 2}}{=} \frac{1}{d}\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{f'(x)\, R_{d-1}}}{x^{d-1}} = 0$$

$R_{d-1}(f'(x))$ " $f'(x) - P_{d-1}f'(x)$ hp. induttiva

Dim Teo 1 (b) $R_d(x) = O(x^{d+1})$ anzi $\lim_{x\to 0}\frac{R_d(x)}{x^{d+1}} = \frac{D^{d+1}f(0)}{(d+1)!}$

TH:

$$\lim_{x\to 0}\frac{R_d(x)}{x^{d+1}} - \frac{D^{d+1}f(0)}{(d+1)!} = 0$$

$f(x) - P_d(x)$

= ultimo termine di $P_{d+1}(x)$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{R_d(x) - \frac{1}{(d+1)!}D^{d+1}f(0)\,x^{d+1}}{x^{d+1}} = \lim_{x\to 0}\frac{R_{d+1}(x)}{x^{d+1}} \overset{\text{per il punto a}}{=} 0$$

30/10/2023

Prop. 3 Sia $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $(d+1)$ volte I, d volte in 0.
Sia $P(x)$ polinomio di grado $\le d$ tale che
$f(x) - P(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$
Allora $P(x) = P_d(x)$

Lemma 4 Sia $Q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_d x^d$
Se $Q(x) = o(x^d)$ per $x \to 0$
Allora $Q(x) = 0 \ \forall x$ (cioè $a_k = 0 \ \forall k$)

dim Se per assurdo $\exists k$ t.c. $a_k \neq 0$

$\bar{k} = \min \mid a_{\bar{k}} \neq 0$

$Q(x) \sim a_{\bar{k}} x^{\bar{k}}$

⚠ in $\mathbb{Z}_p$ un polinomio sempre nullo $(x^p - x)$ non ha necessariamente tutti coeff. 0) ⊛

$$\lim_{x\to 0}\frac{Q(x)}{x^d} = \lim_{x\to 0}\frac{a_{\bar{k}}x^{\bar{k}}}{x^d} = \begin{cases} a_k \text{ se } k = d \\ \pm\infty \text{ se } \bar{k} < d \end{cases}$$

Contraddice l'ipotesi che $Q(x) = o(x^d)$

DIM PROP. 3

$f(x) - P_d(x) = o(x^d)$ ← teo 1 (a)

$f(x) - P(x) = o(x^d)$ ← HP

↓ differenza

è una classe di equivalenza tra funzioni

$$P(x) - P_d(x) = \underbrace{o(x^d) - o(x^d)}_{\neq 0}$$

$\Downarrow$

$P(x) - P_d(x) = o(x^d)$

↓

polinomio di grado d o minore $\Rightarrow$ per il lemma 4 $P(x) - P_d(x) = 0$ ✓ $\square$

⊛ Sia $S \subset \mathbb{R}$ t.c. $Q(x) = 0 \ \forall x \in S$, è vero che $a_k = 0 \ \forall k$?

In generale no, è vero quando $|S| > \deg[Q(x)]$

OSS

$g_1(x) = o(f(x))$ e $g_2(x) = o(f(x))$ (per $x \to x_0$)

e $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, allora $\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = o(f(x))$

$$\alpha_1 o(f(x)) + \alpha_2 o(f(x)) = o(f(x))$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)}{f(x)} = 0$$

$= 0$ $\quad = 0$

Vale la stessa proprietà con gli O grandi

DEF. f pari significa $f(-x) = f(x) \quad \forall x \quad \Rightarrow f'$ dispari

" dispari " : $f(-x) = -f(x) \quad \Rightarrow f'$ pari

↳ $f(0) = 0$

Dim $f(-x) = f(x)$

$f'(-x) = -1 \cdot f'(x)$

$f'(x) = -f'(-x)$ → dispari

COROLLARIO 6

a) Se f è pari $P_d(x)$ contiene solo potenze pari

b) f dispari $\Rightarrow P_d(x)$ contiene solo potenze dispari

Dim a

f pari $\Rightarrow f'$ dispari $\Rightarrow f''$ pari $\Rightarrow \dots$

In generale $D^k f$ è dispari per k dispari

(INDUZIONE) ↳ $D^k f(0) = 0$ → non contiene potenze dispari

SVILUPPI DI TAYLOR DA SAPERE A MEMORIA

- $$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^d}{d!}}_{P_d(x)} + o(x^{d+1})$$

Dim: se $f(x) = e^x$ $\quad D^k f(x) = e^x \ \forall k \Rightarrow \frac{D^k f(0)}{k!} = \frac{1}{k!}$

- $$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots \underbrace{\pm 1}_{(-1)^{\frac{d-1}{2}}} \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+1})$$ si può mettere $+2$

d dispari

Perché lo sviluppo all'ordine d è uguale a quello di ordine $d+1$.

$D^k f(x) = \sin x$ se $k \equiv 0 \ (4) \rightarrow D^k f(0) = 0$

$D^k f(x) = \cos x$ se $k \equiv 1 \ (4) \rightarrow D^k f(0) = 1$

$D^k f(x) = -\sin x$ se $k \equiv 2 \ (4) \rightarrow D^k f(0) = 0$

$D^k f(x) = -\cos x$ se $k \equiv 3 \ (4) \rightarrow D^k f(0) = -1$

- $$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots \pm \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+2})$$ d pari

- $$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots + \frac{\overbrace{a(a-1)\dots(a-d+1)}^{d \text{ fattori}}}{d!} x^d + o(x^{d+1})$$

$\binom{a}{d} x^d$ (se $a \in \mathbb{Z}^+$)

$$= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} x^k + o(x^{d+1})$$

CASO PARTICOLARE

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \dots \pm x^d + o(x^{d+1})$$

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + \dots + x^d + o(x^{d+1})$$

dim

$D^1 f(x) = a(x+1)^{a-1}$

$D^2 (f(x)) = a(a-1)(x+1)^{a-2}$

$\vdots$

$D^k f(x) = a(a-1) \dots (a-k+1)(1+x)^k$

- $$\log(x+1) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \pm \frac{x^d}{d} \pm o(x^{d+1})$$

$$P_d(\log(x+1)) = \sum_{k=0}^{d} \frac{D^k \log(1)}{k!} x^k$$

$\log'(1) = 1$

$\log''(1) = \left(\frac{1}{x}\right)'(1) = -x^{-2} = -1$

$\log'''(1) = (-x^{-2})'(1) = 2x^{-3}(1) = 2$

$\log''''(1) = -6x^{-4}(1) = -2 \cdot 3$

$$(1+x)^a = \left[\sum_{k=0}^{d} \binom{a}{k} x^k\right] + o(x^{d+1})$$ (solo se $a \in \mathbb{Z}$)

PROP. 7 Formula del Binomio di Newton

$$(a+b)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} a^k b^{d-k} = a^d + d \cdot a^{d-1} b + \frac{d(d-1)}{2} a^{d-2} b^2 + \dots$$

$a, b \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{Z}^+$

lemma 8

Se $f(x)$ è un polinomio di grado d o meno, $P_d f(x) = f(x)$

$$f(x) = P_d f(x) + o(x^d) \leftarrow \text{teo } 1a$$

$$\underbrace{\underset{\leq d}{f(x)} - \underset{\leq d}{P_d(f(x))}}_{\deg \leq d} = o(x^d)$$

$\Rightarrow$ è 0 per il lemma 4

dim PROP 7

Passo 1

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} x^k + o(x^{d+1})$$

sviluppo di Taylor

grado $d \xrightarrow{\text{lemma 8}} o(x^{d+1}) = 0$

$$(1+x)^d = \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} x^k$$

Passo 2

$$(a+b)^d = a^d \left(1 + \frac{b}{a}\right)^d = a^d \cdot \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} x^k =$$

x

$$a^d \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} \frac{b^k}{a^k}$$

$$= \sum_{k=0}^{d} \binom{d}{k} a^{d-k} b^k$$

$$\frac{b^k}{a^k} a^d = b^k a^{k-d}$$

APPLICAZIONI FUTURE

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^d}{d!} + o(x^{d+1})$$

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots$$

vale anche per x reali e complessi

(problema che non abbiamo risolto per le potenze)

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$z \in \mathbb{C}$

non ha significato

è definita

per $t = ix$

$$= 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \dots$$

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$$

$$e^{ix} = \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\right)}_{\cos x}\underbrace{\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin x} i \xRightarrow{\text{conseguenta}} e^{i\pi} + 1 = 0$$

SVILUPPI DI TAYLOR $x \to 0$

31/10/2023

$$\boxed{\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + O(x^7) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + x^4/4! + O(x^6) \\ e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4) \\ \log(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + O(x^5) \\ (1+x)^a &= 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + O(x^3) \end{aligned}}$$

Regole per gestire i resti

(*)
- $\alpha_1 O(f) + \alpha_2 O(f) = O(f)$
- $O(O(f)) = O(f)$
- $O(f_1)O(f_2) = O(f_1 f_2)$

sono tutti O-grandi

→ **NON POSSO USARE I LIMITI !!!**

$a \in \mathbb{N} \quad (O(f))^\alpha = O(f^\alpha)$

"Sostituzione"

Se $g(y) = O(f(y))$ per $y \to y_0$ e $h(x) \to y_0$ per $x \to x_0$

$\Rightarrow g(h(x)) = O(f(h(x)))$ per $x \to x_0$

IDEA DELLA DIM: $\lim_{x \to x_0} \frac{g(h(x))}{f(h(x))} =$

$= \lim_{y \to y_0} \frac{g(y)}{f(y)} \underset{\text{per HP}}{=} L$

Non è una dimostrazione completa perché richiedo che i limiti esistano

(*) DIM

Se $g_1(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$ e $g_2(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

$\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x) = O(f(x))$ per $x \to x_0$

Per HP.

$\exists \delta_1, \exists M_1 \mid |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |g_1(x)| \leq M_1 |f(x)|$

$\exists \delta_2, \exists M_2 \mid |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g_2(x)| \leq M_2 |f(x)|$

Prendo δ minimo tra δ_1 e δ_2

$M = |\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2$ ← (potevo sceglierlo alla fine)

se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)| \leq |\alpha_1||g_1(x)| + |\alpha_2||g_2(x)| \leq$

$|\alpha_1| M_1 |f(x)| + |\alpha_2| M_2 |f(x)| = |f(x)| \underbrace{(|\alpha_1| M_1 + |\alpha_2| M_2)}_{M}$

Leggendo primo e ultimo termine:

$|\alpha_1 g_1(x) + \alpha_2 g_2(x)| \leq M |f(x)|$ ▨

ESERCIZI (Sviluppi di Taylor)

1) Sviluppo all'ordine 6 per $x \to 0$ di $\sin(x^2)$

- $\sin(y) = y - \frac{y^3}{3!} + O(y^5) \quad y \to 0$
- $x \to 0$

$\Downarrow$

$x^2 \to 0$ posso sostituire $y = x^2$

$\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + O(x^{10})$ ← Uso il principio di sostituzione in O grande

2) Ordine 8, $x \to 0$

$(1 + x^4) \log(1 + x^4)$

$y \to 0$

$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + O(y^3)$

$y = x^4$

$\log(1+x^4) = x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12})$

$(1+x_4)(x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12})) = x^4 - \frac{x^8}{2} + O(x^{12}) + x^8 \left(- \frac{x^{12}}{4}\right) + x^4 O(x^{12})$

è $O(x^{12})$

$\Downarrow$

non serve che io lo scriva

è già contenuto in $O(x^{12})$

$x^4 = O(x^4)$ ← regola di prima

$O(x^4) \cdot O(x^{12}) = O(x^{16}) = O(x^{12})$

$\Rightarrow x^4 + \frac{x^8}{2} + O(x^{12})$

Sviluppo a un ordine minore:

$y \to 0 \quad \log(1+y) = y + o(y^2)$

$\log(1+x^4) = x^4 + o(x^8)$

$(1+x^4)\log(1+x^4) = x^4 + o(x^8) + x^8 + \cancel{o(x^{12})}$

$= x^4 + x^8 + o(x^8)$

NON è lo sviluppo di Taylor di ordine 8

(dovrei avere $o(x^9)$)

3) Sviluppo all'ordine 9, $x \to 0$

$f(x) = e^{-2x^3}$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + o(x^{15})$

$y = -2x^3$

$e^{-2x^3} = 1 - 2x^3 + \frac{4x^6}{2} + \frac{-8x^9}{3!} + \frac{16x^{12}}{4!} + o(\cancel{x^{15}})$ "$o(x^{12})$"

$e^{-2x^3} = 1 - 2x^3 + 2x^6 - \frac{4}{3}x^9 + o(x^{12})$

4) Sviluppo all'ordine 2 ($e^{\sin x}$) $x \to 0$

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)$

$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^3)$

$x \to 0 \Rightarrow \sin x \to 0$

$e^{\sin x} = e^{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right)}$

$e^{\sin x} = 1 + x - \frac{x^3}{6} + \cancel{o(x^5)} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^2}{2} + o\left(\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right)^3\right)$

$x^2 + \underbrace{\cancel{o(x^6)} + \cancel{o(x^{10})}}_{\text{quadrati}} \underbrace{- \cancel{o(x^4)} + \cancel{o(x^8)}}_{\text{doppi prodotti}}$ $+ \cancel{o(x^6)}$

$= 1 + x + o(x^3) + \frac{1}{2}x^2 + o(\cdots) =$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3) + \underbrace{o\left(\cancel{\left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right)^3}\right)}_{o(o(x^3)) = o(x^3)} =$

$= 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + o(x^3)$

in alcuni casi non si può sostituire direttamente

5) sviluppo ordine 4, $x \to 0$, e^{1+x^2}

la sostituzione $y = 1+x^2$ non è lecita

$e \cdot e^{x^2}$

Sostituisco $y = x^2$

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + o(y^5)$$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} + o(x^{10}) =$$

$$= 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4 + o(x^6)$$

$$e \cdot e^{x^2} = e + ex^2 + \frac{e}{2}x^4 + o(x^6)$$

6) Ordine 2, $x \to 0$ $\log(9+x)$

$$\log(9+x) = \log\left(9\left(1+\frac{x}{9}\right)\right) = \log 9 + \log\left(1+\frac{x}{9}\right)$$

$y = \frac{x}{9}$ $\quad x \to 0 \Rightarrow y \to 0$ ✓

$$= \log 9 + \frac{x}{9} + \frac{-x^2}{162} + o(x^3)$$

7) $e^{\cos x} =$

$$= e^{\left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)} = e \cdot e^{\left(-\frac{x^2}{2} + o(x^4)\right)} =$$

8) Ordine 6, $x \to 0$, $\tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^7)}{1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^6)} =$$

$$= \left[x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^7)\right] \cdot \underbrace{\left[1 - x^2/2 + x^4/24 + o(x^6)\right]^{-1}}_{} \quad *$$

$$(1+y)^a = 1 + ay + \frac{a(a-1)}{2}y^2 + o(y^3)$$

se $a = -1$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + y^2 + o(y^3) \qquad o(x^6)$$

$$* = \left[x - x^3/6 + x^5/120 + o(x^7)\right] \cdot \left[1 - \left(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^6)\right) + \left(-x^2/2 + x^4/24 + o(x^6)\right)^2 + o(\dots^3)\right]$$

$$= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^7)\right) \cdot \left(1 + \overbrace{\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^6)}^{5x^4/24} + \frac{x^4}{4}\right) =$$

risultato del quadrato il resto viene annullato da $o(x^6)$

$$= x + \frac{x^3}{2} + \frac{5x^5}{24} + o(x^7) - \frac{x^3}{6} - \frac{x^5}{12} + \frac{x^5}{120} =$$

$$= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^7)$$

ESERCIZI SULLE PARTI PRINCIPALI (Taylor mascherato ^^)

1) P.P. $x \to 0$

$\sin x^4$

$\sin y \sim y \Rightarrow \sin x^4 \sim x^4$

2) $\log(1+x^2)\sin x \sim x^2 x = x^3$

3) $\underset{\sim x^2}{\sin(x^2)} + \underset{\sim x^3}{\log(1+x^3)}$

P.P $= x^2$

$\underset{\sim x^2}{\sin(x^2)} + \underset{\sim x^2}{\log(1+x^2)}$

P.P $= 2x^2$

$\underset{\sim x^2}{\sin(x^2)} - \underset{\sim -x^2}{\log(1+x^2)} =$

↳ uso gli sviluppi di Taylor

$$= \cancel{x^2} - \frac{x^6}{6} + o(x^{10}) - \cancel{x^2} + \frac{x^4}{2} + o(x^6) =$$

$$= \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + o(x^6) = \frac{x^4}{2} + o(x^6) \sim \frac{x^4}{2}$$

IN GENERALE

$f(x) \sim ax^b, \quad g(x) \sim cx^d$

NON VALE

$f+g \sim ax^b + cx^d$

I) $b < d \qquad f+g \sim ax^b$ $\qquad (x \to 0)$

$d < b \qquad f+g \sim cx^d$

II) $b = d$

$a \neq -c$

$f+g \sim (a+c)x^b$

$a = -c$

DIPENDE

ALTRI ESEMPI $\qquad x \to +\infty$

- $\sqrt[3]{x+1} = x^{1/3}$
- $\sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{x-1} - 2x^{1/3}$
- $\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = ?$

↓ devo ricondurmi a H/W

$(1+t)^{1/3}$ per $t \to 0$

02/11/2023

- es.

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1}$ p.p. per $x \to +\infty$

$\sqrt[3]{x+1} = \sqrt[3]{x(1+(x)^{-1})} = x^{\frac{1}{3}}(1+\frac{1}{x})^{1/3}$

serve questa sostituzione perché per $x \to \infty$ $\frac{1}{x} \to 0$ e posso usare lo sviluppo noto

$t = \frac{1}{x}$ $x \to +\infty$, $t \to 0$

$(1+t)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}t + O(t^2)$

$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}}((1+\frac{1}{3x} + O(\frac{1}{x^2})) =$

$= x^{1/3} + \frac{1}{3}x^{-2/3} + O(x^{-5/3})$

$\sqrt[3]{x-1} = x^{1/3}(1-\frac{1}{x})^{1/3}$

$t = -\frac{1}{x}$ $x \to \infty$, $t \to 0$

$(1+t)^{1/3} = (1 - \frac{1}{3x} + O(\frac{1}{x^2}))$

$\Rightarrow x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{3}x^{-2/3} + O(x^{-5/3})$

$\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x-1} = \cancel{x^{1/3}} + \frac{1}{3}x^{-2/3} + O(x^{-5/3}) - \cancel{x^{1/3}} + \frac{1}{3}x^{-2/3} =$

$= \frac{2}{3}x^{-2/3} + O(x^{-2/3}) \sim \frac{2}{3}x^{-2/3}$

- es.

p.p. $x \to 0$ $\sin(x+x^3) - x$

$\sin(x+x^3) \sim x$

$t = x + x^3$

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$

$\sin(x+x^3) = x + x^3 - \frac{(x+x^3)^3}{6} + O((x+x^3)^5) = x + x^3 - \frac{x^3}{6} + O(x^5)$

$pp(\sin(x-x^3)-x) = \frac{5}{6}x^3$

- p.p. $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} + ax$

$\frac{\sin x - x}{x\sin x} + ax \sim \frac{-\frac{\cancel{x^3}}{6}}{\cancel{x^2}} + ax \sim -\frac{1}{6}x + ax = (a-\frac{1}{6})x$

se $a \neq 1/6$

- Studio separatamente il caso $a = \frac{1}{6}$

$(\sin x - x)(x\sin x)^{-1} + ax$

$= (-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))(x(x - \frac{x^3}{6} + O(x^5))^{-1} + \frac{1}{6}x =$

$= (-\frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7))\frac{1}{x^2}(1 - \frac{x^2}{6} + O(x^4))^{-1} \cdot$

$\hookrightarrow 1 + \frac{x^2}{6} + O(x^4)$

$(1+x)^a = 1 + ax + \frac{a(a-1)x^2}{2!} +$

$x \to -\frac{x^2}{6}$

$$= \left(-\frac{x}{6}+\frac{x^3}{120}+O(x^5)\right)\left(1+\frac{x^2}{6}+O(x^4)\right)+\frac{1}{6}x$$

$\downarrow$ conti

$$= \left(\frac{1}{120}-\frac{1}{36}\right)x^3+O(x^5)$$

• $a \in \mathbb{R}$ $\quad f(x) = (x+3a)^a + (x-1)^a - 2x^a$

i) p.p. $x \to +\infty$ se $a \neq 0, \frac{1}{3}$

ii) p.p. $x \to +\infty$ $\quad a = \frac{1}{3}$

i) $(x+3a)^a \sim x^a$

$(x-1)^a \sim x^a$ $\quad$ non bastano le p.p. dei vari pezzi

$$(x+3a)^a = x^a\left(1+\frac{3a}{x}\right)^a$$

$t = \frac{3a}{x}$ $\quad (1+t)^a = 1+at+O(t^2)$

$$\downarrow$$

$$1+\frac{3a^2}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

$$(x-1)^a = x^a\left(1-\frac{1}{x}\right)^a = x^a\left(1-\frac{a}{x}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$$

$$f(x) = \cancel{x^a} + 3a^2x^{a-1} + O(x^{a-2})$$

$$+\cancel{x^a} - ax^{a-1} - \cancel{2x^a} = (3a^2-a)x^{a-1}+O(x^{a-2})$$

$$= a(3a-1)x^{a-1}+O(x^{a-2})$$

p.p se $a \neq 0$ e $a \neq \frac{1}{3}$

ii) $a = \frac{1}{3}$

$$(1+t)^a = 1+at+\frac{a(a-1)}{2}t^2+O(t^3)$$

$$(1+t)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2+O(t^3)$$

$$f(x) = (x+1)^{1/3}+(x-1)^{1/3}-2x^{1/3} \qquad \left(t=\frac{1}{x}\right)$$

$$(x+1)^{1/3} = x^{1/3}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/3} = x^{1/3}\left(1+\frac{1}{3x}-\frac{1}{9x^2}+O(x^{-3})\right)$$

$-\frac{1}{9}x^{-5/3}$

sviluppo anche $(x-1)^{1/3} \Rightarrow x^{1/3}-\frac{1}{3}x^{-2/3}+O(x^{-8/3})$

$$f(x) = \cancel{x^{1/3}} + \cancel{\frac{1}{3}x^{-2/3}} - \frac{1}{3}x^{-5/3} + O(x^{-8/3})$$

$$+\cancel{x^{1/3}} - \cancel{\frac{1}{3}x^{-2/3}} - \frac{1}{9}x^{-5/3} + O(x^{-2/3})$$

$$-\cancel{2x^{1/3}} = -\frac{2}{9}x^{-5/3}+O(x^{-2/3})$$

se $a = 0 \Rightarrow f(x) = 0$

$$\frac{\frac{a}{6}x^{a+2} + o(x^{a+4})}{x^{2a}(1+o(x^2))^{a}} \sim = \frac{a}{6}x^{2-a}$$

posso toglierlo
$(1+t)^a$

$\lim$ iniziale $= \lim_{x\to 0^+} \frac{a}{6}x^{2-a}$

$\downarrow$

3 comportamenti diversi in base ad a

- $a<2$ $\quad \lim = 0$
- $a=2$ $\quad \lim = \frac{1}{3}$
- $a>2$ $\quad \lim = +\infty$

$+\infty - \infty$

- $\lim_{x\to 0^+} (e^{\frac{1}{\sin x}} - e^{\frac{1}{x}})$ ⊛

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^7)$$

$$\sin^{-1} x = \left(x - \frac{x^3}{3!} + o(x^5)\right)^{-1} = \frac{1}{x}\left(1 - \frac{x^2}{3!} + o(x^4)\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 - 1\left(-\frac{x^2}{3!} + o(x^4)\right) + o\left(\left(-\frac{x^2}{3!} + o(x^4)\right)^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{3!} + o(x^4) + o(x^4)\right) =$$

$$= \frac{1}{x} + \frac{x}{3!} + o(x^3)$$

⊛ $= \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\left(e^{\frac{x}{3!} + o(x^3)} - 1\right)$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\left(\cancel{1} + \frac{x}{3!} + o(x^3) + \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{36} + o(x^4)\right) - \cancel{1}\right) =$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{1/x}\left(\frac{x}{3!} + \frac{x^2}{72} + o(x^3)\right) =$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} \cdot x\left(\frac{1}{3!} + \frac{x}{72} + o(x^3)\right) =$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x} + \log x}\left(\frac{1}{3!} + \frac{x}{72} + o(x^3)\right) = +\infty$

$\downarrow$ sc $\downarrow$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} + \log x = +\infty$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}(1 + x\log x) = +\infty$

$\downarrow$
0

MAX/MIN SUP/INF

06/11/2023

Dato $E \subset \mathbb{R}$:

abbiamo definito $\max E$ e $\min E$

se inoltre E = unione finita di intervalli abbiamo definito $\sup E$ e $\inf E$.

(se $\max E$ esiste, allora $\max E = \sup E$)

Sia $f: X \to \mathbb{R}$ (X qualunque)

Definisco il valore massimo di f, $\max f = \max\limits_{x \in X} f(x) := \max\{\text{valori di } f\} = \max(f(X))$ ← immagine di f

Similmente

$$\min f = \min_{x \in X} f(x) = \min(f(X))$$

<u>esempio</u>

$f(x) = e^x$ non ha né massimo né minimo

$(\inf f(x) = 0 \quad \sup f(x) = +\infty)$

Definisco, se $f(X)$ è unione finita di intervalli, $\sup f = \sup\limits_{x \in X} f(x) := \sup(f(X))$ ← immagine

$$\inf f = \inf_{x \in X} f(x) := \inf(f(X))$$

<u>OSS</u> se X è unione finita di intervalli e f è continua $\Rightarrow f(X)$ è unione finita di intervalli

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$

$\bar{x}$ è un punto di max (assoluto) se $f(\bar{x}) = \max f$ $\quad (f(\bar{x}) \geq f(x)\ \forall x \in X)$

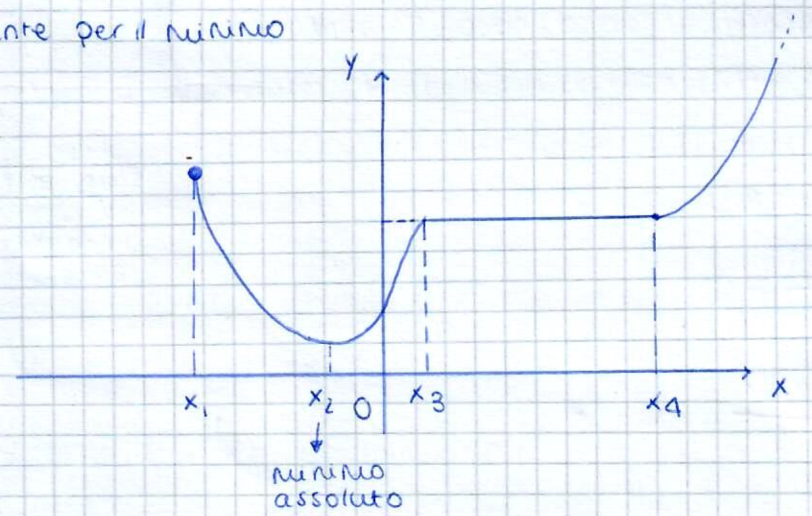
" " minimo se $f(\bar{x}) = \min f$ $\quad (f(\bar{x}) \leq f(x)\ \forall x \in X)$

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, sia $X \subset \mathbb{R}$

dimostrare che con gli intervalli aperti è equivalente

$\bar{x} \in X$ è un punto di max locale se esiste $\delta > 0 \mid \bar{x}$ è punto di max relativo a $X \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$ cioè $f(\bar{x}) \geq f(x)\ \forall x \in X \cap [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$

Similmente per il minimo



il massimo assoluto non esiste

sup dei valori $= +\infty$

Ogni punto tra x_3 e x_4, x_3 escluso, x_4 incluso, è minimo locale.

Punti di min. locale $\{x_2\} \cup (x_3; x_4]$

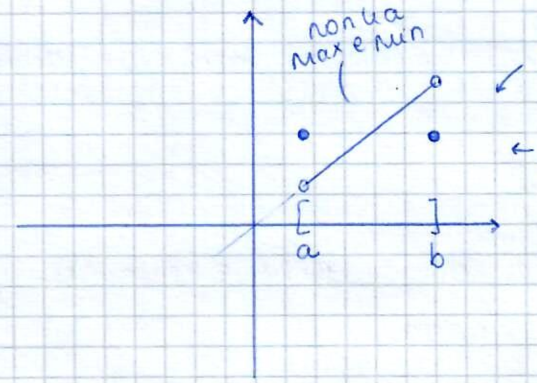
Punti di max locale $\{x_1\} \cup [x_3, x_4)$

Ricerca di punti di max e min (problemi di ottimizzazione)

- TEOREMA DI WEIERSTRASS (dimostrazione nel secondo semestre)

  $(f: X \to \mathbb{R},\ X \subset \mathbb{R})$

  Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora esistono max e min



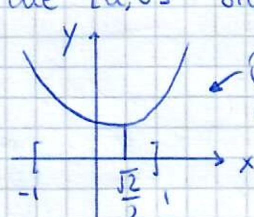
OSS1 serve che f sia continua

OSS2 serve che il dominio sia un intervallo chiuso

(a,b) non va bene

(neanche se è illimitato)

OSS 3 È fondamentale che $[a,b]$ sia un intervallo di numeri reali



es i rationali non bastano

- Prop. Sia I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ e sia $\bar{x} \in I$ t.c.

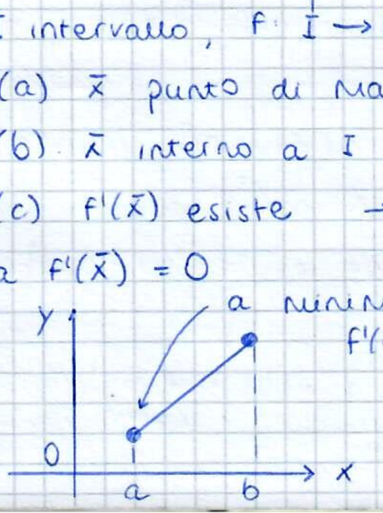
  (a) $\bar{x}$ punto di max o min locale

  (b) $\bar{x}$ interno a I

  (c) $f'(\bar{x})$ esiste $\to$ è necessaria, basti pensare a $|x|$

  allora $f'(\bar{x}) = 0$

OSS.



a minimo locale

$f'(a) \neq 0 \Rightarrow$ l'ip. b serve

Dim. per $\bar{x}$ min locale (l'altro caso è analogo)

Per ip. $\exists \delta > 0 \mid f(\bar{x})$ è il minimo di f relativo a $I \cap [x-\delta, x+\delta]$.

posso fare in modo che sia contenuto in I prendendo δ più piccolo

Prendo $0 < h < \delta$

$x + h \in [x-\delta, x+\delta]$

$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^+} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \geq 0 \quad *$$

esiste per l'ip. c

Ora prendo $-\delta < h < 0$

allora
$$\frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0^-} \frac{f(\bar{x}+h) - f(\bar{x})}{h} \leq 0 \quad **$$

$* + ** \Rightarrow f'(\bar{x}) = 0$ (perché è sia ≤ 0 che ≥ 0) ▨

Se $\bar{x}$ è estremo ~~inferiore~~ sinistro (ip (b) non vale) ho dimostrato solo che è minimo locale

la derivata (dx) è positiva

Algoritmo per la ricerca di massimi e minimi

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

Sia $E = \{x \in I \mid f'(x) = 0\} \cup \{x \in I \mid f'(x) \text{ non esiste}\} \cup \{a, b\}$

Suppongo E finito $= \{x_1, \dots, x_n\}$

Il minimo tra $f(x_1), \dots, f(x_n)$ è il minimo di f in I

Il massimo tra $f(x_1), \dots, f(x_n)$ è il massimo di f in I

(Per dimostrarlo servono sia Weierstrass che la proposizione).

Algoritmo, versione "avanzata"

Sia I intervallo non necessariamente chiuso e/o limitato con estremi a, b. $f: I \to \mathbb{R}$ continua

$E = \{x \mid f'(x) = 0\} \cup \{x \mid f'(x) \text{ non esiste}\} \cup \{a, b\}$

Suppongo E finito, $E = \{x_1, \dots, x_n\}$

Pongo $f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x)$ se $a \notin I$ e $f(b) = \lim_{x \to b^-} f(x)$ se $b \notin I$

se questi limiti non esistono?

E finito $\Rightarrow$ esistenza di questi limiti

Il più grande dei valori $f(x_1), \dots, f(x_n)$ è il sup f di I ed è il massimo se viene ottenuto in $x_i \in I$

Il più piccolo di tali valori è inf f in I ed è il minimo se viene ottenuto in $x_i \in I$.

07/11/2023

Algoritmo per la ricerca di Max e min (assoluti)

Sia $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$

Sia $\bar{x} \in X \mid f'(\bar{x}) = 0$. Tale $\bar{x}$ si chiama punto critico (può essere min o max locale, flesso orizzontale ...)

Prop Sia $f: I \to \mathbb{R}$, $\bar{x}$ interno a I

f derivabile in I e derivabile 2 volte in $\bar{x}$

A • Se $f'(\bar{x}) = 0$ e $f''(\bar{x}) > 0 \Rightarrow$ $\bar{x}$ è un punto di minimo locale stretto ($\exists \delta > 0 \mid f(\bar{x}) < f(x)\ \forall x \mid |x-\bar{x}| < \delta$ e $x \neq \bar{x}$)

$\cancel{\Leftarrow}$ es. in x^4, $f''(0)=0$

$\Leftrightarrow$ stretto ... è l'unico punto di minimo

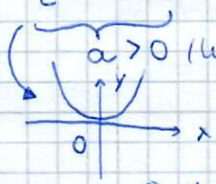
CONDIZIONI SUFFICIENTI E NON NECESSARIE

B • Se $f'(\bar{x}) = 0$ e $f''(\bar{x}) < 0 \Rightarrow$ $\bar{x}$ è un punto di massimo locale stretto

Dim (A) (B è analogo, si può fare la stessa dimostrazione o ricondursi ad (A) cambiando il segno)

WLOG $\bar{x} = 0$ (ci si può ricondurre a qualsiasi altro caso con un cambio di variabile $g(x) = f(\bar{x} + x)$)

Uso Taylor: $f(x) = \underset{\bar{x}}{f(0)} + \cancel{\underset{\bar{x}}{f'(0)}x} + \underbrace{\frac{1}{2} f''(0)}_{a > 0 \text{ (hp.)}} x^2 + R_2(x)$.



è chiaro che ha minimo in 0, devo far vedere che il resto non influisce

$R_2(x) = o(x^2)$ $x \to 0$

$\frac{R_2(x)}{x^2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid$ se $|x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{R_2(x)}{x^2}\right| < \varepsilon$ (*)

il problema è quando il resto è negativo $\Rightarrow$ importa una stima dal basso del resto

(*) $\frac{R_2(x)}{x^2} \geq -\varepsilon$ $R_2(x) \geq -\varepsilon x^2$

se fosse ≥ 0 dimostrerei che è un minimo ma NON stretto

se $a - \varepsilon > 0$ arb. di ε

quindi $f(x) = f(0) + \frac{1}{2} f''(0) x^2 + R_2(x) \geq f(0) + (a - \varepsilon)x^2 \geq f(0)$

ovviamente vale solo per punti vicini a 0

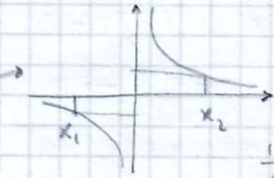
Questo criterio è importante perché si estende al caso di più variabili (quando non si può fare il grafico)

Sia $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$

- f è crescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ vale $f(x_1) \leq f(x_2)$
  (strettamente crescente se $f(x_1) < f(x_2)$)
- f è decrescente se $\forall x_1, x_2 \in X$ con $x_1 < x_2$ vale
  $f(x_1) \geq f(x_2)$ (strettamente crescente se $f(x_1) > f(x_2)$)

Le funtioni costanti sono sia crescenti che decrescenti

Una funtione definita in un solo punto è sia strett. crescente che strett. decrescente



non vale perche' x_1 e x_2 $\notin$ a uno stesso intervallo

$\frac{1}{x}$ non è decrescente su tutto il dominio

Prop. Sia I $\boxed{\text{intervallo}}$ $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile allora

a) $f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ $\iff$ f è crescente

b) $f'(x) > 0 \ \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f è strett. crescente

nell' altro lato non vale (vd. x^3)

a') $f'(x) \leq 0 \ \forall x \in I$ $\iff$ f è decrescente

b') $f'(x) < 0 \ \forall x \in I$ $\Rightarrow$ f è strettamente crescente

In questo verso: $\Leftarrow$ la dim. è facile

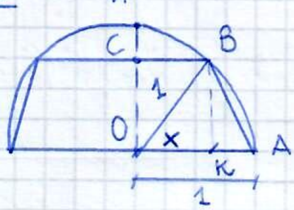
f crescente $x \in I$, $h > 0$

$$f(x+h) \geq f(x) \Rightarrow \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0$$

Nell altro verso servono le prop. dei reali

09/11/2023

ES



Tra tutti i trapezi inscritti come in figura, qual è quello di perimetro massimo?

$2p = (OA + AB + BC)2$

Pongo $\overline{CB} = x = \overline{OK}$

$BK = \sqrt{1-x^2}$

$KA = 1 - x$

$BA = \sqrt{(1-x)^2 + 1 - x^2} = \sqrt{1 + x^2 - 2x + 1 - x^2} = \sqrt{2-2x}$

$2p = (1 + \sqrt{2-2x} + x)\,2$ $\quad x \in (0,1)$

$2 - 2x \geq 0$

$x \leq 1$

$f(x) = 1 + x + \sqrt{2-2x}$

$f(0) = 1 + \sqrt{2}$ 

$f(1) = 2$ $\rightarrow$ 

NB!

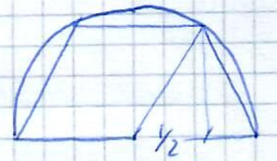
I valori corrispondenti agli estremi dell' intervallo considerato vanno sempre considerati

$f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2-2x}}(-2) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2-2x}}$

$f'(x) = 0$ se $x = \frac{1}{2}$ $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$

valore massimo

punto di massimo: $\frac{1}{2}$



$2p = 5$

ES.

$a \in \mathbb{R}$, # soluzioni di $x^5 - 5x = a$

Detta $x(a)$ la più piccola, determinare il dominio di $a \mapsto x(a)$ eventuali punti di discontinuità, p.p. per $a \to +\infty$ di $x(a)$

(BONUS, p.p. per $a \to +\infty$ di $x(a) - a^{1/5}$)

$f(x) = x^5 - 5x$

$Dom(f) = \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

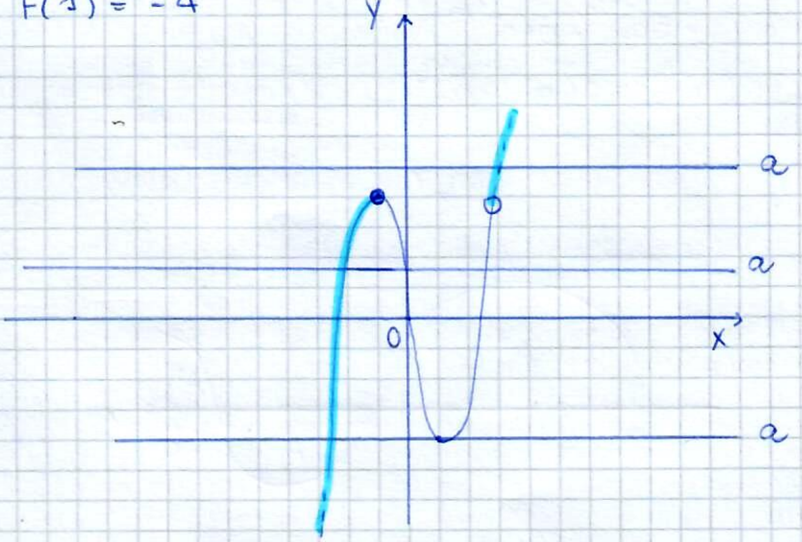
$f'(x) = 5(x^4 - 1) = 5(x-1)(x+1)(x^2+1)$

positiva per $x < -1 \vee x > 1$
(f crescente

$f(-1) = 4$

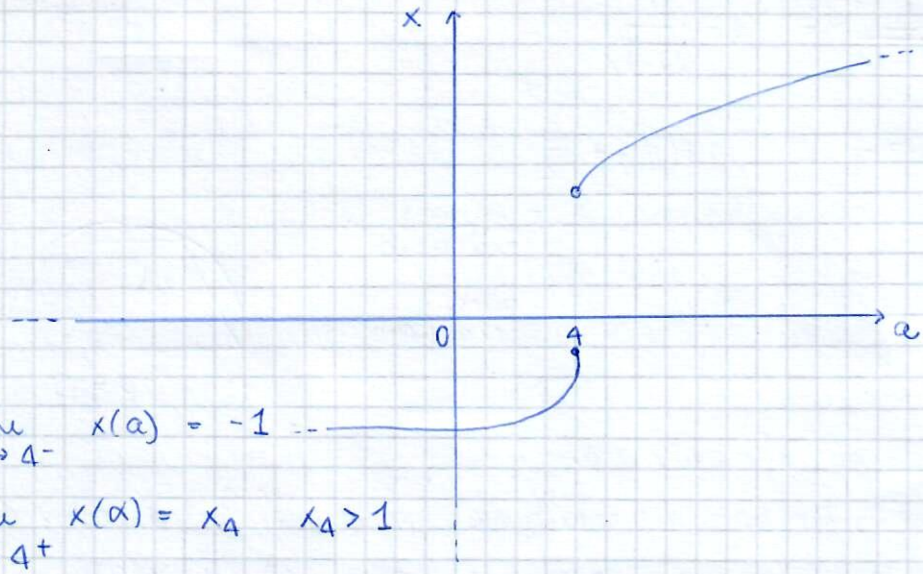
$f(0) = 0$

$f(1) = -4$



- 1 soluzione se $a < -4 \vee a > 4$
- 2 soluzioni se $a = 4 \vee a = -4$
- 3 soluzioni se $-4 < a < 4$

Quando c'è una sola soluzione è lei la più piccola, quando ce ne sono di più sono quelle + a sx (evidenziate nel grafico)



$\lim_{a \to 4^-} x(a) = -1$

$\lim_{a \to 4^+} x(a) = x_4 \quad x_4 > 1$

$\lim_{a \to +\infty} x(a) = +\infty \qquad \lim_{x \to -\infty} x(a) = -\infty$

$a = x^5 - 5x \qquad \left.\begin{matrix} a \to +\infty \\ x \to +\infty \end{matrix}\right) \to$ fondamentale

$$a = x^5(a) - 5x(a) \sim x^5(a)$$

asintoticamente equivalente

$a^{1/5} \sim x(a)$ per capire la p.p. di $x(a) - a^{1/5}$ estrai un altro termine da questo che prima non hai considerato

$(x(a))^5 - 5x(a) = a$

$x^5(a) = a + 5x(a) = a + 5(a^{1/5} + o(a^{1/5}))$

$\cancel{x(a)}\quad x^5(a) = a(1 + 5a^{-4/5} + o(a^{-4/5}))$

$x(a) = a^{1/5}(1 + 5a^{-4/5} + o(a^{-4/5}))^{1/5}$

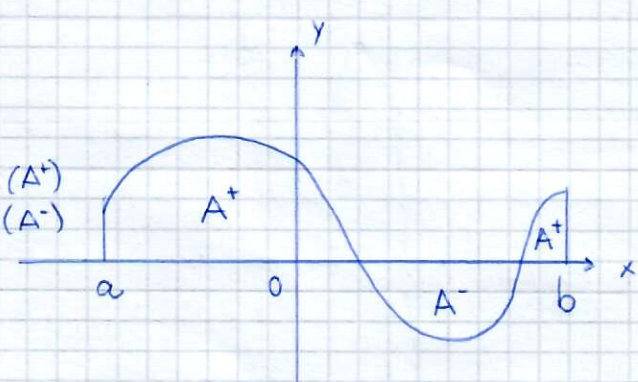
INTEGRALI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$

$\int_a^b f(x)\,dx := \text{area}(A^+) - \text{area}(A^-)$

$\downarrow$

definizione geometrica



(il problema di questa definizione è che dovrebbe essere definita l'area)

rimane un concetto intuitivo non è chiaro come definire l'area di un insieme qualunque

CONSEGUENZE

- se $f \geq 0$, $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$ (similmente se $f(x) \leq 0$ l'int. è negativo)
- se $a = b$ $\int_a^b f(x)\,dx = 0$
- $\int_b^a f(x)\,dx := -\int_a^b f(x)\,dx$

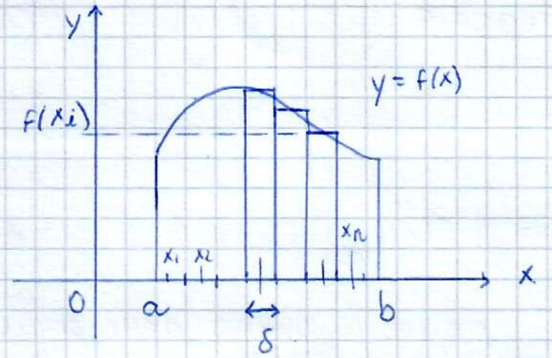
Questioni da affrontare

- Calcolo (esatto) degli integrali
- Calcolo approssimato degli integrali

  es: e^{x^2} → la sua primitiva non ha una formula esplicita

- Altri significati

Calcolo approssimato



Scelgo N intero (grande)

Divido $[a,b]$ in N intervalli di lunghezza $\delta = \frac{b-a}{N}$

$I_1, \dots, I_N$

Scelgo $x_1 \in I_1, \dots, x_N \in I_N$

Costruisco i rettangoli R_i con base I_i e altezza $f(x_i)$

$\delta = \frac{b-a}{N}$ → # segmenti

$$\int_a^b f(x)\,dx := \text{area}(A) \simeq \sum_{i=1}^{N} \text{area}(R_i)$$

hanno area calcolabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{N} \text{area}(R_i) + \text{err}(N)$$

$$= \sum_{i=1}^{N} f(x_i)\delta + \text{err}(N)$$

Ci si aspetta che $\text{err}(N) \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0$

non è sempre vero per funzioni non continue)

=> il problema è che non si può scegliere N in base a una imprecisione concessa, fissata

Si dimostra vero se f è continua.

Supponete di sapere che $|f'(x)| \leq L$ $\forall x \in [a,b]$

Trovare una maggiorazione esplicita di $|\text{err}(N)| \leq \underbrace{?}_{\text{opportuna formula che coinvolge } N \text{ e } L}$

Calcolo esatto degli integrali

Def. Date $f, F : I \to \mathbb{R}$ dico che F è una primitiva di f se $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$

I ← intervallo

(se il dominio non fosse un intervallo dovrei avere una cost. diversa per ogni intervallo)

$\frac{x^3}{3}$ è primitiva di x^2, così come $\frac{x^3}{3} + 1$

Se F è una primitiva di f e c costante $\overset{\Rightarrow}{(\Leftarrow)}$ $F + c$ è una primitiva

TEO. FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Date $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ con

- f continua
- F primitiva di f

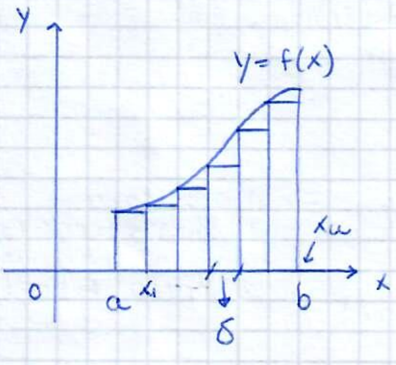
Allora $\Rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - f(a) = \left| F(x) \right|_a^b$

Quindi il calcolo degli integrali si riduce a quello delle primitive

$$\int_0^3 x^2\,dx = \left| \frac{x^3}{3} \right|_0^3 = 9$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx = \left| \ln x \right|_1^2 = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$$

IDEA DELLA DIM.



$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{area}(A)$$

$$\overset{(\simeq)}{=} \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i)\,\delta \quad + err_1(N) \quad = \sum_{i=0}^{N-1} F'(x_i)\,\delta \quad + err_1(N)$$

$$\overset{(\simeq)}{=} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{F(\underset{x_{i+1}}{\underbrace{x_i + \delta}}) - F(x_i)}{\cancel{\delta}} \cancel{\delta} \quad + err_1(N) + err_2(N) =$$

non è ovvio che vada a 0

$$= F(\cancel{x_1}) - F(\cancel{x_0}) + F(x_2) - F(\cancel{x_1}) + \ldots + F(x_N) - F(x_{N-1})$$

Si cancellano tutti a coppie tranne $F(x_N) - F(x_0)$

$$\overset{\shortparallel}{F(b) - F(a)}$$

$$\int_a^b \underbrace{f(x)\,dx = F(b) - F(a)}_{\text{non dipendono da } N} + \underbrace{err_1(N) + err_2(N)}_{\text{scompaiono per } N \to +\infty}$$

CALCOLO DI INTEGRALI / PRIMITIVE

Indico le primitive di f con $\int f(x)dx + c$
└ integrale indefinito o primitiva

Wolfram α (calcolo primitive)

$f(x)$	$F(x)$
a	$ax + c$
x^a	$x^{a+1}/(a+1) + c \quad a \neq -1$
$1/x$	$\log x$ per $x > 0$ $\log(-x)$ se $x < 0$ $\Rightarrow \log\lvert x\rvert$
e^x	$e^x + c$
a^x $\begin{matrix} a>0 \\ a\neq 1\end{matrix}$	$a^x/\log a + c$
$\log x$	$x\log x - x + c = x(\log x - 1) + c$
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\tan x$	$-\log(\lvert\cos x\rvert) + c$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + c$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x + c$
$\arcsin x$	
$\arccos x$	

Regole di integrazione

1) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ (vale anche se a, b e c non sono nell'ordine prestabilito)

2) $\int_a^b m f(x)\,dx = m\int_a^b f(x)dx$

$\int m f(x)\,dx = m\int f(x)\,dx$

3) $\int_a^b f(x) + g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

2 + 3 $\Rightarrow$ (a) $\int_A^B a f(x) + b f(x)\,dx = a\int_A^B f(x)\,dx + b\int_A^B g(x)\,dx$

stessa cosa per le primitive (b)

l'applicazione che associa le funz. su un intervallo $[0,b]$ al valore dell'integrale in $\mathbb{R}$ è lineare

Dim (b) Sia $F(x) = \int f(x)\,dx$ e $G(x) = \int g(x)\,dx$

TESI $MF(x) + KG(x)$ è una primitiva di $Mf(x) + Kg(x)$

$$(MF(x) + KG(x))' = MF'(x) + KG'(x) = Mf(x) + Kg(x)$$

Dim (a)

TESI $\int_a^b Mf(x) + Kf(x) = M\int_a^b f(x)\,dx + K\int_a^b g(x)\,dx$

|| ← enunciato a + teo. fondamentale

$$|MF(x) + KG(x)|_a^b = MF(b) + KG(b) - MF(a) - KG(a) =$$

$$= M\int_a^b f(x)\,dx + K\int_a^b g(x)\,dx$$

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI

$$\int_a^b fg\,dx = |Fg|_a^b - \int_a^b Fg'\,dx$$

(*) $\int g(x)f(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx$

esempio

$$\int \underset{\substack{\uparrow\\ f}}{e^x}\,\underset{\substack{\uparrow\\ g}}{x}\,dx = xe^x - \int 1\cdot e^x\,dx = \overset{e^x(x-1)}{xe^x - e^x + c}$$

$$\int \log x\,dx = \int 1\log x\,dx = x\log x - \int x\frac{1}{x}\,dx =$$

$$= x\log x - x + c$$

$$\int \frac{1}{x}\log x \overset{dx}{\vee} = \log x \log x - \int \log x \frac{1}{x}\,dx;$$

$$2\int \frac{1}{x}\log x \overset{dx}{\vee} = \log^2 x;$$

$$\int \frac{1}{x}\log x\,dx = \frac{1}{2}\log^2 x$$

(*) Dimostrazione

$F(x) = \int f(x)dx$ $G(x) = \int g(x)dx$

TESI: $\int f(x)g(x)\,dx + \int F(x)g'(x)dx = F(x)g(x)$

$\int (f(x)g(x) + F(x)g'(x))\,dx = F(x)g(x) \Rightarrow F(x)g(x)$ è una primitiva del membro di sx

✓ verifica

$$(F(x)g(x))' = f(x)g(x) + F(x)g'(x)$$

□

CAMBIO DI VARIABILE

$$a) \int g(f(x)) \cdot f'(x)\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{f(a)}^{f(b)} g(y)\, dy$$

$y = f(x)$

$\boxed{dy = f'(x)dx}$

TH: $\int g(f(x))\ f'(x)\ dx = \int g(y)\ dy = G(y) + c$

dim

$G(f(x))$ è una primitiva di $g(f(x)) \cdot f'(x)$

derivata

$G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$

CASO PARTICOLARE:

- $$\int_a^b g(mx+q)\, dx \underset{\uparrow}{=} \int_{ma+q}^{mb+q} g(y) \frac{1}{m} dy = \frac{1}{m} \int_{ma+q}^{mb+q} g(y)\, dy$$

$y = mx + q$

$dy = m\,dx$

- $$\int g(mx+q)\, dx = \int g(y) \frac{1}{m} dy = \frac{1}{m} \int g(y)\, dy = \frac{1}{m} G(y) + c = \frac{1}{m} G(mx+q) + c$$

14/11/2023

Integrazione delle funzioni razionali fratte o l'inizio della fine

$$\int \frac{N(x)}{D(x)} dx = \int Q(x) + \frac{R(x)}{D(x)}\, dx$$

grado $(D) = d$

grado $(R) \leq d-1$

$D(x)$ polinomio di grado d => ammette sempre d radici complesse

WLOG monico

(TEO. FONDAMENTALE DELL'ALGEBRA)

$D(x) = (x - z_1)^{k_1} (x - z_2)^{k_2} \cdots (x - z_\ell)^{k_\ell}$

$\sum_{i=1}^{\ell} k_i = d \qquad z_i \in \mathbb{C}$

PROPOSIZIONE

- $$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{c_{11}}{x - z_1} + \cdots + \frac{c_{1k_1}}{(x - z_1)^{k_1}} + \cdots + \frac{c_{\ell 1}}{x - z_\ell} + \frac{c_{\ell k_\ell}}{(x - z_\ell)^{k_\ell}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{i,j}}{(x - z_i)^j}$$

TH: Questa scrittura esiste ed è unica

1° PASSO

Siano $z_1, \dots, z_e$ le radici di $D(x)$, polinomio di grado d, supponiamo che z_i abbia molteplicità k_i $(\sum_i k_i = d)$

$\Rightarrow \exists$ unici $p_1(x), \dots, p_e(x)$ polinomi di grado $\leq k_i - 1$ tali che

↳ a coeff. complessi

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \frac{p_1(x)}{(x-z_1)^{k_1}} + \frac{p_2(x)}{(x-z_2)^{k_2}} + \dots + \frac{p_e(x)}{(x-z_e)^{k_e}} = \sum_{i=1}^{e} \frac{p_i(x)}{(-z_i+x)^{k_i}}$$

$$= \frac{p_1(x)\prod_{j\neq 1}(x-z_j)^{k_j} + \dots + p_e(x)\prod_{j\neq e}(x-z_j)^{k_j}}{(x-z_1)^{k_1}\cdot \dots \cdot (x-z_e)^{k_e}} = \frac{\sum_{i=1}^{e} p_i(x)\prod_{j\neq i}(x-z_j)^{k_j}}{\prod_{\bar{k}=1}^{e}(x_{\bar{k}}-z_{\bar{k}})^{k_{\bar{k}}}}$$

Devo dimostrare che $\exists\, p_i(x) \mid R(x) =$ a quel numeratore biblico

che è equivalente a far vedere che

V_2 spazio vettoriale dim. d

$$T: \underbrace{\mathbb{C}_{k_1-1}[x]}_{V_1} \underbrace{\times}_{\text{prodotto cartesiano}} \mathbb{C}_{k_2-1}[x] \times \dots \times \mathbb{C}_{k_e-1}[x] \to \mathbb{R}_{(\sum_{i=1}^{e} k_i)-1}[x]$$

$$(p_1(x), p_2(x), \dots, p_e(x)) \longmapsto \sum_{i=1}^{e} p_i(x)\prod_{j\neq i}(x-z_j)^{k_j}$$

T è lineare e suriettiva

$\dim V_2 = d = \sum_{i=1}^{e} k_i$

$\dim V_1 = k_1 + k_2 + \dots + k_e = d$

(I) T è lineare

$\alpha T(p_1, \dots, p_e) + T(q_1 \dots q_e) = T(\alpha(p_1 \dots p_e) + (q_1 \dots q_e))$

(da fare)

(II) Dato che la dimensione è la stessa suriettiva $\Leftrightarrow$ iniettiva

$\Updownarrow$

$\ker T = \{p(x) = 0\}$

ossia devo dimostrare che se

$$\sum_{i=1}^{e} p_i(x)\prod_{j\neq i}(x-z_j)^{k_j} \equiv 0$$ polinomio nullo

$\Rightarrow p_i = 0$

$a \in \{1, \dots, e\}$

$$p_a(x)\prod_{j\neq a}(x-z_j)^{k_j} + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq a}}^{e} p_i(x)\prod_{j\neq i}(x-z_j)^{k_j} = 0$$

$$p_a(x) \underbrace{\prod_{j\neq a} (x-z_j)^{k_j}}_{} = -(x-z_a)^{k_a} \sum_{\substack{i\neq 1 \\ i\neq a}}^{\ell} p_i(x) \prod_{\substack{j\neq i \\ j\neq a}} (x-z_j)^{k_j}$$

in questa parte non c'è $(x-z_a)^{k_a}$

$\Downarrow$

$(x-z_a)^{k_a} \mid p_a(x)$

↳ ha radice z_a di molteplicità k_a,

ma $p_a(x)$ aveva grado massimo $k_a - 1$

$\Rightarrow$ è necessariamente il polinomio nullo

$\Rightarrow (p_1(x), \dots, p_\ell(x)) = (0, \dots, 0) = \underline{0}$

iniettività + suriettività $\Rightarrow \exists$ una scrittura ed è unica

2° PASSO

$$\frac{p_i(x)}{(x-z_i)^{k_i}} \qquad p_i(x) \text{ ha grado al più } k_i - 1$$

$$= \frac{c_{i1}}{(x-z_i)} + \frac{c_{i2}}{(x-z_i)^2} + \dots + \frac{c_{i\,k_i}}{(x-z_i)^{k_i}} =$$

↳ devo dimostrare di nuovo esistenza e unicità

$$= \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}}{(x-z_i)^j} = \qquad = \sum_{j=1}^{k_i} \frac{c_{ij}(x-z_i)^{k_i-j}}{(x-z_i)^{k_i}}$$

$$T: \mathbb{R}^{k_i} \longrightarrow \mathbb{R}_{k_i-1}[x]$$

$$(c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i,k_i}) \longmapsto \sum_{j=1}^{k_i} c_{ij}(x-z_i)^{k_i-j}$$

Stessa dire di prima ma posso velocizzare:

$\mathcal{B} = \{1, (x-z_i), \dots, (x-z_i)^{k_i-1}\}$ è una base di $\mathbb{R}_{k_i-1}[x]$

$\downarrow$

c_{ij} sono le coordinate del polinomio in questa base

$\Rightarrow$ sono uniche

$D(x) = (x-z_1)^{k_1} \cdot \ldots \cdot (x-z_\ell)^{k_\ell}$

FATTO 1: se $z \in \mathbb{C}$ è una radice di D
allora $\bar{z} \in \mathbb{C}$ è una radice di D

$$D(z) = 0 \overset{?}{\Rightarrow} D(\bar{z}) = 0$$

$$\downarrow$$

$$\overline{D(z)} = 0$$

ma $D(\bar{z}) = \overline{D(z)}$

$$D(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{d-1} x^{d-1} + x^d$$

$$\overline{D(x)} = \overline{a_0 + \ldots + x^d}$$

$\overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$ $\Big\rangle =$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1 x} + \ldots + \overline{a_{d-1} x^{d-1}} + \overline{x}^d$$

$\overline{zw} = \bar{z}\,\bar{w}$ $\Big\rangle =$

$$\overline{a_0} + \overline{a_1}\,\overline{x} + \ldots + \overline{a_{d-1}}\,\overline{x^{d-1}} + \overline{x}^d$$

sono reali

$\overline{a_0} = a_0$ $\Big\rangle =$

$$a_0 + a_1 \bar{x} + \ldots + a_{d-1} \overline{x^{d-1}} + \overline{x}^d =$$

$$= a_0 + a_1 \bar{x} + \ldots + a_{d-1} \bar{x}^{d-1} + \bar{x}^d = D(\bar{x})$$

$D(\bar{z}) = \overline{D(z)} = 0 \Rightarrow \bar{z} \in \mathbb{C}$ è una radice di D

Corollario $\rightarrow$ se z ha molteplicità $k_i \Rightarrow \bar{z}$ ha molteplicità k_i

Se $z_i \in \mathbb{R}$ $\rightarrow$ i coefficienti sono reali

$$\frac{c_{i1}}{(x-z_i)} + \ldots + \frac{c_{ik_i}}{(x-z_i)^{k_i}} \quad c_{ik_i} \in \mathbb{R}$$

Se $z_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ $\rightarrow$ allora c'è anche $\bar{z}_i$

$$\frac{A}{(x-z_i)^B} \quad \ldots \quad \frac{C}{(x-\bar{z}_i)^B} \quad \text{allora } C = \bar{A}$$

$$\frac{R(x)}{D(x)} = \sum\sum \frac{c_{ij}}{(x-z_i)^j} = \overline{\sum\sum \frac{c_{ij}}{(x-z_i)^j}} = \sum\sum \frac{\overline{c_{ij}}}{(x-\overline{z}_i)^j}$$

$$\overline{\left(\frac{R}{D}\right)} = \frac{R}{D}$$

$$\frac{c_{ij}}{(x-z_i)^j} = \frac{\overline{c_{ij}}}{(x-\overline{z}_i)^j} \quad \text{se } z_i \in \mathbb{R} \quad \xrightarrow{z_i = \overline{z}_i} \quad \overline{c_{ij}} = c_{ij} \in \mathbb{R}$$

$$\frac{A}{(x-z_i)^B} + \dots + \frac{C}{(x-\overline{z}_i)^B}$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\overline{A}}{(x-\overline{z}_i)^B} + \dots + \frac{\overline{C}}{(x-z_i)^B} \Rightarrow \begin{array}{l} A = \overline{C} \\ \overline{A} = C \end{array}$$

Riscrivere tutto per il caso più semplice di coefficienti e radici reali

posso sommarli a coppie in modo che la composizione finale sia reale

INTEGRALI DI BASE PER LA SCOMPOSIZIONE 16/11/2023

I) $z_i \in \mathbb{R}$

$$\int \frac{c}{(x-\overline{x})^n}\, dx$$

($n=1$) $$= \int \frac{c}{t}\, dt = c \log|x-\overline{x}| + cost$$
$x - \overline{x} = t$

($n \neq 1$) $$\int c\,(x-\overline{x})^{-n}\, dx = \frac{c}{(1-n)(x-\overline{x})^{n-1}} + cost$$

II) $z_i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

$$\frac{c}{(x-z_i)^n} + \frac{\overline{c}}{(x-\overline{z}_i)^n}$$

($n \neq 1$) dobbiamo dimostrarlo

$$\int \frac{1}{(x-z_i)^n}\, dx = \frac{1}{(1-n)(x-z_i)^{n-1}} + cost$$

- $z_i \in \mathbb{C}$ vale ancora

$$\left((x-z_i)^{\ell}\right)' = \ell\,(x-z_i)^{\ell-1}$$

$\boxed{n=1}$ $$\int \frac{c}{(x-z_i)} + \frac{\bar{c}}{(x-\bar{z}_i)}\, dx$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{c(x-\bar{z}_i) + \bar{c}(x-z_i)}{(x-\bar{z}_i)(x-z_i)}\, dx$$

$$\shortparallel$$

$$\int \frac{cx+d}{x^2+ax+b}\, dx$$ come trovo una primitiva?

$$f(x) = x^2+ax+b$$
$$f'(x) = 2x+a$$

cerco di portare $cx+d$ in questa forma

$$cx+d = \frac{1}{2}c(2x+a) + d - \frac{ca}{2}$$

$$= \frac{1}{2}c\int \frac{2x+a}{x^2+ax+c}\, dx + \left(d-\frac{ca}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+ax+b}\, dx$$

$$\downarrow$$

$$\frac{1}{2}c \log|x^2+ax+c| + \text{cost}$$

$$a^2-4b<0$$

uso $\int \frac{1}{t^2+1} = \arctan t$

$$x^2+ax+b = \left(x+\frac{a}{2}\right)^2 + b - \frac{a^2}{4} =$$

$$= \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left[\frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{\underbrace{\left(b-\frac{a^2}{4}\right)}_{\text{positivo}}}+1\right] = \left(b-\frac{a^2}{4}\right)\left[\left(\frac{x+\frac{a}{2}}{\sqrt{b-\frac{a^2}{4}}}\right)^2+1\right]$$

$$t = \frac{x+a/2}{\sqrt{}}$$

$$dt = \frac{1}{\sqrt{}}\, dx \; ; \; \sqrt{}\, dt = dx$$

$\Rightarrow$ posso sostituire nell'integrale e calcolarlo

a volte conviene risolvere questo in modo diverso:

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+1)^n}\, dx = \int \frac{x^2+1}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^{n+1}} + I_{n+1}$$

$$= \int \frac{2x\cdot\frac{x}{2}}{(x^2+1)^{n+1}}\, dx + I_{n+1} \overset{\text{per parti}}{\Longrightarrow} \int \left(2x(x^2+1)^{-n-1}\right)\frac{x}{2}\, dx =$$

$$= -\int \frac{(x^2+1)^{-n}}{-n}\cdot\frac{1}{2}\,dx + \cancel{\int -\frac{x}{2n}\cdot\frac{}{(x^2+1)^n}\,dx} + I_{n+1}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{n(x^2+1)^n}\cdot\frac{x}{2}$$

$$= \frac{1}{2n}\underbrace{\int\frac{1}{(x^2+1)^n}\,dx}_{I_n} - \frac{x}{2n(x^2+1)^n} + I_{n+1}$$

$I_n \Rightarrow$ ho una formula ricorsiva.

$$I_{n+1} = \left(1+\frac{1}{2n}\right) I_n + \frac{x}{2n(x^2+1)^n}$$

$\downarrow$ fino a

$$I_1 = \arctan x$$

OSSERVAZIONI

- $\int_{-1}^{1} e^{x^4} x\,dx = 0 \rightarrow$ perché la funzione è dispari e gli estremi di integrazione sono simmetrici

se $f:[-a,a]\rightarrow\mathbb{R}$ è dispari
allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$

dim

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{-a} f(x)\,dx$$

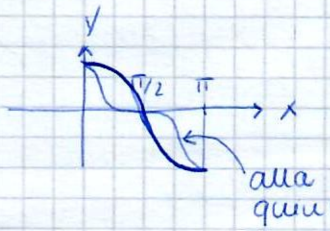
$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-1)\,dy = \int_{0}^{a} -f(y)\,dy = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$\uparrow$
$y=-x$
$dx=-dy$

- Se $f\ [a, -a] \rightarrow \mathbb{R}$ è pari

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

- $\int_{0}^{\pi} (\cos x)^5\,dx = 0$



alla quale questa simmetria resta

Per dimostrarlo si può fare il cambio di variabile e portare in 0 la simmetria
$\Downarrow$
dovrebbe usare una funt. dispari

- $\int \cos^2 x \, dx \underset{\uparrow}{=} \int \frac{1+\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c =$

$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

- $\int \cos^3 x \, dx = \int \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 dx =$

$\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}) = \frac{e^{ix}+e^{\overline{ix}}}{2} = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$= \frac{1}{8}\int (e^{ix}+e^{-ix})^3 \, dx = \frac{1}{8}\int e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix} \, dx =$

$= \frac{1}{8}\left(\frac{e^{3ix}}{3i} + 3\frac{e^{ix}}{i} + 3\frac{e^{-ix}}{-i} + \frac{e^{-3ix}}{-3i} \right) + c =$

Ho usato => $\int e^{ax} \, dx = \frac{e^{ax}}{a}$ ANCHE NEI COMPLESSI ↙ si può verificare derivando e^{ax} con la def. di esponenziale complesso

$= \frac{1}{24i}\left(e^{3ix} - e^{-3ix} \right) \overset{3/8i}{+} \left(e^{ix} - e^{-ix} \right) =$

$= \frac{1}{24i}\left(2i\sin(3x)\right) + \frac{3}{8}i\left(2i\sin x\right) = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x + c$

$\int_0^{1/2} \sqrt{1-x^2} \, dx$

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+x^2} \, dx = \left| \arctan x \right|_{-1}^{1} = \pi/2$

$\left[\begin{array}{l} \cos x = \mathrm{Re}[e^{ix}] = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \\ \sin x = \mathrm{Im}[e^{ix}] = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} \end{array} \right]$

$y = \frac{1}{x}$

$dx = -\frac{1}{y^2} \, dy$

$\downarrow$

$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{1+1/y} (-1/y^2) \, dy = -\int_{-1}^{1} \frac{1}{1+y^2} \, dy$

ALTRE INTERPRETAZIONI E APPLICAZIONI DEL CALCOLO INTEGRALE

20/11/2023

Sia P punto in movimento nel piano $P(t) = (x(t), y(t))$

(o nello spazio $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$)

Indico con $d(t)$ la distanza percorsa dall'istante t_0 (fissato) all'istante t

$v(t) := d'(t)$ — vel. scalare

$\vec{v}(t) := P'(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ — vel. vettoriale

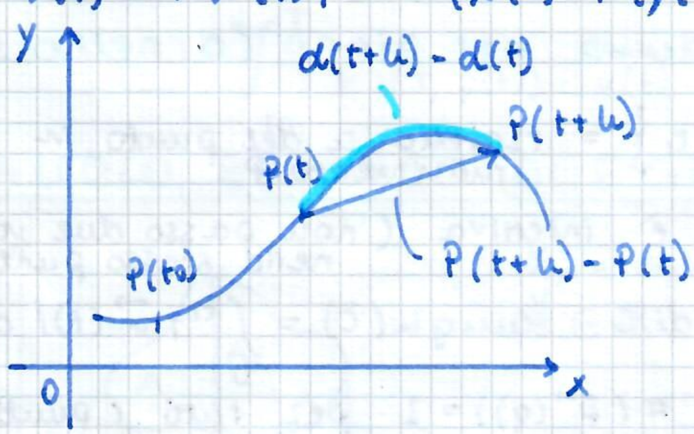
$$\lim_{h\to 0} \frac{P(t+h) - P(t)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{x(t+h) - x(t)}{h} ; \frac{y(t+h) - y(t)}{h} \right) =$$

$$= (x'(t), y'(t))$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

La vel scalare è il modulo della vel. vettoriale



$h > 0$

$$\frac{d(t+h) - dt}{h} \geq \left| \frac{P(t+h) - P(t)}{h} \right|$$

$$\Rightarrow v(t) \geq |\vec{v}(t)|$$

$$\frac{d(t+h) - dt}{h} = \left| \frac{P(t+h) - P(t)}{h} \right| + \frac{o(h)}{h}$$

$$\downarrow \lim_{h\to 0}$$

$$v(t) = |\vec{v}(t)|$$

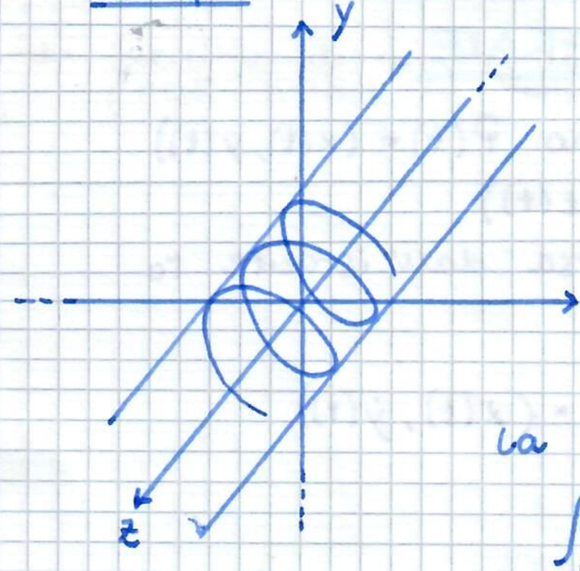
Conseguenza del teorema fondamentale del calcolo integrale

La distanza percorsa dall'istante t_1 all'istante t_2 è

$$d = d(t_2) - d(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t)\,dt = \int_{t_1}^{t_2} |\vec{v}(t)|\,dt$$

$t_0 \leq t_1 \leq t_2$

esempio



$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) =$
$= (r\cos(\omega t); r\sin(\omega t), vt)$

distanza percorsa tra $t=0$ e $t=T$

$\vec{v}(t) = (-r\omega \sin(\omega t); r\omega\cos(\omega t), v)$
$v(t) = |\vec{v}(t)| = \ldots = \sqrt{r^2\omega^2 + v^2}$

la distanza percorsa è uguale a:

$$\int_0^T |\vec{v}(t)|\,dt = \int_0^T \sqrt{r^2\omega^2 + v^2}\,dt =$$
$$= T\cdot\sqrt{r^2\omega^2 + v^2}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \vec{v}(t)\,dt = \left(\int_{t_0}^{t_1} v_x(t)\,dt\ ; \int_{t_0}^{t_1} v_y(t)\,dt\right) = P(t_1) - P(t_0)$$

$$\boxed{\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx}$$

Lunghezza di una curva nel piano (o nello spazio)

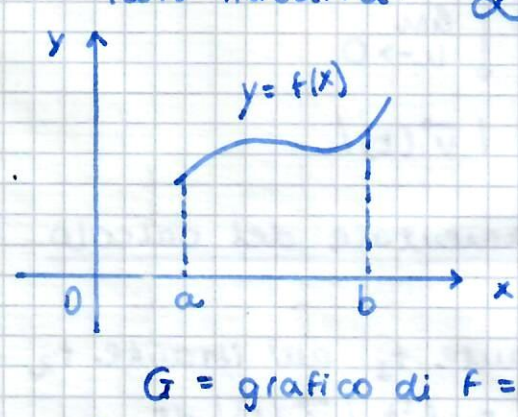
$C = \{P(t) \mid t_0 \leq t \leq t_1\}$ = traiettoria del punto in movimento P

Se $P : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^2$ è iniettiva (non passo due volte nello stesso punto)

allora la lunghezza di C $\quad \text{lungh}(C) = \int_0^{t_1} |\vec{v}(t)|\,dt$

(non serve iniettiva, basta $\#(P^{-1}(q)) = 1$ per tutti i punti $q \in C$ tranne un numero finito)

esempio di traiettoria non iniettiva: ∞ (il grafico si "intreccia", "autointerseca" in un numero finito di punti)



$\text{lungh}(G) = ?$

(FORMULA DI UNA LUNGHEZZA DI UNA CURVA)

$$= \int_a^b |\vec{v}(t)|\,dt = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,dt$$

G = grafico di $f = \{(x, f(x)) \mid a \leq x \leq b\}$ = traiettoria di P con la legge oraria $P(t) = (t, f(t))$ con $a \leq t \leq b$

$\vec{v}(t) = (1; f'(t))$

Definizione del lavoro di una forza

$\vec{F}$ forza costante $\qquad L = \vec{F}\,(p(t_1) - p(t_0))$

P punto in movimento $\qquad$ (conservativa?)

il lavoro di $\vec{F}$ su P

tra t_0 e t_1

Se $\vec{F}$ non è costante $\quad \vec{F}(t, q)$ — t: tempo, q: posizione

$$L = \int_{t_0}^{T} \vec{F}(t, p(t)) \cdot \vec{v}(t)\, dt \quad *$$

$$\int F(x,t)\, dx = \int F(x,t)\, dt \frac{dx}{dt} = \int F(x,t)\, v(t)\, dt$$

***dim:**

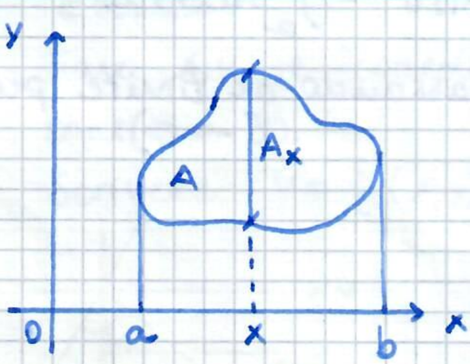
$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}(t_i, p(t_i)) \cdot \left(\frac{\overrightarrow{P(t_i) - P(t_i - \delta)}}{\delta} \right) \cdot \delta =$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \vec{F}(t_i, p_i(t_i)) \cdot \vec{v}(t_i)\, \delta$$

$$\downarrow \delta \to 0,\ N \to +\infty$$

$$\int_{t_0}^{T} \vec{F}(t, p(t)) \cdot \overrightarrow{v(t)}\, dt$$

CALCOLO DI AREE DI FIGURE PIANE



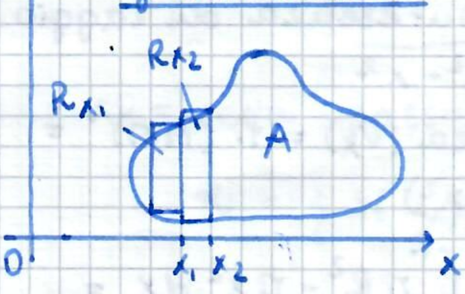
A_x = sezione di A ad "altezza" x ($\forall x \in \mathbb{R}$) $= \{(x,y) \mid (x,y) \in A\}$ con y t.c.

$\ell(x)$ = lunghezza di A_x

allora

$$\text{area}(A) = \int_a^b \ell(x)\, dx$$

Giustificazione:

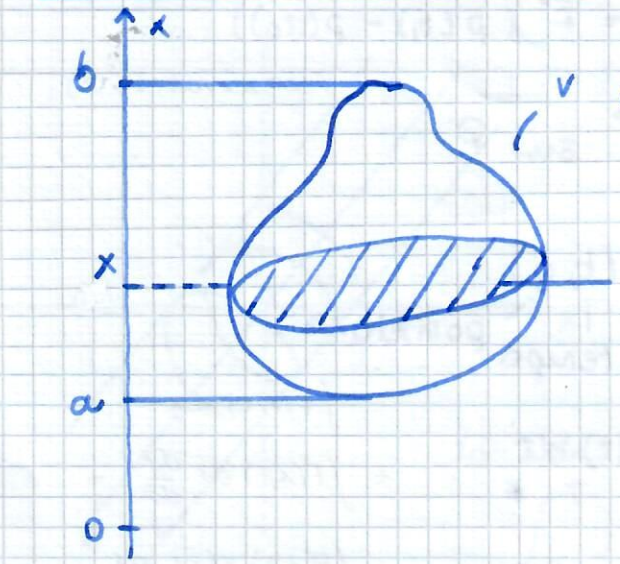


Divido $[a, b]$ in N intervalli di lunghezza $\delta = \frac{-a+b}{N}$

$$\text{area}(A) \simeq \sum_{i=1}^{N} \overbrace{\ell(x_i)\,\delta}^{\text{area } R_i} \xrightarrow[\delta \to 0]{} \int_a^b \ell(x)\, dx$$

CALCOLO DI VOLUMI

21/11/2023



$(a, b \,/\, x = \emptyset \;\forall x \in [a,b])$

V solido nello spazio

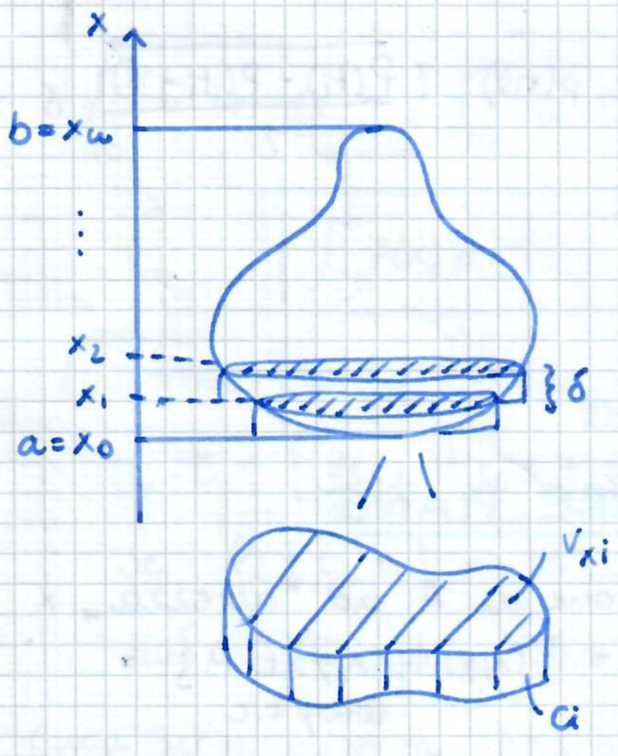
V_x : sezione di V ad altezza x

$a(x) := \text{area}(V_x)$

Allora

$$\text{Vol}(V) = \int_a^b a(x)\,dx$$

Giustificazione:



Divido $[a,b]$ in intervalli di lunghezza $\delta = \frac{b-a}{N}$

$$\text{Vol}(V) \simeq \sum_{i=1}^{N} \text{Vol}(c_i) = \sum_{i=1}^{N} \text{area}(V_{xi})\delta$$

$$\left(\sum_{i=1}^{N} \text{vol}(V_i) \xrightarrow[\delta \to 0]{} \text{Vol}(V) \right)$$

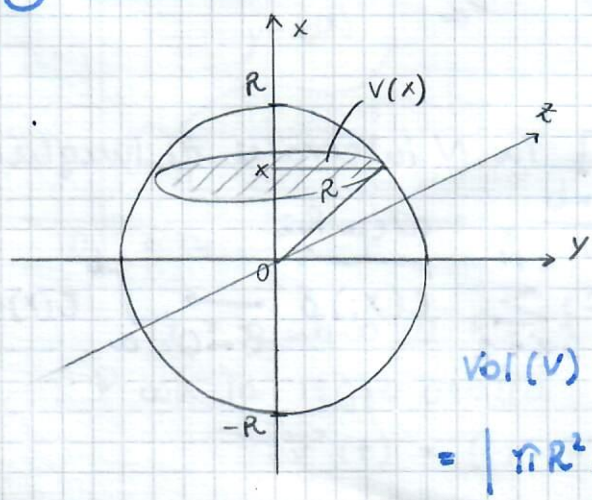
$$= \sum_{i=1}^{N} a(x_i)\delta \simeq \int_a^b a(x)\,dx$$

(passando al limite per $\delta \to 0$)

$$\text{Vol}(c_i) = \text{area}(V_{xi}) \cdot \delta$$

UNA SERIE DI ESEMPI

① Volume della sfera



V sfera di raggio R

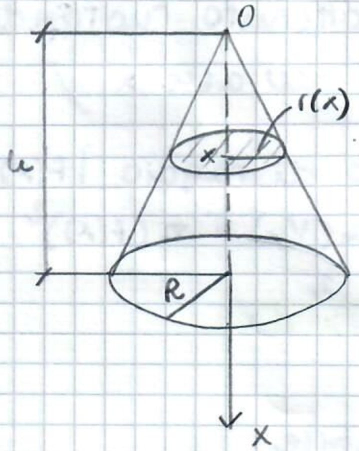
V_x := circonferenza di raggio $r(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$

$$a(x) = \text{area}(V_x) = \pi (r(x))^2 = \pi(R^2 - x^2)$$

$$\text{Vol}(V) = \int_{-R}^{R} a(x)\,dx = \int_{-R}^{R} \pi R^2 - \pi x^2\,dx =$$

$$= \left| \pi R^2 x - \frac{\pi}{3} x^3 \right|_{-R}^{R} = \ldots = \frac{4}{3}\pi R^3$$

(2) Volume del cono (retto con base circolare)



V cono con raggio di base R e altezza h

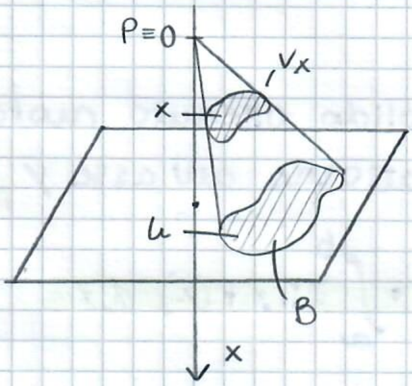
V_x = circonferenza di raggio $r(x) = \frac{R}{h} \cdot x$

$(r : x = R : h)$

$$a(x) = \text{area}(V_x) = \pi \frac{R^2}{h^2} x^2$$

$$\text{Vol}(V) = \int_0^h \pi \frac{R^2}{h^2} x^2 \, dx = \frac{\pi R^2}{h^2} \frac{x^3}{3} \Big|_0^h = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$

(3) Volume cono qualunque (di base B e altezza h)



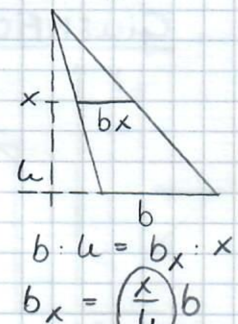
V = unione dei segmenti con estremi il vertice P e un punto della base

V_x = copia di B riscalata di $\frac{x}{h}$

$$a(x) = \text{area}(V_x) = \text{area}(B) \left(\frac{x}{h}\right)^2 \; *$$

$$\text{Vol}(V) = \int_0^h \text{area}(B) \left(\frac{x}{h}\right)^2 dx = \frac{1}{3} \text{area}(B) \cdot h$$

*



$b : h = b_x : x$

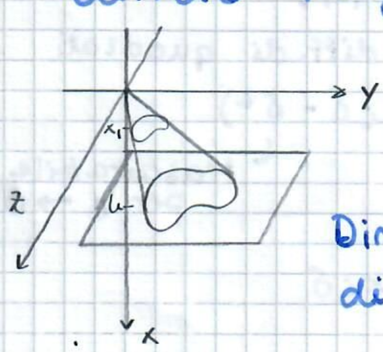
$b_x = \left(\frac{x}{h}\right) b$

nelle aree il fattore di dilatazione è al quadrato

Esercizio:

Siano x, y le coordinate sul piano che contiene B.

Scrivere $V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq h, \ (y, z) \mid \overset{(?)}{\dots} \}$

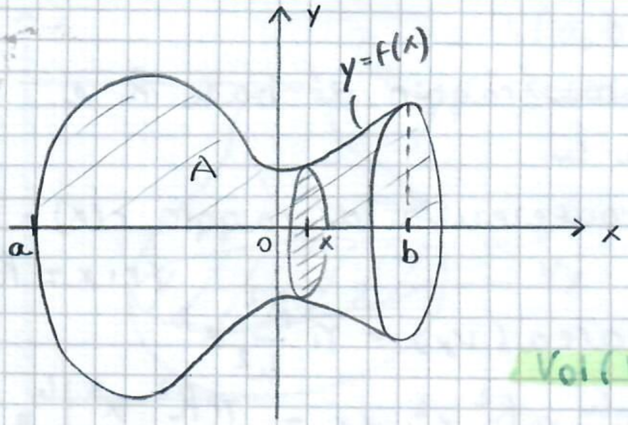


Dimostrare che V_x è una copia di B scalata di x/h (=> usare l'equazione parametrica della retta passante per l'origine)

R = retta passante per $(0,0,0)$ e (h, y, z)

$$R = \{ t(h, y, z) \mid 0 \leq t < 1 \}$$

VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE I



V solido ottenuto ruotando A attorno all'asse x

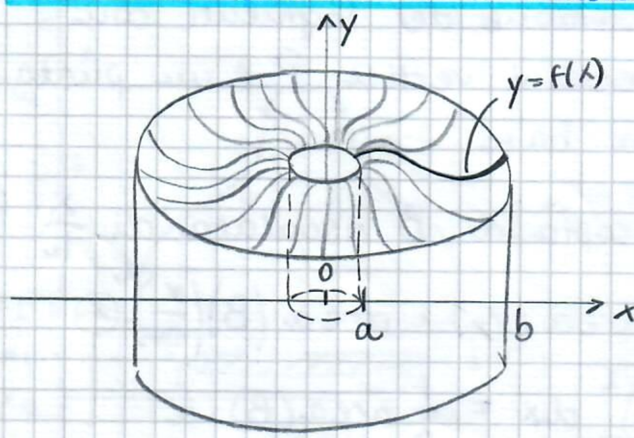
V_x = cerchio di raggio $|f(x)|$

$a(x) = \text{area}(V_x) = \pi (f(x))^2$

$$\text{Vol}(V) = \int_a^b \pi (f(x))^2 \, dx$$

Vale anche per funzioni a segno variabile
(Scrivere $V = \{(x,y,z) \mid a \leq x \leq b \,;\; y^2 + z^2 \leq (f(x))^2\}$ e verificare analiticamente che V_x è un cerchio

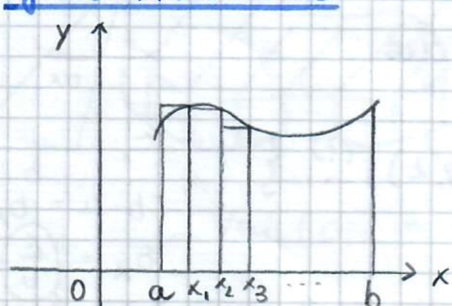
VOLUME SOLIDO DI ROTAZIONE II

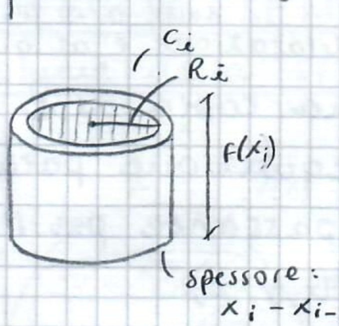


V solido ottenuto ruotando A attorno all'asse y

$$\text{Vol}(V) = \int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$

Giustificazione:





$$\text{Vol}(V) \simeq \sum_{i=1}^{N} \text{vol}(c_i) =$$

⊛

$$\sum_{i=1}^{N} f(x_i) \cdot \pi (x_i^2 - x_{i-1}^2) =$$

diff. di quadrati

$$= \sum_{i=1}^{N} \pi f(x_i)(2x_i\delta - \delta^2)$$

trascurabile per $\delta \to 0$

$$\simeq \sum_{i=1}^{N} \pi f(x_i) 2x_i \delta$$

così approssimo con sup. cilindriche

$\delta \to 0, \; N \to +\infty$

$$\int_a^b 2\pi x f(x) \, dx$$

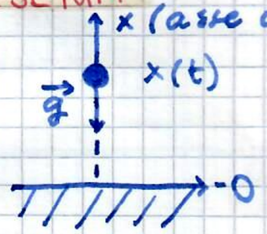
⊛ $x_i^2 - (x_i - \delta)^2 =$
$= \cancel{x_i^2} - \cancel{x_i^2} - \delta^2 + 2\delta x_i =$
$= -\delta^2 + 2\delta x_i$

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE

- l'incognita è una funzione → 1 variabile

ESEMPI

(1)



Solido in caduta libera
$x(t)$ altezza al tempo t

determinare $x(t)$

$m\vec{g} = \vec{F} = m\vec{a}$

$-mg = m\,x''(t)$

$x''(t) = -g$

$x'(t) = \int -g \, dt = -gt + c_0$

$x(t) = \int x'(t)\,dt = \int -gt + c_0 \, dt = -\frac{g}{2}t^2 + c_0 t + c_1$

$$\boxed{x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + \underline{c_0}t + \underline{c_1}}$$

→ sono necessarie 2 informazioni sulle condizioni iniziali

$x(\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{t_0}) = x_0$

$x'(\underset{\underset{0}{\shortparallel}}{t_0}) = v_0$ ⇒ posso calcolare c_0 e c_1

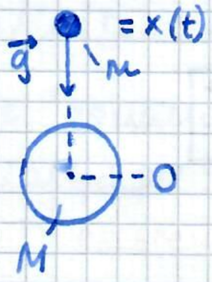
$x(0) = -\frac{g}{2}0^2 + c_0 \cdot 0 = c_1 \Rightarrow x_0 = c_1$

$x'(0) = -g \cdot 0 + c_0 = v_0 \Rightarrow v_0 = c_0$

$$x(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 t + x_0$$

- altro esempio:

(2)



g non costante, dipende dalla posizione

$mg = -G\frac{mM}{(x(t))^2}$; $g = -G\frac{M}{(x(t))^2} = x''(t)$

Si può moltiplicare per $x'(t)$

$$\underbrace{-G\frac{mM}{(x(t))^2}\,x'(t)}_{= \, GmM\left(\frac{1}{x(t)}\right)'} = \underbrace{m\,x''(t)\,x'(t)}_{= \, m\left[\frac{1}{2}(x'(t))^2\right]'}$$ derivata di

$$GmM\frac{1}{x(t)} + c_0 = \frac{1}{2}m(x'(t))^2$$

$$\underbrace{\frac{1}{2}m(x'(t))^2}_{\text{energia cinetica}} - \underbrace{GmM\frac{1}{x(t)}}_{\text{energia potentiale}} = \text{cost}$$

- altro esempio: (3)
  (legge di decadimento)

$x(t)$ = quantità di un certo isotopo instabile

Sappiamo che la quantità di materiale che decade è $\propto$ all'intervallo di tempo e alla quantità iniziale

(per intervalli di tempo brevi)

$$t \longmapsto t + \Delta t$$

$$x(t) \longmapsto x(t+\Delta t)$$

$$x(t) - x(t+\Delta t) = K\,\Delta t\, x(t)$$

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = -K\,x(t)$$

Passo al limite

$$x'(t) = -K\,x(t) \Rightarrow \text{legge di decadimento (o diffusione)}$$

risoluzione

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = -K$$

$$(\log x(t))' = -K \quad ; \quad \log x(t) = \int -K\,dt = -Kt + c_0$$

$$x(t) = e^{-Kt+c_0} = e^{-Kt} \cdot c_1$$

$$x(t) = c_1 \cdot e^{-Kt}$$

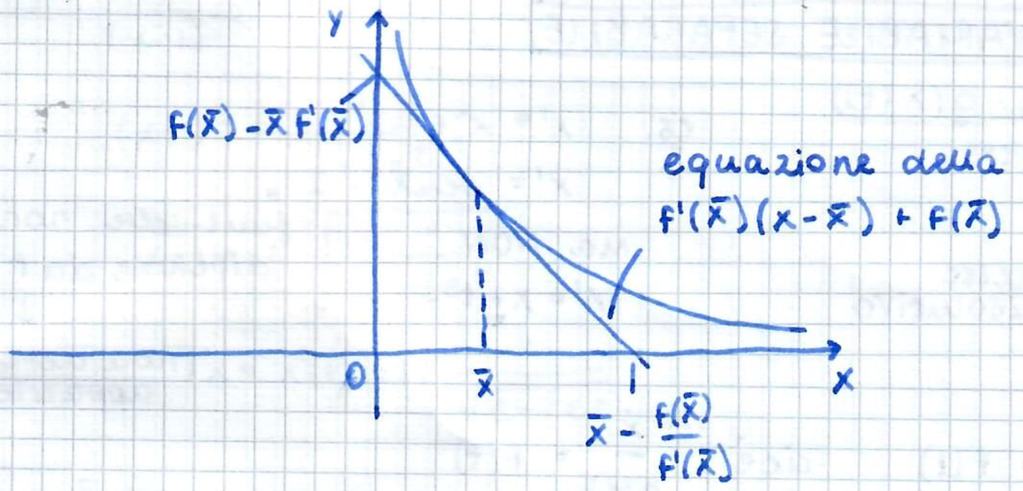
c_1 → ho bisogno di 1 condizione iniziale

$$x(\overset{0}{\overset{\shortparallel}{t_0}}) = x_0$$

$$x_0 = c_1 \cdot e^0 = c_1 \Rightarrow \boxed{x(t) = x_0 e^{-Kt}}$$

- Esempio (4)

Per quali funzioni l'area è costante



$$a(\bar{x}) = \frac{1}{2} \cdot \left(\bar{x} - \frac{f(\bar{x})}{f'(\bar{x})}\right) \cdot \left(f(\bar{x}) - \bar{x} f'(\bar{x})\right)$$

$a(x) =$ costante $\Rightarrow$ la sua derivata è nulla

$$\left[\frac{1}{2} \frac{(f(x) - x f'(x))^2}{f'(x)}\right]' = 0$$

↳ eq. differenziale in cui appaiono $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$
(lasciata per esercizio)

EQUAZIONI DIFFERENZIALI DEL PRIMO ORDINE

Uso $x(t)$ come incognita
riconducibili alla forma

$(*)$ $x'(t) = f(t, x(t))$ ← funzione nota, data

es: $x'(t) = x^2(t) e^t + \log x(t)$
$x'(t) + x(t) = \text{cost}$

forma compatta: $\dot{x} = f(t, x)$ (più usata)
$I \to \mathbb{R}$

$(*)$ Una funzione x risolve l'equazione se vale l'identità per ogni t nel dominio $(\forall t \in I)$
intervallo

Problema alle condizioni iniziali (o problema di Cauchy)

$$\begin{cases} x' = f(x, t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (f, t_0, x_0 \text{ dati})$$

Nelle equazioni del 1° ordine è necessaria 1 condizione iniziale per trovare una funzione

Teo: esistenza e unicità

Sotto opportune ipotesi il problema di Cauchy ha una e una sola soluzione.

(versione precisa nel corso di Analisi 2)

EQUAZIONI A VARIABILE SEPARABILE

$x'(t) = f(t) \cdot g(x(t))$

$x' = f(t)\, g(x)$

es. $x' = x^2 e^t$

$x' = \operatorname{sen} x \cdot 1$ "funz. che non dipende da t" $\downarrow$ (non deve apparire)

ma NON $x' = x \pm t$

processo risolutivo $\downarrow$

$$\frac{\dot{x}(t)}{g(x(t))} = f(t) \quad \text{cioè} \quad \frac{\dot{x}}{g(x)} = f(t)$$

$$\int \frac{\dot{x}}{g(x)}\, dt = \int f(t)\, dt + c$$

$\to$ supponiamo di conoscere una primitiva di f, $F(t)$

$$\int \frac{\dot{x}(t)}{\underbrace{g(x)}_{x(t)}}\, dt = F(t) + c$$

cambio di variabile

$x = x(t) \qquad dx = \dot{x}(t)\, dt$

$$\int \frac{dx}{g(x)} = G(x)$$

$\uparrow$ primitiva di $1/g(x)$

$\Rightarrow G(x(t)) = F(t) + c$ esplicito $x(t)$ usando un'inversa di G

$x(t) = G^{-1}(F(t) + c)$

$\uparrow$ inversa

attenzione alle inverse delle funz. goniometriche! ... e alle potenze pari

Aggiungendo la condizione iniziale si può trovare la costante c, alla fine, oppure prima di fare l'inversa

$$G(x_0) = F(t_0) + c \quad \text{e poi si esplicita } x$$

esempio

$x' = (x-1)^3 e^t \qquad x' = \frac{dx}{dt}$

$$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int e^t\, dt$$

$\to$ modo compatto per riassumere tutti i passaggi di sopra, compreso il cambio di variabile nell'integrale

$$\underbrace{\frac{(x-1)^{-2}}{-2}}_{G(x)} = \underbrace{e^t + c}_{F(x)}$$

$$(x-1)^{-2} = -2e^t + c$$

$$(x-1)^2 = \frac{1}{c-2e^t}$$

$$x-1 = \pm\sqrt{\frac{1}{c-2e^t}}$$

$$x = x(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{c-2e^t}}$$

Supponiamo di aggiungere una condizione iniziale
$x(0) = 2$

$$\Rightarrow \quad (2-1)^{-2} = -2e^0 + c$$

$$\frac{1}{1^2} = -2 + c \quad \Rightarrow c = 3$$

$$\Rightarrow \quad x(t) = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3-2e^t}}$$

↓

solo ⊕ soddisfa la condizione iniziale

se $\begin{cases} x(0) = -2 \\ \dot{x}(0) = 1 \end{cases}$ la soluzione cambia?

↳ è sempre bene controllare alla fine (anche quando non si hanno condizioni iniziali) se ci sono delle funzioni costanti che risolvono l'equazione

EQ. A VARIABILI SEPARABILI

28/11/2023

$x' = g(x) f(t)$

$$\underbrace{\int \frac{dx}{g(x)}}_{G(x)} = \underbrace{\int f(t)\,dt}_{F(x)}$$

$\Rightarrow G(x) = F(x) + c$ trovianno c sulla base della condizione iniziale (se presente) e esplicitiamo x

Esempi

- $x' = (x-1)^3 e^t$

$\int \frac{dx}{(x-1)^3} = \int e^t dt \rightarrow -\frac{1}{2}(x-1)^{-2} = e^t + c$

$(x-1)^{-2} = -2e^t + c$

$x(0) = 2 \Rightarrow c = 3$

NB! Ricorda che è meglio verificare la condizione iniziale prima di esplicitare $x(t)$

inversa:

$x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{3-2e^t}}$ Solo ⊕ risolve la condizione iniziale

Se fosse $x(0) = 0 \Rightarrow c = 3$
Ma alla fine devo scegliere ⊖

Se $x(0) = 1 \Rightarrow \underbrace{0^{-2}}_{} = 1 + c$
non ha senso, non trovo c

La soluzione c'è, se $x = 1$ per tutti i tempi la derivata è nulla $\Rightarrow$ non trovo le soluzioni per cui $g(x)$ si annulla con questa procedura

↓

da soluzione con cond. iniziale se $g(x_0) \neq 0$
se $g(x_0) = 0$ una soluzione è quella costante

- $x' = (1+x^2)\cos(t)$

$\int \frac{dx}{1+x^2} = \int \cos(t)\,dt$

$\arctan x = \operatorname{sen} t + c$

$x = \tan(\operatorname{sen} t + c)$ (senza condizioni iniziali)

$1+x^2$ non si annulla mai $\Rightarrow$ queste sono tutte le soluzioni

$x(0) = 0$

$\arctan 0 = \operatorname{sen} 0 + c \Rightarrow 0 = c$

$\arctan x = \operatorname{sen} t$

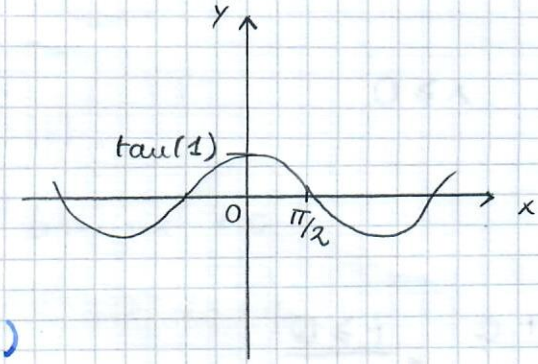
$x = \tan \operatorname{sen} t$

$\downarrow$

definita $\forall t \in \mathbb{R}$

$-1 \leq \operatorname{sen} t \leq 1$

(non comprende $\pm \frac{\pi}{2}$)



Periodica di periodo 2π

Ma se $x(0) = 1 \rightarrow c = \frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \arctan x = \operatorname{sen} t + \pi/4$

$x = \tan(\operatorname{sen} t + \pi/4)$ non è più definita su tutto $\mathbb{R}$

$\frac{\pi}{4} - 1 \leq \operatorname{sen} t + \pi/4 \leq 1 + \pi/4$

$\downarrow$

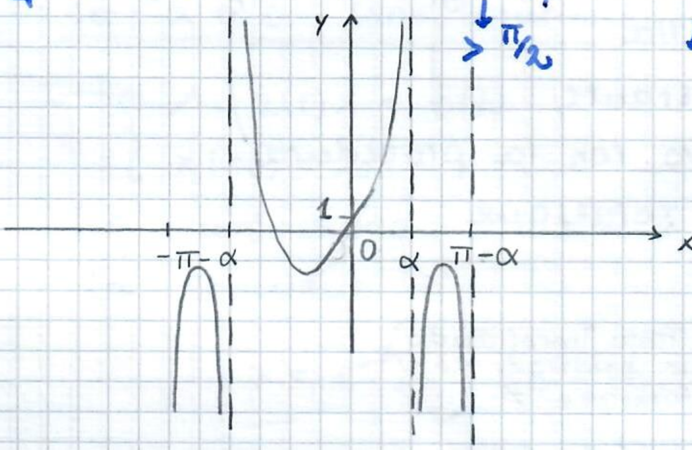
$> \pi/2$

Dobbiamo escludere i valori per cui $\operatorname{sen} t + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$

$\operatorname{sen} t \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

$t \neq \operatorname{arcsen}\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2k\pi$

$t \neq \alpha + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$



<u>OSS</u> anche se $f(t)$ e $g(x)$ sono definite $\forall x, t \in \mathbb{R}$, la soluzione potrebbe essere definita solo su un intervallo limitato

- $x' = 2t \cos^2 x$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int 2t \, dt \quad ; \quad \tan x = t^2 + c$

$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

$x = \arctan t^2$ *

- $x(0) = \pi \Rightarrow c = 0$

la soluzione non può essere la stessa

* $x = \arctan(t^2) + (k\pi) \quad k \in \mathbb{Z}$ (devo scegliere il k giusto)

$x(0) = \pi \Rightarrow x = \arctan(t^2) + \pi$

• $x' = \sqrt{x}$ $\qquad x \geq 0$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int dt$$

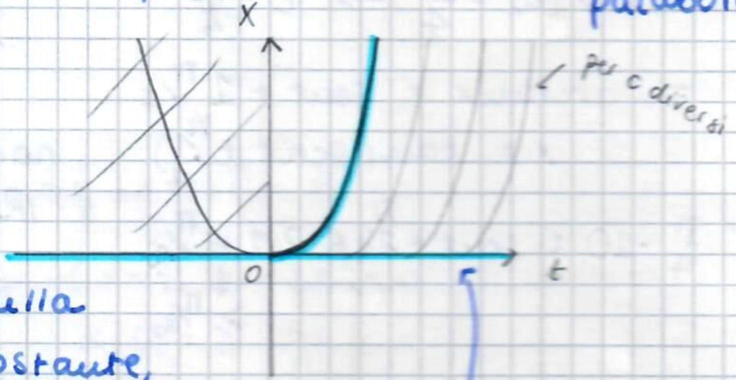
$$2x^{1/2} = t + c \qquad \underline{t \geq 0}$$

$$2\sqrt{x} = t + c$$

$$\sqrt{x} = \frac{1}{2}t + c \; ; \qquad x = \frac{1}{4}(t+c)^2 \rightarrow \text{traslazione di una parabola}$$

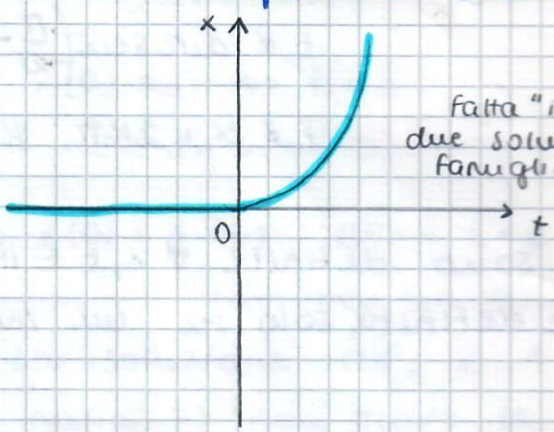
$$x(0) = 0 \Rightarrow c = 0$$

$$x = \frac{1}{4}t^2$$



Inoltre $g(x)$ si annulla per $x = 0 \Rightarrow$ sol. costante, valida, che non trovo con la procedura

Ho anche questa soluzione



fatta "incollando" due soluzioni di famiglie $\neq$

$\Rightarrow$ il sistema $\begin{cases} x' = \sqrt{x} \\ x(0) = 0 \end{cases}$ ha ∞ soluzioni

fatte "incollando" soluzioni

le "opportune ipotesi" del teo. di Cauchy non sono soddisfatte

EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI DEL I ORDINE

Sono quelle nella forma

$$x' + a(t)x = b(t) \qquad (x' = -a(t)x + b(t))$$

$\downarrow$ funzione affine in x (lineare + costante)

Risoluzione

$A(t)$ primitiva di $a(t)$ e moltiplico l'eq. per $e^{A(t)}$

$$x'e^{A(t)} + x\,a(t)\,e^{A(t)} = e^{A(t)}b(t)$$

$\hookrightarrow$ derivata di un prodotto

$$(xe^{A(t)})' = e^{A(t)} \cdot b(t)$$

$$xe^{A(t)} = \int e^{A(t)} b(t)\,dt + c$$

$$x = e^{-A(t)} \left(\int e^{A(t)} b(t)\,dt + c\right)$$

Se aggiungo la condizione $x(t_0) = x_0$ ottengo

$$x_0 e^{A(t)} = \underbrace{h(t_0)} + c$$

$$h(t) = \int e^{A(t)} b(t)$$

$$\Rightarrow c = -h(t_0) + x_0 e^{A(t)}$$

"coeff di x e termine noto"

<u>Teo</u> se a e b sono continue su I, il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' + a(t)x = b(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

ha un' unica soluzione $x(t)$ definita per $t \in I$

La soluzione è

$$x = e^{-A(t)} \left(\int e^{A(t)} b(t)\,dt + c\right)$$

<u>Esempi</u>

- $x' = 2tx + 1$ $\qquad a(t) = -2t$

$x' - 2tx = 1$ $\qquad A(t) = -t^2$

$$x'e^{-t^2} - 2txe^{-t^2} = e^{-t^2}$$

$$xe^{-t^2} = \int e^{-t^2}\,dt$$

$$x = e^{t^2} \int e^{-t^2}\,dt + c$$

- $x' - \frac{x}{t} = 1$ $\qquad$ la cond. iniziale non può essere $t_0 = 0$

$x(1) = 1$

$a(t) = -\frac{1}{t}$ $\qquad A(t) = -\log t$

(considero $t > 0$ per la cond. iniziale)

$$x'e^{-\log t} - \frac{x}{t} e^{-\log t} = e^{-\log t}$$

$$\frac{x'}{t} - x \cdot \frac{1}{t^2} = \frac{1}{t}$$

$$\left(\frac{x}{t}\right)' = \frac{1}{t} \Rightarrow \frac{x}{t} = \int \frac{1}{t}\,dt + c = \log t + c$$

$x = t\log t + ct$

dalla cond. iniziale $c = 1 \Rightarrow x = t\log t + t$

Se fosse stata $x(-1) = 1$ avrei dovuto prendere

$$A(t) = -\log(-t)$$

... alla fine $x = t\log(-t) - t$

30/11/2023

EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI DI ORDINE n (ODE)

Def. Un' eq. differenziale ordinaria di ordine n è della forma:

$$x^{n}(t) + a_{n-1}x^{n-1}(t) + \dots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = f(t)$$

in cui l'incognita è la funzione $x(t): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (e appare nell'equazione fino alla sua derivata n-esima) e i coeff. $a_i(t), \dots, a_{n-1}(t): I \to \mathbb{R}$ sono funzioni continue.

- Se $f(t) = 0$ l'eq. è omogenea
- Se $a_0(t), \dots, a_{n-1}(t)$ sono tutte costanti → l'eq. è a coeff. costanti (non dipendono da t)

Chiamiamo PROBLEMA DI CAUCHY il seguente sistema

sia $t_0 \in I$

$$(PC)\begin{cases} x^{n}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)x^{(i)}(t) = f(t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \\ x^{(2)}(t_0) = x_2 \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

ORDINE n ⇒ n CONDIZIONI INIZIALI

TEO [L'esistenza e unicità di PC]

· Sia $I \subset \mathbb{R}$ intervallo, siano $a_i(t): I \to \mathbb{R}$ continue. Allora esiste ed è unica la soluzione $x(t): I \to \mathbb{R}$ di PC.

Chiamiamo $Y(I)$ l'insieme delle funzioni $f: I \to \mathbb{R}$
↓
è uno spazio vettoriale

Sia X l'insieme delle soluzioni di

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\, x^{(i)}(t) = 0 \quad (*) \qquad Ax = 0$$

vale solo per le omogenee!

Teorema: X è uno spazio vettoriale di dimensione n. (su $\mathbb{R}$)
se trovo n soluzioni di $(*)$ indipendenti ho finito.

Dim.

① X è un sottospazio di $Y(I)$

- $x(t) \equiv 0$ è soluzione di $(*)$ $\Rightarrow X \neq \emptyset$
- $x_1(t) + cx_2(t)$ è soluzione ($x_1(t)$, $x_2(t)$ soluzioni $c \in \mathbb{R}$)

linearità

la derivata è un operatore lineare

$$(x_1^{(n)} + cx_2^{(n)})(t) + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) + (x_1 + cx_2)^{(i)}(t)$$

omo di valutazione

$$x_1^{(n)} + cx_2^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\left[x_1^{(i)} + cx_2^{(i)}\right] =$$

$$= \underbrace{x_1^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\, x_1^{(i)}(t)}_{=0} + c\Big[\underbrace{x_2^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t)\, x_2^{(i)}(t)}_{=0}\Big] =$$

$$= 0 + c \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow$ È un sottospazio vettoriale di $Y(I)$

Per dimostrare che ha dimensione n dimostro che lo spazio di soluzioni è isomorfo a $\mathbb{R}^n$

inventiamo un isomorfismo

② Definiamo $T: X \to \mathbb{R}^n$

$x(t) \mapsto (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ sol. di Cauchy per un certo t_0 fissato

T lineare, iniettiva e suriettiva
(i) (ii) (iii)

(i) T lineare

Prendo x_1, x_2 (funzioni di X) devo dimostrare che:

$$T(x_1 + cx_2) = T(x_1) + cT(x_2)$$

$$\big((x_1 + cx_2)(t_0),\ (x_1 + cx_2)'(t_0), \ldots, (x_1 + cx_2)^{(n-1)}(t_0)\big) =$$

linearità della derivata

$$= (x_1 + cx_2,\ x_1' + cx_2', \ldots, x_1^{(n-1)} + cx_2^{(n-1)}) =$$

definizione di somma in $\mathbb{R}^n$ $\quad$ tutto valutato in t_0

$$= (x_1(t_0), x_1'(t_0), \ldots, x_1^{(n-1)}(t_0)) + (cx_2(t_0), \ldots, cx_2^{(n-1)}(t_0)) =$$

posso portare fuori c

$\overset{\text{def.}}{=}$ $T(x_1) + c\,T(x_2)$ $\Rightarrow$ è lineare

(ii) Se $(0, \dots, 0)$ allora la sol. per il PC.

$$\begin{cases} (*) \\ x(t_0) = 0 \\ x'(t_0) = 0 \\ \vdots \\ x^{n-1}(t_0) = 0 \end{cases}$$

ha come unica soluzione la funz. costantemente nulla.

Abbiamo già verificato che $f(t) = 0$ è soluzione ed è unica per il teorema di unicità precedente.

(iii) Prendo un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^n$ $(x_0, x_1 \dots x_{n-1})$. Devo dimostrare che $\exists$ sempre $x(t) \in X$ / è soluzione di

$$\begin{cases} (*) \\ x(t_0) = x_0 \\ \vdots \\ x^{n-1}(t_0) = x_{n-1} \end{cases}$$

So che questa soluzione esiste grazie alla parte di esistenza del teorema di $\exists!$ di PC

$\Rightarrow$ T è suriettiva

allora T è un ISOMORFISMO $\Rightarrow$ $\dim(X) = \dim(\mathbb{R}^n) = n$

CONSEGUENZA:

Quando trovo n soluzioni linearmente indipendenti le ho trovate tutte (sono descritte da tutte le possibili comb. lineari di quelle già trovate)

$$x''(t) + \frac{2}{t}x'(t) - \frac{6}{t^2}x(t) = 0 \qquad t \in (0, +\infty)$$

Ipotizzo che la soluzione sia $x(t) = t^\alpha$

$$(\alpha^2 - \alpha)t^{\alpha-2} + \frac{2}{t}\alpha x^{\alpha-1} - \frac{6}{t^2}t^\alpha = 0$$

$$t^{\alpha-2}(\alpha^2 - \alpha + 2\alpha - 6) = 0 \quad \begin{cases} \alpha = -3 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

$x_1(t) = t^{-3}$
$x_2(t) = t^2$ sono soluzioni linearmente indipendenti

$$x_{gen}(t) = c_1 t^{-3} + c_2 t^2 \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Coeff. costanti

$a_i(t) = a_i \in \mathbb{R}$ (costante)

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) = 0 \quad (*)$$

$x(t) = e^{\lambda t}$ (ipotesi) $\Rightarrow$ cioè supponiamo che la soluzione sia in questa forma

$x'(t) = \lambda e^{\lambda t}$

$x''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$

$\vdots$

$x^{(n-1)}(t) = \lambda^{n-1} e^{\lambda t}$

$x^{(n)}(t) = \lambda^n e^{\lambda t}$

verifichiamo che funziona $\forall t$

$$\lambda^n e^{\lambda t} + a_{n-1}\lambda^{n-1} e^{\lambda t} + \ldots + a_2 \lambda^2 e^{\lambda t} + a_1 \lambda e^{\lambda t} + a_0 e^{\lambda t} \overset{!}{=} 0$$

$$e^{\lambda t}(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0) = 0$$

polinomio di grado n

$p(\lambda) \Rightarrow$ POLINOMIO CARATTERISTICO

Se $p(\lambda) = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}$ è soluzione

Data $x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) = 0$ chiamo polinomio caratteristico associato il polinomio $\boxed{\lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = P(\lambda).}$

Osservo che se λ è una radice reale di $P(\lambda)$ allora $x(t) = e^{\lambda t}$ risolve $(*)$.

Suppongo che $P(\lambda)$ ha n radici reali distinte $\lambda_1 < \ldots < \lambda_n$

Allora $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \ldots, x_n(t) = e^{\lambda_n t}$ sono soluzioni.

Ora dimostriamo che sono LINEARMENTE INDIPENDENTI

Per assurdo sono linearmente dipendenti, ossia $\exists c_1, \ldots, c_n$ in $\mathbb{R}$ non tutti nulli $\mid \sum_{i=0}^{n-1} c_i e^{\lambda_i t} = 0$

Prendo il più grande $\lambda_i \mid c_i e^{\lambda_i t}$ ha $c_i \neq 0 \Rightarrow c_i e^{\lambda_i t} \neq 0$

Sia esso λ_k

$$\sum_{i=0}^{k} c_i e^{\lambda_i t} = 0 \qquad \left(\sum_{i=1}^{k-1} c_i e^{\lambda_i t}\right) + c_k e^{\lambda_k t} = 0$$

$$e^{\lambda_k t} = -\frac{1}{c_k} \sum_{i=1}^{k-1} c_i e^{\lambda_i t}$$

Per $t \to +\infty$ $\quad e^{\lambda_i t} = o(e^{\lambda_k t})$

$$-\frac{1}{c_k}\sum_{i=0}^{k-1} c_i e^{\lambda_i t} = o(e^{\lambda_k t})$$

[(per $x \to +\infty$ $e^{ax} \ll e^{bx}$ se $a < b$)

$$e^{\lambda_k t} = o(e^{\lambda_k t}) \qquad t \to +\infty$$

$\downarrow$

una funzione non può essere o piccolo di se stessa $\quad$ assurdo

$\Rightarrow$ Se $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sono radici reali distinte del polinomio caratteristico allora l'insieme $\mathcal{B}$

$$\mathcal{B} = \{ e^{\lambda_1 t}, \dots, e^{\lambda_n t} \} \text{ è una base di } X$$

Cosa succede se le radici sono complesse o non distinte?

Se $\lambda \in \mathbb{R}$ è soluzione di molteplicità k di $p(\lambda)$ allora $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$ sono soluzioni di (*)

(potrei anche usare l'esponenziale complesso, altrimenti...)

Se $z = \rho + i\omega$, $\bar{z} = \rho - i\omega$ sono sol. complesse di molteplicità k allora

parte reale ρ ; parte immaginaria ω (senza segno)

$$e^{\rho t}\cos(\omega t),\ e^{\rho t}\sin(\omega t)$$
$$te^{\rho t}\cos(\omega t),\ te^{\rho t}\sin(\omega t)$$
$$\vdots$$
$$t^{k-1}e^{\rho t}\cos(\omega t),\ t^{k-1}e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

sono soluzioni di (*) $\quad$ Sono una base?

ALLA PROSSIMA PUNTATA!

Recap

04/12/2023

Base dello spazio delle soluzioni

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) = 0 \qquad \text{eq. differenziale ordinaria ord. } n\text{, lineare omogenea}$$

$$p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i \qquad \text{polinomio caratteristico}$$

$\lambda_1 \in \mathbb{R}$ molt. k_1 $\qquad z_1 = \rho_1 + i\omega_1$, $\bar{z}_1 = \rho_1 - i\omega_1$ molt θ_1

$\vdots \qquad\qquad \vdots$

$\lambda_\ell \in \mathbb{R}$ molt. k_ℓ $\qquad z_m = \rho_m + i\omega_m$, $\bar{z}_m = \rho_m - i\omega_m$ molt. θ_m

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1 \to e^{\lambda_1 t}, \; te^{\lambda_1 t}, \dots, t^{K_1-1}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \lambda_\ell \to e^{\lambda_\ell t}, \; te^{\lambda_\ell t}, \dots, t^{K_\ell - 1} e^{\lambda_\ell t}\end{array}\right\} (*)$$

$K_\ell - 1$ → molteplicità -1

$$z_1 \to e^{\rho_1 t} \cos(\omega_1 t), \; e^{\rho_1 t} \sin(\omega_1 t)$$

$$\vdots$$

$$t^{\theta_1 - 1} e^{\rho_1 t} \cos(\omega_1 t), \; t^{\theta_1 - 1} e^{\rho_1 t} \sin(\omega_1 t)$$

$$\vdots$$

$$z_M \to e^{\rho_M t} \cos(\omega_M t), \; e^{\rho_M t} \sin(\omega_M t)$$

$$\vdots$$

$$t^{\theta_M - 1} e^{\rho_M t} \cos(\omega_M t), \; t^{\theta_M - 1} e^{\rho_M t} \sin(\omega_M t)$$

TEO:
Se prendo tutte queste funzioni, ho una base dello spazio di soluzioni di $(*)$

$$\to x^{(n)} t + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(t) x^{(i)}(t) = 0$$

Lemma $P(\lambda)$ polinomio di grado n
$\hat{\lambda} \in \mathbb{R}$ radice di molteplicità K di $P(\lambda)$
Allora $P(\hat{\lambda}) = DP(\hat{\lambda}) = D^2 P(\hat{\lambda}) = \dots = D^{(K-1)} P(\hat{\lambda}) = 0$

↳ in realtà questa è una caratterizzazione della molteplicità (vale anche il viceversa)

dim. $\exists\, Q(\lambda)$ polinomio di grado $n-K$ t.c.

$$P(\lambda) = (\lambda - \hat{\lambda})^K Q(\lambda)$$

Allora $\forall j = 1, \dots, K-1$

si può dimostrare per induzione

$$D^j(P(\lambda)) = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} D^i((\lambda - \hat{\lambda})^K) \cdot D^{j-i}(Q(\lambda)) =$$

$$= \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \frac{K!}{(K-i)!} (\lambda - \hat{\lambda})^{K-i} \cdot D^{j-i}(Q(\lambda))$$

c'è sempre negli addendi $(\hat{\lambda} - \hat{\lambda}) = 0$

$$\Rightarrow D^j(P(\hat{\lambda})) = 0$$

Dimostriamo che le funzioni $(*)$ sono soluzioni.

OSS 1 $D^i(fg) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} D^j f \cdot D^{i-j} g$

OSS 2 Se $f(t) = t^K$ con $K \in \{0, \dots, \alpha - 1\}$
allora $D^j f(t) = 0$ se $j > K$

$$D^j f(t) = \frac{K!}{(K-j)!} t^{K-j} \text{ se } j \le K$$

OSS 3 Se $p(\lambda) = \sum_{i=0}^{n} a_i \lambda^i$

$$D^j(p(\lambda)) = \sum_{i=j}^{n} a_i \frac{i!}{(i-j)!} \lambda^{i-j}$$

Tornando alla dim. iniziale:

$x(t) = \underbrace{f(t)}_{\text{del tipo } t^k} e^{\lambda t}$ sono soluzioni

$$\sum_{i=0}^{n} a_i x^{(i)}(t) = \sum_{i=0}^{n} a_i D^{(i)}\left(f(t) e^{\lambda t}\right) =$$

$$\xrightarrow{\text{OSS}_1} = \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} D^j(f) \cdot D^{i-j}(e^{\lambda t})\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} a_i \left(\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} D^j(f) \cdot \lambda^{i-j} e^{\lambda t}\right)$$

lo scrivo in modo esplicito

non dipende da nessun indice quindi lo porto fuori

voglio portarlo nella somma

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{i} \left(\frac{1}{j!} D^j(f)\right)\left(a_i \frac{i!}{(i-j)!} \lambda^{i-j}\right) e^{\lambda t} =$$

riordinamento

$$= \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=j}^{n} \left(\frac{1}{j!} D^j(f)\right)\left(a_i \frac{i!}{(i-j)!} \lambda^{i-j}\right) e^{\lambda t} =$$

$0 \leq j \leq i \leq n$

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!} D^j(f)\right)\left(\sum_{i=j}^{n} a_i \frac{i!}{(i-j)!} \lambda^{i-j}\right)\right) e^{\lambda t} =$$

OSS 3

$$= \left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{j!} D^j(f)\right) D^j(p(\lambda))\right) e^{\lambda t}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ è una soluzione di molteplicità α

Per il lemma

$$D^j(p(\lambda)) = 0 \quad \forall j \in \{0, \dots, \alpha-1\}$$

$$= \left(\sum_{j=\alpha}^{n} \frac{1}{j!} \underbrace{D^j(f)}_{=0} \cdot D^j(p(\lambda))\right) e^{\lambda t}$$

perché f è nella forma t^k, con $k \leq \alpha - 1$

Ciò dimostra che (★) sono soluzioni, inoltre f deve essere tale che le derivate j-esime sono nulle $\Rightarrow$ le uniche possibili sono quelle polinomiali

LINEARE INDIPENDENZA CON λ TUTTE REALI

Per assurdo

$$\sum_{ij} a_i t^{k_i - j} e^{\lambda_i t} = 0$$

$$t^{k_\ell - 1} e^{\lambda_\ell t} = - \sum_{ij} a_i t^{k_i - j} e^{\lambda_i t}$$

↑ + alto

$$= o\left(t^{k_\ell - 1} e^{\lambda_i t}\right) \qquad t \to +\infty$$

assurdo, una funzione non può essere o piccola di se stessa.

Nel caso complesso non posso usare la trascurabilità perché appaiono seni e coseni con molteplicità strane.

ESERCIZI

(1) $x'' - 3x' + 2x = 0$ (1ª parte del compito)

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \; < \begin{matrix} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{matrix}$

$B = \{ e^t, e^{2t} \}$

$x_{gen}(t) = c_1 e^t + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

(2) $\dddot{x} + 3\ddot{x} + 3\dot{x} + x = 0$

$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0 \qquad (\lambda+1)^3 = 0 \qquad \lambda = -1$ molt. 3

$B = \{ e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t} \} =$

$= \{ e^{-t}, te^{-t}, t^2 e^{-t} \}$

$x_{gen}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + c_3 t^2 e^{-t} \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$

(3) $\ddddot{x} - x = 0$

$\lambda^4 - 1 = 0 \quad (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1) = 0$

$(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - i)(\lambda + i) = 0$

$\lambda = \pm 1 \quad \lambda = \pm i$

$B = \{ e^t, e^{-t}, \cos t, \sin t \}$

$x_{gen}(t) = ae^t + be^{-t} + c\cos t + d \sin t \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}$

(4) $\begin{cases} \ddot{x} + 4x = 0 \\ x(\pi) = 1 \\ x'(\pi) = 4 \end{cases}$ $\rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \quad \lambda = \pm 2i$

$x_{gen}(t) = c_1 \sin 2t + c_2 \cos 2t$

$x'_{gen}(t) = 2c_1\cos(2t) - 2c_2\sin(2t)$

$x_{gen}(\pi) = c_1\sin(2\pi) + c_2\cos(2\pi) = c_2$

$x'_{gen}(\pi) = 2c_1\cos(2\pi) - 2c_2\sin(2\pi) = 2c_1$

$c_2 = 1$

$c_1 = 2$

$\Rightarrow x = 2\sin(2t) + \cos(2t)$

(2^a parte del compito)

⑤ $y(t) = \sin(2t) + \cos(3t)$

Che equazione lineare omogenea risolve?

$\sin(2t) \rightarrow \cos(2t) \qquad z = \pm 2i$

$\cos(3t) \rightarrow \sin(3t) \qquad z = \pm 3i$

$p(\lambda) = (\lambda - 2i)(\lambda + 3i)(\lambda - 3i)(\lambda + 2i) =$
$= (\lambda^2 + 4)(\lambda^2 + 9) = \lambda^4 + 13\lambda^2 + 36$

$\overset{''''}{x} + 13\overset{''}{x} + 36 = 0 \quad \rightarrow$ è la più semplice possibile (posso mettere $(\lambda - 3i)^k$ o moltiplicare per $\lambda - \bar{\lambda}$)

05/12/2023

EQ. DIFFERENZIALI DI ORDINE N (proseguimento)

$$\underbrace{x^{(n)} + a_{n-1}(t)x^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)x' + a(t)x}_{\overset{!!}{T(x)} = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)} \text{ (con } a_n = 1)} = f(t)$$

$a_0, a_1, \ldots$ coefficienti

$f(t)$ termine noto

L'equazione è omogenea se $f = 0$

CASO NON OMOGENEO

Lemma Sia x_1 soluzione dell'eq. $T_x = f_1$ e x_2 soluzione dell'equazione $T(x) = f_2$, siano b_1, b_2 costanti
$\Rightarrow$ Allora $x = b_1x_1 + b_2x_2$ risolve $T(x) = b_1f_1 + b_2f_2$.

dim. per Ip.

omomorfismo di valutazione

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x_1^{(i)} = f_1 \longrightarrow b_1\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x_1^{(i)} = b_1f_1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, b_1 x_1^{(i)} = b_1f_1 \longrightarrow \sum_{i=0}^{n} a_i(t)(b_1x_1)^{(i)} = b_1f_1$$

posso metterlo nella derivata

Analogamente per b_2, sommando ottengo:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\left[(b_1x_1)^{(i)} + (b_2x_2)^{(i)}\right] = b_1f_1 + b_2f_2$$

$$\downarrow$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \cdot \underbrace{\left(b_1x_1 + b_2x_2\right)}_{\text{funzione } x}^{(i)} = b_1f_1 + b_2f_2 \implies \text{è la tesi}$$

$\square$

OSS. $T: \underset{\text{funzione}}{x} \mapsto T(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, x^{(i)}$ (dimentichiamo per il momento spazio di arrivo e di partenza) $V \to W$

Il lemma dice che

$$T(b_1x_1 + b_2x_2) = b_1 \underset{T(x_1)}{\overset{\shortparallel}{f_1}} + b_2 \underset{T(x_2)}{\overset{\shortparallel}{f_2}}$$

$$T(b_1x_1 + b_2x_2) = b_1T(x_1) + b_2T(x_2) \implies T(x) \text{ è una applicazione lineare}$$

$a_0, \dots, a_{n-1}$ funzioni definite su un intervallo I

$V = \{ x \text{ funzioni su } I \text{ derivabili } n \text{ volte} \}$

$W = \{ \text{funzioni su } I \}$

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} a_i(t)x^{(i)}}_{T(x)} = f(t)$$

TEOREMA

Considero l'eq. non omogenea $T(x) = f(x)$ $(*)$ e l'eq. omogenea associata $T(x) = 0$ $(*_{om})$

Supponiamo di conoscere $\boxed{\text{una}}$ soluzione $\tilde{x}$ di $(*)$ e $\boxed{\text{tutte}}$ le soluzioni x_{om} di $(*_{om})$

Allora le soluzioni x dell'eq. non omogenea sono <u>tutte</u> (1) e <u>sole</u> (2) quelle della forma

$$x = \tilde{x} + x_{om}$$

Dim. (1) se $T(\tilde{x}) = f$ e $T(x_{om}) = 0$, posto $x = \tilde{x} + x_{om}$
$\implies T(x) = f$

(2) Se $T(x) = f$ e $T(\tilde{x}) = f$ allora $\exists\, x_{om} \mid T(x_{om}) = 0$ e
$x = \tilde{x} + x_{om}$

(1) dal lemma $T(\tilde{x}) + T(x_{om}) = f + 0$

$$\downarrow$$

$$T(\tilde{x} + x_{om}) = f$$

(2) $T(x) - T(\hat{x}) \underset{\text{lemma}}{=} T(x-\hat{x}) = f - f = 0$

$x - \hat{x}$ è una soluzione dell'omogenea

$x_{om} = x - \hat{x}$ $\square$

D'ora in poi considero solo coeff. costanti.

$$T(x) := \sum_{i=0}^{n} a_i x^{(t)} = f(t)$$

<u>Corollario</u> "Se trovo una soluzione di (*) le trovo tutte"

Cerchiamo $\hat{x}$ quando f è di una forma speciale

METODO 1: $f(t) = be^{\mu t}$ con $\mu / P(\mu) \neq 0$ P polinomio caratteristico

$\hat{x}$ della forma $\hat{x} = \beta e^{\mu t}$ con $\beta \in \mathbb{R}$

(bisogna trovare β)

es. $\ddot{x} - 4x = 9e^t$

$P(\lambda) = \lambda^2 - 4 \rightarrow \lambda = \pm 2$

$x_{om} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Cerco $\hat{x} = \beta e^t$

$\downarrow$ sostituendo

$\beta e^t - 4\beta e^t = 9e^t$

$-3\beta e^t = 9e^t \xrightarrow[\text{vera } \forall t \text{ se}]{} \beta = -3$

$\hat{x} = -3e^t$

$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} - 3e^t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ soluzione generale

se $P(\mu) = 0$ cerco $\hat{x} = \beta t e^{\mu t}$ se la molt. di μ è 1

se μ è zero di P con molteplicità θ cerco

$\beta t^{\theta} e^{\mu t}$

$x'' - 4x = 8e^{2t}$ soluzione con molt. 1 del polinomio caratteristico

$\hat{x} = \beta t e^{2t}$

$\hat{x}' = \beta(2t+1)e^{2t}$

$\hat{x}'' = \beta(2t+4)e^{2t}$

$\hat{x}'' - 4\hat{x} = \beta(4t+4)e^{2t} - 4\beta t e^{2t} = 8e^t$

$\beta(\cancel{4t} + 4 - \cancel{4t}) = 8$; $\beta = 2$

$\hat{x} = 2te^{2t} \rightarrow x_{gen} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-2t} + \underbrace{2te^{2t}}_{\hat{x}}$

Versione più generale:

Se $f(t) = p(t) e^{\mu t}$ con p polinomio di grado d e μ zero del polinomio caratteristico con molt. θ (se $p_c(\mu) \neq 0$ pongo $\mu = 0$) $\Rightarrow \tilde{x} = q(t)\, t^{\theta} e^{\mu t}$ con q polinomio di grado d

es. $\ddot{x} - x = 4te^{t}$

stesso grado

$P(\lambda) = \lambda^2 - 1 \rightarrow \lambda = \pm 1$ $\qquad x_{om} = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{x} = (\beta_0 + \beta_1 t)\, t e^{t}$

$\tilde{x} = (\beta_0 t + \beta_1 t^2) e^{t}$

...

cerco β_0 e β_1 sostituendo $\tilde{x}$ nell'equazione originale

$x' - x = 4te^{t}$

$P(\lambda) = \lambda - 1 \Rightarrow \lambda = 1$

$\tilde{x} = (\beta_0 + \beta_1 t)\, t\, e^{t}$ → perché 1 ha molteplicità 1

$\tilde{x}' = (\beta_0 + 2\beta_1 t) e^{t} + (\beta_0 t + \beta_1 t^2) e^{t} =$

$= (\beta_0 + 2\beta_1 t + \beta_0 t + \beta_1 t^2) e^{t}$

sostituendo

$\tilde{x}' - \tilde{x} = (\beta_0 + 2\beta_1 t + \cancel{\beta_0 t} + \cancel{\beta_1 t^2} - \cancel{\beta_0 t} - \cancel{\beta_1 t^2}) e^{t} = 4te^{t}$

$(\beta_0 + 2\beta_1 t) e^{t} = 4te^{t}$

$\Rightarrow \beta_0 + 2\beta_1 t = 4t$

$\beta_0 = 0$

$2\beta_1 = 4 \; ; \; \beta_1 = 2$

$x_{gen} = c_1 e^{t} + 2t^2 e^{t} \qquad c_1 \in \mathbb{R}$

METODO 2: $f(t) = p_1(t) \cos(\omega t) e^{\mu t} + p_2(t) \sin(\omega t) e^{\mu t}$

con p_1, p_2 polinomi di grado $\leq d$

con $\mu \pm \omega i$ zero di P con molteplicità θ

(Se $P(\mu \pm \omega i) \neq 0$ metto $\theta = 0$).

Allora cerco $\tilde{x} = \left(q_1(t) \cos(\omega t) + q_2(t) \sin(\omega t)\right) t^{\theta} e^{\mu t}$

con q_1, q_2 polinomi di grado $\leq d$

↳ vanno trovati i coeff. di questi polinomi

Esercizio: $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = \cos(t)$

ingloba il metodo 1 ponendo $\omega = 0$ e $p_1(t)$ costante reale

COEFF COSTANTI 07/12/23

$$L(x) = x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \dots + a_0 x = 0$$

$\downarrow$

operatore lineare che si comporta come un polinomio delle derivate della funzione

$$P(D)x = (D^{(n)} + a_{n-1}D^{(n-1)} + \dots + a_1 D + a_0 I)(x)$$

$$D = \frac{d}{dx} \qquad D^i = \frac{d^i}{dx^i}$$

L è una applicazione lineare che valuta il primo membro dell'eq in una certa funzione.
Le soluzioni dell'omogenea sono il kernel di questa applicazione

$$\frac{d}{dx} : C^1(I) \to C^0(I)$$

$C^1(I) = \{$ funzioni $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabili con f' continua $\}$

$C^0(I) = \{ f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue $\}$

$D^i : C^i(I) \to C^0(I)$

$D^i : C^{n+i}(I) \to C^n(I)$ (include la riga di sopra)

$D^\infty : C^\infty(I) \to C(I)$

$\downarrow$

funzioni da I in $\mathbb{R}$ derivabili ∞ volte

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{n_1}(D - \lambda_2 I)^{n_2} \cdots (D - \lambda_k I)^{n_k}.$$

Posso fare la composizione di applicazioni lineari per ottenere T $\Leftrightarrow$ posso fare il prodotto di fattori per avere P

ESEMPIO

$$\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + 2x(t) = T(x)$$
$$(D^2 + 3D^1 + 2I)(x) = P(D)(x)$$
$$(D + 2I)(D + I) = (D + I)(D + 2I)$$

$T_1(x) = (D + I)(x) = x' + x$

$T_2(x) = (D + 2I)(x) = x' + 2x$

$T_1(T_2(x)) = T_1(x' + 2x) = \underbrace{x'' + 2x'}_{x'} + \underbrace{x' + 2x}_{x} = x'' + 3x' + 2x = T(x)$

$T_2(T_1(x)) = \dots = T(x)$

$$P(D) = (D - \lambda_1 I)^{n_1} \cdots (D - \lambda_k I)^{n_k}$$

$T(x) = (T_1^{n_1} \cdot \dots \cdot T_k^{n_k})(x)$

$T_i(x) = (D - \lambda_i I)(x)$

$T^2 = T \circ T \qquad T^{n_i} = \underbrace{T \circ \dots \circ T}_{n_i \text{ volte}}$

OSS. Se $x_i(t)$ è soluzione di $T_i(x) = 0$ allora è soluzione di $T(x) = 0$

$$T(x) = (T_1^{u_1} \cdot \ldots \cdot T_k^{u_k} \cdot T_i)(x) =$$
$$= (T_1^{u_1} \cdot \ldots \cdot T_k^{u_k})(0) = 0$$

Se il polinomio caratteristico ha radici reali distinte

$$p(D) = (D - \lambda_1 I) \cdots (D - \lambda_n I)$$

Com'è una soluzione di $(D - \lambda_i I)(x) = 0$?

$$\dot{x} - \lambda_i x = 0 \qquad \text{eq. differenziale del primo ordine}$$

$$x(t) = e^{\lambda t} \cdot c$$

Nella base canonica metto $e^{\lambda i t}$

$$B_p = \{ e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \ldots, e^{\lambda_n t} \}$$

Caso con molteplicità:

$$(D - \lambda_i I)^m = 0$$

$m = 2$

$$(D - \lambda_i I)(x) = 0 \qquad x_1(t) = e^{\lambda i t}$$

$\exists\ x_2(t)$ soluzione di $(D - \lambda_i I)^2(x) = 0$ per cui

$$(D - \lambda_i I)(x) \neq 0 \qquad (D - \lambda_1 I)(x) = y_2(t) \neq 0$$

$$0 = (D - \lambda_i I)(D - \lambda_1 I)(x_2) = (D - \lambda_i I)\big((D - \lambda_i I)(x_2)\big) =$$
$$= (D - \lambda_i I)(y_2)$$

$$\Rightarrow (D - \lambda_i I)(y_2) = 0$$

$$\dot{y}_2 - \lambda_i y_2 = 0 \qquad y_2 = e^{\lambda_i t}$$

$$(D - \lambda_i I)(x_2) = y_2 = e^{\lambda i t}$$

$$\ddot{x}_2 - \lambda_2 x_2 = e^{\lambda i t} \qquad \text{eq. lineare del 1° ordine}$$

$$x_2(t) = e^{\lambda i t} \left[c + \int e^{-\lambda i t} \cdot e^{\lambda i t}\, dt \right] =$$

$$= e^{\lambda t} [c + t] \rightsquigarrow c = 0 \qquad x_2(t) = t e^{\lambda i t}$$

Metodo degli ANNICHILATORI $\quad P(D) = D^{(n)} + a_{n-1} D^{(n-1)} + \dots + a_0 I$

Per risolvere $P(D)(x) = f$ con $P(D)$ a coeff. costanti

Claim So risolvere $P(D)(x) = f$ ogni volta in cui f risolve $Q(D)(f) = 0$ dove $Q(D) = D^{(k)} + b_{k-1} D^{(k-1)} + \dots + b_0 I$

① Chiamo $X_P = \{ x \text{ soluzione di } P(D)(x) = 0 \}$ $\quad \dim(X_P) = n$

$X_{QP} = \{ x \text{ soluzione di } Q(P(D))(x) = 0 \}$

$\dim(X_{QP}) = n + k$

OSS $\quad X_P \subset X_{QP}$ $\quad$ tutte le soluzioni di $P(D)(x) = 0$ sono soluzioni di $(Q(D) \circ P(D))(x) = 0$

$\downarrow$

Prendo $\tilde{x}$ sol di $P(D)(x) = 0$

Allora $Q(P(D))(\tilde{x}) = Q(D)(0) = 0$

Chiamo B_P la base canonica di X_P

$B_P = \{ x_1, \dots, x_n \}$

Completo B_P ad una base di X_{QP} aggiungendo k funzioni lin. indipendenti

$B_{PQ} = \{ x_1, \dots, x_{n+k} \}$

② Se $\tilde{x}$ risolve $P(D)(x) = f$

$(P(D)(\tilde{x}) = f)$ allora $\tilde{x}$ risolve $Q(D) \circ P(D)(\tilde{x}) = 0$

Prendo $\tilde{x} \mid P(D)(\tilde{x}) = f$,

allora $(Q(D) \circ P(D))(\tilde{x}) = Q(D)(f) = 0$

Quindi $\tilde{x} = \underbrace{c_1 x_1 + \dots + c_n x_n}_{\hat{x}} + c_{n+1} x_{n+1} + \dots + c_{n+k} x_{n+k}$

③ Se $\hat{x} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ allora $\hat{x}$ deve essere sol. di $P(D)(x) = 0$

Grazie al lemma, se $\tilde{x}$ risolve $P(D)(x) = f$ allora

$\tilde{x} - \hat{x}$ risolve $P(D)(x) = f$

$\tilde{x} - \hat{x}$ risolve $P(D)(x) = f$

$\tilde{x} - \hat{x} = c_{n+1} y_{n+1} + \dots + c_{n+k} y_{n+k}$

$\exists$ una soluzione di $P(D)(x) = f$ che è combinazione lineare delle funzioni che stanno in B_{QP} / B_P

$$\begin{cases} F(t) = t^K & Q(D) = D^{K+1} \\ F(t) = t^K e^{\lambda t} & Q(D) = (D-\lambda I)^{K+1} \\ f(t) = t^K e^{\lambda t} \cdot \cos \beta t & Q(D) = \left(D^2 - 2\lambda D + (\lambda^2 - \beta^2) I\right)^{K+1} \\ \quad t^K e^{\lambda t} \cdot \sin \beta t & \end{cases}$$

Es 1.

$$P(D) = (D-I)^3 (D-2I)^2 (D-4I)$$
$$Q(D) = (D-I)^2 (D-2I)$$

Scrivere B_P, B_{QP} e dire di quali funzioni sarà comb. lineare una soluzione di $P(D)(x) = f$ con f tale che $Q(D)(f) = 0$

$$B_P = \{ e^t, te^t, t^2 e^t, e^{2t}, te^{2t}, e^{4t} \}$$

$$Q(D) \cdot P(D) = (D-I)^5 (D-2I)^3 (D-4I)$$

$$B_{QP} = \{ e^t, te^t, t^2 e^t, t^3 e^t, t^4 e^t, e^{2t}, te^{2t}, t^2 e^{2t}, e^{4t} \}$$

$$\hat{x} = c_1 t^4 e^t + c_2 t^3 e^t + c_3 t^2 e^{2t} \qquad \text{con } c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$$

ES 2. $\ddot{x} - 6\dot{x} + 9x = 4te^{3t}$

$P(D) = D^2 - 6D + 9I = (D - 3I)^2 \qquad B_P = \{ e^{3t}, te^{3t} \}$

$Q(D) = (D - 3I)^2 \qquad$ (devo trovare $Q(D)$ t.c. $Q(D)(x) = 0$ ha come soluzione te^{3t})

$$Q(D) \cdot P(D) = (D - 3I)^4$$

$$B_{QP} = \{ e^{3t}, te^{3t}, t^2 e^{3t}, t^3 e^{3t} \}$$

$$\hat{x}(t) = c_1 t^2 e^{3t} + c_2 t^3 e^{3t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$$\hat{x}'(t) = 2c_1 te^{3t} + 3c_1 t^2 e^{3t} + 3c_2 t^2 e^{3t} + 3c_2 t^3 e^{3t} =$$
$$= 2c_1 te^{3t} + 3(c_1 + c_2) t^2 e^{3t} + 3c_2 t^3 e^{3t}$$

$$\hat{x}''(t) = 2c_1 e^{3t} + 6c_1 te^{3t} + 6(c_1 + c_2) te^{3t} + 9(c_1 + c_2) t^2 e^{3t} +$$
$$+ 9c^2 t^2 e^{3t} + 9c_2 t^3 e^{3t}$$

Va sostituito nell'equazione originaria e alla fine dovrei ottenere

$c_1 = 0$

$c_2 = 2/3$

$$x_{gen}(t) = c_1 e^{3t} + c_2 te^{3t} + \frac{2}{3} t^3 e^{3t}$$

TEORIA DEGLI INSIEMI 11/12/2023

- $A \cup B$, data $\mathcal{F}$ famiglia di insiemi $\bigcup \mathcal{F} = \{x \mid \exists A \in \mathcal{F} \text{ t.c. } x \in A\}$
  $\bigcap \mathcal{F} = \{x \mid x \in A \ \forall A \in \mathcal{F}\}$
- $A \setminus B$ o $A - B$
- $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ (elementi che sono in uno dei due insiemi ma non in entrambi)
- $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$
- $A^n := \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ volte}} = \{(a_1, \ldots, a_n) \mid a_i \in A\}$
- $A^I = \{\text{funzioni da } I \text{ ad } A\}$
- $\mathcal{P}(A) = \{\text{sottoinsiemi di } A\} \leftrightarrows \{\text{funzioni da } A \text{ in } \{0,1\}\} = \{0,1\}^A = 2^A$

Dato $B \subset A$ la funzione indicatrice di B è

$$\mathbb{1}_B : A \to \{0,1\}$$

data da

$$\mathbb{1}_B(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in B \\ 0 & \text{se } x \notin B \end{cases}$$

L'applicazione che $\forall B \in \mathcal{P}(A)$ associa la funzione indicatrice

$$B \in \mathcal{P}(A) \longmapsto \mathbb{1}_B \in \{0,1\}$$

è una BIGEZIONE

Una funzione f da A in B è un sottoinsieme S di $A \times B$ tale che $\forall a \in A \ \exists! \, b \in B \mid (a,b) \in S$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \subset & \mathbb{Z} & \subset & \mathbb{Q} & \subset \mathbb{R} & \subset \mathbb{C} \\ \shortparallel & & \shortparallel & & \shortparallel & & \\ \{0,1,\ldots\} & & \{0, \pm 1, \ldots\} & & \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}\ q \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} & & \end{array}$$

$\mathbb{R} = \{\text{numeri in base 10 con espansione decimale } \infty\}$

$0{,}999\ldots = 0{,}\overline{9} = 1$
$4{,}36\overline{9} = 4{,}37$

difetti di questa rappresentazione
- le operazioni non sono definite
- è complicato definire un ordinamento
- è dipendente dalla scelta della base 10

Un numero reale è razionale sse è periodico (la sua rapp. decimale è periodica o finita)

posso vedere ad esempio 3,1 come $3{,}1000\ldots = 3{,}1\overline{0}$

① $\frac{10}{7}$ è periodico

$$\begin{array}{l|l} 10 & 7 \\ \hline 30 & 1,4285714\ldots \\ \quad 20 & = 1,\overline{428571} \\ \quad\quad 60 & \\ \quad\quad\ 40 & \\ \quad\quad\quad 50 & \\ \quad\quad\quad\ 10 & \\ \quad\quad\quad\quad 30 & \\ \quad\quad\quad\quad \ldots & \end{array}$$

questi resti sono un numero finito => prima o poi si ripetono

② $13,471\overline{36}$

$$13,471 + 0,00\overline{36} = \frac{13471}{1000} + \frac{1}{1000}\, 0,\overline{36} =$$

$$= \frac{13471}{1000} + \frac{1}{100} \cdot 36 \cdot \underbrace{\frac{1}{99}}_{=\,0,\overline{01}}$$

LEMMA

$$\boxed{0,\underbrace{\overline{000\ldots01}}_{K} = \frac{1}{\underbrace{999\ldots9}_{K}}}$$!!!

K = num di cifre del periodo

Insiemi finiti e infiniti

Def. A è finito se esiste $n \in \mathbb{N} - \{0\}$ | esiste f da $\{1, \ldots, n\} \to A$ bigettiva

Def. A è infinito se non è finito

Prop. il numero n è unico e viene chiamato # di elementi di A

TESI:

Dato A finito $f : \{1, \ldots, n\} \to A$ bigettiva e
$g : \{1, \ldots, m\} \to A$ bigettiva

implica $m = n$

LEMMA Se $h : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, m\}$ è bigettiva allora $n = m$.

dim. per induzione su n

Prop. A è infinito $\Leftrightarrow \exists f : \mathbb{N} \to A$ iniettiva

Def. Un insieme A è numerabile se esiste $f: \mathbb{N} \to A$ bigettiva
(a volte in questa definizione vengono inclusi anche gli insiemi finiti)

ESEMPI DI INSIEMI NUMERABILI

$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}^2$

$A = \{$ num. algebrici = soluzioni di $P(x)$ (con P polinomio a coeff. interi)$\}$

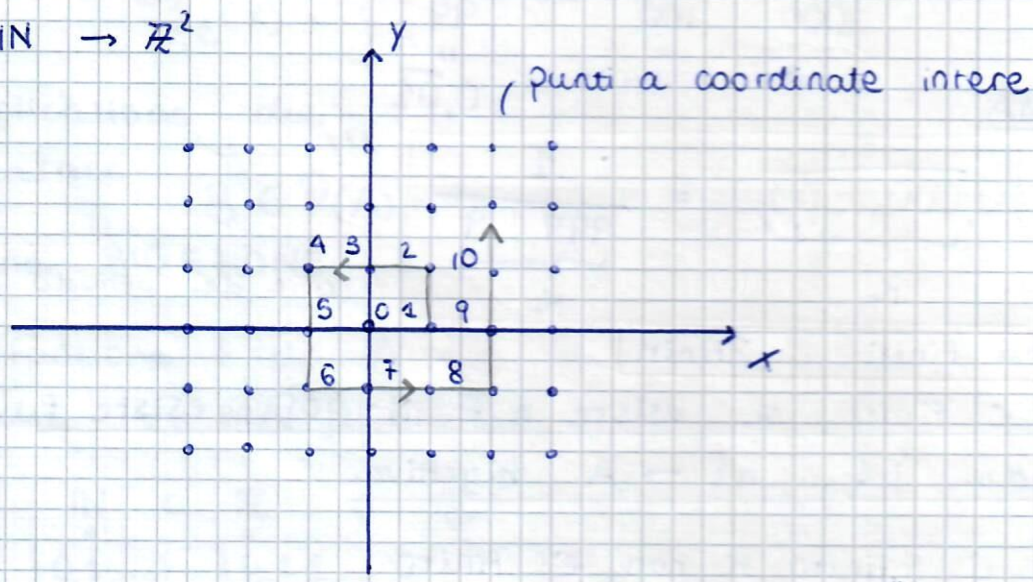
NON NUMERABILI

$\mathbb{R}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ — dimostrabile con "l'argomento diagonale" di Cantor

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ bigettiva

$$f(n) := \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{se } n \text{ pari} \to \text{num positivi} \\ -\frac{n+1}{2} & \text{se } n \text{ dispari} \to \text{num. negativi} \end{cases}$$

$f: \mathbb{N} \to \mathbb{Z}^2$



COMPLETEZZA DEI NUMERI REALI

26/02/2024

Modello di riferimento:

$$\mathbb{R} = \{\text{num. con segno e espansione decimale } \infty\}$$

$$x = \pm \underset{\mathbb{N}}{\underset{\cap}{n_0}}, \underset{\{0,\dots,9\}}{\underset{\cap}{a_1}} a_2 \dots$$

DIFETTI:

1- Le operazioni non sono ben definite (si possono definire ma non lo faremo) → perché tutti gli algoritmi normalmente utilizzati partono dalla fine del numero

2- perché base 10?

<u>NOTA</u>: è ben definito l'ordine "$\leq$"

Numeri reali estesi

$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = \overline{\mathbb{R}}$

- A Achtung! Le operazioni $+$ e $\cdot$ non si estendono a $\overline{\mathbb{R}}$ (alcune possono essere definite, ad esempio $+\infty \cdot a$, $+\infty + a$ ma anche in questo caso vengono perse delle proprietà fondamentali:

$$x + y = x \Rightarrow y = 0$$

non vale più la legge di cancellazione

$$+\infty + a = +\infty \not\Rightarrow a = 0\ )$$

- La relazione d'ordine si estende a $\overline{\mathbb{R}}$

Def. Dato $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ si definiscono:

- $\max E$; $\min E$
- $Mag(E) := \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid E \leq y\} = \{\text{maggioranti di } E\}$ ($x \leq y\ \forall x \in E$)
- $Min(E): \{y \in \overline{\mathbb{R}} \mid E \geq y\} = \{\text{minoranti di } E\}$

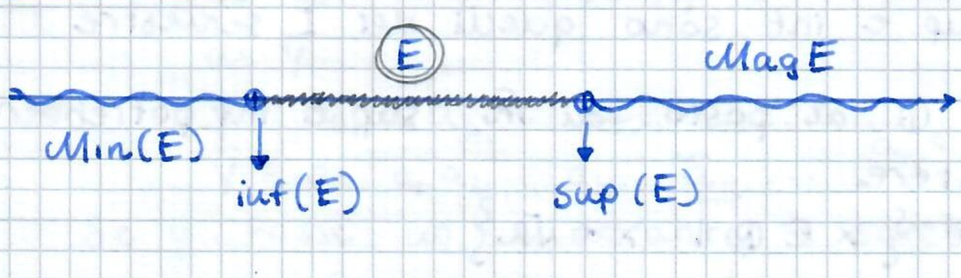
per queste def. vedi lezioni del 10/10/2023

$(+\infty \in Mag E,\ -\infty \in Min E\}$ Per cui vale sempre $Mag(E) \neq \emptyset$ e $Min(E) \neq \emptyset$

- $\sup(E) := \min(Mag(E))$ (= estremo superiore)
- $\inf(E) := \max(Min(E))$ (= estremo inferiore)

Chi ci dice che sup e inf esistono? max e min di un insieme non esistono sempre

TEOREMA $\sup(E)$ e $\inf(E)$ esistono (in $\overline{\mathbb{R}}$) $\forall E \subset \overline{\mathbb{R}}$



Commenti: I intervallo di estremi a, b; allora

① $b = \sup I$ e $a = \inf I$ ↳ (indifferentemente chiuso o aperto)

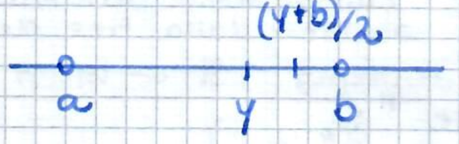
Verifica:

$Mag(I) = [b, +\infty)$
$Min(I) = (-\infty, a]$

(Mag e Min contengono a e b a prescindere dal fatto che I sia chiuso o aperto)

dim

↳ Sia $y < b$. Allora se $b \in I$ allora y non può essere un maggiorante, se $b \notin I \Rightarrow \frac{y+b}{2}$ è un elemento di I (se $y \in I$) più grande di y



Se $y < a$ allora ogni elemento di I è più grande di y che dunque non può essere un maggiorante

$Mag(I) = [b, +\infty) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup(I) = b$

(Allo stesso modo si verifica che $\inf(I) = a$)

Sugli interi questa argomentazione non funziona, $\frac{y+b}{2}$ potrebbe non essere intero.

② $\sup(\emptyset) = ?$ $\inf(\emptyset) = ?$

non ci sono verifiche da fare, per cui va bene qualsiasi numero

$Mag(\emptyset) = \{ y \in \overline{\mathbb{R}} \mid y \geq x \ \forall x \in \emptyset \} = \overline{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \sup(\emptyset) = -\infty$ $\quad \sup \emptyset = \min(Mag(\emptyset))$

$Min(\emptyset) = \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \inf(\emptyset) = +\infty = \max(Min(\emptyset)) = \max(\overline{\mathbb{R}})$

③ Se $E \neq \emptyset \Rightarrow \inf E \leq \sup E$

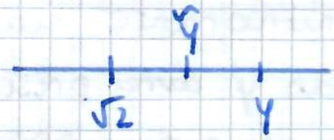
④ Se $\max E$ esiste allora $\max E = \sup E$
Se $\min E$ esiste allora $\min E = \inf E$ (si dimostra facilmente dalla def.)

⑤ Es: Se $E = I_1 \cup \dots \cup I_n$ (unione finita di intervalli) allora sup e inf sono quelli del I semestre

⑥ Se metto $\mathbb{Q}$ al posto di $\mathbb{R}$, sup e inf potrebbero non esistere

$E = \{ x \in \mathbb{Q} \mid x < \sqrt{2} \}$

$Mag_{\mathbb{Q}}(E) := \{ y \in \mathbb{Q} \mid y \geq \sqrt{2} \}$ non ammette minimo in $\mathbb{Q}$



$\forall y \in \mathbb{Q} \mid y > \sqrt{2}$
posso trovare $\hat{y} \in \mathbb{Q} \mid$
$\sqrt{2} < \hat{y} < y$

⑦ Corollario del TEO
Se $E \subset \mathbb{R}$ è limitato superiormente (cioè $\exists y$ maggiorante finito) allora $\sup E \in \mathbb{R}$ (≡ allora $\sup E$ è finito)

Se $E \in \mathbb{R}$ " " inferiormente allora $\inf E \in \mathbb{R}$ (≡ allora $\inf E$ è finito)

TEO: Dato $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\sup E$ e $\inf E$ esistono in $\overline{\mathbb{R}}$

Dim <u>esistenza di $\inf E$ con $E \neq \emptyset$ e $0 \leq E$ ($E \subset [0, +\infty)$) ed $E \neq \{+\infty\}$</u>

- prendo n_0 più grande minorante intero
- prendo $a_1 \in \{0, \dots, 9\}$ tale che $n_0, a_1 \leq E$ e a_1 è maggiore possibile
- prendo $a_2 \in \{0, \dots, 9\}$ più grande cifra tale che $n_0, a_1 a_2 \leq E$

etc. etc.

RIASSUNTO: costruisco l'inf con l'algoritmo e faccio vedere che è un minorante e poi che è il maggiore dei minoranti

Pongo $\overline{y} = n_0, a_1 a_2 a_3 \dots$
Allora $\overline{y} = \inf E$ cioè

(i) • $\overline{y} \in Min(E)$
(ii) • $\overline{y} \geq y \quad \forall y \in Min(E)$

(i) appartiene ai minoranti
(ii) è il più grande di essi

(i) Prendo $x < \overline{y}$ e dimostro che $x \notin E$. ← negazione della prop. di essere minorante
Infatti $x < \overline{y} \Rightarrow$ prendo k più piccolo indice per cui la cifra k-esima di $x <$ cifra k-esima di y
$\Rightarrow x < \underbrace{n_0, a_1 a_2 \dots a_k}_{\text{troncamento di } \overline{y}} \Rightarrow x \notin E$
($n_0, a_1 \dots a_k$ per costruzione era un minorante di E)

(ii) Dato $y > \overline{y}$ dimostro che y non è un minorante
$y > \overline{y} \Rightarrow$ prendo k più piccolo indice per cui la k-esima cifra di y è $\neq$ dalla k-esima cifra di $\overline{y}$

$y = n_0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} a_k \dots$
$\hat{y} = n_0, a_1 a_2 \quad a_{k-1} \hat{a}_k \dots$
$\hat{a}_k < a_k$

Se y fosse un minorante, lo sarebbe anche $n_0, a_1 \dots \hat{a}_k$ ma $n_0, a_1 \dots \hat{a}_k < n_0, a_1 \dots a_k \leq y \leq E$

Ma ciò contraddice il modo in cui ho scelto a_k perché $n_0, a_1 \dots a_k$ sarebbe un minorante maggiore di $n_0, a_1 \dots \hat{a}_k$ (per cui costruendo y avrei preso a_k e non $\hat{a}_k$)
(ci sono diversi buchi es: se $a_k = n_0$ oppure appaiono numeri negativi, inoltre $\bar{y}$ andrebbe costruito per induzione)

OSS Esistenza di n_0 = più grande minorante intero di E
Dato che $E \neq \emptyset$ e $E \neq \{+\infty\}$, allora E contiene un numero finito $\Rightarrow$ $Min(E) \cap \mathbb{Z}$ è limitato superiormente $\Rightarrow$ ammette massimo
(si dimostra che ogni sottoinsieme di $\mathbb{Z}$ limitato superiormente ammette massimo)
(inoltre, ogni $F \subset \mathbb{N}$ ammette minimo)

Corollario: Dati $E, F \in \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset \neq F$ e $E \leq F$ allora
($\forall x \in E$ e $\forall y \in F$ vale $x \leq y$)
$\exists x \in \mathbb{R} \mid E \leq x \leq F$
cioè $\mathbb{R}$ soddisfa $\boxed{\text{l'ASSIOMA DI COMPLETEZZA}}$
Dim. Va bene prendere $x = \sup E$ oppure $x = \inf F$ $\square$

Se $x = \sup E$ basta osservare che $F \subseteq Mag(E) \Rightarrow x \leq F$

///

$\rightarrow$ Es. intermedio (tra 1^a e 2^a parte)

- $x'' + 5x' + 4x = 2e^t + \sin(t)$

$x(t) = x_{OM}(t) + x_1(t) + x_2(t)$

con

$x_{OM}(t)$ la soluzione dell'omogenea

$x_1(t)$ sol. di $x'' + 5x' + 4x = 2e^t$

$x_2(t)$ sol. di " $= \sin(t)$

$P(\lambda) = \lambda^2 + 5\lambda + 4 = (\lambda+1)(\lambda+4)$

$x_{OM}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Per trovare x_1 cerco soluzioni del tipo $x_1(t) = ce^t$

$ce^t(1+5+4) = 2e^t \Rightarrow c = 1/5$

$x_1(t) = \frac{1}{5}e^t$

- Per trovare x_2 cerco soluzioni del tipo $x_2(t) = a\sin t + b\cos t$

$x_2'(t) = a\cos t - b\sin t$

$x_2''(t) = -a\sin t - b\cos t$

$-a\sin t - b\cos t + 4(a\sin t + b\cos t) + 5(a\cos t - b\sin t) = \sin t$

$(3a - 5b)\sin t + (3b + 5a)\cos t = \sin t$

$\Rightarrow \begin{cases} 3a - 5b = 1 \\ 3b + 5a = 0 \rightarrow b = -\frac{5}{3}a \end{cases}$

$3a + \frac{25}{3}a = 1$

$a = \frac{3}{34} \quad b = -\frac{5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{34} = -\frac{5}{34}$

$x_2(t) = \frac{3}{34}\sin(t) - \frac{5}{34}\cos t$

$\Rightarrow x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-4t} + \frac{1}{5}e^t + \frac{3}{34}\sin(t) - \frac{5}{34}\cos(t)$

$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Tipico esercizio della seconda parte

Dato $a \in \mathbb{R}$

$\ddot{x}(t) - 2a\dot{x}(t) + (a-2)^2 x(t) = -e^t$

1) Trovare la soluzione generale
2) Per quali $a \in \mathbb{R}$ $\exists$ almeno una soluzione $x(t)$ | $x(t) \sim e^{3t}$ per $t \rightarrow +\infty$

1) $\lambda^2 - 2a\lambda + (a-2)^2 = 0$

$\frac{\Delta}{4} = a^2 - (a-2)^2 = 4(a-1)$

$\underline{a>1}$

$$\lambda_{12} = a \pm 2\sqrt{a-1}$$

$$x_{om} = c_1 e^{(a+2\sqrt{a-1})t} + c_2 e^{(a-2\sqrt{a-1})t} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\underline{a=1}$ $\quad \hat{\lambda} = 1$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

$\underline{a<1}$ $\quad \rho \pm i\omega = a \pm 2i\sqrt{1-a} \rightarrow |a-1|$

$$x_{om}(t) = e^{at}\left(c_1 \cos((2\sqrt{1-a})t) + c_2 \sin((2\sqrt{1-a})t)\right)$$

$$\ddot{x} - 2a\dot{x} + (a-2)^2 x = -e^t$$

$a \neq 1$ $\quad$ 1 non deve essere soluzione del polinomio associato

$a \pm 2\sqrt{a-1} \neq 1$ $\qquad \tilde{x}(t) = ce^t$

$$\begin{cases} a \pm 2\sqrt{a-1} \neq 1 \\ \pm 2\sqrt{a-1} \neq 1-a \\ 4(a-1) \neq a^2+1-2a \\ a^2-6a+5 \neq 0 \\ (a-5)(a-1) \neq 0 \end{cases}$$

$$ce^t(1-2a+(a-2)^2) = -e^t$$
$$c(1-2a+a^2+4-4a) = -1$$
$$c(a^2-6a+5) = -1$$
$$c(a-1)(a-5) = -1 \quad ; \quad c = \frac{-1}{(a-1)(a-5)} \quad \text{se } a \neq 1 \text{ e } a \neq 5$$

Se $a=1 \vee a=5$ la sol. particolare non sarà della forma ce^t

$\underline{a=1}$

molteplicità 2

$$\tilde{x}(t) = ct^2e^t$$
$$\tilde{x}'(t) = 2cte^t + ct^2e^t$$
$$\tilde{x}''(t) = 2ce^t + 2cte^t + 2cte^t + ct^2e^t =$$
$$= 2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t$$

$$ce^t(2 + \cancel{4t} + \cancel{t^2} - \cancel{4t} - \cancel{2t^2} + \cancel{t^2}) = -e^t$$
$$ce^t\, 2 = -e^t \Rightarrow c = -1/2$$

$\underline{a=5}$ $\quad$ se $a=5$, allora 1 è una soluzione di molteplicità 1

$$\tilde{x}(t) = cte^t$$
$$\tilde{x}'(t) = c(t+1)e^t$$
$$\tilde{x}''(t) = c(t+2)e^t$$

sostituendo:

$$ce^t(\cancel{t} + 2 - \cancel{10t} - 10 + \cancel{9t}) = -e^t$$

$$ce^t(-8) = -e^t \qquad c = 1/8$$

All'esame riassumere tutti i risultati in una tabella o dire da cosa è data l'eq. generale

2) Tutte le particolari sono trascurabili rispetto ad e^{3t}

$\Rightarrow$ devo guardare le omogenee

$a < 1$ X

$a = 1$ X

$a \pm 2\sqrt{a-1} = 3$ (se avessi richiesto tutte asintoticamente equivalente a e^{3t} avrei potuto porre solo $a + 2\sqrt{a-1} = 3$, l'altra sarebbe stata + grande)

ES. Risolvere $\begin{cases} x'(t) = \dfrac{e^t}{\cos(x(t))} \\ x(0) = \pi \end{cases}$

$\cos(x(t))\, x'(t) = e^t$

$\int \cos(x(t))\, \dot{x}(t)\, dt = \int e^t\, dt$

$\int \cos y\, dy = \int e^t\, dt$

$\sin y = e^t + c$

$\sin(x(t)) = e^t + c$

È meglio trovare la costante prima di invertire

$\sin(\pi) = e^0 + c$

$c = -1$

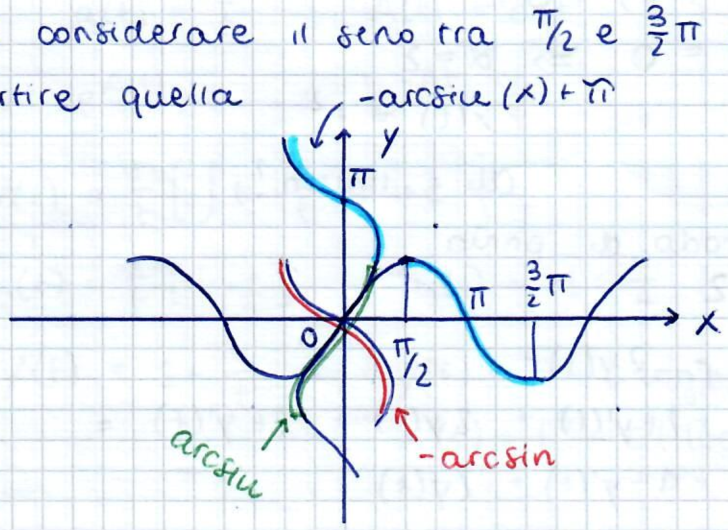
$\boxed{\sin(x(t)) = e^t - 1}$

$x(t) = \arcsin(e^t - 1)$ è SBAGLIATA!

$\downarrow$

inversione tra $-\pi/2$ e $\pi/2$ $\Rightarrow$ non arrivo a π, non soddisfo mai la 2ª eq.

Devo considerare il seno tra $\pi/2$ e $\frac{3}{2}\pi$ e invertire quella



$x(t) = -\arcsin(e^t - 1) + \pi$

$x(0) = \pi$ ✓

$\uparrow$

Alla fine è sempre bene ricontrollare

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, x^{(i)}(t) = f(t)$$

Supponiamo di conoscere $x_0(t)$ soluzione di $\sum a_i(t)\, x^{(i)}(t) = 0$

Allora posso ridurmi ad un' opportuna eq. differenziale ordinaria di ordine $(n-1)$

$$x(t) = y(t)\, x_0(t)$$

$$D^{(i)} x(t) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} D^{(j)} y(t)\, D^{(i-j)} x(t)$$

$$y(t)\, D^{(i)}(x_0(t)) + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} D^{(j)} y(t)\, D^{(i-j)} x_0(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(t) \left[y(t)\, D^{(i-j)}(x_0(t)) + \sum_{j=1}^{i} \binom{i}{j} D^{(j)} y(t)\, D^{(i-j)} x_0(t) \right]$$

$$\underbrace{y(t)}_{\text{incognita}} \overset{=0}{\cancel{\sum_{i=0}^{n} a_i(t)\, D^{(i)}(x_0(t))}} + \sum_{j=1}^{n} \binom{i}{j} D^{(j)} \underbrace{y(t)}_{\text{incognita}}\, D^{(i-j)} x_0(t) \Big] = f(t)$$

$$+ \sum_{i=0}^{n} a_i(t)$$

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(t)\, D^{(i)} y(t) = f(t)$$

eq. differenziale di ordine minore

$$\dot{y}(t) = u(t)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1} b_i(t)\, D^{(i)} u(t)$$

ESERCIZIO

$$\ddot{x} - \frac{3\dot{x}}{t} + \frac{4}{t^2} x = f(t)$$

Cerco soluzioni di tipo t^{α} della omogenea sostituendo:

$$t^{\alpha}(\alpha^2 - \alpha - 3\alpha + 4) = 0$$

$$\alpha^2 - 4\alpha + 4 = 0 \implies \alpha = 2$$

$$x(t) = t^2$$

Chi è l'altra?

Applichiamo il metodo di prima

$$\boxed{x(t) = y(t)\, t^2} \quad 2$$

$$x'(t) = y'(t)\, t^2 + 2y(t)\, t$$

$$x''(t) = y''(t)\, t^2 + 2t\, y'(t) + 2y(t) + 2t\, y'(t) =$$

$$= y''(t)\, t^2 + 4t\, y'(t) + 2y(t)$$

$$y''t^2 + 4ty' + \cancel{2y} - 3y't - \cancel{6y} + \cancel{4y} = f(t)$$
$$y''t^2 + y'4t - y'3t = f(t)$$
$$y''t^2 - y't = f(t)$$
$$y'' = u' \quad \boxed{y' = u} \; 1$$
$$t^2u' - tu = f(t)$$
$$u' - \frac{u}{t} = \frac{f(t)}{t^2} \quad \Rightarrow$$ sappiamo risolverla con il metodo generale

$\underline{f=0}$ $\quad u' + \frac{u}{t} = 0$

$$a(t) = \frac{1}{t} \qquad A(t) = \log t \qquad e^{A(t)} = t \qquad e^{-A(t)} = t$$
$$u(t) = \frac{c}{t}$$
$$\xrightarrow{1} y(t) = \int \frac{c}{t}\,dt = c\log t + c$$
$$\xrightarrow{2} x(t) = ct^2 \log t + ct^2$$

$\underline{f=t}$

So che $x_1(t) = t^2$ risolve l'omogenea
$$x(t) = y(t)\,x_0(t) = y(t)t^2$$
$$y''t^2 + y't = t$$
$$u(t) = y'(t)$$
$$t^2u'(t) + tu(t) = t$$
$$u'(t) + \frac{u(t)}{t} = \frac{1}{t}$$

$$u(t) = e^{-A(t)}\left[\int e^{A(t)}b(t)\,dt + c\right]$$
$$a(t) = \frac{1}{t} \qquad A(t) = \log t$$
$$e^{A(t)} = t \qquad e^{-At} = \frac{1}{t}$$
$$u(t) = \frac{1}{t}\left[\int t \cdot \frac{1}{t}\,dt + c\right]$$
$$u(t) = \frac{1}{t}[t + c] \qquad u(t) = 1 + \frac{c}{t}$$
$$y'(t) = 1 + \frac{c}{t} \qquad y(t) = t + c\log t + c'$$
$$x(t) = t^3 + ct^2\log t + c't^2$$

27/02/2024

RECAP

$\mathbb{R} = \{$ num. con espansione decimale ∞ e segno $\}$

$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ posso definirli come ieri

Def $\forall E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\sup E$, $\inf E$

Teo $\sup E$, $\inf E$ esistono sempre in $\overline{\mathbb{R}}$

($\sup E$ è finito se E è limitato superiormente)

($\inf E$ " " " E è " inferiormente)

Cor dati $E, F \in \overline{\mathbb{R}}$ $E, F \neq \emptyset \mid E \leq F$ allora $\exists x \in \mathbb{R} \mid$

$E \leq x \leq F$

Cosa succede se cambio base o rappresentazione?

INSIEME ORDINATO

Dato X insieme qualunque, un ordinamento su X è una relazione "$\leq$" con le seguenti proprietà:

(i) $x \leq x$ (riflessiva)

(ii) $x \leq y$ e $y \leq x \Rightarrow x = y$ (antisimmetrica)

(iii) $x \leq y$ e $y \leq z \Rightarrow x \leq z$ (transitiva)

(iv) dati $x, y \in X$ vale $x \leq y$ oppure $y \leq x$

Se questa non vale l'ordinamento è parziale, altrimenti è totale

Una relazione su X è un sottoinsieme $R \subset X \times X$ e si scrive $x \leq y$ per dire che $(x,y) \in R$

Un insieme ordinato X è un insieme per cui è fissato un ordinamento (parziale o totale)

esempi:

- $(\mathbb{R}, \leq)$
- $\mathcal{P}(A)$ con l'ordinamento dato dall'inclusione $B \subseteq B'$

  insieme delle parti di A

  (rispetta tutte le prop. tranne la (iv) $\Rightarrow$ ordinamento parziale)

  Dati due insiemi $B, C \in \mathcal{P}(A)$ disgiunti non vale né $B \subseteq C$ né $C \subseteq B$

- $\mathbb{R}^2$

  non ha un ordinamento canonico

  PROPOSTE

  (i) sfruttare la bigezione con $\mathbb{R}$

  (ii) $(x_1, y_1) \leq_a (x_2, y_2)$ se $x_1 < x_2 \vee \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 \leq y_2 \end{cases}$

  entrambi sono ordinamenti TOTALI

  (iii) $(x_1, y_1) \leq_b (x_2, y_2)$ se $x_1 \leq x_2$ e $y_1 \leq y_2$

Il (iii) non è un ordinamento totale, è PARZIALE
es. non vale né che $(2,3) \leq (3,2)$ né $(3,2) \leq (2,3)$

Sia X insieme ordinato

Dato $E \subset X$ posso definire $\max E$, $\min E$, $\mathcal{M}ag E$, $\mathcal{M}in E$, $\sup E$, $\inf E$

ASSIOMA DI COMPLETEZZA

X è completo se $\forall E, F \subset X$, tale che $E, F \neq \emptyset$ e $E \leq F$ allora $\exists x \in X \mid E \leq x \leq F$

Prop. Dato X ordinato sono fatti equivalenti:

(i) vale l'assioma di completezza

(ii) ogni $E \subset X$ limitato superiormente $\exists \sup E$

(iii) per ogni $E \subset X$ " inferiormente $\exists \inf E$

DOMANDA: $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$ soddisfa l'assioma di completezza? Gli altri esempi di prima lo soddisfano?

YES!

Il sup è l'unione di tutti gli elementi di un dato sottoinsieme di $\mathcal{P}(A)$, l'inf è l'intersezione.

Nello spazio degli eventi in relatività esiste un ordinamento PARZIALE: un evento è accaduto prima di un altro se si può viaggiare dal luogo del primo a quello del secondo a vel. ≤ a quella della luce e arrivare prima dell'avvenimento del 2°

Per $\mathbb{R}^2$ basta prendere il sup o inf delle singole coordinate
$E \subset \mathbb{R}^2$
$E = E_1 \times E_2$
$\sup E = (\sup E_1, \sup E_2)$

CAMPO (già visto)

$X, +, \cdot, 0, 1, -x, x^{-1}$ ($x \neq 0$) ...

CAMPO ORDINATO

È un campo $(+, \cdot)$ con un ordinamento $(\leq)$ TOTALE tale che:

l'ordinamento "parla" con le operazioni

(i) $\forall x_1, x_2, y \in X \quad x_1 \leq x_2 \Rightarrow x_1 + y \leq x_2 + y$

(ii) $\forall x_1, x_2, y \in X \quad x_1 \leq x_2 \ \& \ y \geq 0 \Rightarrow x_1 y \leq x_2 y$

Esempi
- $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$
- $\mathbb{Z}_p$ NON è un campo ordinato (l'ordinamento solito non è compatibile con le proprietà
  $1 \leq 4$ ma $\underset{6}{1+5} \not\leq \underset{2}{4+5}$)

  Si parte da $0<1$ e per induzione $1<2, 2<3$ etc $\Rightarrow$ l'unico ordinamento possibile è quello canonico che non va bene

  Si dimostra che non è ordinabile
- $\mathbb{C}$ è un campo non ordinabile (totalmente) (osservare che gli ordinamenti di prima su $\mathbb{R}^2$ non sono compatibili con il prodotto)

Ci sono 2 possibilità: $\quad i \leq 0 \ (\cdot i) \Rightarrow -1 \geq 0 \quad \vee \quad i \geq 0 \ (\cdot i) \Rightarrow -1 \geq 0$

(serve che $a < 0 \Rightarrow -a \geq 0$ — da dimostrare — e $1 \geq 0$) $\Rightarrow 1 \leq 0$ ↯

TEO Sia X campo ordinato e completo $\Rightarrow$ X è isomorfo a $\mathbb{R}$, cioè $\exists\ f: \mathbb{R} \to X$ bigezione che preserva le operazioni e preserva l'ordine.

(Mi dice che non è importante la base che scelgo)

(Non lo dimostreremo)

SUCCESSIONI IN $\mathbb{R}$

Una successione di numeri reali è $(x_0, x_1, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$

tecnicamente una successione è una funzione da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (la notazione delle funz. non è conveniente)

o anche $(x_1, x_2, \dots) = (x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

(insieme di elementi della successione)

$\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ NON è la stessa cosa, nelle successioni conta l'ordine

es. $x_n := (-1)^n$ $\qquad \{x_n\} = \{-1, 1\}$

$\neq \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$

$x_n := \begin{cases} -1 & \text{per } n=0 \\ 1 & \text{per } n>0 \end{cases} \qquad \{x_n\} = \{\pm 1\}$

$(0, 1, 4, 9, \dots) = (n^2)$

$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right) = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Def. di limite

Data (x_n) successione di numeri reali e $L \in \overline{\mathbb{R}}$, si dice che (x_n) tende a L per $n \to +\infty$ se

$\left(\lim_{n\to+\infty} x_n = L \text{ opp. } x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L\right)$

CASO 1: L finito

$\forall \varepsilon > 0\ \exists\ n_\varepsilon \mid n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - L| \leq \varepsilon$

CASO 2: $L = +\infty$

$\forall M \quad \exists\ n_M \mid n \geq n_M \Rightarrow x_n \geq M$

CASO 3: $L = -\infty$

$\forall M \quad \exists\ n_M \mid n \geq n_M \Rightarrow x_n \leq M$

Si possono compattare in un'unica definizione

Def INTORNO DI UN PUNTO DI $\overline{\mathbb{R}}$

Se $x \in \mathbb{R}$ gli intorni di x sono gli insiemi della forma $[x-r, x+r]$ con $r > 0$

Se $x = +\infty \Rightarrow [M, +\infty]$ con $M \in \mathbb{R}$
Se $x = -\infty \Rightarrow [-\infty, M]$ con $M \in \mathbb{R}$

(servono le parentesi quadre perché nella def. di prima ho stretto " $\geq$ " ma sarebbe stato equivalente con la disuguaglianza stretta)

Def. equivalente di LIMITE

$x_n \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ se $\forall$ intorno I di L
$\exists n_I \mid n \geq n_I \Rightarrow x_n \in I$

01/03/2024

Successioni (di numeri reali)

$(x_0, x_1, \dots) = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x_n) \quad x_n \in \overline{\mathbb{R}} \ \forall n$

limite L di (x_n), $L \in \overline{\mathbb{R}}$ — def. classica / def. con gli intorni — equivalenti

- $(n_0, n_1, n_2, \dots)$ con $n_0, n_1, n_2, \dots \in \mathbb{N}$ con $n_0 < n_1 < \dots$ si chiama SOTTOSUCCESSIONE di $\mathbb{N}$
- Dato (x_n) succ. e (n_k) sottosucc. di (n) definisco
$(x_{n_k}) = (x_{n_0}, x_{n_1}, \dots)$

es. $\left(\frac{1}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right)$ sottosucc. con $n_k = 2^k$ è
$\left(\frac{1}{n_k}\right) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots\right)$

Prop. elementari dei limiti

P1) Il limite di (x_n), se esiste, è unico

P2) Se $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$ allora $\forall (n_k)$ vale $x_{n_k} \xrightarrow[k \to +\infty]{} L$
(ogni sottosucc. converge allo stesso limite)

P3) Date $(x_n), (y_n), (y_n') \mid y_n \leq x_n \leq y_n' \ \forall n$ e $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$ e $y_n' \xrightarrow[n \to \infty]{} L$, allora $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} L$

equivalente del teorema dei carabinieri

Date (x_n) e $(y_n) \mid y_n \leq x_n \ \forall n$ e $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$
allora $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \infty$

Date (x_n) e $(y_n) \mid y_n \geq x_n \ \forall n$ e $y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$
allora $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty$

es. succ. non convergente
$((-1)^n)$ non ha limite $\quad x_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n \text{ pari} \\ -1 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

(Per dimostrarlo posso prendere 2 sottosucc. con limiti $\neq$, negando così P2 ↯)

$(x_{2n}) = 1 \ \forall n \Rightarrow (x_{2n}) \mid x_{2n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

$(x_{2n+1}) = -1 \ \forall n \Rightarrow x_{2n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} -1$ (in realtà sto usando anche la P1)

Esercizio: $\sin(n)$ non converge
per $n = \lfloor \frac{5}{6}\pi + 2k\pi \rfloor$ $\sin n > \frac{1}{2}$
per $n = \lfloor -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \rfloor$ $\sin n < -\frac{1}{2}$

Non si può usare che $\sin x$ non ha limite in $\mathbb{R}$ perché per esempio $\sin(2\pi n)$ ha limite

Dim P1 Suppongo per assurdo che $\exists L_1 \neq L_2 \in \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $x_n \to L_1$ e $x_n \to L_2$

Dato che $L_1 \neq L_2 \Rightarrow \exists I_1$ intorno di L_1 e I_2 intorno di L_1 tali che $I_1 \cap I_2 = \emptyset$

Per def. di limite $\left.\begin{array}{l} \exists n_1 \mid n \geq n_1 \Rightarrow x_n \in I_1 \\ \exists n_2 \mid n \geq n_2 \Rightarrow x_n \in I_2 \end{array}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow$ preso $n = \max\{n_1, n_2\}$, $x_n \in I_1 \cap I_2 = \emptyset$ ↯

andrebbe dimostrato (caso per caso) se L_1 e L_2 finiti WLOG $L_1 < L_2 \Rightarrow I_1 = (L_1 - 1; \frac{L_1+L_2}{2})$, $I_2 = (\frac{L_1+L_2}{2}; L_2+1)$
se uno dei due è infinito...

Dim P2 Lemma: Sia (n_k) sottosucc. di (n) allora $n_k \geq k$ $\forall k$ (dimostrare per es.) si fa per induzione su k

Siccome (x_n) tende a L, $\forall I$ intorno di L $\exists n_I \mid$ $n \geq n_I \Rightarrow x_n \in I$

Allora se $k \geq n_I \overset{\text{lemma}}{\Rightarrow} n_k \geq k \geq n_I \Rightarrow x_{n_k} \in I$

$\Rightarrow$ Ho dimostrato che $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} L$

Dim P3

Siccome $y_n \to L$ e $y_n' \to L$ $\forall I$ intorno di L esistono

$\begin{cases} n_I \mid n \geq n_I \Rightarrow y_n \in I \\ n_I' \mid n \geq n_I' \Rightarrow y_n' \in I \end{cases}$

Preso $n_I'' = \max\{n_I, n_I'\}$

se $n \geq n_I'' \Rightarrow y_n, y_n' \in I \overset{\text{intervallo}}{\underset{\circledast}{\Rightarrow}} [y_n, y_n'] \subset I \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \in I$

Allora $\forall I$ intorno di L, $\exists n_I'' \mid n \geq n_I'' \Rightarrow x_n \in I$

Ho così dimostrato che $x_n \to L$

Riassumendo

def. → Sottoinsieme dei num. reali formato da tutti i punti della retta reale che sono compresi fra due estremi a e b

$\circledast$ lemma: I intervallo. Siano $y, y' \in I$, $y \leq y'$ allora $[y, y'] \subset I$

TEO 1

Def (x_n) è crescente se $x_{n+1} \geq x_n \ \forall n$ ← dimostrare che le due def. sono equivalenti

(o in modo equivalente: $\forall m \geq n \Rightarrow x_m \geq x_n$)

(x_n) è decrescente se $x_{n+1} \leq x_n \ \forall n$

(i) se (x_n) è crescente allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

(ii) se (x_n) è decrescente allora $\lim_{n\to+\infty} x_n = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$

Dim(i) per $L = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \in \mathbb{R}$ (finito)

(fare caso $L = +\infty$, $L = -\infty$ e (ii)) (succ. costante $-\infty$)

Sia $I = [L-r, L+r]$ intorno di L

$L - r < L \Rightarrow L - r$ non è un maggiorante $\sup\{x_n\}$

posso trovare un elemento più grande

$\Rightarrow \exists \bar{n} \mid x_{\bar{n}} > L - r \Rightarrow \forall n \geq \bar{n}$ vale $x_n \geq x_{\bar{n}} \geq L - r$

inoltre $\forall n \ x_n \leq L$ (maggiorante)

Quindi $\forall n \geq \bar{n}$ vale $L - r < x_n \leq L \Rightarrow L - r \leq x_n \leq L + r$

cioè $x_n \in I$

COROLLARIO: Siano $I_1, I_2, \dots, \dots$ intervalli chiusi tali che $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$
$\Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} I_i \neq \emptyset$

(L'enunciato è falso se gli intervalli sono aperti o se lavoriamo nei razionali) → mostrare un esempio (?)

Dim. Sia $I = [a_n, b_n]$

(a_n) è crescente, (b_n) è decrescente (non per forza strettamente)

Sia $L = \lim_{n\to+\infty} a_n = \sup\{a_n\}$, $L' = \lim_{n\to+\infty} b_n = \inf\{b_n\}$

Allora $a_n \leq \underset{L}{a}$ e $\underset{L'}{b} \leq b_n \ \forall n \Rightarrow \underset{[L,L']}{[a,b]} \subset [a_n, b_n] = I_n \ \forall n$

$\Rightarrow [a,b] \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} I_i$ (ma va mostrato che $a \leq b$)

TEO 2

Def $(x_n) \subset \mathbb{R}$ si dice "DI CAUCHY" se $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \mid n, m \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x_m| \leq \varepsilon$

Sia $(x_n) \subset \mathbb{R}$. Allora (x_n) ha limite FINITO $\Leftrightarrow$ è una successione di Cauchy

Traccia dim.

$\forall n$ definisco $y_n := \inf\{x_m \mid m \geq n\}$

$y'_n := \sup\{x_m \mid m \geq n\}$

Allora a) (y_n) è crescente $\Rightarrow y_n \to L := \sup\{y_n\}$

b) (y_n') è decrescente $\Rightarrow y_n' \to L' := \inf\{y_n'\}$

c) $L = L'$ (perché (x_n) è di Cauchy)

d) $y_n \leq x_n \leq y_n' \ \forall n \Rightarrow x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L = L'$

04/03/2024

Successione di Cauchy

Def. $(x_n) \subset \mathbb{R}$ si dice "di Cauchy" se
$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \mid m, n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_m - x_n| \leq \varepsilon$

TEO 2 (x_n) è di Cauchy $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R} \mid x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L$
(non funziona in $\mathbb{Q}$)

Dim.

($\Leftarrow$) Se $x_n \to L \in \mathbb{R}$ allora $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_\varepsilon \mid |x_n - L| \leq \varepsilon$ se $n \geq n_\varepsilon$

Funziona anche per $\mathbb{Q}$

$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon$

$\forall m, n \geq n_\varepsilon \quad |x_m - x_n| \leq 2\varepsilon$

perché: $L - \varepsilon \leq x_m \leq L + \varepsilon$

$L - \varepsilon \leq x_n \leq L + \varepsilon$

$\Downarrow$

$-2\varepsilon \leq x_m - x_n \leq 2\varepsilon$

In particolare $\forall m, n \geq n_{\varepsilon/2}$ vale $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$

($\Rightarrow$) $\forall n$ definisco: E_n = insieme di tutti i successivi

$$y_n := \inf \overbrace{\{x_m \mid m \geq n\}}^{E_n} = \inf E_n$$
$$y_n' := \sup \{x_m \mid m \geq n\} = \sup E_n$$

(a) (y_n) è crescente $\Rightarrow y_n \to L : \sup\{y_n\}$

(b) (y_n') è decrescente $\Rightarrow y_n' \to L' : \inf\{y_n'\}$

(c) Se (x_n) è di Cauchy allora $L = L'$

(d) $\underset{\text{al più } x_n}{y_n} \leq x_n \leq \underset{\text{al meno è } x_n}{y_n'} \Rightarrow x_n \to L = L'$ per confronto

<u>dim (a)</u> $E_{n+1} \subseteq E_n \Rightarrow \underset{y_{n+1}}{\inf E_{n+1}} \geq \underset{y_n}{\inf E_n}$

OSS: $E \subset F \subset \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \inf E \geq \inf F$ $\sup E \leq \sup F$

da dimostrare

cioè $y_{n+1} \geq y_n$ cioè (y_n) è crescente

(il resto lo abbiamo già visto)

dim (b) analoga ad (a) mediante l'osservazione

dim (c) (x_n) è di Cauchy $\Rightarrow \forall \varepsilon\ \exists n_\varepsilon \mid |x_n - x_m| \leq \varepsilon$ se $n, m \geq n_\varepsilon$

posso scegliere $x_n = x_{n_\varepsilon}$

$\Rightarrow |x_m - x_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon$

cioè $x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq x_m \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon \quad \forall m \geq n_\varepsilon$

$x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq E_m \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq \underbrace{y_n}_{\text{inf di } E_m} \leq \underbrace{y_n'}_{\text{sup di } E_m} \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$

$\Rightarrow x_{n_\varepsilon} - \varepsilon \leq L \leq L' \leq x_{n_\varepsilon} + \varepsilon$ L, L' sono finiti

sto usando la seguente OSS:
Se $a_n \to L$; $a_n' \to L'$ e $a_n \leq a_n' \ \forall n$
allora $L \leq L'$ (da dimostrare)

$\Rightarrow 0 \leq L' - L \leq 2\varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$

$\Rightarrow L' - L = 0 \Rightarrow L = L'$

dim (d) immediata dalle def. + teo del confronto.

EX 1 X insieme parzialmente ordinato, allora sono fatti equivalenti

(i) Dati $E, F \subset X$, $E; F \neq \emptyset$, $E \leq F$
allora $\exists x \in X \mid E \leq x \leq F$ (assioma di completezza)

(ii) $E \subset X$, $E \neq \emptyset$ $\mathcal{M}ag(E) \neq \emptyset$
allora $\exists \sup E$

(iii) $E \subset X$, $E \neq \emptyset$ $\mathcal{M}in(E) \neq \emptyset$
allora $\exists \inf E$

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dato $\underset{\neq \emptyset}{E} \leq \underset{\neq \emptyset}{Mag(E)} \underset{\text{per (i)}}{\Rightarrow} \exists x \mid E \leq x \leq \mathcal{M}ag(E)$

$x = \min(\mathcal{M}ag(E))$
cioè $x = \sup E$

(ii) $\Rightarrow$ (i) prendo E, F come nelle hp. di (i)
$x := \sup E$
allora $E \leq x \leq F$

perché x è un maggiorante

perché $F \subseteq \mathcal{M}ag(E)$

allo stesso modo si dimostra che (i) $\Leftrightarrow$ (iii)

da cui

$$\begin{tikzcd} & (i) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ (ii) & & (iii) \end{tikzcd} \Rightarrow \begin{tikzcd} & (i) \arrow[dl, Leftrightarrow] \arrow[dr, Leftrightarrow] & \\ (ii) \arrow[rr, Leftrightarrow] & & (iii) \end{tikzcd}$$

cioè sono equivalenti

Ex 2

X campo ordinato

$(a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$ e $a \leq b \wedge c > 0 \Rightarrow ac \leq bc)$

a) $1 \geq 0$

dim: supponiamo $1 < 0 \Rightarrow$ se $a > 0$

$a \cdot 1 < a \cdot 0$ cioè $a < 0$ $\lightning$

b) $a \leq b \Leftrightarrow 0 \leq b-a$

(sommare l'inverso di a e viceversa)

c) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$

$\hookrightarrow a \leq b$

$c \leq 0 \Leftrightarrow -c \geq 0$

(sommo bc + ac ad entrambi i membri)

$\Rightarrow a(-c) \leq b(-c) \Leftrightarrow bc \leq ac$

d) $x^2 \geq 0 \ \forall x$ $\left.\begin{array}{l} x \geq 0 \Rightarrow x^2 \geq x \cdot 0 = 0 \\ x \leq 0 \Rightarrow x^2 \geq x \cdot 0 = 0 \end{array}\right\} x^2 \geq 0$

Ex 3

Dato A considero $\mathcal{P}(A)$ ordinato da $\subseteq$

Se $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}(A) \Rightarrow \sup \mathcal{F} = \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$ e $\inf \mathcal{F} = \bigcap_{B \in \mathcal{F}} B$

dimostrare che:

$m : \bigcup_{B \in \mathcal{F}} B$

$\forall B \in \mathcal{F}$ $B \subseteq m$ per definizione di m $\Rightarrow$ m è un maggiorante

Sia $n \in Mag(\mathcal{F}) \Rightarrow B \subseteq n \ \forall B \in \mathcal{F} \Rightarrow m \subseteq n$

perché l'unione è proprio il minimo insieme che contiene tutti quelli elencati $\Rightarrow$ m è il minore dei maggioranti

$\Rightarrow m = \sup \mathcal{F}$

Ugualmente per $\inf \mathcal{F}$

Ex 4 $\mathbb{R}^2$ con l'ordine $\underset{(x_0,y_0)}{P_0} \leq \underset{(x_1,y_1)}{P_1} \overset{def.}{\iff} x_0 < x_1 \vee \begin{cases} x_0 = x_1 \\ y_0 \leq y_1 \end{cases}$

è un ordine TOTALE compatibile con la somma (somma canonica di vettori in $\mathbb{R}^2$). $\mathbb{R}^2$ è completo?

$\mathbb{R}$ è un campo ordinato completo

- L'ordine su $\mathbb{R}^2$ è totale? Sia $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ e $(c,d) \in \mathbb{R}^2$ supponiamo che non valga $(a,b) \leq (c,d) \Rightarrow a \geq c$
  - se $a > c$ allora vale (c,d)
  - se $a = c$ allora vale $b \leq d \vee d \leq b$ perché l'ordinamento su $\mathbb{R}$ è totale

  $\Rightarrow$ È TOTALE
- È compatibile con la somma?
  $(a,b) \geq (c,d) \Rightarrow (a,b)+(e,f) \overset{?}{\geq} (c,d)+(e,f)$
  $(a+e, b+f) \geq (c+e, d+f)$
  Se $a > c \Rightarrow a+e > c+e$ ✓
  Se $a = c$ e $d < b \Rightarrow a+e = c+e$ e $d+e < b+e$ ✓ È compatibile
- È completo? No, l'insieme $X = \{(x,y) \mid x < 0\}$ non ha sup
  $(0, +\infty) \notin \mathbb{R}^2$

Ex 5 $\mathbb{R}^2$ con l'ordine $P_0 \leq P_1 \iff x_0 \leq x_1$ e $y_0 \leq y_1$ soddisfa l'assioma di completezza?

$E, F \subset \mathbb{R}^2$

$E \leq F$

$A = \{a \mid (a,b) \in E\}$ $B = \{b \mid (a,b) \in E\}$

$\Rightarrow E \leq (\sup A, \sup B) \leq F \Rightarrow$ è COMPLETO

$\overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}}$ con l'ordinamento dell'esercizio 4 è completo?

Recap dei teoremi più importanti 05/03/2024

TEO 1

Le successioni crescenti / decrescenti hanno limite

TEO 2

Le successioni con limite finito sono tutte e sole le successioni di Cauchy

TEO 3 (Bolzano-Weierstrass) — presa una qualsiasi succ. limitata essa ha una sottosuccessione con limite finito

Data (x_n) successione limitata ($\exists\, a_0, b_0 \mid a_0 \leq x_n \leq b_0 \ \forall n$)
$\Rightarrow \exists\, (n_k)$ sottosuccessione degli indici $\mid x_{n_k} \xrightarrow[k\to\infty]{} L$ limite finito ($a_0 \leq L \leq b_0$)

<u>Esempio</u>: $x_n = (-1)^n$ è limitata ma non ha limite

$x_{2n} \to 1$

$x_{2n+1} \to -1$

COROLLARIO: Data (x_n) successione in $\overline{\mathbb{R}}$ $\exists\, n_k \mid x_{n_k} \to L \in \overline{\mathbb{R}}$ (anche non finito)

<u>Dim TEO 3</u>: per hp. $a_0 \leq x_n \leq b_0 \ \forall n$ $\quad I_0 := [a_0, b_0]$

$$I' = \left[a_0 ; \frac{a_0+b_0}{2}\right] \qquad I'' = \left[\frac{a_0+b_0}{2} ; b_0\right]$$

almeno uno tra I' e I'' contiene x_n per infiniti indici. Sia questo intervallo I_1. Posso iterare questo ragionamento su I_1 ottenendo $I_2, I_3, \dots$ etc.

$\downarrow$ tali che

a) $\forall k$, I_k contiene x_n per infiniti indici

b) $I_k = [a_k, b_k]$ $\quad I_0 \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots$

c) $\text{lung}\, I_k = |a_k - b_k| = \dfrac{b_0 - a_0}{2^k}$

Prendo $n_k :=$ più piccolo indice $n \mid x_n \in I_k$ e $n > n_{k-1}$
(formalmente (n_k) va costruita per induzione)

Quindi $\underset{\text{crescente}}{a_k} \leq x_{n_k} \leq \underset{\text{decrescente}}{b_k}$ $\Rightarrow$ (a_k) ha limite L, (b_k) ha limite L' (prop 2)

ma $L = L'$ perché $b_k - a_k \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0$ (prop. c)

Da cui $x_{n_k} \to L$ per confronto

($\lim_{k\to\infty} b_k - a_k = L' - L = 0$ se so che $L' \neq \pm\infty \neq L$, $L, L' \in [a_0, b_0]$)

<u>Dim. COROLLARIO</u> per $(x_n) \subset \mathbb{R}$

IDEA: se (x_n) non è limitata allora si verifica almeno 1 delle seguenti possibilità:

(i) $\sup(x_n) = +\infty \Rightarrow \exists\, (n_k) \mid x_{n_k} \to +\infty$

(ii) $\inf(x_n) = -\infty \Rightarrow \exists\, (n_k) \mid x_{n_k} \to -\infty$

(i) $\forall K$, $x_n > K$ per infiniti indici (se fossero in numero
↳ questo vale solo se x_n assume solo valori finiti
finito l'elemento maggiore tra di essi sarebbe un maggiorante finito)
in realtà non è neanche necessario che sia il più piccolo
$\Rightarrow$ prendo n_K più piccolo indice $n > n_{K-1} \mid x_{n_K} \geq K$
quindi $x_{n_K} \to +\infty$ per confronto (perché $K \to +\infty$)

Esercizi / Esempi

$$X = \{ p(x) \mid p(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n x^n,\ a_n \in \mathbb{R},\ n_0 \mid a_n = 0 \text{ per } n \leq n_0 \}$$

es: $-\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} + 3 + x^2 + \dots$ gli indici delle potenze sono limitati inferiormente

DEFINISCO:

Dati $p(x)$ con coeff. a_n e $\hat{p}(x)$ con coeff. $\hat{a}_n$

- $p(x) + \hat{p}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n + \hat{a}_n) x^n$
- $p(x)\hat{p}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \hat{a}_{n-m} \right) x^n$
  ↳ questa sommatoria ha tutti termini nulli tranne un numero finito
- $p(x) \leq \hat{p}(x)$ se $p(x) = \hat{p}(x)$ $\vee$ se $p(x) \neq \hat{p}(x)$ ed $\exists\ \bar{n}$ più piccolo indice per cui $a_n = \hat{a}_n\ \forall n < \bar{n}$ e $a_{\bar{n}} < \hat{a}_{\bar{n}}$

$\Rightarrow$ Mostrare che X è un campo ordinato ma <u>NON</u> completo

Andrebbero verificati tutti gli assiomi ma è interessante sopratutto che $\forall p(x) \neq 0\ \exists q(x) \in X \mid p(x)q(x) = 1$
(conviene cominciare dal caso $p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \wedge a_0 \neq 0$ e cercare l'inverso $q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Si dovrebbe ottenere un sistema infinito ma risolvibile).

Sia A l'insieme dei minoranti di $p(x) = 0$ escluso lo 0 $\Rightarrow$
$\Rightarrow \exists$ polinomi aventi coefficiente negativo per la potenza più piccola che contengono $\Rightarrow$ questo insieme $A = \{q(x) \mid q(x) < 0\}$ non ha inf

Supponiamo che $m = \inf A$ $\quad m = a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \dots$
$-1 \cdot x^{n-1} \in A$ e $-x^{n-1} < m$ ↯

EX (x_n) e (x_n') sono tali che

- $x_n \leq x_n' \ \forall n$
- $x_n \to L$ e $x_n' \to L'$

allora $L \leq L'$

(Achtung! $x_n < x_n' \not\Rightarrow L < L'$, basti pensare a $x_n = 0$ e $x_n' = \frac{1}{n}$)

Dim. Se per assurdo $L' < L$ posso costruire 2 intorni disgiunti L' e L ordinati tali che

$\exists\, n_I \mid x_n \in I \ \forall n \geq n_I$

$\exists\, n_I' \mid x_n' \in I' \ \forall n \geq n_I'$ "$I' < I$"

allora preso $n \geq \max\{n_I, n_I'\}$ $x_n \in I$ e $x_n' \in I' \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n' < x_n$ ↯

EX

Sia $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$

allora $\exists\, (x_n) \subset E \mid x_n \to \sup E = M$
crescente

ed $\exists\, (y_n)$ decrescente $\subset E \mid y_n \to \inf E$

Dim.

Per ip. M è un maggiorante ed è il più piccolo dei maggioranti

$\Rightarrow \forall n > 0$ $M - \frac{1}{n}$ non è un maggiorante

$\Rightarrow \exists\, x_n \in E \mid M - \frac{1}{n} < x_n$

quindi $M - \frac{1}{n} < x_n \leq M$ $\Rightarrow$ per confronto anche x_n tende a M

Ma non è detto che una successione costruita in questo modo sia crescente, allora posso procedere in questo modo:

Scelto x_n allora
- se $M - \frac{1}{n+1} < x_n$ prendo $x_{n+1} = x_n$
- se $x_n \leq M - \frac{1}{n+1} \leq x_{n+1}$

esiste perché $M - \frac{1}{n+1}$ NON è un maggiorante

Posso costruirla in modo che sia STRETTAMENTE CRESCENTE?

NO, ad esempio non è possibile se E ha cardinalità finita.

Può esserlo se E non ha massimo.

H/W => "i razionali sono densi nei reali" cioè
$\forall x \in \mathbb{R} \ \exists (x_n) \subset \mathbb{Q} \mid x_n \longrightarrow x$

Esempio con π

$(x_n) = (3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; 3,14159; \dots)$

↳ bisogna dimostrare che converge effettivamente a π

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \mid \varepsilon > \frac{1}{10^n}$ e $\pi - \frac{1}{10^n} \leqslant x_n \leqslant \pi$

08/03/2024

Successioni per ricorrenza

→ definite per induzione

es: $\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}) \\ x_0 = \alpha_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$ (*)

$x_0 = \alpha_0$

$x_1 = f(\alpha_0)$

$x_2 = f(f(\alpha_0))$

$\vdots$

$x_n = \underbrace{f(f(\cdots f}_{n \text{ volte}}(\alpha_0)\dots)$

$\exists$ un'unica successione che soddisfa (*) NON LO DIMOSTRIAMO

es: (fattoriale)

$\begin{cases} x_n = n x_{n-1} \\ x_0 = 1 \end{cases} = f(n, x_{n-1}) \Rightarrow$ ricorrenza NON AUTONOMA

nell'esempio prima la ricorrenza è AUTONOMA (f non dipende da n)

NON AUTONOMA

Ricorrenze di ordine K ≡ K condizioni iniziali

$\begin{cases} x_{n+k} = f(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) \\ x_0 = \alpha_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$

→ per determinarla univocamente servono i primi K elementi

viene chiamata equazione alle differenze di ordine K

(?) Formula esplicita per il termine n-esimo

(?) Comportamento della successione $n \to +\infty$

- Ricorrenze lineari, ordine K, omogenee a coeff. cost.

non appaiono potenze maggiori di 1

→ non appaiono termini che non moltiplicano qualche x_i nell'equazione alle differenze

$\begin{cases} x_{n+k} = \sum_{i=0}^{k-1} c_i \, x_{n+i} \quad (*) \\ x_0 = \alpha_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$

→ SOLO la prima equazione, senza parametri iniziali

TEO L'insieme X delle soluzioni di (*) è uno spazio vettoriale e dim X = K

dim la soluzione $(x_n) \mid x_n \equiv 0$ è soluzione ($X \neq \emptyset$)

Prendiamo (x_n) e (y_n) soluzioni di (*) e $c \in \mathbb{R}$

$$x_{n+k} + c\,y_{n+k} = \sum_{i=0}^{k} c_i x_{n+i} + c\left(\sum_{i=0}^{k} c_i y_{n+i}\right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} c_i (x_{n+i} + c\,y_{n+i})$$

NB! Questo argomento dimostra solo che è sottospazio di qualcosa

$\Rightarrow X$ è uno spazio vettoriale (sottospazio delle successioni $\{f \mid f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$)

Chiamo $(x^1_n) \dots (x^k_n)$ le succ. che soddisfano rispettivamente

$$\begin{cases} (*) \\ x_0 = 1 \\ x_1 = 0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (*) \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \\ \vdots \\ x_{k-1} = 0 \end{cases} \quad \dots \quad \begin{cases} (*) \\ x_0 = 0 \\ \vdots \\ x_{k-2} = 0 \\ x_{k-1} = 1 \end{cases}$$

CLAIM! $B = \{(x^1_n), \dots, (x^k_n)\}$ è una base di X

1. Sono linearmente indipendenti
2. Generano tutto X

1. $(\hat{x}_n) = \lambda_1 (x^1_n) + \dots + \lambda_n (x^k_n) = 0 \Rightarrow \lambda_i = 0 \ \forall i$

$\hat{x}_0 = \lambda_1 1 + 0 + \dots + 0 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

$\hat{x}_1 = 0 + 1 \cdot \lambda_2 + 0 + \dots + 0 \Rightarrow \lambda_2 = 0$

e così $\forall \lambda_i$:

$\vdots$

$\hat{x}_k = 0 + \dots + 0 + \lambda_k \cdot 1 \Rightarrow \lambda_k = 0$

$(x^1_n), \dots, (x^k_n)$ sono lin. ind. $\dim(X) \geq k$ $\square$

2. Sia $(\hat{x}_n)$ succ. soluzione di $\hat{x}_{n+k} = \sum_{i=1}^{k-1} c_i \hat{x}_{n+i}$

$$\begin{cases} (*) \\ \hat{x}_0 = \alpha_0 \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-1} = \alpha_{k-1} \end{cases}$$

allora $(\hat{x}_n)$ si scrive come comb. lineare di $(x^1_n), \dots, (x^k_n)$

CLAIM! $\hat{x}_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{i-1} x^i_n$ (sfrutto l'unicità della succ.)

soddisfa $\hat{x}_0 = \alpha_0, \dots, \hat{x}_{k-1} = \alpha_{k-1}$

(basta sostituire)

Per unicità le due coincidono

B ha k vettori $\Rightarrow \dim(X) = k$

Per esercizio farla come per le eq. differenziali

$T: X \to \mathbb{R}^k \quad (x_n) \longmapsto \begin{bmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}$

applicazione lineare biettiva $\Rightarrow \dim T = \dim \mathbb{R}^k$

LINEARI del PRIMO ORDINE, AUTONOME, OMOGENEE

$a \in \mathbb{R}$ $\quad \alpha_i \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_n = a\, x_{n-1} \\ x_0 = \alpha_0 \end{cases}$$

Formula per il termine n-esimo?

$x_0 = \alpha_0 \quad x_1 = a\alpha_0 \quad x_2 = a^2\alpha_0 \quad \dots \quad \boxed{x_n = a^n \alpha_0}$

DIM $x_n = \alpha_0 a^n$

PASSO BASE: $x_0 = \alpha_0 a^0$ ✓

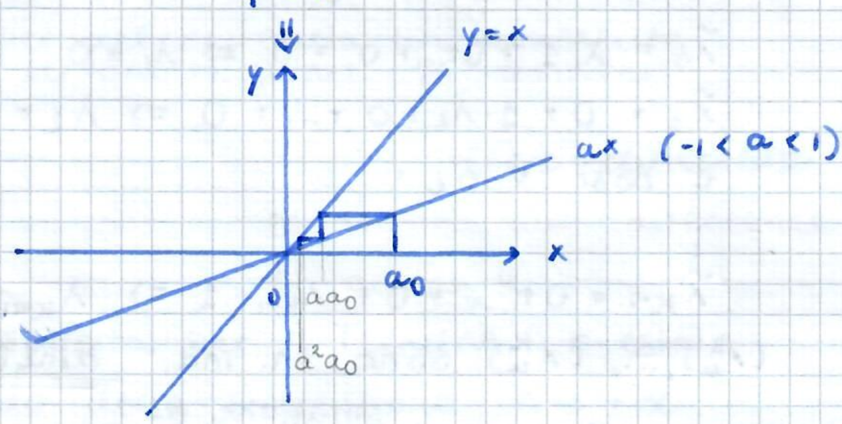
Supponiamo che $x_{n-1} = \alpha_0 a^{n-1}$

$\Rightarrow x_n = a\, x_{n-1} = a \alpha_0 a^{n-1} = a^n \alpha_0$ □

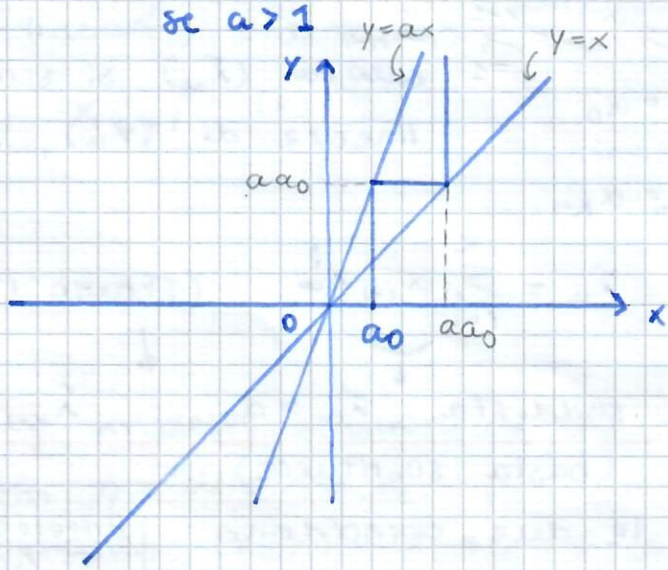
Generalmente queste formule si dimostrano tutte per induzione

$$x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} \begin{cases} \alpha_0 & \text{se } a = 1 \\ \pm\infty & \text{se } a > 1 \quad (+\infty \text{ se } \alpha_0 > 0,\ -\infty \text{ se } \alpha_0 < 0) \\ 0 & \text{se } -1 < a < 1 \\ \text{N.E} & \text{se } a \leq -1 \end{cases}$$

Visualizzazione grafica: $y = ax$
$y = x$



se $a > 1$



Per a negativi disegno una spirale

LINEARI DEL 1° ORDINE, AUTONOME, NON OMOGENEE

$a \in \mathbb{R}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} x_n = a x_{n-1} + b \\ x_0 = \alpha_0 \end{cases}$$

$$x_1 = a \underbrace{x_0}_{\alpha_0} + b$$

$$x_2 = \alpha_0 a^2 + ab + b$$

$$x_3 = \alpha_0 a^3 + b(a^2 + a + 1)$$

$$x_4 = \alpha_0 a^4 + b(a^3 + a^2 + a + 1)$$

Per il termine n bisogna esprimere con una formula

$$b(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

$$\frac{a^n - 1}{a - 1} \Rightarrow \underline{(a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1) = a^n - 1} \checkmark$$

$$x_n = \alpha_0 a^n + b \frac{a^n - 1}{a - 1} \quad a \neq 1$$

$$x_n = \alpha_0 + nb \quad \text{se } a = 1$$

dim $a \neq 1$

PASSO BASE $\quad x_0 = \alpha_0 a^0 + b \dfrac{a^0 - 1}{a - 1} = \alpha_0 \checkmark$

Supponiamo che $x_{n-1} = \alpha_0 a^{n-1} + b \dfrac{a^{n-1} - 1}{a - 1}$

$$x_n = \left(\alpha_0 a^{n-1} + b \frac{a^{n-1} - 1}{a - 1}\right) a + b =$$

$$= \alpha_0 a^n + b \frac{a^n - a}{a - 1} + b =$$

$$= \alpha_0 a^n + b \left(\frac{a^n - \cancel{a} + \cancel{a} - 1}{a - 1}\right) \checkmark$$

Il caso $a = 1$ si fa ugualmente per induzione

Trovare la formula del termine n-esimo come

"soluzioni omogenea $\oplus$ successione particolare"

$a \neq 1$ $\quad \hookrightarrow x_n = c a^n \quad c \in \mathbb{R}$

C'è una succ. costante che risolve $x_n = a x_{n-1} + b$?

(y_n) è / $y_n = \ell \ \forall n$

$$\ell = a\ell + b \Rightarrow \ell = \frac{b}{1-a} \qquad a \frac{b}{1-a} + b = \frac{ab - ab + b}{1-a}$$

Soluzione omogenea

$$x_n = ca^n + \frac{b}{1-a}$$

Sol particolare

$\hookrightarrow$ da determinare (dalle condizioni iniziali)

$x_0 = \alpha_0 = c + \frac{b}{1-a}$

$c = x_0 - \frac{b}{1-a} \Rightarrow x_n = \left(\alpha_0 - \frac{b}{1-a}\right)a^n + \frac{b}{1-a} =$

$= \alpha_0 a^n + b\left(\frac{a^n - 1}{a-1}\right)$ ✓

Se $\underline{a=1}$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1} + b \\ x_0 = \alpha_0 \end{cases}$$

$x_n = x_{n-1} \Rightarrow x_n = \alpha_0$ (la soluzione dell'omogenea è costante)

La particolare deve essere indipendente dall'omogenea $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ non può essere costante

la cerco nella forma $y_n = n\ell$ → $n\ell = (n-1)\ell + b$
$\Rightarrow \ell = b$
$x_n = \underbrace{bn}_{part} + \underbrace{\alpha_0}_{om}$

LINEARI, 2° ORDINE, OMOGENEE, COEFF. COSTANTI

$$\begin{cases} x_{n+2} = a x_{n+1} + b x_n \\ x_0 = \alpha_0 \\ x_1 = \alpha_1 \end{cases}$$

vale anche nei complessi

Cerco tra $x_n = \lambda^n \Rightarrow x_{n+1} = \lambda^{n+1} \Rightarrow x_{n+2} = \lambda^{n+2}$

$\lambda^2\lambda^n - a\lambda\lambda^n - b\lambda^n = 0$

$\lambda^n \underbrace{(\lambda^2 - a\lambda - b)}_{\text{deve essere nulla}} = 0$

(I) L'eq. caratteristica $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ ha 2 sol. reali (distinte)

λ_1 e $\lambda_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \underbrace{x_n = \lambda_1^n \quad x_n = \lambda_2^n}_{\text{lin. indipendenti}} \Rightarrow x_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$

(II) Sol. reali coincidenti $\bar\lambda = \frac{a}{2}$

$x_n = n\bar\lambda^n$ prendo la sol. + n × la soluzione

$x_{n+1} = (n+1)\bar\lambda^{n+1} = n\bar\lambda^n\bar\lambda + \bar\lambda^n\bar\lambda$

$x_{n+2} = (n+2)\bar\lambda^{n+2} = n\bar\lambda^n\bar\lambda^2 + 2\bar\lambda^n\bar\lambda$

$n\bar\lambda^n\bar\lambda^2 + 2\bar\lambda^n\bar\lambda^2 - an\bar\lambda^n\bar\lambda - a\bar\lambda^n\bar\lambda - bn\bar\lambda^n =$

$= \bar\lambda^n n(\bar\lambda^2 - a\bar\lambda - b) + \bar\lambda^n(2\bar\lambda^2 - a\bar\lambda) = 0$

$\Rightarrow x_n = c_1\bar\lambda^n + c_2 n\bar\lambda^n$

III $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ coniugate

le scrivo semplicemente in forma goniometrica

$$\lambda_1 = \rho e^{i\theta} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$
$$\lambda_2 = \rho e^{-i\theta} = \rho(\cos\theta - i\sin\theta)$$

Achtung!

Nelle eq. differenziali avevamo scritto i complessi in forma cartesiana, qui ESPONENZIALE

$$x_n = \lambda_1^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$
$$x_n = \lambda_2^n = \rho^n(\cos(n\theta) - i\sin(n\theta))$$

$$\frac{1}{2}\lambda_1^n + \frac{1}{2}\lambda_2^n \Rightarrow \rho^n(\cos n\theta)$$
$$\frac{1}{2}\lambda_1^n - \frac{1}{2}\lambda_2^n \Rightarrow \rho^n(\sin(n\theta))$$

sono ancora soluzioni per le prop. di spazio vettoriale e sono lin. indipendenti, per cui dato che sono reali prendo queste come soluzioni omogenee

$$x_n = c_1\rho^n\cos(n\theta) + c_2\rho^n\sin(n\theta) \quad \in \mathbb{R}$$

SUCCESSIONE DI FIBONACCI

$$\begin{cases} x_n = x_{n-2} + x_{n-1} \\ x_0 = 0 \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$x_n = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Cerco c_1 e c_2 dalle condizioni iniziali:

$$\begin{cases} 0 = c_1 + c_2 \\ 1 = c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases}$$

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \; ; \; c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

minore di 1

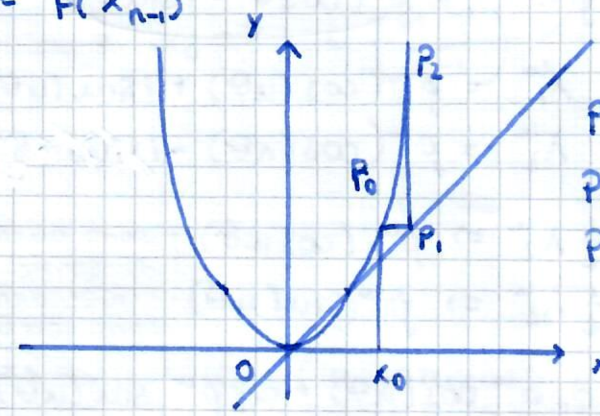
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n} - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} =$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi \quad \text{NUMERO AUREO}$$

11/03/2024

(Spiegazione della rappresentazione grafica di limiti di successioni della scorsa volta)

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 = f(x_{n-1}) \\ x_0 = c \in \mathbb{R} \end{cases}$$



$P_0 = (x_0, f(x_0))$

$P_1 (\underbrace{f(x_0)}_{x_1}, \underbrace{f(x_0)}_{x_1})$

$P_2 = (x_1, f(x_1))$

$P_3 = (f(x_1), f(x_1))$

...

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \in I \mid f(x) = x$ "punto fisso" della successione

1a) $c = 0$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{punto fisso}$$

è sempre 0

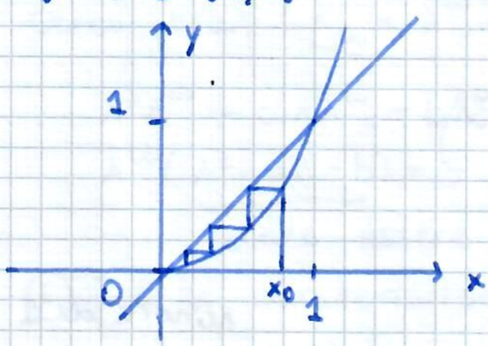
1b) $c = 1$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = 1 \end{cases}$$

è sempre 1

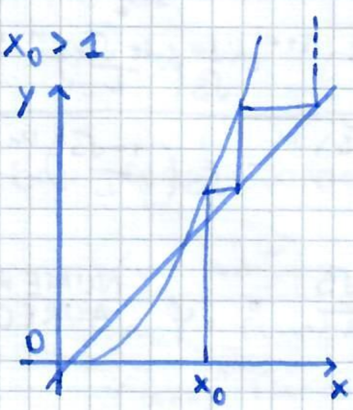
(si vede anche dall'algoritmo grafico)

1c) $c \in (0,1)$



- successione monotona decrescente
- $x_n \to 0$
- $\forall n \quad 0 < x_n \leq x_0 < 1$

1d) $x_0 > 1$



- $x_n \to +\infty$
- successione monotona crescente
- $1 < c \leq x_n \quad \forall n$

1e) $x_0 = c < 0 \Rightarrow x_1 = x_0^4 > 0$ per cui rientra nei casi precedenti

DIMOSTRAZIONE FORMALE DEL CASO 1C

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = c \end{cases} \qquad c \in (0,1)$$

tesi

STEP 1: $\forall n \in \mathbb{N}$ vale che $0 \leq x_n \leq x_0 \leq 1$

dim. passo base $n = 0$: $x_0 = c \in (0,1)$ per hp

Supponiamo che $0 \leq x_{n-1} \leq x_0 \leq 1$ → hp. induttiva

Se $0 \leq x < 1$ vale $x^4 \leq x \Rightarrow x_n = x_{n-1}^4 \leq x_{n-1}$

da cui $0 \leq x_n \leq x_0 \leq 1$

tesi

STEP 2: (x_n) è monotona decrescente, cioè $x_n \leq x_{n-1}$ $\forall n$

dim. so che $x_{n-1} \in (0,1)$

$x_n = x_{n-1}^4 \leq x_{n-1}$

$\Rightarrow$ (x_n) ammette limite $L \in [-\infty, +\infty)$ — le successioni monotone ammettono sempre limite

STEP 3: suppongo che $x_n \to L$ finito

→ TESI: questa succ. tende a 0

$$x_n = f(x_{n-1})$$

$n \to +\infty \downarrow \quad \downarrow n \to +\infty$ $\Rightarrow$ PER CONTINUITÀ DI f

$$L = f(L)$$

→ L è un punto fisso

$$L = L^4 \iff L \in \{0, 1\} \Rightarrow L = 0$$

1d) $c \in (1, +\infty)$

- $\forall n \in \mathbb{N}$: $x_n > x_{n-1} > 1$
- per induzione $x^4 \geq x$ se $x \in (1, +\infty)$
- (x_n) è monotona crescente $\Rightarrow$ ammette limite

$x_n \not\to 0 \quad x_n \not\to 1 \quad \Rightarrow x_n \to +\infty$

1e) $c = -1 \Rightarrow x_1 = 1 \Rightarrow x_n = 1$ $\forall n$

$c \in (-1, 0) \Rightarrow x_1 \in (0,1) \Rightarrow x_n \to 0$

$c \in (-\infty, -1) \Rightarrow x_1 \in (1, +\infty) \Rightarrow x_n \to +\infty$

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 + 1 \\ x_0 = c \end{cases}$$

$f(x) = x^4 + 1$ → f non ha punti fissi

se ho una funzione continua che non ha punti fissi allora il limite è ∞ o non esiste

$x_n \to +\infty$

$\forall n \in \mathbb{N}$ $x_n \geq x_0$ è monotona crescente

---

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 \\ x_0 = c \end{cases}$$

$x_1 = c^4 \qquad x_2 = (c^4)^4 = c^{4^2} \Rightarrow x_n = c^{4^n}$

se è anche crescente o decrescente esiste infinito

$$\lim_{n \to +\infty} x^n = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| = 1 \\ +\infty & \text{se } |x| > 1 \\ 0 & \text{se } |x| < 1 \end{cases}$$

Se il primo termine è negativo comunque dal 2° in poi sono tutti positivi

$$\begin{cases} x_n = x_{n-1}^4 + 1 \\ x_0 = c \end{cases}$$

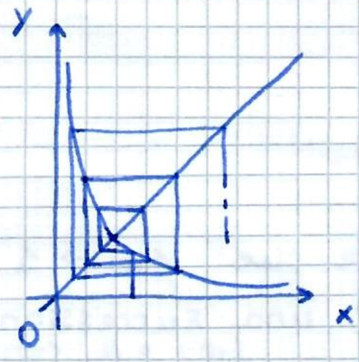
$x_1 = c^4 + 1 \qquad x_2 = (c^4+1)^4 + 1 \qquad x_3 = ((c^4+1)^4+1)^4 + 1$

$x_n > c^{4^n} + n$

$\lim_{n \to +\infty} x_n = +\infty$

ES.

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{x_{n-1}^2} \\ x_0 = c \end{cases} \qquad \begin{matrix}(c \neq 1) \\ c > 0\end{matrix}$$



$x_0 > 1$

$x_1 < 1$

$x_2 > x_0 > 1$

$x_3 < x_1 < 1$

$\forall n \quad x_{2n+2} > x_{2n} \Rightarrow$ la sottosuccessione dei pari è monotona crescente

$\forall n \quad x_{2n+3} < x_{2n+1} \Rightarrow$ " " dei dispari è monotona decrescente

$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$

$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f(f(x)) = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2} = x^4$

$x_{2n+2} = x_{2n}^4 \qquad x_{2n+3} = x_{2n+1}^4$

$$\begin{cases} x_0 = c > 1 \\ x_{2n+2} = x_{2n}^4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_{2n+3} = x_{2n+1}^4 \\ x_0 = c \in (0,1) \end{cases}$$

$x_{2n} \to +\infty \qquad x_{2n+1} \to 0$ (caso precedente)

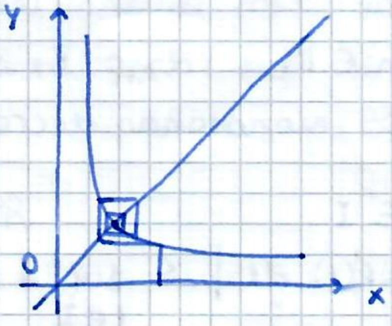
$\Rightarrow x_n$ non ammette limite

ES.

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{1}{\sqrt{x_{n-1}}} \\ x_0 = c = 10 \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \qquad f(f(x)) = \sqrt[4]{x}$

Nuovamente le sottosuccessioni dei pari e dei dispari sono monotone



STEP 1:

limitazioni — per induzione

$1 \leq x_{2n} \leq x_0$

$0 \leq x_{2n+1} \leq 1$

STEP 2:

x_{2n} è non decrescente

x_{2n+1} è non crescente

STEP 3:

$x_{2n} \to 1$

$x_{2n+1} \to 1$

Voglio dimostrare che $x_n \to 1$

LEMMA: Sia (x_n) una successione. Supponiamo che $x_{2n} \to \ell$ e $x_{2n+1} \to \ell$. Allora $x_n \to \ell$

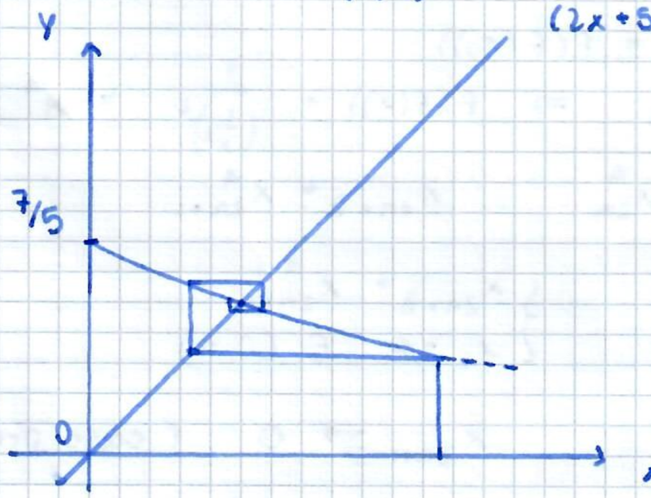
ES

$$\begin{cases} x_n = \dfrac{7}{2x_{n-1}+5} \\ x_0 = 10 \end{cases}$$

$f(x) = \dfrac{7}{2x+5} \quad x \geq 0$

$f(0) = 7/5 \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

$f'(x) = -\dfrac{14}{(2x+5)^2} \Rightarrow$ decrescente



Risolvendo $f(x) = x \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ x = -14/4 \end{matrix}$

CLAIM: $x_n \to 1$

$d_n = |x_n - 1|$ → nuova successione - distanza dal limite

Se dimostro che $d_n \to 0$ allora $x_n \to 1$

Chiamo

$c = \sup \{ |f'(x)| \mid x > 0 \}$

Voglio dimostrare che $\forall n \in \mathbb{N} \quad d_{n+1} \leq c\, d_n$

(se $c < 1$, allora d_n è monotona decrescente)

$f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x, y \in I$

$$|f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t)\, dt \right| \leq \underbrace{\sup_{t \in I} |f'(t)| \left| \int_y^x 1\, dt \right|}_{= c\,|x-y|} =$$

$d_{n+1} = |x_{n+1} - 1| = |f(x_n) - f(1)|$

$\leq c\,|x_n - 1| = c\,d_n$

Per induzione $d_n \leq c^n d_0$

Se $c < 1 \Rightarrow d_n \to 0$

12/03/2024

Esercizi

1) $A \subset \mathbb{R}$ $\quad A \neq \emptyset$

(i) $\inf(A) \leq \sup(A)$

(ii) $\inf(A) = \sup(A) \iff A = \{a\}$

Dim $\quad y_i$ minorante di A

(i) $\quad \forall a \in A \quad y_i \leq a$

y_s maggiorante di A

$\forall a \in A \quad y_s \geq a$

$y_i \leq a \leq y_s \Rightarrow$ per tutti i Magg. e tutti i min

$\Rightarrow \inf A \leq a \leq \sup A$

$\inf A \leq \sup A$

(ii) Dalla disuguaglianza di prima

$\inf A \leq a \leq \sup A \Rightarrow \inf A = a = \sup A \quad \forall a \in A$

$\Rightarrow A = \{a\}$

Se $A = \{a\}$

$\left.\begin{array}{l} \max A = a = \sup A \\ \min A = a = \inf A \end{array}\right) \inf A = \sup A$

2) $A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \neq \emptyset \neq B$

$A \subset B$

Allora $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$

Dim. Devo mostrare che $\inf B \in \text{Min}(A)$ $\quad (\text{Min}(B) \subset \text{Min}(A))$

$\forall b \in B$ ho che $\inf(B) \leq b$

$A \subset B \Rightarrow a \in A \Rightarrow B \ni a \Rightarrow \forall a \in A \quad \inf(B) \leq a$

è un minorante di A

Per definizione di inf: $\inf B \leq \inf A$

Similmente per i sup si conclude che $\sup B \in \text{Mag}(A)$

da cui $\sup(A) \leq \sup(B)$

3) $A, B \subset \mathbb{R}$

$\sup(A \cup B) = \max\{\sup(A), \sup(B)\}$ (funziona anche con $A = \emptyset$

$\inf(A \cup B) = \min\{\inf(A), \inf(B)\}$ $\quad B = \emptyset$)

WLOG $\quad \xi = \max\{\sup(A), \sup(B)\} = \sup(A)$

Voglio mostrare che $\sup(A \cup B) = \sup A$
- $A \subset A \cup B \Rightarrow \sup(A) \leq \sup(A \cup B)$ ✓
- $\sup A \geq \sup(A \cup B)$ cioè che $\sup A \in \text{Mag}(A \cup B)$

Sia $c \in A \cup B$
se $c \in A$ $\quad c \leq \sup(A)$
se $c \in B$ $\quad c \leq \sup(B) \leq \sup(A)$
$\Rightarrow \forall c \in A \cup B,\ c \leq \sup(A) \Rightarrow \sup(A) \in \text{Mag}(A \cup B)$
$\sup(A) \geq \sup(A \cup B)$ <?

Dalle 2 disuguaglianze: $\sup(A \cup B) = \sup(A)$

4) $A, B \subset \mathbb{R}$

$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

In generale non vale $\sup(A \cap B) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

esempio: $A = \{1,2,3\}$ $\quad B = \{1,4,5\}$
$\sup(A) = 3$ $\quad \sup(B) = 5$
$\sup(A \cap B) = 1$

WLOG $\sup(A) = \min\{\sup(A), \sup(B)\}$

Mi basta far vedere che $\sup(A) \in \text{Mag}(A \cap B)$

$c \in A \cap B \Rightarrow c \in A$ da cui $c \leq \sup(A) \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup(A) \in \text{Mag}(A \cap B)$

lezione 42 della Pluda

5) COLLEGAMENTO TRA EQ. DIFFERENZIALI ORDINARIE E SUCCESSIONI

Le equazioni alle differenze approssimano le eq. differenziali ordinarie (ODE)

$x(t)$ vogliamo scrivere $x'(t)$

$$x'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{x(t+h) - x(t)}{h} \Rightarrow \text{per } h>0 \text{ piccolo}$$
$$hx'(t) \simeq x(t+h) - x(t)$$

$\left.\begin{aligned} t_n &= nh \\ a_n &= x(t_n) \end{aligned}\right\}$ successioni

$hx'(t_n) = a_{n+1} - \underbrace{a_n}_{x(t_n)}$

$a_{n+1} = x(t_{n+1}) = x((n+1)h) = x(nh + h) =$
$= x(t_n + h)$

$x'(t) = x(t)$ $\quad \dfrac{a_{n+1} - a_n}{h} = a_n$

$x(t) = ce^t$

$a_{n+1} - a_n = ha_n$

$a_{n+1} = (1+h)\, a_n$

$\lambda = (1+h)$

$a_n = c(1+h)^n$

$nh = t \qquad n = \frac{t}{h}$

$$\lim_{h\to 0} c(1+h)^n = \lim_{h\to 0} c(1+h)^{\frac{t}{h}} =$$

$$= \lim_{h\to 0} c\, e^{\frac{t}{h}\log(1+h)} = c e^t$$

$\log(1+h)$ va come h per Taylor

6)

"permanenza del segno"

- Sia (x_n) succ. tale che $x_n \to \ell \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \forall\ a < \ell,\ \exists\, n_a \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_a$ vale $x_n \geq a$

<u>Dim.</u> $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_\varepsilon \in \mathbb{N} \mid n \geq n_\varepsilon \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon$

$\ell - \varepsilon \leq x_n \leq \ell + \varepsilon$

Scelgo $\varepsilon_a = \ell - a$

$\Rightarrow \exists\, n_{\varepsilon_a} \in \mathbb{N} \mid n \geq n_{\varepsilon_a} \Rightarrow \ell - \varepsilon_{n_a} \leq x_n \leq \ell + \varepsilon_{n_a}$

$\Downarrow$

$a \leq x_n$

7) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$ — $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ c'è una successione in $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ che ha limite x_0

Svolgimento:

- Se $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \Rightarrow (x_n)$ costante $x_n = x$ è una succ. di irrationali e $x_n \to x$
- Se $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ considero la succ. $\left(\frac{\sqrt{2}}{n}\right)$

  tutti gli $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ $\quad x_n \to 0$

  allora $\left(x + \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \to x$ e $x_n \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\ \forall n \in \mathbb{N}$

8) $a, b \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

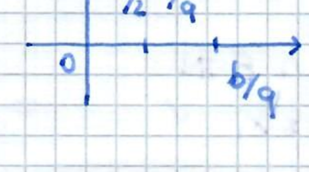
(combinazioni lineari di due numeri reali)

Sia $E = \{na + mb \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, è denso in $\mathbb{R} \iff \frac{a}{b} \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$

($\Rightarrow$) Supponiamo che $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\quad \frac{a}{b} = \frac{p}{q} \quad p, q \in \mathbb{Z}$

$$na + mb = n\frac{p}{q}b + mb = \frac{b}{q}(np + mq) =$$

$$= \frac{b}{q} N \qquad N \in \mathbb{Z} \qquad \forall N$$



$$\left| N\frac{b}{q} - \frac{1}{2}\frac{b}{q} \right| \geq \frac{1}{2}\left|\frac{b}{q}\right| \not\to 0$$

$\Rightarrow x = \frac{1}{2}\frac{b}{q}$ in $\mathbb{R}$ non può essere limite di una succ. di elem. di E

9) (x_n) succ.

$x_{2n} \to \ell \quad x_{2n+1} \to \ell$

$\Rightarrow x_n \to \ell$

__Dim.__ $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_1 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_1 \quad |x_{2n} - \ell| \leq \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_2 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_2 \quad |x_{2n+1} - \ell| \leq \varepsilon$

$\varepsilon > 0$, prendo $\hat{n} = \max\{n_1, n_2\} \Rightarrow \forall n > \hat{n} \quad |x_n - \ell| \leq \varepsilon$

$n \equiv 0 \ (2) \vee n \equiv 1 \ (2)$
(non ci sono altre option i)

10) Trovare tutte le (x_n) che soddisfano $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1} + 1)$

II ordine ⇒ senza condizioni iniziali la sol deve dipendere da due parametri

- EQ. CARATTERISTICA:

$$\lambda^2 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2} = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda + \tfrac{1}{2}) = 0 \qquad \lambda = 1 \vee \lambda = -\frac{1}{2}$$

$$x_n = c_1 + c_2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$ → soluzione dell'omogenea

Cerco una particolare $\hat{x}_n = cn$ che risolve

(si vede facilmente che nessuna costante va bene)

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + x_{n-1} + 1)$$

$$c(n+1) = \frac{1}{2}(cn + c(n-1) + 1)$$

$$\Rightarrow c = 1/3 \qquad x_n = c_1 + c_2\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \frac{n}{3}$$

ALTRO METODO DI RISOLUZIONE: trasformarla in una omogenea di ordine maggiore

$$x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}x_{n-1} = 1$$

$$x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n = 1$$

$$x_{n+1} - \cancel{\frac{1}{2}x_n} - \frac{1}{2}x_{n-1} = x_{n+2} - \frac{1}{2}x_{n+1} - \cancel{\frac{1}{2}x_n}$$

$$x_{n+2} - \frac{3}{2}x_{n+1} + \frac{1}{2}x_{n-1} = 0$$

$$\lambda^3 - \frac{3}{2}\lambda^2 + \frac{1}{2} = 0$$

↓ Ruffini

$$(\lambda - 1)^2(\lambda + \tfrac{1}{2}) \Rightarrow x_n = c_1 + c_2 n + c_3\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

11) (x_n) definita da $\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + \sin(x_n) \\ x_1 = 2 \end{cases}$

Considero (y_n) definita da $\begin{cases} y_{n+1} = y_n \cdot 2 - 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$

Voglio mostrare che $y_n \leq x_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

PASSO BASE: $x_1 = 2 \wedge y_1 = 2 \Rightarrow y_1 \leq x_1$ ✓

Supponiamo che sia vera per n : $y_n \leq x_n$

$$x_{n+1} = 2x_n + \sin(x_n)$$
$$y_{n+1} = 2y_n - 1$$

$$2x_n + \sin(x_n) \geq 2y_n + \sin(x_n) \geq 2y_n - 1 = y_n$$
$$\Rightarrow y_n \leq x_n$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = 2y_n - 1 \\ y_1 = 2 \end{cases}$$

$\lambda = 2$ $\qquad y_{n_{om}} = c2^n$

$\tilde{y}_n = a$ $\qquad a = 2a - 1 \Rightarrow a = 1$

$y_n = c2^n + 1$

$y_1 = 2 = 2c + 1 \Rightarrow c = \frac{1}{2}$

$y_n = \frac{1}{2}2^n + 1$

$y_n \to +\infty \Rightarrow y_n \leq x_n \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x_n \to +\infty$

$$\begin{cases} z_n = 2x_n + 1 \\ z_1 = 2 \end{cases}$$

$x_n \leq z_n$

$z_{n_{om}} = 2x_n = c2^n$

$a = 2a + 1 \Rightarrow a = -1$

$z_1 = 2 = 2c - 1$ $\qquad c = 3/2$

In definitiva: $\frac{1}{2}2^n + 1 \leq x_n \leq \frac{3}{2}2^n - 1$

15/03/2024

DETTAGLI SECONDARI SULLE SUCCESSIONI

LINGUAGGIO: uso degli avverbi "frequentemente" e "definitivamente"

$P(n)$ affermazione che dipende da $n \in \mathbb{N}$ (e vale o non vale a seconda di n)

"$P(n)$ vale definitivamente in n" $\iff \exists\, n_0 \mid P(n)$ vale per $n \geq n_0$

"$P(n)$ vale per n abbastanza grande"

"$P(n)$ vale frequentemente in n" $\iff$ "$P(n)$ vale per infiniti n"

ES.
- n è primo frequentemente in n
- $n \log n \geq 10^6$ definitivamente in n
- $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ sse $\forall I$ intorno di L, $x_n \in I$ definitivamente
- $\forall I$ intorno di L, $x_n \in I$ frequentemente

  $\Updownarrow$

  esiste (n_k) sottosucc. di (n) $\mid x_{n_k} \to L$!

Dim.

$\Uparrow$ Se $x_{n_k} \to L$ allora $\forall I$ intorno di L esiste $k_I \mid$ $x_{n_k} \in I \ \forall k \geq k_I$ quindi $\{n : x_n \in I\} \supset \{n_k \text{ con } k \geq k_I\}$ ← insieme ∞

$\Downarrow$ Prendo $n_k := \min\{n \mid x_n \in [L - \frac{1}{k}, L + \frac{1}{k}] \text{ e } n > n_{k-1}\}$ ($\neq \emptyset$)

(n_k è ben definito, per induzione su k)

$x_{n_k} \in [L - \frac{1}{k}, L + \frac{1}{k}]$ $\quad L - \frac{1}{k} \leq x_{n_k} \leq L + \frac{1}{k}$

COSA SI PUÒ DIRE SUL COMPORTAMENTO DI SUCCESSIONI PER LE QUALI NON $\exists$ LIMITE

ES: 1) $x_n := (-1)^n \longrightarrow$ $x_{2n} \to 1$

$x_{2n+1} \to -1$

$\Uparrow$

queste informazioni esauriscono quello che c'è da dire

2) $x_n :=$ classe di resto di n mod (25)

$x_{25n} \to 0$

$x_{25n+1} \to 1$

$x_{25n+2} \to 2$

$\vdots$

3) $\operatorname{sen}(\sqrt{n})$?

Non si può scomporre in un numero finito di sottosuccessioni convergenti

Data $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$

$I_0 :=$ più piccolo intervallo chiuso che contiene $x_n \ \forall n \geq 0$

$I_1 :=$ " " " $x_n \ \forall n \geq 1$

$\vdots$

$I_k :=$ " " " $x_n \ \forall n \geq k$

$I_k = [y_k, y_k']$ con $y_k := \inf \{ x_n \mid n \geq k \}$

$y_k' := \sup \{ x_n \mid n \geq k \}$

vedi dimostrazione del teo. di Cauchy

Allora (y_k) è crescente, $y_k \to L = \sup \{ y_k \}$

(y_k') è decrescente, $y_k' \to L' = \inf \{ y_k' \}$

L si chiamerà **LIMITE INFERIORE** di (x_n) $\left(L = \liminf\limits_{n \to \infty} x_n \right)$

L' si chiamerà **LIMITE SUPERIORE** di (x_n) $\left(L' = \limsup\limits_{n \to \infty} x_n \right)$

$$L = \liminf_{n \to +\infty} x_n := \sup_k \Big(\overbrace{\inf_{n \geq k} x_n}^{y_k} \Big)$$

$$L' = \limsup_{n \to +\infty} x_n := \inf_k \Big(\sup_{n \geq k} x_n \Big)$$

ESEMPIO:

- $\limsup (-1)^n = 1$ $\quad$ $\liminf (-1)^n = -1$
  $(y_k = 1 \ \forall k)$ $\quad$ $(y_k' = -1 \ \forall k)$

- $\limsup (-1)^n + \frac{1}{n} = 1$ $\quad$ $\liminf (-1)^n + \frac{1}{n} = -1$
  $y_k = ?$ $\quad$ $y_k' = ?$
  $1 + \frac{1}{n} \ \forall n$ pari $\quad$ $-1 + \frac{1}{n} \ \forall n$ dispari
  $y_k = 1 + \frac{1}{n}$ $\quad$ $y_k' = -1 \ \forall k$

Proposizione:

Data (x_n) e $L = \liminf x_n$ e $L' = \limsup x_n$ allora

(i) $\forall \ell < L$, $x_n \geq \ell$ definitivamente
(ii) $\forall \ell' > L'$, $x_n \leq \ell'$ definitivamente

? le ha cancellate a un certo punto

$(\forall \ell, \ell' \mid \ell < L \leq L' < \ell'$ vale che $\ell \leq x_n \leq \ell'$ definitivamente$)$

(i)

(ii) $\exists\, n_k \mid x_{n_k} \to L$

(iii) $\exists\, n_k' \mid x_{n_k'} \to L'$

(Prop. le proprietà (i), (ii) e (iii) caratterizzano limsup e liminf, dimostrarlo per esercizio)

Dim. $\forall\, \ell < L$, $x_n \geq \ell$ definitivamente

(prima parte dell' enunciato (i))

$\ell < L = \lim_{k\to\infty} y_k \implies \exists\, k \mid y_k > \ell$

$\implies \ell < y_k = \inf\{x_n \text{ con } n \geq k\} \implies \ell < y_n \leq x_n \quad \forall\, n \geq k$

Dim.(ii) per L finito (provare a fare i casi $L = \pm\infty$)

Devo far vedere che $\forall\, I$ intorno di L, $x_n \in I$ frequentemente

$y_k \to L$ e per definizione di y_k $\exists\, n_k \mid \underset{y_k \leq}{x_{n_k}} \leq y_k + \frac{1}{k}$

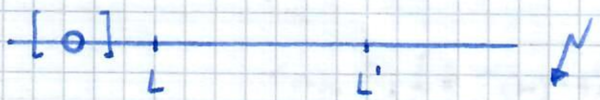
e allora per confronto $x_{n_k} \to L$

$\implies$ correggere in modo che n_k sia strettamente crescente

DEF. Data $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si dice che ℓ è un punto limite (o valore limite di (x_n)) di (x_n) se esiste (n_k) sottosuccessione di (n) t.c. $x_{n_k} \to \ell$

Ex 1 1) $\limsup x_n = \max \mathcal{L}$ $\quad \mathcal{L} :=$ insieme dei valori limite

$\liminf x_n = \min \mathcal{L}$ ($\liminf$ written over a struck-out sup; min written under a struck-out word)



Ex 2 $\mathcal{L}$ non è mai vuoto (serve Bolzano - Weierstrass)

Ex 3 (x_n) ammette limite $\iff \mathcal{L} = \{L\}$
$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\llcorner L$

Ex 4 Se $(L_n) \subset \mathcal{L}$ e $L_n \to L$ allora $L \in \mathcal{L}$

Ex 5 Se esistono $(n_k^1), (n_k^2), \dots, (n_k^N)$ sottosucc. che hanno limite $x_{n_k^1} \to L_1, \dots, x_{n_k^N} \to L_N$ e $\{n_k^i \mid {}^{i=1,\dots,N}_{k=0,\dots}\} = \mathbb{N}$

allora $\mathcal{L} = \{L_1, \dots, L_N\}$ $\quad$ È una doppia implicazione?

Ex 6 Se $x_n = \sin\sqrt{n}$

$\mathcal{L} = [-1, 1]$

Ex 7 Costruire $(x_n) \mid \mathcal{L} = \mathbb{R}$

18/03/24

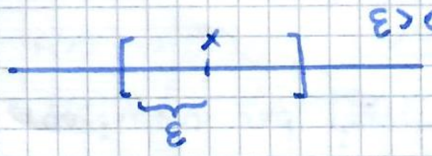
LIMITI DI FUNZIONI

$X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

$\uparrow$

sottoinsieme qualunque

Def. $x \in X$ è un punto isolato se $\exists I$ intorno di x tale che $X \cap I = \{x\}$ (Se $x \in \mathbb{R} \cap X$ questo significa che esiste $\varepsilon > 0 \mid \forall x' \in X,\ x' \neq x$ vale $|x - x'| > \varepsilon$)



Def. $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione di X se $\forall I$ intorno di $\bar{x}$, $(X \cap I) \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ → c'è un altro punto oltre a $\bar{x}$
(Se $\bar{x} \in \mathbb{R}$ questo significa che $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in X,$ $x \neq \bar{x} \mid (x - \bar{x}) < \varepsilon$)

OSS Ogni $x \in X$ è un punto isolato o un punto di accumulazione

ES.
1) Se X = intervallo con estremi a, b $(a < b)$
   X non contiene punti isolati e l'insieme dei punti di accumulazione è $[a, b]$
2) Se $X = \mathbb{N}$ tutti i punti di X sono isolati e l'unico punto di accumulazione è $+\infty$
   (non appartiene all'insieme ma non è richiesto dalla definizione)
3) Se $X = \mathbb{Q}$ non ha punti isolati
   I punti di accumulazione sono $\overline{\mathbb{R}}$
4) Se $X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ e $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} L$ allora
   L'unico punto di accumulazione è L se $x_n \neq L$ frequentemente

Def. $X \cup \{$punti di accumulazione di $X\} = \overline{X}$ si chiama "chiusura" di X

ES. $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$
"chiusura della chiusura di X"

se non ci fosse $\setminus \{\bar{x}\}$ potrei prendere la succ costante $(x_n) = \bar{x}$ e ogni punto sarebbe di accumulazione

Prop. $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di accumulazione di X $\iff$
$\exists (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\} \mid x_n \to \bar{x}$

Dim. $\boxed{\Rightarrow}$ per $\bar{x} \in \mathbb{R}$ (finito)

Fare i casi $\bar{x} = \pm\infty$

Poiché $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X, per ogni $n > 0$, l'intorno $[\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}]$ contiene qualche $x \in X$ con $x \neq \bar{x}$

Chiamo questo punto x_n : $\bar{x} - \frac{1}{n} \leq x_n \leq \bar{x} + \frac{1}{n} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_n \to \bar{x}$

per confronto

($\Leftarrow$) Siccome $x_n \to \bar{x}$

$\forall I$ intorno di $\bar{x}$ esiste $\bar{n}_I \mid$ per $n \geq \bar{n}_I$ vale $x_n \in I$

In particolare $x_{\bar{n}} \in I$ e $x_{\bar{n}} \neq \bar{x}$ per ipotesi

$x_{\bar{n}} \in X$

$\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$ è un punto di $\bar{X} \iff \exists (x_n) \subset X \mid x_n \to \bar{x}$

Def. limite

Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, dato $\bar{x}$ punto di accumulazione di X, dato $L \in \overline{\mathbb{R}}$ dico che

$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = L$ se $\forall I$ intorno di L esiste $J = J_I$ intorno di $\bar{x} \mid \underbrace{x \in X \cap J \text{ e } x \neq \bar{x} \Rightarrow f(x) \in I}_{f((X \cap J) \setminus \{\bar{x}\}) \subset I}$

(Se $L, \bar{x}$ sono finiti, questo significa che $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ t.c. se $x \in X$, $x \neq \bar{x}$, $|x - \bar{x}| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon$)

OSS. Sia (x_n) successione in $\overline{\mathbb{R}}$

Definisco $f: \mathbb{N} \to \overline{\mathbb{R}}$ se $f(n) := x_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

Allora $x_n \to L \iff f(n) \to L$ con la def. di adesso

NB! Ha senso chiedersi il limite solo quando $n \to \infty$ perché è l'unico punto di accumulazione di $\mathbb{N}$

PROP. ELEMENTARI DEI LIMITI

· Data $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulazione di X

(i) Il limite L se esiste è unico

$f(X \cap J \setminus \{\bar{x}\}) \subset I_1$, $\subset I_2$ se sono disgiunti e non vuoti è assurdo

(serve che $\bar{x}$ è punto di accumulazione)

(ii) Se $f(x) \geq g(x)$ e $f(x) \to L$ e $g(x) \to L' \Rightarrow L \geq L'$ (*)

(*) Se esiste J intorno di $\bar{x}$ | $\forall x \in J$ vale $f(x) \geq g(x)$

(iii) (confronto)

Se $g(x) \leq f(x) \leq \tilde{g}(x)$ e $g(x) \to L$, $\tilde{g}(x) \to L$ allora $f(x) \to L$

per un intorno di $\bar{x}$ e $x \neq \bar{x}$

(iv) (permanenza del segno) $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

Se $f(x) \to L$ e $a < L < b$ $\Rightarrow \exists I$ intorno di $\bar{x}$ | $a < f(x) < b$ $\forall x \in I \cap X \setminus \{\bar{x}\}$

(v) Se $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$, $f_1(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1$ $f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_2$ con $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

allora $f_1(x) + f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1 + L_2$

$f_1(x) f_2(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L_1 \cdot L_2$

Varianti: $f_1(x) \to +\infty$ $f_2(x) \geq n > -\infty$ in un intorno di $\bar{x}$

allora $f_1(x) + f_2(x) \to +\infty$

etc...

Prop. (collegamenti tra limiti di funtioni e successioni)

$X, f, \bar{x}$ come al solito, $L \in \overline{\mathbb{R}}$ allora

$f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L \iff f(x_n) \to L \quad \forall (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\}$ | $x_n \to \bar{x}$

[Per ogni successione del dominio]

Dim.

($\Rightarrow$) Siccome $f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$, per ogni I intorno di L

$\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. $f((J \cap X) \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$ *

Siccome $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \bar{x}$ allora $\exists \bar{n} = \bar{n}_J$ | $n \geq \bar{n} \Rightarrow x_n \in J$ *

$* \Rightarrow x_n \in X, \underbrace{x_n \neq \bar{x}}_{\text{per ipotesi}} \Rightarrow f(x_n) \in I$

Mettendo insieme i pezzi

$\forall I$ di L $\exists \bar{n}$ | $n \geq \bar{n} \Rightarrow f(x_n) \in I$ (cioè $f(x_n) \to L$)

($\Leftarrow$) Per assurdo suppongo che $f(x) \not\xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$

Allora $\exists I$ intorno di L | $\forall J$ intorno di $\bar{x}$

$f((X \cap J) \setminus \{\bar{x}\}) \not\subset I$

Cioè $\exists x \in (X \cap J) \setminus \{\bar{x}\}$ | $f(x) \notin I$

Caso in cui $L \in \mathbb{R}$ (provare a fare $L = \pm\infty$)

In particolare $\forall n > 0$, $\exists x \in [\bar{x} - \frac{1}{n}, \bar{x} + \frac{1}{n}] \cap X \setminus \{\bar{x}\}$

t.c. $f(\underset{\sim}{x}) \notin I$

Quindi $x_n \to \bar{x}$, $x_n \in X \setminus \{\bar{x}\}$ $\forall n$ e $f(x_n) \notin I$ $\forall n$ ↯

In particolare $\cancel{f(x_n) \to L}$

Se avessi cambiato l'enunciato in questo modo:

$$f(x_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} L \;\; \forall (x_n) \subset X \text{ con } x_n \to \bar{x} \iff \ ?$$

cosa va messo qua?

Def. Dato $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ si dice che f è continua in $\bar{x}$ se $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. ($x \in J \cap X \Rightarrow f(x) \in I$) $f(X \cap J) \subset I$

(se $\bar{x}$ e $f(\bar{x})$ sono finiti questo significa che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ / $|x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.)

Prop. (relazione tra limiti e continuità)

(i) Se $\bar{x}$ è un punto isolato di X allora f è continua in $\bar{x}$

(ii) Se $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di X allora f è continua in $\bar{x}$ $\iff \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

19/03/2024

Prop. $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ punto di accumulazione per X

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

Sono fatti equivalenti:

(i) f è continua in $\bar{x}$

(ii) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = f(\bar{x})$

Dim

da dimostrare:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$, $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ / $f((J \cap X) \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$

So che:

$\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$, $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ / $f(J \cap X) \subset I$

continuità di f su $\bar{x}$

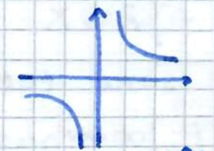
$f((J \cap X) \setminus \{\bar{x}\}) \subset f(J \cap X) \subset I$

(ii) $\Rightarrow$ (i) Dalla def. di limite so che

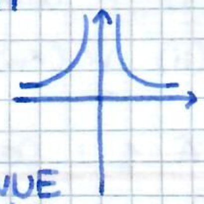
$\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ $\exists J$ intorno di $\bar{x}$ / $f((J \cap X) \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$

Mi manca far vedere che $f(\bar{x}) \in I$, ma questo è vero perché I è un intorno di $f(\bar{x})$.

ES: $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$



$g(x) = \frac{1}{x^2}$ $\quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}$

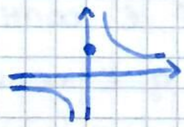


$\Rightarrow$ queste due funzioni SONO CONTINUE (0 non è nel dominio)

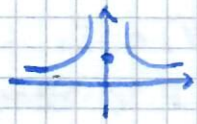
$f: \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$

non continue

$$f'(x) = \begin{cases} 1/x & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$$g'(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$



$g'': \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$

$$g''(x) = \begin{cases} 1/x^2 & \text{se } x \neq 0 \\ +\infty & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

continue

$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$h(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Quando il limite esiste si può modificare la funz. per renderla continua, altrimenti no

VERSIONE ALTERNATIVA:

Prop.

$X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x}$ punto di accumulo per X (può non essere un punto di X)

$f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad \ell \in \overline{\mathbb{R}}$

Allora sono fatti equivalenti:

(i) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \ell$

(ii) la funz. estesa / modificata $\tilde{f}$ definita da:

$$\tilde{f}: X \cup \{\bar{x}\} \to \overline{\mathbb{R}}$$

$$x \longmapsto \begin{cases} f(x) & \forall x \in X \setminus \{\bar{x}\} \\ \ell & \text{per } x = \bar{x} \end{cases}$$

è continua in $\bar{x}$

Caratterizzazione dei limiti usando le succ.

Fatti equivalenti:
(i) quelli di prima
(ii)
(iii) $\forall (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\} \mid x_n \to \bar{x}$ allora $f(x_n) \to f(\bar{x})$

Prop. $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$

allora sono fatti equivalenti:

(i) f continua in $\bar{x}$

(ii) $\forall (x_n) \subset X$ succ. t.c. $x_n \to \bar{x}$ allora $f(x_n) \to f(x)$

PROPRIETÀ 1 : Composizione

$X, Y \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to Y$, $g: Y \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$

se f è continua in $\bar{x}$ e g è continua in $f(\bar{x}) = \bar{y}$

allora $g \circ f$ è continua in $\bar{x}$.

Dim. • Per ip. g è continua in $f(\bar{x}) = \bar{y}$, ossia

$\forall I_1$ intorno di $g(\bar{y}) = g(f(\bar{x}))$ $\exists J_1$ intorno di $\bar{y} = f(\bar{x})$ t.c. $g(J_1 \cap Y) \subset I_1$

• Per ip. f è continua in $\bar{x}$

$\forall I_2$ intorno di $f(\bar{x}) = \bar{y}$ (quindi in particolare anche per J_1) $\exists J_2$ intorno di $\bar{x}$ | $f(X \cap J_2) \subset I_2$

$\Rightarrow$ in particolare $f(J_2 \cap X) \subset J_1$ inoltre $f(J_2 \cap X) \subset Y$

Allora $\forall I_1$ intorno di $g(\bar{y}) = g(f(\bar{x}))$, $\exists J_2$ intorno di $\bar{x}$ | $g(f(J_2 \cap X)) \subset g(J_1 \cap Y) \subset I_1$

Ossia $g(f(x))$ è continua in $\bar{x}$ □

CAMBIO DI VARIABILE NEI LIMITI

$$\lim_{x \to \bar{x}} g(f(x)) = \lim_{y \to \bar{y}} g(y) = \bar{z}$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$$

__Enunciato 1° semestre:__ X, Y unione finita di intervalli

$f: X \to Y$, $g: Y \to \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$

Supponiamo i) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$

ii) $\exists \lim_{y \to \bar{y}} g(y) = \bar{z}$

iii) se $\bar{y} \in Y$ g è continua in $\bar{y}$

Allora $\lim_{x \to \bar{x}} g(f(x)) = \lim_{y \to \bar{y}} g(y) = \bar{z}$

__Versione più generale:__ $X, Y \subset \mathbb{R}$ $f: X \to \mathbb{R}$, $g: Y \to \mathbb{R}$

questo era scontato per gli intervalli

$\bar{x}$ punto di accumulazione

(i) $\lim_{x \to \bar{x}} f(x) = \bar{y}$ e $\bar{y}$ p. di accumulazione di Y

(sto chiedendo di meno)

(ii) $\exists \lim_{y \to \bar{y}} g(y) = \bar{z}$

(iii) Se $\bar{y} \in Y$ allora $g(\bar{y}) = \bar{z}$

equivalente alla richiesta (iii) del primo semestre

Allora $\lim_{x \to \bar{x}} f(g(x)) = \lim_{y \to \bar{y}} g(y) = \bar{z}$

ESEMPI:

- (iii) è necessaria

$X = \mathbb{R}$

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$Y = \mathbb{R}$

$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$

Allora $\forall \bar{x} \in \mathbb{R} \quad f(\bar{x}) = 0 \quad \lim_{x \to \bar{x}} f(x) = 0$

$g(f(\bar{x})) = g(0) = 1$

$\lim_{y \to 0} g(y) = 0 \qquad \lim_{x \to \bar{x}} g(f(x)) = 1$

- (ii) è necessaria

$f = x^2$

$g = \frac{1}{x}$

$\lim_{x \to 0} 1/x^2 = +\infty \qquad \lim_{y \to 0} 1/y$ N.E.

- È necessario dire che $\bar{y}$ è un p. di accumulazione

$X = \mathbb{R}, \ f(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}, \ Y = \{0\}$

$\bar{x}$ qualunque su $\mathbb{R}$

$\bar{y} \in \bar{Y}$ $\quad Y$ unione finita di intervalli

$Y = [a, b] \cup (c, d) \cup \dots$

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI

Notazione: $x, \bar{x} \in \mathbb{R}, \ \varepsilon > 0$

scriviamo $x = \bar{x} \pm \varepsilon \iff |x - \bar{x}| \leq \varepsilon$

$\bar{x} - \varepsilon \leq x \leq \bar{x} + \varepsilon$

valore reale (x), valore effettuato ($\bar{x}$), err. assoluto (ε)

$x_1 = \bar{x}_1 \pm \varepsilon_1 \qquad x_2 = \bar{x}_2 \pm \varepsilon_2$

(i) $x_1 + x_2 = (\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \pm (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

a fisica solitamente trascuro questa parte

(ii) $x_1 x_2 = (\bar{x}_1 \bar{x}_2) \pm (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 |x_1| + \varepsilon_1 |x_2|)$

disuguaglianza triangolare

Dim

(i) $|(x_1 + x_2) - (\bar{x}_1 + \bar{x}_2)| = |(x_1 - \bar{x}_1) + (x_2 - \bar{x}_2)| \leq |x_1 - \bar{x}_1| + |x_2 - \bar{x}_2| \leq$

$\leq \varepsilon_1 + \varepsilon_2$

(ii) $|x_1 x_2 - \bar{x}_1 \bar{x}_2| = |(x_1 + \bar{x}_1 - \bar{x}_1)(x_2 + \bar{x}_2 - \bar{x}_2) - \bar{x}_1 \bar{x}_2|$

$= |(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2) + \bar{x}_1(x_2-\bar{x}_2) + \bar{x}_2(x_1-\bar{x}_1) + \cancel{\bar{x}_1\bar{x}_2} - \cancel{\bar{x}_1\bar{x}_2}| \leq$

$\leq |(x_1-\bar{x}_1)(x_2-\bar{x}_2)| + |\bar{x}_1(x_2-\bar{x}_2)| + |\bar{x}_2(x_1-\bar{x}_1)| \leq$

disuguaglianza triangolare

$\leq |x_1-\bar{x}_1||x_2-\bar{x}_2| + |\bar{x}_1||x_2-\bar{x}_2| + |\bar{x}_2||x_1-\bar{x}_1| =$

sarebbe uguaglianza in teoria

$= \varepsilon_1\varepsilon_2 + |x_1|\varepsilon_2 + |x_2|\varepsilon_1$

Proprietà 2/3

$X \subset \bar{\mathbb{R}}, \quad \bar{x} \in X$

Se f_1 e f_2 sono continue in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ f_1+f_2 e $f_1 \cdot f_2$ sono continue in $\bar{x}$

Osservazione: $f: X \to \mathbb{R} \quad X \subset \bar{\mathbb{R}} \quad \bar{x} \in X$

f è continua in $\bar{x}$ se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J$ intorno di $\bar{x}$ | se $x \in J \cap X$ vale $f(x) = f(\bar{x}) \pm \varepsilon$

Posso mettere anche $\delta(\varepsilon) \to 0$ se $\varepsilon \to 0$

Dim. Per far vedere che f_1+f_2 è continua in $\bar{x}$ devo mostrare che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists J$ intorno di $\bar{x}$ t.c. se $x \in J \cap X$ vale $f(x) = f(\bar{x}) \pm \delta(\varepsilon)$ con $\delta(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

So che f_1 e f_2 sono continue

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_1$ intorno di $\bar{x}$ | $\forall x \in J_1 \cap X \quad f_1(x) = f_1(\bar{x}) \pm \varepsilon$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists J_2$ " " $\bar{x}$ | $\forall x \in J_2 \cap X \quad f_2(x) = f_2(\bar{x}) \pm \varepsilon$

Chiamo $J = J_1 \cap J_2$ allora $\forall x \in J \cap X$

$$f_1(x) + f_2(x) = f_1(\bar{x}) + f_2(\bar{x}) \pm 2\varepsilon$$

$$2\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$$

Per $f_1 f_2$

ottengo $f_1(x) f_2(x) = f_1(\bar{x}) f_2(\bar{x}) \pm (\varepsilon^2 + \varepsilon|f_1(\bar{x})| + \varepsilon|f_2(\bar{x})|) =$

$= f_1 f_2(\bar{x}) \pm \underbrace{\varepsilon(\varepsilon + |f_1(\bar{x})| + |f_2(\bar{x})|)}_{\text{va a } 0 \text{ se } \varepsilon \to 0}$ → vanno in $\mathbb{R}$, non in $\bar{\mathbb{R}}$, per cui sono limitati

---

$X \subset \bar{\mathbb{R}}$

$f_1, f_2: X \to \mathbb{R}$

$\lim_{x \to \bar{x}} f_1(x) = l_1 \quad \lim_{x \to \bar{x}} f_2(x) = l_2 \quad l_1, l_2$ finiti

allora $\lim_{x \to \bar{x}} (f_1+f_2)(x) = l_1 + l_2$

$\forall I$ intorno di $(f_1+f_2)(\bar{x}) \ \exists \ldots$

I_1 intorno di f_1

I_2 intorno di f_2

Non riesco a coprire i casi $+\infty - \infty$ perché non posso sempre scrivere I come "$I_1 + I_2$"

TEOREMI IMPORTANTI ① Teo di Weierstrass

② Teo di esistenza degli zeri

TEO 1 (Weierstrass)

Sia I intervallo chiuso di $\overline{\mathbb{R}}$, $f: I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua

Allora esistono il valore massimo e il valore minimo

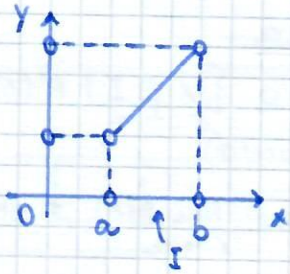
(quindi esistono punti di max/min assoluti)

OSS 1 È essenziale che I sia un intervallo di reali (es. $x^4 - 12x$)

esiste p polinomio di quarto grado a coeff. costanti con un unico punto minimo $\bar{x} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

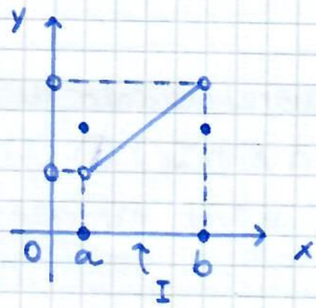
Preso I intervallo con estremi interi che contiene $\bar{x}$, p non ammette minimo in $I \cap \mathbb{Q}$ (trovare un esempio)

OSS 2 È necessario che I sia chiuso



$\Rightarrow$ max/min $\nexists$

OSS 3 L'ip. che f sia continua è necessaria



$\Rightarrow$ max/min $\nexists$

Ex. dare un esempio di $f: (0,1] \to \mathbb{R}$ continua che non ha né max né min

$f(x) = \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$

OSS 4 L'ipotesi che I sia un intervallo $\boxed{\text{non}}$ è necessaria, basta che I sia un insieme chiuso (cioè che contiene tutti i suoi punti di accumulazione in $\overline{\mathbb{R}}$)

Dim.

Basta dimostrare l'esistenza del valore minimo

(ES. $\exists \min \Rightarrow \exists \max$ per esempio considerando $-f(x)$)

$-\min(f(x)) = \max(-f(x))$

$-\max(f(x)) = \min(-f(x))$

Sia $m := \inf : \underbrace{\{f(x) \mid x \in I\}}_{f(I)}$

$\exists$ una successione $(y_n) \subset f(I) \mid y_n \to m$

Siccome $(y_n) \subset f(I) \Rightarrow \forall n \ \exists x_n \in I \mid f(x_n) = y_n$

Reminder! un corollario del teorema di Bolz - Weierstrass è che data $(x_n) \subset \overline{\mathbb{R}}$, $\exists n_k \mid x_{n_k} \to L$, $L \in \overline{\mathbb{R}}$

Per Bolzano - Weierstrass esiste (n_k) sottosucc. t.c. $x_n \to \bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$

$\boxed{\bar{x} \in I}$ Se per assurdo $\bar{x} \notin I$ allora $\bar{x}$ è un punto di accumulazione di I ↯ I è chiuso per ip. dunque contiene i suoi punti di accumulazione.

$\Rightarrow$ f è continua in $\bar{x}$ $\Rightarrow$ $f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} y_{n_k} = \lim_{n\to\infty} y_n = m$

(caratterizzazione di continuità in termini di successioni)

Quindi $f(\bar{x}) = m$ cioè $m \in f(I)$. □

(Questo teo è il motivo per cui l'algoritmo di ricerca di max/min del 1° semestre funziona)

↓

I intervallo in $\bar{\mathbb{R}}$, con estremi a, b $(a<b)$ non necessariamente chiuso

$f: I \to \mathbb{R}$ continua

Pongo $X = \{a,b\} \cup \{x \in I \mid f'(x) = 0\} \cup \{x \in I \mid f'(x) \nexists\}$

↑ punti di NON derivabilità

Suppongo X FINITO (di cardinalità finita)

Se $a \notin I$, suppongo che esista $\lim_{x\to a} f(x) =: f(a)$

Se $b \notin I$, " " " $\lim_{x\to b} f(x) =: f(b)$

Sia $m := \min f(X)$

- Se $f^{-1}(m) \cap X \cap I \neq \emptyset$ m è il valore minimo di di f su I e i punti di minimo assoluti sono $f^{-1}(m) \cap X \cap I$ ①
- Se $f^{-1}(m) \cap X \cap I = \emptyset$ allora il val. minimo non esiste e $m = \inf(f(I))$ ②

→ da dimostrare

①Dim. Estendo f ad $[a,b]$ (come sopra)

f è continua su $[a,b]$ (anche negli estremi per come è definita, cioè con f(a) e f(b) che coincidono con i loro limiti)

$\Rightarrow$ f ammette minimo in $[a,b]$ per Weierstrass, lo chiamo m

$f^{-1}(m) \subset X$! ⟶ m coincide con il minimo di f(X)

↑ insieme dei punti di minimo

... (sistemare i casi ① e ②)

TEO 2 (esistenza degli zeri)

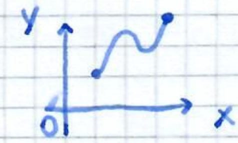
$I = [a,b] \subset \bar{\mathbb{R}}$, $f: I \to \bar{\mathbb{R}}$ continua

$f(a) < 0 < f(b)$ $\vee$ $f(b) < 0 < f(a)$ allora $\exists\, \bar{x} \in (a,b) \mid f(\bar{x}) = 0$

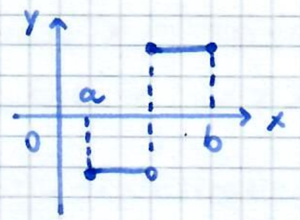
OSS 1 È necessario considerare i numeri reali

$p(x) = x^2 - 2 \quad I = \mathbb{Q} \cap [0,2] \Rightarrow$ non si annulla per nessun punto di I

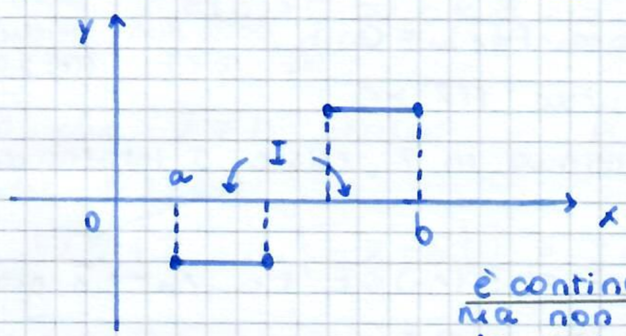
OSS 2 È necessaria l'ipotesi $f(a)$ e $f(b)$ discordi



OSS 3 L'ip f continua è necessaria



OSS 4 L'ipotesi I intervallo è necessaria



è continua
ma non si annulla in nessun punto di I

COROLLARI

- (teo dei valori intermedi) I intervallo $\subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: I \to \overline{\mathbb{R}}$ continua
  Se $y_1, y_2 \in f(I)$ $(y_1 < y_2)$ allora $[y_1, y_2] \subset f(I)$ (le funzioni continue mandano intervalli in intervalli)

  Dim y compreso tra y_1 e y_2, $y_1 < y < y_2$ Voglio far vedere che $y \in f(I)$.

  Prendo $x_1 | f(x_1) = y_1$ e $x_2 | f(x_2) = y_2$

  Prendo $\hat{I}$ con estremi x_1, x_2 e applico il teo. 2 alla funz. $\hat{f}: \hat{I} \to \mathbb{R}$ data da $\hat{f}(x) = f(x) - y \quad \forall x \in \hat{I} \subset I$

  $\hat{f}$ è ben definita perché $\hat{I} \subset I$

  $\hat{f}$ è continua

  $\hat{f}$ assume valori discordi in x_1 e x_2

  $$\hat{f}(x_1) = y_1 - y < 0$$
  $$\hat{f}(x_2) = y_2 - y > 0 \quad \text{poiché } y_1 < y < y_2$$

  $\Rightarrow \exists \tilde{x} \in (x_1, x_2) | \hat{f}(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow f(\tilde{x}) = y$ $\square$

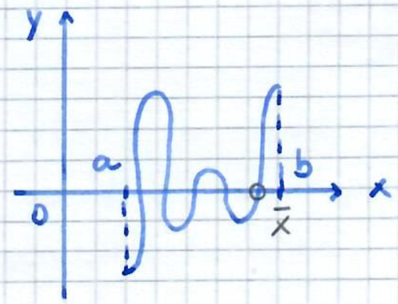
- Sia $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ continua
  I intervallo contenuto in X
  Allora $f(I)$ è un intervallo. Segue dal corollario precedente

e dal seguente lemma

lemma Sia $E \subset \overline{\mathbb{R}}$ t.c. $\forall y_1, y_2 \in E$ $(y_1 < y_2)$ vale che $[y_1, y_2] \subset E$. Allora E è un intervallo

Dim. (esistenza degli zeri)

Suppongo $f(a) < 0 < f(b)$



Sia $E = \{x \mid f(x) < 0\} \rightarrow E \neq \emptyset$ perché $f(a) < 0$

Sia $\bar{x} = \sup E$, allora $f(\bar{x}) = 0$ posso dirlo perché $\bar{x} < b$, $f(b) > 0$ per ip.

• Supponiamo per assurdo $f(\bar{x}) > 0$

$\Rightarrow$ siccome f è continua in $\bar{x}$, esiste J intorno di $\bar{x} \mid f(\bar{x}) > 0$ $\forall x \in I \cap J$

↯ perché $\bar{x} = \sup E \Rightarrow \exists (x_n) \subset E$ t.c. $x_n \to \bar{x}$ ma allora $\exists \bar{n}$ t.c. $x_n \in J$ $\forall n \geq \bar{n}$ $\Rightarrow x_n \in J$ ma $x_n < 0$ per ipotesi mentre $f > 0$ su $I \cap J$.

• Suppongo per assurdo che $f(\bar{x}) < 0$

Se per assurdo fosse così, esiste J intorno di $\bar{x}$ t.c. $f(x) < 0$ $\forall x \in I \cap J$

$\Rightarrow f$ è negativa per qualche punto $x > \bar{x}$

↯ perché $\bar{x} = \sup E$ dove ho usato $f(a) < 0 < f(b)$ e I intervallo? □

25/03/2024

TEOREMA DI ESISTENZA DEGLI ZERI

(vedi enunciato nell'ultima lezione)

Dim. (per $f(a) < 0 < f(b)$)

$\bar{x} := \sup E$ dove $E = \{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$

↳ (esiste, sto usando la completezza dei numeri reali)

L'ultima dimostrazione che abbiamo dato non usa tutte le ip.

VERSIONE PRECISA:

1) $E \neq \emptyset$ perché $a \in E$ $\Rightarrow \bar{x} \in [a,b]$

dov'è la dim del teo di permanenza del segno ???

2) Dimostro per assurdo che non vale $f(\bar{x}) > 0$

Se fosse $f(\bar{x}) > 0$, per la continuità + teo. di permanenza del segno, $\exists J$ intorno di $\bar{x} \mid f(x) > 0 \ \forall x \subset J \cap [a,b]$ (dominio)

quindi $E \cap J = \emptyset$

D'altra parte $\bar{x} = \sup E \Rightarrow \exists (x_n) \subset E \mid x_n \to \bar{x}$ ma allora $\exists \bar{n} \mid x_n \in J \ \forall n \geq \bar{n} \Rightarrow E \cap J \neq \emptyset$

3) Dimostro per assurdo che non vale $f(\bar{x}) < 0$ (*)

Se fosse $f(\bar{x}) < 0$ allora $\exists J$ intorno di $\bar{x} \mid f(x) < 0 \ \forall x \in J \cap [a,b]$ ($J = [\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta]$)

Quindi: preso $x \in J \cap [a,b]$ con $x > \bar{x}$ allora ho che $x \in E$ e $x > \bar{x} = \sup E$ ↯

~~questa dimostrazione non funziona se $\bar{x} = b$~~
~~ma $\bar{x} \neq b$ (lo dimostro dopo)~~ NON SERVE
~~$f(b) > 0 \Rightarrow b \notin E$ ma non basta a dire che b non è il sup~~

Osservo che $\bar{x} \neq b$ perché: $f(b) > 0$ e ho fatto vedere in 2) che $f(\bar{x}) \leq 0$

Allora $\forall x \in (\bar{x}, \min\{b, \bar{x}+\delta\}] = J \cap [a,b] \cap (\bar{x}, +\infty)$ vale $f(x) < 0$

Siccome $(\bar{x}, \min\{b, \bar{x}+\delta\}]$ non è vuoto, contiene almeno un elemento x, quindi $x \in E$ e $x > \bar{x} = \sup E$ □

La dimostrazione funziona anche prendendo
- $\bar{x} = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$

opp.
- $\bar{x} = \inf\{x \in [a,b] \mid f(x) > 0\}$

opp.
- $\bar{x} = \inf\{x \in [a,b] \mid f(x) \geq 0\}$

(*) CORREZIONE (di Alberti)
Se fosse $f(\bar{x}) < 0$ siccome $f(b) > 0$ non può essere che $\bar{x} = b$

$\boxed{\text{DIM. 2}}$ $(f(a) < 0 < f(b))$

IDEA: costruire una successione di intervalli chiusi $I_n = [a_n, b_n]$ t.c.

1. $[a,b] = I_0 \supset I_1 \supset I_2 \dots$
2. $f(a_n) \leq 0 \leq f(b_n)$
3. $(b_n - a_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Supponiamo di aver costruito questa successione

Per ① (a_n) è crescente, $a_n \to a_\infty$ $(:= \sup\{a_n\})$

(b_n) è decrescente, $b_n \to b_\infty$ $(= \inf\{b_n\})$

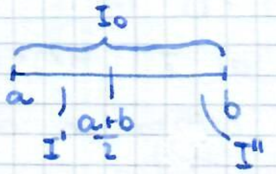
Per ③ $\underbrace{a_n - b_n}_{-b_\infty + a_\infty} \to 0 \Rightarrow a_\infty = b_\infty =: \bar{x}$

se fossero diversi non potrebbe tendere a 0 la distanza

per ② $f(b_n) \to f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \geq 0$
$F(a_n) \to f(\bar{x}) \Rightarrow f(\bar{x}) \leq 0$ $\Bigg\} \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

COSTRUZIONE DI I_n:

- $I_0 := [a,b]$
- I_1



$\Rightarrow$ se $\frac{a+b}{2} > 0$ $I_1 := I'$

se $\frac{a+b}{2} < 0$ $I_1 := I''$

se $\frac{a+b}{2} = 0$ va bene uno qualsiasi tra I' e I''

Si ripete la stessa costruzione sugli intervalli successivi

OSSERVAZIONE: $\bar{x} \in I_n \ \forall n$

quindi $\frac{a_n+b_n}{2}$ approssima $\bar{x}$ con errore $< \frac{b_n-a_n}{2}$

cioè $\bar{x} = \frac{a_n+b_n}{2} \pm \frac{b_n-a_n}{2}$ $\Big)$ → cioè è interno all'intervallo I_n

Se I_n sono costruiti come prima allora $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ cioè
$\bar{x} = \frac{a_n+b_n}{2} \pm \frac{b-a}{2^{n+1}}$

EX • Trovare una soluzione dell'equazione $xe^x - 4 = 0$ con errore $< 10^{-2}$ (partire dall'intervallo $[0,2]$)

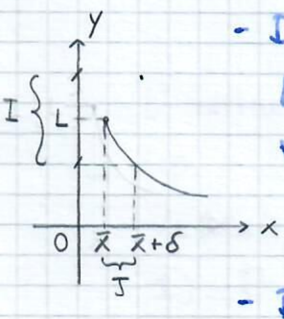
• Trovare una soluzione dell'equazione $x^5 + x = 10$ con errore $\leq 10^{-3}$ (partire dall'intervallo $[1,2]$)

Def. - Dato $\bar{x} \in \mathbb{R}$ gli intorni dx sono $[\bar{x}, \bar{x}+\delta]$ con $\delta > 0$

- " " sx sono $[\bar{x}-\delta, \bar{x}]$ con $\delta > 0$

Gli intorni di $+\infty$ sono automaticamente intorni sinistri
$-\infty$ sono automaticamente intorni destri

- Dato $\bar{x} \in \overline{\mathbb{R}}$, $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, dico che $\bar{x}$ è un punto di accumulazione destro di X se $\forall I$ intorno destro di $\bar{x}$ $I \cap X \setminus \{\bar{x}\} \neq \emptyset$ (analogamente per la def. di punto di accumulazione sx)
NB! Non serve che $\bar{x}$ sia in X



- Data $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ e $\bar{x}$ p. di accumulazione dx (sx) di X $L \in \overline{\mathbb{R}}$, dico che $\lim\limits_{x \to \bar{x}^+ (\bar{x}^-)} f(x) = L$ ($f(x) \xrightarrow[x \to \bar{x}^+ (\bar{x}^-)]{} L$) se $\forall I$ intorno di L esiste J intorno dx (sx) di $\bar{x}$ t.c.
$f(J \setminus \{\bar{x}\}) \subset I$
$\cap X$ $\neq \emptyset$ perché $\bar{x}$ è di accumulazione

- Data $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$, $\bar{x} \in X$ dico che f è continua a destra in $\bar{x}$ se $\forall I$ intorno di $f(\bar{x})$ esiste J intorno dx di $\bar{x}$ t.c.
$f(J \cap X) \subset I$

- $\bar{x} \in X$ si dice isolato a sinistra (destra) se esiste I intorno sx (dx) di $\bar{x}$ t.c. $I \cap X = \{\bar{x}\}$

(In un punto isolato a sx (dx) una funz. è sempre continua a sx (dx))

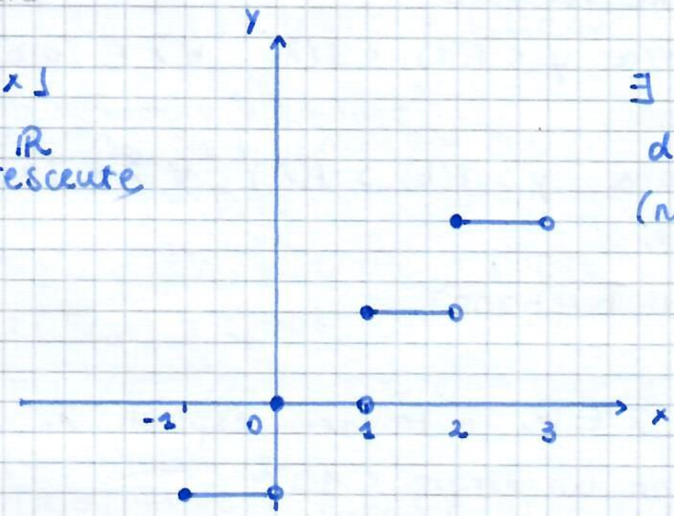
- f è continua a sinistra in $\bar{x} \in X$ se $\bar{x}$ è isolato a sx oppure $\bar{x}$ è un punto di accumulazione a sx e $\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) = f(\bar{x})$

Prop. Sia $f: X \to \overline{\mathbb{R}}$ crescente (scrivere il caso decrescente)
Sia $\bar{x}$ punto di accumulazione sx di X, allora $\exists \lim_{x \to \bar{x}^-} f(x)$ ed è uguale $\sup\{f(x) \mid x \in X,\ x < \bar{x}\}$ (dimostrato nella prossima lezione)
(a dx sarebbe $\inf\{f(x) \mid x \in X,\ x > \bar{x}\}$)

dimostrarla seguendo quella per le successioni

$f(x) = \lfloor x \rfloor$

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
crescente



$\exists$ limite sx e limite dx di 2
 ($= 1$, $= 2$)
(ma NON $\lim_{x \to 2} f(x)$)

Dove è continua a sx e dove a dx?
Nel dominio non ci sono punti isolati per cui posso guardare solo i limiti
$\Rightarrow$ continua a sx in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ continua a dx in $\mathbb{R}$

26/03/2024
(Pluda)

Esempio di funzione MAI continua:
FUNZIONE DI DIRICHLET

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \qquad f: \mathbb{R} \to \{0, 1\}$$

dim.

$\forall \bar{x} \in \mathbb{R}$

- Poiché $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x_n) \in \mathbb{Q} \mid x_n \to \bar{x}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x_n) = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} f(x_n) = 0$
- Poiché $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R} \Rightarrow \exists (x'_n) \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \mid x'_n \to \bar{x}$
$\forall n \in \mathbb{N},\ f(x'_n) = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} f(x'_n) = 1$

$\Rightarrow$ In $\bar{x}$ la funzione non è continua
Dato che $\bar{x}$ è un punto generico $\bar{x}$ non è MAI continua $\square$

OSS $[a, b] \subset \overline{\mathbb{R}}$, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ continua e strettamente crescente. Allora $f(x) = y$ ammette 0 soluzioni se $y < f(a)$

oppure $y > f(b)$ e ne ammette una sola se $f(a) \leq y \leq f(b)$

dim. $g(x) = f(x) - y$

g è continua

$g(a) = f(a) - y \qquad g(b) = f(b) - y$

(i) <0 se $y > f(a) \qquad >0$ se $y < f(b)$

Per il teo. di esistenza degli zeri, $\exists\, \bar{x} \in (a,b) \mid g(\bar{x}) = 0 \iff f(\bar{x}) = y$

UNICITÀ di $\bar{x}$:

Per assurdo $\exists\, \bar{x}$ e $x_1 \mid g(\bar{x}) = 0$ e $g(x_1) = 0$ e $\bar{x} \neq x_1$

WLOG $\bar{x} < x_1$

$$g(\bar{x}) = f(\bar{x}) - y \underset{\text{strettamente crescente}}{<} f(x_1) - y = g(x_1) \Rightarrow g(\bar{x}) < g(x_1) \quad \lightning$$

(ii) Se $y < f(a)$ allora $y < f(a) < f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in (a,b]$

$\Rightarrow \nexists$ soluzione

perchè f è strettamente crescente

(iii) Se $y > f(b)$ allora $y > f(b) > f(\bar{x}) \quad \forall \bar{x} \in [a,b)$

$\Rightarrow \nexists$ soluzione

Esercizio (metodo di bisezione)

$xe^x = 4$

① $\exists!$ soluzione $\bar{x} \in \mathbb{R}$ e trovare espliciti x_0, x_1 t.c. $x_0 < \bar{x} < x_1$

② Calcolare $\bar{x}$ con un errore $< 10^{-2}$

① $f(x) = xe^x - 4 \qquad \mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

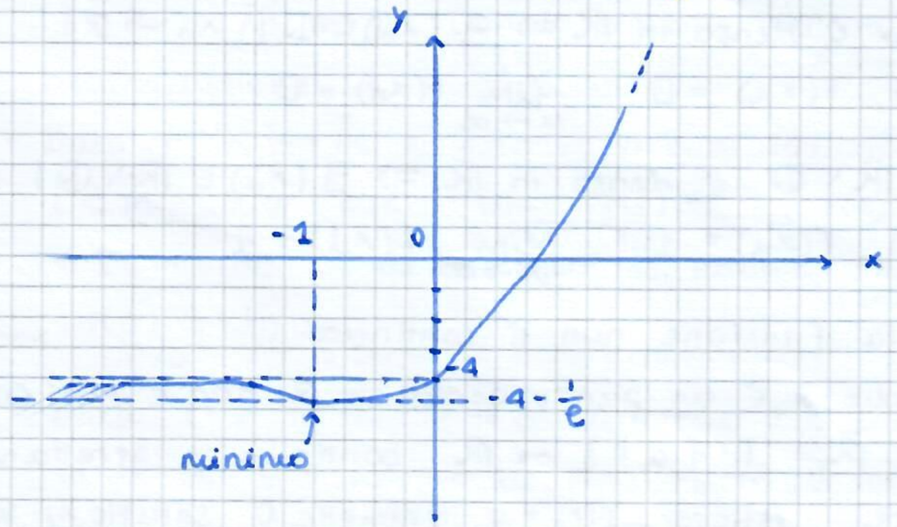
$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ C'è almeno una soluzione (teo degli zeri)

$f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x$

$f'(x) > 0 \Rightarrow x > -1 \qquad f(-1) = -\frac{1}{e} - 4 < 0$



$f(0) = -4 \qquad f(2) = 2e^2 - 4 > 0$

$I = [0,2] \qquad$ errore $= 1$

↓ prendo il punto medio

$f(1) = e - 4 < 0$

l'errore è sempre metà della lunghezza dell'intervallo

$I_1 = [1,2] \qquad$ errore $= \frac{1}{2} = 0.5$

$f(3/2) = \frac{3}{2} e^{3/2} - 4 = 2,7$

$I_2 = [1, \frac{3}{2}] \qquad$ errore $= 0.25$

$f(\frac{5}{4}) = 5/4\, e^{5/4} - 4 = 0,36$

$I_3 = [1, \frac{5}{4}] \qquad$ errore $= 0,125$

$f(9/8) = 9/8\, e^{9/8} - 4 = -0,53$

$I_4 = [9/8, 5/4] \qquad$ errore $= 0,0625$

$f(19/16) = -0,10$

$I_5 = [19/16, 5/4] \qquad$ errore $= 0,03125$

$f(39/32) = 0,12$

$I_6 = [19/16, 39/32] \qquad$ errore $= 0,015$ c.a.

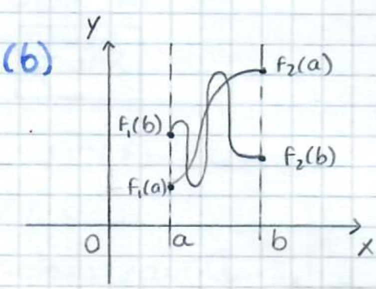
$f(77/64) = 0,007$

$I_7 = [19/16, 77/64] \qquad$ errore $= 0,008 < 10^{-2}$ ✓

(CONTINUE)

Es. $f_1, f_2 : [a,b] \to \mathbb{R} \mid f_1(a) < f_2(a)$ e $f_1(b) > f_2(b)$

allora $\exists\, \bar{x} \in (a,b) \mid f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$



$g(x) = f_1(x) - f_2(x)$

$g(a) = f_1(a) - f_2(a) < 0$

$g(b) = f_2(b) - f_2(b) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \mid g(\bar{x}) = 0 \Rightarrow f_1(\bar{x}) = f_2(\bar{x})$

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua

$x(t)$ continuo, $y(t)$ continua

$P(t)$ che si muove in modo continuo nella striscia $[a,b] \times \mathbb{R}$

$P : [0,1] \to [a,b] \times \mathbb{R}$

intervallo di tempo $\qquad t \mapsto (x(t), y(t))$

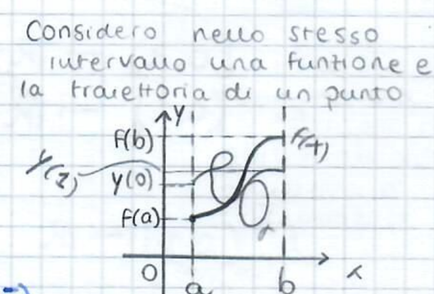
$x(0) = a \qquad y(0) > f(a)$

$x(1) = b \qquad y(1) < f(b)$

$\gamma = \{P(t) \mid t \in [0,1]\}$

manca $x(\bar{t}) = \bar{x}$

Considero nello stesso intervallo una funzione e la traiettoria di un punto



$\Rightarrow \exists\, \bar{x} \in (a,b) \mid \exists\, \bar{t} \in (0,1) \mid f(\bar{x}) = y(\bar{t})$

in ogni istante rappresenta la distanza verticale tra funz. e curva

$g(t) = -y(t) + f(x(t))$

è una funzione: $y(t)$ e $x(t)$ sono determinate univocamente da t e $f(k)$ è determinato univocamente da k

g è continua

$g(0) = f(x(0)) - y(0) = f(a) - y(0) < 0$

$g(1) = f(x(1)) - y(1) = f(b) - y(1) > 0$

$\Rightarrow \exists\, \bar t \in (0,1) \mid g(\bar t) = 0$

$f(x(\bar t)) = g(\bar t)$ ossia esiste $\bar x = x(\bar t) \in (a,b) \mid f(\bar x) = y(\bar t)$

Vale la stessa cosa per due curve? continue

Sì ma non si può dimostrare con il teo. di esistenza degli zeri

ES. $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ crescente

$\bar x$ punto di acc. sinistra per X, allora

$$\lim_{x \to \bar x^-} f(x) = \sup \{ f(x) \mid x \in X,\ x < \bar x \}$$

SVOLGIMENTO:

$\xi = \sup \{ f(x) \mid x \in X,\ x < \bar x \}$ voglio dimostrare che ξ è proprio il limite

Prendo I intorno di ξ, $I = [\xi - r, \xi + r]$ $r > 0$

$\exists\, \eta > 0 \mid f(\bar x - \eta) > \xi - r$ ($\xi - r$ non è maggiorante)

$f(x) \geq$

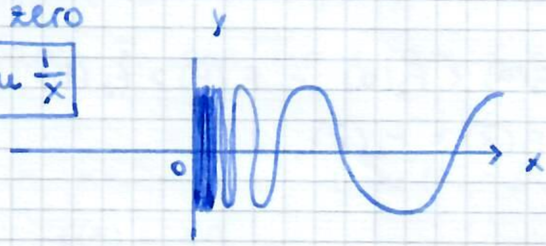
$\forall x \in [\bar x - \eta, \bar x)$ vale $f(\bar x) \geq f(\bar x - \eta) > \xi - r$

Quindi $J = [\bar x - \eta, \bar x]$ perché f è crescente

allora $f((J \cap X) \setminus \{\bar x\}) \subset I$

ES. Esempio di $f: (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ che non ammette limite destro in zero

$\boxed{\sin \frac{1}{x}}$

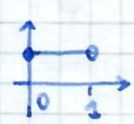


Dimostrazione:

$x_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n}$ $\sin\left(\frac{1}{x_n}\right) = 1\ \forall n$

$x'_n = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\pi n}$ $\sin\left(\frac{1}{x'_n}\right) = -1\ \forall n$

$f: [0,1) \to \mathbb{R}$ continua ammette max e min



$f: (0,1] \to \mathbb{R}$ non ammette max

$f: (0,1] \to \mathbb{R}$ non ammette né max né min $\Rightarrow \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x}$

per trovarla basta osservare che

$\lim\limits_{t \to +\infty} t \sin t$ non esiste e $\nexists$ max e min

08/04/2024

Def. $X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ punto di accumulazione di X

$f: X \to \mathbb{R}$ (non $\overline{\mathbb{R}}$)

la derivata di f in $\bar{x}$ è

(cambio di variabile $x = \bar{x}+h$)

$$f'(\bar{x}) := \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f(x)-f(\bar{x})}{x-\bar{x}}$$

se il limite esiste in $\overline{\mathbb{R}}$ (traslazione)

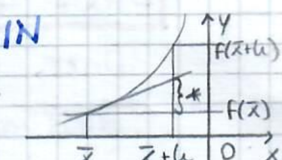
$\bar{x}+h \in X$
$h \in X-\bar{x}$

definita per $h \in X - \bar{x}$ — definita per $x \in X$, $x \neq \bar{x}$

NOTE

1) $X' :=$ insieme di def. di $f' \subseteq X$ ma può essere $X' \subsetneq X$ (es. $f(x) = |x|$)
   è derivabile $\neq \exists$ la derivata
2) Dico che "f è derivabile in $\bar{x}$" se $f'(\bar{x})$ $\exists$ ed è finita
3) f'', f''', ..., $D^k f$ si definiscono in maniera iterativa
4) La derivata destra $D_+f(\bar{x})$ e sinistra $D_-f(\bar{x})$ si definiscono come limiti sx / dx
5) "f è derivabile su X" significa che f è derivabile in ogni $x \in X$
6) "f è di classe C^1" se è derivabile su X e $f': X \to \mathbb{R}$ è continua
7) "f è di classe C^k" se le derivate $D^h(f)$ esistono su X e sono finite e continue per $h = 1, \dots, k$
8) "f è di classe C^∞" se le derivate $D^h(f)$ esistono su X e sono finite e continue $\forall h \in \mathbb{N}$

$* = f'(\bar{x})h$



Prop. 1

$X \subset \mathbb{R}$, $\bar{x} \in X$ punto di acc. $f: X \to \mathbb{R}$

(i) se f è derivabile (derivata FINITA) in $\bar{x}$ allora $f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})h + o(h)$
in particolare f è continua in $\bar{x}$

(ii) Se esiste $a \in \mathbb{R}$ t.c. $f(\bar{x}+h) = f(\bar{x}) + ah + o(h)$ allora f è derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = a$
$h \to 0$

se una funzione ha uno sviluppo di Taylor all'ordine 1 allora è derivabile

Dim (i) La tesi è $f(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h = o(h)$
infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f'(\bar{x}+h) - f(\bar{x}) - f'(\bar{x})h}{h} \cdot$$

$f'(\bar{x})$ qui serve finita

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} - f'(\bar{x}) = f'(\bar{x}) - f'(\bar{x}) = 0$$

pongo $x = \bar{x}+h$

Siccome $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + o(x-\bar{x})$ prendendo $\lim_{x\to\bar{x}}$

$\lim_{x\to\bar{x}} f(x) = f(\bar{x}) \to$ continua in $\bar{x}$

ottengo $f(x)$

Dim (ii) $\lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}+h)-f(\bar{x})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{f(\bar{x})} + ah + o(h) - \cancel{f(\bar{x})}}{h} =$

$= \lim_{h\to 0} a + \underbrace{\frac{o(h)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \quad 0} = a$

DOMANDA: $f'(\bar{x}) = +\infty \Rightarrow f$ continua in $\bar{x}$? NO
(oppure $f'(\bar{x}) = -\infty$) (provare esempi)

<u>Proprietà derivate</u>

$\boxed{\text{PROP. 2}}$ Date $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ derivabili in $\bar{x}$ ← è implicito che $\bar{x} \in X$ e $\bar{x}$ punto di acc. di X

Allora $f := f_1 + f_2$ è derivabile in $\bar{x}$ e $f'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) + f_2'(\bar{x})$ *

(dimostrazione identica al primo semestre)

DOMANDA: vale la formula * se $f_1'(\bar{x})$ e/o $f_2'(\bar{x})$ sono $\pm\infty$?

Si, l'unico caso problematico è $+\infty - \infty$

$\boxed{\text{PROP. 3}}$ Date $f_1, f_2 : X \to \mathbb{R}$ derivabile in $\bar{x}$

Allora $f := f_1 f_2$ è derivabile in $\bar{x}$ e vale

$f'(\bar{x}) = f_1'(\bar{x}) f_2(\bar{x}) + f_1(\bar{x}) f_2'(\bar{x})$ **

(dimostrazione come nel 1° semestre, sapendo però che f_1 e f_2 sono continue)

DOMANDA: vale ** se $f_1'(\bar{x})$ o $f_2'(\bar{x})$ sono $\pm\infty$? Ci sono alcuni casi problematici (ESERCIZIO)

$\boxed{\text{PROP. 4}}$

Date $f: \underset{\subset\mathbb{R}}{X} \to \underset{\subset\mathbb{R}}{Y}$ e $g: Y \to \mathbb{R}$ con f derivabile in $\bar{x}$ e g derivabile in $\bar{y} := f(\bar{x})$

Allora $g(f(x))$ è derivabile in $\bar{x}$ e $(g\circ f)'(\bar{x}) = g'(\bar{y}) f'(\bar{x})$

<u>Dim.</u>

$g(f(\bar{x}+h)) \underset{\substack{\text{prop. 1} \\ \text{applicata a } f}}{=} g(\overset{\bar{y}}{f(\bar{x})} + \underbrace{f'(\bar{x})h + o(h)}_{K=K(h)}) = g(\bar{y}+K) =$

$= g(\bar{y}) + g'(\bar{y})K + o(K) = g(f(\bar{x})) + g'(\bar{y})(f'(\bar{x})h + o(h)) + o(K(h))$

$= g(f(\bar{x})) + \underbrace{g'(\bar{y}) f'(\bar{x}) h}_{\text{DERIVATA}} + \underbrace{g'(\bar{y}) o(h) + o(K(h))}_{\text{devo far vedere che è } o(h)}$

$o(K(h)) = o(O(h))$

$\Rightarrow g'(y) o(h) + o(K(h)) = o(h)$

(usando le regole sugli o-piccoli)

PROP. 5 Sia $f: X \to Y$ funzione invertibile con inversa $g: Y \to X$

Sia f derivabile in $\bar{x}$ con $f'(\bar{x}) \neq 0$ ($\Rightarrow f$ continua in $\bar{x}$)

Sia g continua in $\bar{y} := f(\bar{x})$

Allora g è derivabile in $\bar{y} := f(\bar{x})$ e $g'(\bar{y}) = \dfrac{1}{f'(\bar{x})}$ $*$

Dim. PARTE 1: $\bar{y}$ è un punto di accumulazione di Y (dopo)

PARTE 2: Dimostro $*$

$$\lim_{y \to \bar{y}} \frac{g(y) - g(\bar{y})}{y - \bar{y}} = \lim_{y \to \bar{y}} \frac{g(y) - g(\bar{y})}{f(g(y)) - f(g(\bar{y}))} \overset{\lim_{x \to \bar{x}}}{=} \frac{x - \bar{x}}{f(x) - f(\bar{x})} =$$

cambio di variabile $x = g(y)$

serve che $g(y) \to g(\bar{y})$ se $y \to \bar{y}$

$$= \left(\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \right)^{-1} = \frac{1}{f'(\bar{x})}$$

$\Downarrow$ (g continua in $\bar{y}$)

$x \to \bar{x}$

$y \to \bar{y}$

e $g(y) \neq \bar{x}$ $\forall y \neq \bar{y}$

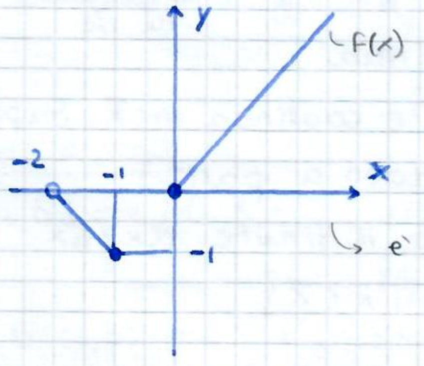
Perché?

$\bar{x}$ punto di accumulazione di $X \Rightarrow \exists (x_n) \subset X \setminus \{\bar{x}\} \mid x_n \to \bar{x}$

ma allora $y_n := f(x_n) \in Y$; $y_n \to f(\bar{x}) = \bar{y}$ per continuità di f

$y_n \neq \bar{y}$ per iniettività di f

OSS L'ipotesi "g continua in $\bar{y}$" è necessaria:



$X = (-2, -1] \cup [0, +\infty)$

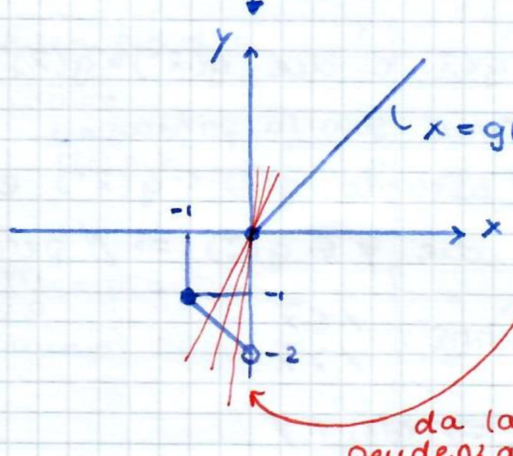
$Y = [-1, +\infty)$

↳ è derivabile in 0

↓ inversa

$\bar{x} = 0$ $\bar{y} = 0$

$f'(0) = 1$



$D_- g(0) = +\infty$

$D_+ g(0) = 1$

$\Rightarrow$ non esiste D

da la pendenza di queste rette

PROP. 6 $f: I \to J$ (intervalli) invertibile con inversa $g: J \to I$

f crescente e continua in $\bar{x} \in I$. Allora g è continua in $\bar{y} := f(\bar{x})$

09/04/2024

$\boxed{\text{PROP. 5}}$ (vd. appunti di ieri)

Derivata dell'inversa

Serve l'ipotesi di continuità dell'inversa g in $\bar{y} = f(\bar{x})$

$\boxed{\text{PROP. 6}}$

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e strett. crescente (opp. decrescente)
I intervallo

Allora:

a • $J := f(I)$ è un intervallo (già visto) (per la a) basta che sia continua, non serve strett. crescente)

b • $\exists g: J \to I$ inversa di f (segue dal fatto che f è iniettiva)

c • g è strettamente crescente (rispettivamente decrescente)

d • <u>g è continua</u>

Dim. a) già visto (teo. valori intermedi)

b) elementare

c) per esercizio

d)

↓

LEMMA: sia g una funzione $J \to I$ (intervalli in $\mathbb{R}$) crescente e surgettiva $\Rightarrow$ g è continua

dim.

Prendo $\bar{x} \in J$ e mostro che g è continua in $\bar{x}$. Suppongo $\bar{x}$ interno a J (il caso $\bar{x}$ estremo va trattato a parte)

Siccome g è crescente esistono il limite dx/sx

$$g(\bar{x}^-) = \lim_{x \to \bar{x}^-} g(x) = \sup \{ g(x) \mid x < \bar{x} \}$$

$$g(\bar{x}^+) = \lim_{x \to \bar{x}^+} g(x) = \inf \{ g(x) \mid x > \bar{x} \}$$

Devo far vedere che $g(\bar{x}^+) = g(\bar{x})$ e che $g(\bar{x}^-) = g(\bar{x})$

Sono analoghe quindi trattiamo solo la prima

So che $g(\bar{x}) \leq g(\bar{x}^+)$. Se per assurdo $g(\bar{x}) < g(\bar{x}^+)$ esiste y t.c. $g(\bar{x}) < y < g(\bar{x}^+)$ faccio vedere che $y \notin g(J) \Rightarrow$ ↯ perché $g(J)$ è un intervallo
g surgettiva

Prendo $x \in J$. Ci sono 2 possibilità: $x \leq \bar{x}$, $x > \bar{x}$

Se $x \leq \bar{x} \Rightarrow g(x) \leq g(\bar{x}) < y \Rightarrow g(x) \neq y$

Se $x > \bar{x} \Rightarrow g(x) \geq g(\bar{x}^+) > y \Rightarrow g(x) \neq y$

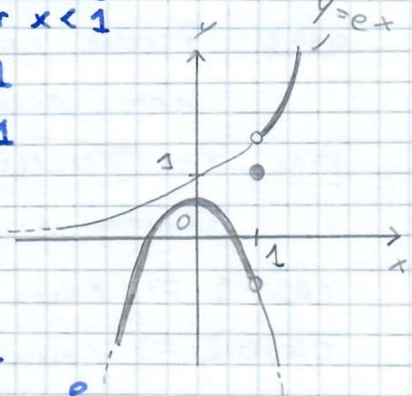
Esercizio:

Sia $f: I \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, allora f è strettamente monotona

Lemma utile: Sia $x_0 < x_1 < x_2$ ($\in \mathbb{R}$) e $f: [x_0, x_2] \to \mathbb{R}$ continua e iniettiva, allora ci sono solo due possibilità $f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$

oppure $f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$

Es. Dati $a, b, c \in \mathbb{R}$ pongo $f(x) := \begin{cases} e^x & \text{per } x > 1 \\ a & \text{per } x = 1 \\ bx^2 + c & \text{per } x < 1 \end{cases}$



a) per quali a, b, c f è continua in $x = 1$

b) per quali a, b, c f è derivabile in $x = 1$

RISP. A $\Rightarrow$ $e = a = b + c$

RISP. B $\Rightarrow$ f deve essere continua e

$2b = e$ $\Rightarrow \begin{cases} 2b = e \\ a = e = b + c \end{cases}$

pendenza della parabola in 1 — pendenza di e^x in uno

$a = e$; $b = \frac{e}{2}$; $c = \frac{e}{2}$

OSS: • Perché delle risposte *

• Cosa posso dire della continuità di f se $x \neq 1$?

• Cosa c'è di speciale per $x = 1$?

* $f(1) = a$ $\quad f(1^+) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} e^x = e$

$f(1^-) = \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} bx^2 + c = b + c$

Risposta a: pongo limite dx = limite sx

$D_+ f(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{e^{h+1} - e^1}{h} = (e^x)'(1) = e$

sarebbe $f(1)$ ma posso sostituire e^1 per la continuità

Risposta b: derivata dx = derivata sx

Teorema di Rolle

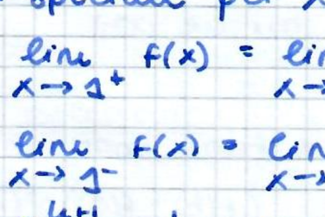
Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ t.c.
(i) $f(a) = f(b)$
(ii) f è continua su $[a, b]$
(iii) f è derivabile in (a, b)

$\Rightarrow \exists\, x_0 \in (a, b)$ t.c. $f'(x_0) = 0$

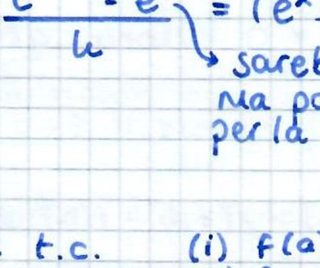
OSS1: se rimuovo l'ipotesi (i) il teo non è vero

- Esempio 1:

$a = 1$
$b = 2$
$f(x) = x$

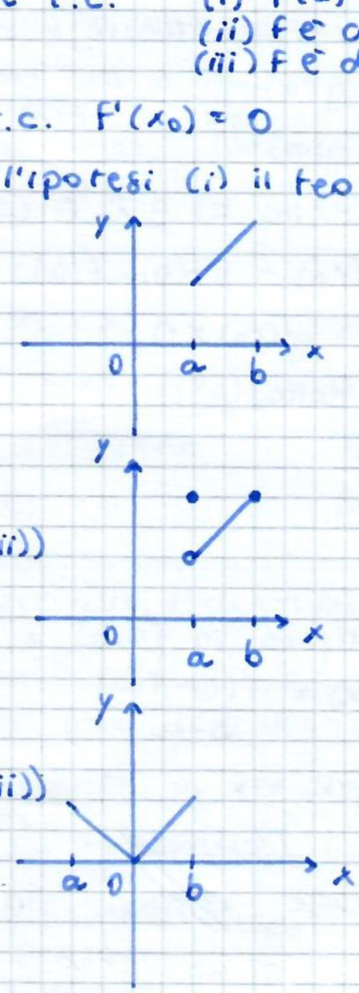


- Esempio 2:
(rimuovo l'hp. (ii))



$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases}$

- Esempio 3:
(rimuovo l'hp. (iii))



$a = -1$
$b = -1$
$f(x) = |x|$

OSS2: avrei potuto scrivere f derivabile su (a,b) e continua agli estremi
↳ implica f continua su (a,b)

OSS3: Perché non mettiamo f derivabile su $[a,b]$? Perché poi mi serve nell'uso (a,b) cioè non lo metto perché non serve

Dim. Per Weierstrass f ammette massimo e minimo in $[a,b]$
Chiamo x_{min} e x_{max} tali punti

CASO 1 $\Rightarrow$ x_{min} o x_{max} sono in (a,b) $\Rightarrow f'(x_{min})=0 \vee f'(x_{max})=0$
↳ riguarda la dimostrazione che la derivata si annulla nei punti di max e di min

CASO 2 $\Rightarrow$ x_{min} e $x_{max} \in \{a,b\}$

$$f(a)=f(b)=f(x_{min})=f(x_{max})$$

$\Rightarrow \forall x \in (a,b) \quad f(x)=f(a)=f(b)$, cioè f costante

$\Rightarrow \forall x \in (a,b) \quad f'(x)=0$

OSS Per l'ip. (iii) basterebbe chiedere che $\forall x \in (a,b)$ esista la derivata (cioè va bene anche ∞)

Teorema di Cauchy

Siano $f,g: [a,b] \to \mathbb{R}$ due funz. continue su $[a,b]$ e derivabili su (a,b). Allora $\exists x_0 \in (a,b)$ t.c. $(f(b)-f(a))g'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0)$
Inoltre se $\forall x \in (a,b)$ $g'(x) \neq 0$ allora $g(b) \neq g(a)$ e $\exists x \in (a,b)$ t.c. $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$

voglio trovare una comb lineare di f e g che soddisfi Rolle

Dim.

$$F(x) = (g(b)-g(a))f(x) - (f(b)-f(a))g(x)$$

È continua (comb. di f. continue) e derivabile

$$F(a) = g(b)f(a) - f(b)g(a)$$
$$F(b) = g(b)f(a) - f(a)g(a)$$
$=$

si può trovare ponendo $F(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$ e calcolando $F(a)$ e $F(b)$

F soddisfa le ip. di Rolle $\Rightarrow \exists x_0 \in (a,b) \mid F'(x_0)=0$

$$F'(x_0) = (g(b)-g(a))f'(x_0) - (f(b)-f(a))g'(x_0) = 0$$

□ versione 1

$g'(x_0) \neq 0 \ \forall x \in (a,b) \Rightarrow g'(x_0) \neq 0$

$\Rightarrow g(b) \neq g(a)$ (da Rolle)

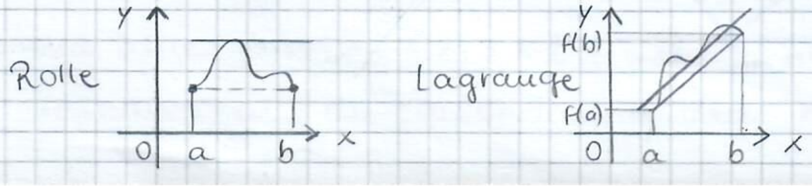
$$\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$$

□ versione 2

Teorema di Lagrange

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua in $[a,b]$ e derivabile in (a,b)
Allora $\exists x_0 \in (a,b) \mid f'(x_0) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Dim. Uso Cauchy con $g(x) = x$



12/04/2024

Relazione tra monotonia di f e segno di f'

"f crescente $\iff f' \geq 0$" $\underline{\underline{*}}$

PROPOSIZIONE 1

$f: X \to \mathbb{R}$ supponiamo f crescente

Allora $\forall \bar{x} \in X$ per cui $\exists f'(\bar{x})$ vale $f'(\bar{x}) \geq 0$

Dim. Sia $\bar{x}$ punto $\mid \exists f'(\bar{x})$

Allora $\forall x \in X,\ x \neq \bar{x}$

$x < \bar{x}$ — numeratore negativo, denominatore negativo

$x > \bar{x}$ — numeratore positivo, denominatore positivo

$$\frac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \geq 0$$ perché f è crescente ($\forall x \neq \bar{x}$ sia maggiore che minore)

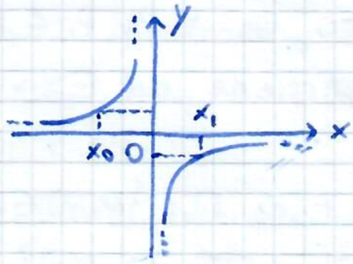
Passando al limite per $x \to \bar{x}$, ottengo $f'(\bar{x}) \geq 0$

PROPOSIZIONE 2

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile $\mid f'(x) \geq 0\ \forall x \in I$

Allora f è crescente

OSS I intervallo è necessario:



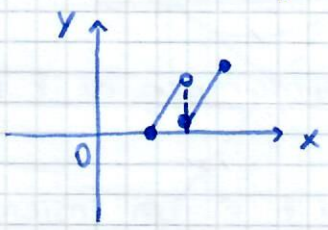
$X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$f(x) = -\frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2}$

$\hookrightarrow x_0 < x_1$, ma $f(x_0) > f(x_1)$

OSS f derivabile è un'hp. necessaria:



Nei punti in cui è derivabile la derivata è positiva ma la funzione non è crescente

Siano $x_0, x_1 \in I$, $x_0 < x_1$ per tutte le coppie x_0, x_1

$\exists\ \bar{x} \in (x_0, x_1) \mid \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \underset{\geq 0}{f'(\bar{x})}$ (per Lagrange)

$\Rightarrow f(x_0) \leq f(x_1)$

□

$\underline{\underline{*}}$. $\boxed{\begin{array}{l} f: I \to \mathbb{R},\ I \text{ intervallo, } f \text{ derivabile} \\ f \text{ crescente} \iff f'(x) \geq 0\ \forall x \in I \end{array}}$

? Riesco a scrivere una "caratterizzazione" della funzione strettamente crescente in termini del segno della derivata?

? Vale $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile

f strettamente crescente $\iff f'(x) > 0\ \forall x \in I$?

No, basta pensare a x^3

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile

MODIFICA: f str. crescente $\iff f'(x) \geq 0 \ \forall x \in I$ e $A = \{x \in I \mid f'(x) = 0\}$ non contiene intervalli

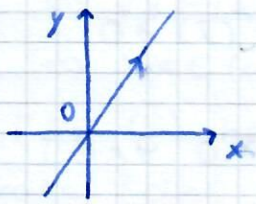
Insieme convesso in $\mathbb{R}^2$/ in $\mathbb{R}^n$

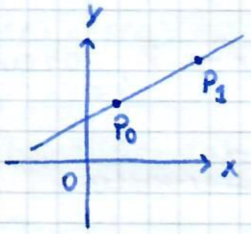
$E \subset \mathbb{R}^2$ ($F \subset \mathbb{R}^n$) è un insieme convesso se $\forall P_0, P_1$ in E il segmento $\overline{P_1P_0}$ è interamente contenuto in E

$\overline{P_0P_1} = \{(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \mid \lambda \in [0,1]\}$ insieme delle combinazioni affini convesse di P_0 e P_1

$P_0 + \lambda(P_1 - P_0)$ $\quad \lambda \in [0,1] \Rightarrow$ se $\lambda = 0$ trovo l'estremo P_0 e scorrendo arrivo a $\lambda = 1$ nell'altro estremo P_1

$P_0 = 0 \Rightarrow \lambda P_1 \quad \lambda \in \mathbb{R}$





$\lambda(P_1 - P_0) + P_0$

$\lambda \in \mathbb{R}$

Def. (ANALITICA)

$E \subset \mathbb{R}^2$ ($E \subset \mathbb{R}^n$) si dice convesso se $\forall P_0, P_1 \in E$, $\forall \lambda \in [0,1]$ il punto $P_\lambda = (1-\lambda)P_0 + \lambda P_1$ appartiene ad E

$f: I \to \mathbb{R}$ intervallo il grafico di f è $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y = f(x)\}$

il sopragrafico di f è $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \geq f(x)\}$ $\Gamma \subset E$

il sottografico di f è $F = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \leq f(x)\}$ $\Gamma \subset F$

Def. $I \subset \mathbb{R}$ intervallo

$f: I \to \mathbb{R}$ si dice convessa se il sopragrafico di f E è un insieme convesso.

Si dice concava se il sottografico di f è un insieme convesso.

(le rette sono sia concave che convesse)

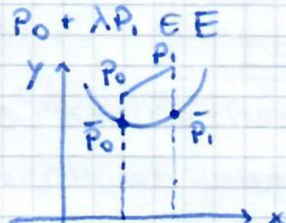
$\Rightarrow$ NON convessa
NON concava

f convessa se $\forall P_0, P_1 \in E$, $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \in E \overset{?}{\iff} \forall P_0 P_1 \in \Gamma$, $\forall \lambda \in [0,1]$ $(1-\lambda)P_0 + \lambda P_1 \in E$

cioè posso limitarmi a considerare i punti sul grafico

$P_0(x_0, y_0)$

$P_1(x_1, y_1)$



$\overline{P}_0(x_0, f(x_0))$

$\overline{P}_1(x_1, f(x_1))$

$\overline{P}_\lambda = (1-\lambda)\overline{P}_0 + \lambda \overline{P}_1$ che coordinate ha?

$\overline{P}_\lambda((1-\lambda)x_0 + \lambda x_1, (1-\lambda)f(x_0) + \lambda f(x_1))$

$y_\lambda \geq f(x_\lambda)$ (è nel sopragrafico) al variare di λ descrive $\overline{P_0P_1}$ — al variare di λ descrive il tratto della funzione calcolato tra x_0 e x_1

$$(1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1) \geq f((1-\lambda)x_0+\lambda x_1)$$

$$\boxed{f((1-\lambda)x_0+\lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1) \quad \forall \lambda \in [0,1], \forall x_1, x_0 \in I}$$

PROP 1 $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

è convessa $\iff \forall x_0 < x_1$, x_0 e $x_1 \in I$, $\forall \lambda \in [0,1]$ vale che

$f((1-\lambda)x_0+\lambda x_1) \leq (1-\lambda)f(x_0)+\lambda f(x_1)$ → appena dimostrata

PROP 2 $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile

f convessa $\iff f'$ crescente

PROP 3 $f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo

f derivabile due volte

f convessa $\iff f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$

↓

Dim prop 2 ⊕ caratterizzazione della monotonia

$f''(x) \geq 0 \iff f'$ crescente $\iff f$ convessa

Dim prop 2 A ($\Rightarrow$)

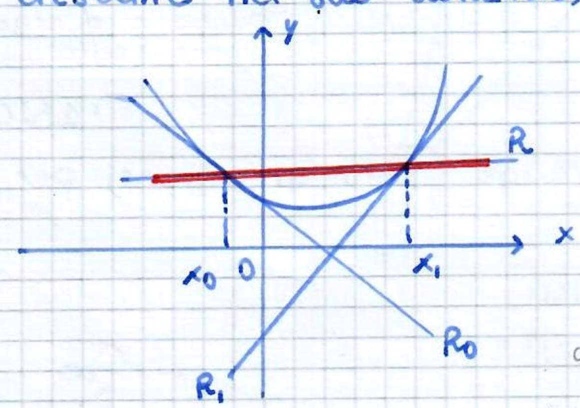
ENUNCIATO

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f convessa

Siano $x_0 < x_1$ $\quad x_0, x_1 \in I$ t.c. $f'(x_0), f'(x_1)$ esistano, allora

$f'(x_0) \leq f'(x_1)$

(f' è crescente nel suo dominio)



$R_0 \to$ tg a f in x_0

$R_1 \to$ tg a f in x_1

$R \to$ retta per $(x_0, f(x_0))$ e $(x_1, f(x_1))$

↓

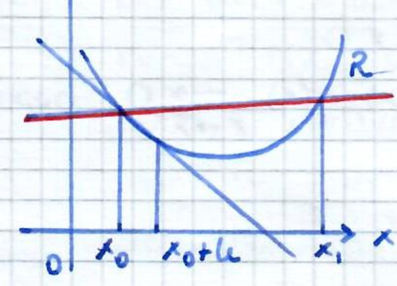
Uso R nella dimostrazione come retta ausiliaria

$$\underbrace{f'(x_0) \leq \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}} \leq f'(x_1)$$

↳ dimostro separatamente questi due pezzi

$\text{Pen}(R_0) \leq \text{Pen}(R) \leq \text{Pen}(R_1)$

pendenza di $R \Rightarrow$ la uso come termine medio



$0 < h < x_1 - x_0$

retta passante per x_0 e x_0+h

$$R_0' : y = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}(x-x_0)+f(x_0)$$

$$R : y = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}(x-x_0)+f(x_0) = g(x)$$

retta passante per x_0 e x_1

$$f(x_0+h) \leqslant \overset{R}{g}(x_0+h) = \left(\frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}\right)(x_0+h-x_0)+f(x_0)$$

$$f(x_0+h) \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}h + f(x_0)$$

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0} \Rightarrow \lim_{h\to 0} \Rightarrow f'(x_0) \leqslant \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$$

ho ottenuto la 1^a di sugualianza

(la 2^a è analoga)

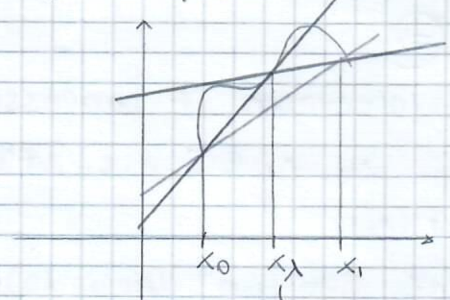
Dim prop 2 B ($\Leftarrow$)

$f: I \to \mathbb{R}$ derivabile

f' crescente $\Rightarrow$ f convessa

OSS f è non convessa $\Rightarrow$ f' non è crescente (contronominale)
($\neq f$ concava)

(andrà usato questo + Lagrange e queste rette)



15/04/2024

<u>OSS1:</u> Rolle, Cauchy e Lagrange sono strumenti per altre dimostrazioni

<u>OSS2:</u> FUNZIONI DERIVABILI:

C_0 , C_1 , ... , C_∞

C_0: continue

C_1: derivabili 1 volta con derivata continua

C_∞: derivabili ∞ volte con derivate continue

CLASSE DI FUNZIONI PIÙ IMPORTANTE

TEOREMA DI DE L'HÔPITAL

Sia I intervallo in $\mathbb{R}$, $\bar{x} \in I$, $I' := I \setminus \{\bar{x}\}$

$f, g: I' \to \mathbb{R}$ t.c.

(i) f, g derivabili (in ogni $x \in I'$) e $g' \neq 0$

(ii) vale una delle seguenti a) $f(x), g(x) \xrightarrow[x\to\bar{x}]{} 0$ oppure
b) $f(x), g(x) \xrightarrow[x\to\bar{x}]{} \pm\infty$

(iii) $\exists$ $L := \lim_{x\to\bar{x}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$

Allora $\dfrac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L$

OSS 1: l'ipotesi a) opp. b) è necessaria

OSS 2: l'ipotesi (i) è necessaria affinché $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ sia definito

OSS 3: Può succedere che $\lim \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ NON esista e $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)}$ si

Esempio:

$f(x) = \sin x + x$

$g(x) = x$

$x \to +\infty$

$\lim_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

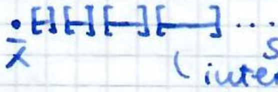
$\lim_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to +\infty} \cos x + 1 \Rightarrow$ N.E.

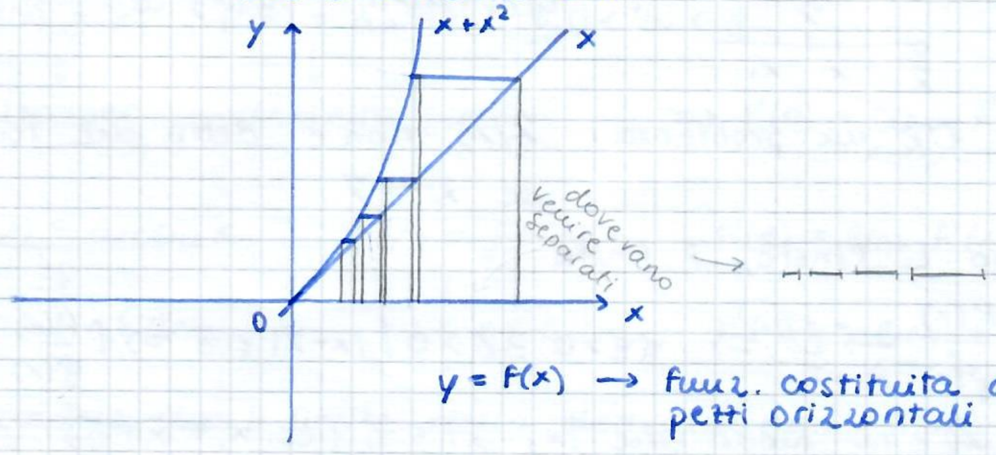
IDEM per $f(x) = x + x^2 \sin \frac{1}{x}$ e $g(x) = x$ per $x \to 0$

Supponiamo che il dominio sia così:

$\Rightarrow$ non è compreso nell'enunciato ma continua ad essere vero il teorema

Caso in cui non vale più:





$y = f(x) \rightarrow$ funz. costituita dai pezzi orizzontali

$x \leq f(x) \leq x + x^2$ $\qquad \bar{x} = 0$

$g(x) = x$

$$\begin{array}{ccccc} \dfrac{x}{x} & \leq & \dfrac{f(x)}{g(x)} & \leq & \dfrac{x+x^2}{x} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & 1 & & 1 \end{array} \qquad \text{ma} \quad \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

$\boxed{\text{Dim.}}$ nel caso a), suppongo I = intorno dx di $\bar{x}$ $\quad$ I $\bar{x}$

Pongo $f(\bar{x}) := 0$, $g(\bar{x}) := 0$

$\Rightarrow f, g$ definite su tutto I e continue in I (in particolare continue in $\bar{x}$ per l'ip. a)

Derivabili in $I' = I \setminus \{\bar{x}\}$

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(x) - f(\bar{x})}}}{\underset{\overset{\shortparallel}{0}}{g(x) - g(\bar{x})}} = \frac{f'(\check{x})}{g'(\check{x})}$$

NB! $\check{x}$ è una funzione di x

Cauchy (serve che il dominio sia un intervallo per applicarlo)

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \bar{x}} \frac{f'(\check{x}(x))}{g'(\check{x}(x))} = \lim_{\check{x} \to \bar{x}} \frac{f'(\check{x})}{g'(\check{x})} = L$$

cambio di variabile ($\check{x} = \check{x}(x)$)

ipotesi (iii)

e anche che la funzione sia continua in $\bar{x}$, altrimenti non posso

$\bar{x} < \check{x} < x$

$x \to \bar{x} \Rightarrow \check{x} \to \bar{x}$

nel caso b), suppongo I = intorno dx di $\bar{x}$

IDEA DIM:

$x_1 > \bar{x}$. Per ogni $\bar{x} < x < x_1$

lo scelgo

$$(*) \quad \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} + \frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}\right] \frac{\overbrace{g(x) - g(x_1)}^{\sim g(x)}}{g(x)}$$

verificare che è una identità

$\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\check{x})}{g'(\check{x})}$

$\frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} \to 0$

questo rapporto tende a 1

Per Cauchy: $\forall x \ \exists \check{x}$ t.c. $\frac{f(x) - f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \frac{f'(\check{x})}{g'(\check{x})}$

$\bar{x} \quad x \quad \check{x} \quad x_1$

C'è un problema: $\check{x}(x)$ non è detto che tenda a $\bar{x}$ se $x \to \bar{x}$

suppongo L finito, $\bar{x}$ finito

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x \to \bar{x}]{} L \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ | \ |x - \bar{x}| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon$$

scelgo x_1 in modo che $|x_1 - \bar{x}| < \delta$ (es. $x_1 = \bar{x} + \delta$)

Inoltre $\exists \delta' > 0 \ | \ |x - \bar{x}| < \delta' \Rightarrow \left|\frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)}\right| < \varepsilon$ e $\left|\frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} - 1\right| < \varepsilon$

$$\frac{f(x_1)}{g(x) - g(x_1)} = \pm \varepsilon \qquad \frac{g(x) - g(x_1)}{g(x)} = 1 \pm \varepsilon$$

Allora tornando all'identità di sopra $(*)$

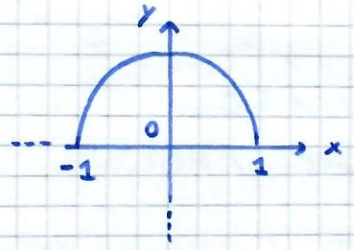
$$\frac{f(x)}{g(x)} = [(L \pm \varepsilon) \pm \varepsilon](1 \pm \varepsilon) = L \pm (2\varepsilon + L\varepsilon + 2\varepsilon^2)$$

regole di propagazione dell'errore

allora $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow L$

$f(x) = \sqrt{1-x^2}$

$-1 \leq x \leq 1$



$f'(x) = \dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$

↳ vale per $-1 < x < 1$

Cosa succede a $f'(x)$ per $x = \pm 1$ $\quad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -1^+} f'(x) = +\infty$

È vero che $f'(1) = -\infty$ e $f'(-1) = +\infty$?

YES! Dim. direttamente dal limite del rapporto incrementale oppure si usa il seguente lemma

LEMMA

I intervallo, $\bar{x} \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile in $I \setminus \{\bar{x}\}$

Suppongo che esista $\lim_{x \to \bar{x}} f'(x) = L \Rightarrow f'(\bar{x})$ esiste ed è L

Dim $\quad f'(x) = \lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{f(x) - f(\bar{x})}{x - \bar{x}} \underset{\text{de l'Hôp.}}{=} \lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{f'(x)}{1} \underset{\text{per ip.}}{=} L$

APPLICAZIONI:

0 non è più nel dominio perché questo diventa negativo

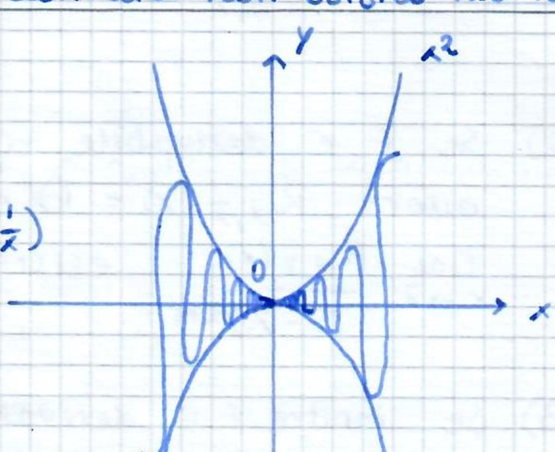
$f(x) = x^a \quad f'(x) = a x^{a-1} \quad 0 < a < 1$

↓ definita per $x \geq 0$ $\quad$ ↓ definita per $x > 0$ $\quad \Rightarrow f'(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = +\infty$

$f(x) = \arcsin x \quad f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad f'(1) = \lim_{x \to 1} f'(x) = +\infty$

↓ $-1 \leq x \leq 1$ $\quad$ ↓ $-1 < x < 1$ $\quad f'(-1) = \lim_{x \to -1} f'(x) = +\infty$

Può succedere che il limite della derivata non esista ma la derivata sì



$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$

per $x \neq 0 \quad f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right)$

$\lim_{x \to 0} f'(x)$ non esiste

Ma la derivata in 0 esiste:

dim ↗ rapporto incrementale: *
↘ sviluppo di Taylor

$* \quad f'(0) = \lim_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$

$f(x) = o(x^2) \Rightarrow f(x) = f(0) + 0 \cdot x + \underbrace{}_{o(x)}$

$\Rightarrow f'(0) = 0$

ES

Sia $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x \leq 0 \\ e^{-1/x} & \text{per } x > 0 \end{cases}$

Questa funzione è C^∞ (esistono le derivate di ogni ordine e sono continue

In particolare $D^n f(0) = 0 \ \forall n$ → dimostrarla per induzione su n

VARIANTE $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{per } x = 0 \\ e^{-1/x^2} & \text{per } x \neq 0 \end{cases}$

Dim.

$\forall n \ \exists p_n$ polinomio t.c. $D^n f(x) = \dfrac{p_n(x) e^{-1/x}}{x^{2n}} \quad \forall x > 0$

$f(x) = e^{-1/x}$

$f'(x) = e^{-1/x} \cdot \dfrac{1}{x^2}$

16/04/2024

TEOREMA DELLO SVILUPPO DI TAYLOR

Def. [polinomio e resto di T.]

$I \subset \mathbb{R}$, intervallo, $\bar{x} \in I$, $d \in \mathbb{N}$, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile d volte in $\bar{x}$ e chiamo pol. di Taylor di f in $\bar{x}$ di ordine d

$$\boxed{P_{d,\bar{x}}(x) = \sum_{n=0}^{d} \frac{f^{(n)}(\bar{x})}{n!} (x-\bar{x})^n} = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + \dots + \frac{f^{d}(\bar{x})}{d!}(x-\bar{x})^d$$

$R_{d,\bar{x}}(x) = f(x) - P_{d,\bar{x}}(x)$ resto di Taylor di ordine d

ENUNCIATO:

For. di PEANO

1) Se f è derivabile $d-1$ volte in I e d volte in $\bar{x}$ allora $R_{d,\bar{x}}(x) = o(x-\bar{x})^d$ ↪ $\lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^d} = 0$

2) Se f è derivabile d volte in I e $d+1$ volte in $\bar{x}$ allora $R_{d,\bar{x}}(x) = O(x-\bar{x})^{d+1}$ inoltre $\lim_{x \to \bar{x}} \dfrac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^{d+1}}$ esiste e vale $\dfrac{f^{(d+1)}(\bar{x})}{(d+1)!}$ (l'esistenza del limite è di più rispetto all'O-grande)

3) Se inoltre f è derivabile $d+1$ volte in I allora $\forall x \in I$ $(x > \bar{x})$ $\exists \check{x} \in (\bar{x}, x) \mid R_{d,\bar{x}}(x) = \dfrac{f^{d+1}(\check{x})}{(d+1)!}(x-\bar{x})^{d+1}$

↳ FORMULA DEL RESTO DI LAGRANGE

4) Se $f \in C^{d+1}$ (derivata $(d+1)$-esima continua), allora

$\forall x \in I$ $(x > \bar{x})$ $\quad R_{d,\bar{x}}(x) = \int_{\bar{x}}^{x} \frac{1}{d!}(x-t)^d f^{(d+1)}(t)\,dt$

↳ FORMULA DEL RESTO INTEGRALE

(Facciamo la dim 4 e facciamo vedere che nelle hp. della 4 le altre derivano facilmente a cascata, poi rifacciamo le altre nelle hp. minimali)

Dim. 4) per induzione su d

- $d=0$ $\quad R_{d,\bar{x}}(x) = f(x) - P_{0,\bar{x}}(x) = f(x) - f(\bar{x}) = \int_{\bar{x}}^{x} f'(t)\,dt$

(teo. fondamentale del calcolo integrale)

- Supponiamo la formula vera per $d-1$

$$R_{d-1,\bar{x}}(x) = \int_{\bar{x}}^{x} \frac{1}{(d-1)!}(x-t)^{d-1} f^{(d)}(t)\,dt$$

$$f(x) = P_{d-1,\bar{x}}(x) + R_{d-1,\bar{x}}(x) =$$

$$= P_{d-1,\bar{x}}(x) + \int_{\bar{x}}^{x} \frac{1}{(d-1)!}(x-t)^{d-1} f^{(d)}(t)\,dt =$$

$$= P_{d-1,\bar{x}}(x) + \frac{1}{(d-1)!}\left[- \int_{\bar{x}}^{x} -\frac{(x-t)^d}{d} f^{(d+1)}(t)\,dt + \left[-\frac{(x-t)^d}{d} f^{d}(t) \right]_{\bar{x}}^{x} \right] =$$

$$= P_{d-1,\bar{x}}(x) + \frac{1}{d!}\int_{\bar{x}}^{x} (x-t)^d \cdot f^{(d+1)}(t)\,dt + \frac{(x-\bar{x})^d}{d!} f^{d}(\bar{x}) =$$

termine d-esimo dello Sviluppo di Taylor

$$= P_{d,\bar{x}}(x) + \underbrace{\frac{1}{d!}\int_{\bar{x}}^{x} (x-t)^d \cdot f^{(d+1)}(t)\,dt}_{= R_{d,\bar{x}}(x)} = f(x)$$

□

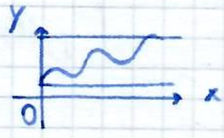
Dim. 4) ⇒ 2)

$f^{(d+1)}$ è continua in I ($\forall x \in I$ $x > \bar{x}$, $f^{(d+1)}$ è continua in $[\bar{x}, x]$).

Per Weierstrass ammette max e min

$$\underset{\min}{m} \leq f^{(d+1)}(x) \leq \underset{\max}{M} \quad \forall x$$

$$\frac{m}{d!}\int_{\bar{x}}^{x} (x-t)^d\,dt \leq \frac{1}{d!}\int_{\bar{x}}^{x} (x-t)^d f^{(d+1)}(t)\,dt \leq \frac{M}{d!}\int_{\bar{x}}^{x} (x-t)^d\,dt$$



$$\frac{m}{(d+1)!}(x-\bar{x})^{d+1} \leq R_{d,\bar{x}}(x) \leq \frac{M}{(d+1)!}(x-\bar{x})^{d+1} \quad (*)$$

Ma manca l'esistenza del lim. (*)

$$(*)\ \frac{m}{(d+1)!} \leq \frac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^{d+1}} \leq \frac{M}{(d+1)!} \Rightarrow R_{d,\bar{x}}(x) = O\left((x-\bar{x})^{d+1}\right)$$

4) ⇒ 2) □

$$(*)\ \frac{m}{(d+1)!}(x-\bar{x}) \leq \frac{R_{d,\bar{x}}}{(x-\bar{x})^{d}} \leq \frac{M}{(d+1)!}(x-\bar{x})$$

$$\downarrow x \to \bar{x} \qquad\qquad \downarrow x \to \bar{x}$$

$$0 \qquad\qquad 0$$

Per confronto $\lim_{x \to \bar{x}} \frac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^{d}} = 0$

4) ⇒ 1) □

$$(*)\ m \leq (d+1)! \frac{R_{d,\bar{x}}}{(x-\bar{x})^{d+1}} \leq M$$

Per il teo. dei valori intermedi esiste $\check{x} \in (\bar{x}, x)$ tale che $f^{(d+1)}(\check{x}) = (d+1)! \frac{R_{d,\bar{x}}}{(x-\bar{x})^{d+1}}$

ip. della 4 continua

è un valore tra max e min di $f^{d+1}(x)$

4) ⇒ 3) □

(Nel primo semestre abbiamo già visto 1) e 2) da sole, manca solo la 3) nelle ip. minimali)

(*) 3 ⇒ 2 nelle ip. 4

$$\forall x \in I,\ x > \bar{x},\ \exists\ \check{x} \in (\bar{x}, x) \mid \frac{R_{d,\bar{x}}}{(x-\bar{x})^{d+1}} = \frac{f^{(d+1)}(\check{x})}{(d+1)!}$$

$$\lim_{x \to \bar{x}} \frac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^{d}} = \lim_{\check{x} \to \bar{x}} \frac{f^{(d+1)}(\check{x})}{(d+1)!} = f^{(d+1)}(\bar{x}) / (d+1)!$$

$$\bar{x} < \check{x} < x$$

$$x \to \bar{x} \Rightarrow \check{x} \to \bar{x}$$

Per continuità di $f^{(d+1)}(x) \Rightarrow f^{(d+1)}(x) \to f^{(d+1)}(\bar{x})$

Dim. 3)

LEMMA

$$\begin{cases} D^{(k)} R_{d,\bar{x}}(x) = D^{(k)} f(x) - \sum_{n=k}^{d} \frac{f^{n}(\bar{x})}{(n-k)!}(x-\bar{x})^{n-k} & \forall k = 0, \dots, d \\ D^{(d+1)} R_{d,\bar{x}}(x) = D^{(d+1)} f(x) + 0 & \\ D^{(k)} R_{d,\bar{x}}(\bar{x}) = 0 & \end{cases}$$

$P_{d,\bar{x}}(x)$ viene eliminato

$\forall x \in I,\ x > \bar{x} \quad J = (\bar{x}, x)$

$$\frac{R_{d,\bar{x}}(x)}{(x-\bar{x})^{d+1}} = \frac{R_{d,\bar{x}}(x) - R_{d,\bar{x}}(\bar{x})}{(x-\bar{x})^{d+1} - (\bar{x}-\bar{x})^{d+1}} \underset{\substack{\text{per Cauchy} \\ \exists x_1 \in [\bar{x}, x]}}{=} \frac{R'_{d,\bar{x}}(x_1)}{(d+1)(x_1-\bar{x})^{d}} =$$

$$= \frac{1}{(d+1)} \frac{R'_{d,\bar{x}}(x_1) - R'_{d,\bar{x}}(\bar{x})}{(x_1-\bar{x})^{d} - (\bar{x}-\bar{x})^{d}} \underset{\substack{\text{di nuovo} \\ \text{Cauchy}}}{=} \frac{R^{(2)}_{d,\bar{x}}(x_2)}{(d+1)d\,(x_2-\bar{x})^{d-1}}$$

Dopo aver applicato d volte Cauchy

$$\dots = \frac{D^{(d)} R_{d,\bar{x}}(x_d) - D^{(d)} R_{d,\bar{x}}(\bar{x})}{(d+1)!\,(x_d-\bar{x}) - (\bar{x}-\bar{x})} = \frac{D^{(d+1)} R_{d,\bar{x}}(\check{x})}{(d+1)!} = \frac{f^{(d+1)}(\check{x})}{(d+1)!}$$

$\square$

ESERCIZIO

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ e^{-1/x} & x > 0 \end{cases}$$

PASSO 1: $\forall n \quad D^n f(x) = P_n(x)\, e^{-1/x}\, x^{-2n}$

dim $\quad n=0$ ✓

vera per n

$$DD^n f(x) = P_{n-1}(x)\, e^{-1/x} x^{-2n} + P_n(x)\, e^{-1/x} \frac{1}{x^2} x^{-2n} + P_n(x)\, e^{-1/x} (-2n) \cdot x^{-2n-1}$$

$$D^{(n+1)} f(x) = \frac{P_{n+1}(x)\, e^{-1/x}}{x^{2(n+1)}} \quad ✓$$

PASSO 2:

$$\lim_{x \to 0^+} D^n f(x) = 0$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{P_n(x)\, e^{-1/x}}{x^{2n}} = 0$$

PASSO 3: $\displaystyle \lim_{x \to 0^-} D^n f(x) = \lim_{x \to 0^+} D^n(f(x)) = 0$

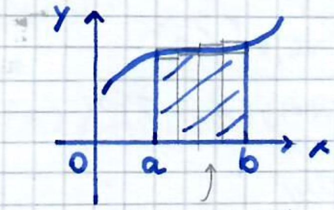
$\Rightarrow \exists\, D^n(f(x))$ in $x=0$ e vale

$D^n f(0) = 0$

$\Rightarrow$ ho dimostrato che esistono le derivate di qualsiasi ordine in 0 e valgono tutte 0

19/04/2024

INTEGRALE SECONDO RIEMANN



rettangolini "per difetto e per eccesso"

PROB 1: serve $f(x) \geq 0$

PROB 2: serve una def. di area di $A \subset \mathbb{R}^2$

$[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

(cioè $\forall x \in [a,b]$ $m \leq f(x) \leq M$, $m, M \in \mathbb{R}$)

Def. 1 Sia $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$. Chiamo σ suddivisione (o partizione) di $[a,b]$ se $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$

Chiamiamo PARAMETRO DI FINEZZA

$$\delta(\sigma) = \max \{ x_i - x_{i-1} \mid x_i \in \sigma,\ i = 1, \dots, n\}$$

Indico $N(\sigma)$ il num. di elementi di σ

Esempio

$x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ $\quad \delta(\sigma) = \frac{-a+b}{n}$

suddivisione in intervalli uguali

x_0 ... x_n

Introduciamo una relazione d'ordine PARZIALE per le suddivisioni

Date σ_1, σ_2 suddivisione, dico che σ_1 è più fine di σ_2 se

$\sigma_2 \subset \sigma_1$ ($\Rightarrow \sigma_1$ ha più punti di σ_2)

può succedere che σ_1 e σ_2 non siano confrontabili. $\begin{pmatrix} \sigma_1 \not\subset \sigma_2 \\ \sigma_2 \not\subset \sigma_1 \end{pmatrix}$

Se σ_1 e σ_2 sono due suddivisioni di $[a,b] \Rightarrow \sigma_1 \cup \sigma_2$ è più fine di σ_1 ed è più fine di σ_2

$\sigma_1 \subset \sigma_1 \cup \sigma_2$ / $\sigma_2 \subset \sigma_1 \cup \sigma_2$

Def. $[a,b]$ intervallo $\subset \mathbb{R}$

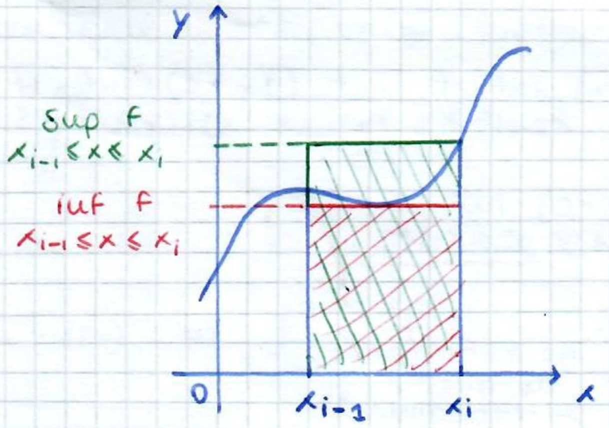
$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, σ suddivisione

Chiamiamo SOMMA DI RIEMANN INFERIORE relativa a f e a σ

$$S'(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f$$

" SOMMA DI RIEMANN SUPERIORE relativa a f, a σ

$$S''(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f$$



Somma rettangoli verdi: SOMMA SUPERIORE

Somma rettangoli rossi: SOMMA INFERIORE

Prop. Sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallo $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata, $\hookrightarrow$ M oscillazione $\sup f - \inf f$

$\sigma, \sigma_1, \sigma_2$ suddivisioni di $[a,b]$

i) $\forall \sigma$ abbiamo $S'(f,\sigma) \leq S''(f,\sigma)$

ii) Vale $S'(f,\sigma_1) \leq S'(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S'(f,\sigma_1) + M\delta(\sigma_1) N((\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus \sigma_1)$ (*)

analogamente:

$$S''(f,\sigma_1) \geq S'(f,\sigma_1 \cup \sigma_2) \geq S''(f,\sigma_1) - M\delta(\sigma_1) N((\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus \sigma_1)$$

Inoltre vale

$$S'(f,\sigma_2) \leq S'(f,\sigma_1) + M\delta(\sigma_1) N(\sigma_2) \quad *$$

$$S''(f,\sigma_1) - M\delta(\sigma_1) N(\sigma_2) \leq S''(f,\sigma_2)$$

(ugualmente invertendo σ_1 e σ_2)

In particolare se $\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2$ sono suddivisioni tali che $\hat{\sigma}_2$ è più fine di $\hat{\sigma}_2$ vale

$$S'(f,\hat{\sigma}_1) \leq S'(f,\hat{\sigma}_2) \leq S''(f,\hat{\sigma}_2) \leq S''(f,\hat{\sigma}_1) \quad **$$

iii) $S'(f,\sigma_1) \leq S''(f,\sigma_2)$ $\quad \sigma_1$ e σ_2 qualsiasi

Dimostrazione i) $\forall i \quad \inf\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f \leq \sup\limits_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f$

$$\Rightarrow (x_i - x_{i-1}) \inf f \leq \sup f \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\text{positivo}} \quad \forall i$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i (x_i - x_{i-1}) \inf f}_{S'(f,\sigma)} \leq \underbrace{\sum_i (x_i - x_{i-1}) \sup f}_{S''(f,\sigma)}$$

□

Dimostrazione ii) Supponiamo inizialmente che $\sigma_1 \cup \sigma_2$ sia $\sigma_1 \cup \{c\}$ con $c \in [x_{T-1}, x_T]$

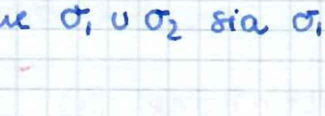
$$(x_T - x_{T-1}) \inf\limits_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f$$

$$(x_T - x_{T-1} \pm c) = \underbrace{(c - x_{T-1}) + (x_T - c)}_{\text{intervalli}}$$

$$\inf\limits_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f \leq \inf\limits_{c \leq x \leq x_T} f$$

$$\qquad \quad '' \qquad \leq \inf\limits_{x_{T-1} \leq x \leq c} f$$

(*) non è una sovrastima esagerata perché nella funzione



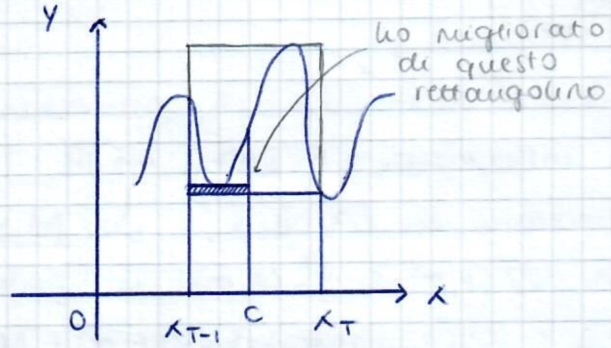
$\sigma_1 = \{x_0, x_2\}$

$\sigma_2 = \{x_0, x_1, x_2\}$

con $x_1 \to x_2$ l'errore tende a $M\delta(\sigma_1) N((\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus \sigma_1)$

$$(x_T - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f = (c - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f + (x_T - c) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f \leq$$

$$\leq (c - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq c} f + (x_T - c) \inf_{c \leq x \leq x_T} f \leq$$



$$\leq (x_T - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f + (x_T - x_{T-1}) \left(\sup_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f - \inf f \right) \leq$$

$$\leq (x_T - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f + (x_T - x_{T-1}) M \leq$$

$$\leq (x_T - x_{T-1}) \inf_{x_{T-1} \leq x \leq x_T} f + M \delta(\sigma_1)$$

aggiungo in tutte le disuguaglianze $\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq T}}^{N} (x_i - x_{i-1}) \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f$

$$\Rightarrow S'(f, \sigma_1) \leq S'(f, \sigma_1 \cup \{c\}) \leq S'(f, \sigma_1) + M \delta(\sigma_1)$$

$$S'(f, \sigma_1) \leq S'(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S'(f, \sigma_1) + M \delta(\sigma_1) N((\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus \sigma_1)$$

Ora vogliamo ottenere *

$$S'(f, \sigma_2) \leq S'(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S'(f, \sigma_1) + M \delta(\sigma_1) N((\sigma_1 \cup \sigma_2) \setminus \sigma_1)$$

qui è indifferente scrivere σ_1 o σ_2

$$\leq S'(f, \sigma_1) + M \delta(\sigma_1) N(\sigma_2)$$

** $\Rightarrow$ $S'(f, \sigma_1) \leq S'(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S''(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S''(f, \sigma_1)$

$$S'(f, \tilde{\sigma}_1) \leq S'(f, \tilde{\sigma}_2) \leq S''(f, \hat{\sigma}_2) \leq S''(f, \hat{\sigma}_1)$$

Dimostrazione iii) $\quad S'(f, \sigma_1) \leq S'(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S''(f, \sigma_1 \cup \sigma_2) \leq S''(f, \sigma_2)$

$$\Rightarrow S'(f, \sigma_1) \leq S''(f, \sigma_2).$$

Def. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

chiamiamo INTEGRALE INFERIORE DI RIEMANN

$$_{*}\int_a^b f(x)\, dx := \sup_{\sigma} S'(f, \sigma)$$

INTEGRALE SUPERIORE DI RIEMANN

$$\int_a^{*b} f(x)\,dx = \inf_{\sigma} S''(f,\sigma)$$

Diciamo che f è integrabile se $\boxed{{}_*\int_a^b f(x)\,dx = {}^*\int_a^b f(x)\,dx}$

Dalla (iii) $\Rightarrow {}_*\int_a^b \leq {}^*\int_a^b$

LEMMA $[a,b] \subset I$, $f: [a,b] \to \mathbb{R}$

Sia (σ_n) succ. di suddivisioni t.c. $\delta(\sigma_n) \xrightarrow{n\to+\infty} 0$

Allora $S'(f,\sigma_n) \longrightarrow {}_*\int_a^b f(x)\,dx$

$S''(f,\sigma_n) \longrightarrow {}^*\int_a^b f(x)\,dx$

un punto a caso dell'i-esimo intervallo che non sia sup o inf

$*$ Inoltre se chiamo SOMMA DI RIEMANN associata a f, σ e $\bar{x}_i$

$$S(f,\sigma,\bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1})\, f(\bar{x}_i) \quad \text{con } \bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]\ \forall i$$

allora $S(f,\sigma_n,\bar{x}_i) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ se so che f è integrabile

${}_*\int_a^b = {}^*\int_a^b$

$S''(f,\sigma_n) \longrightarrow {}^*\int$ (l'altro caso è analogo)

dim. ${}^*\int_a^b f(x)\,dx \leq S''(f,\sigma_n) \leq S''(f,\sigma) + M\delta(\sigma_n)N(\sigma)$

è un inf

$${}^*\int_a^b f(x)\,dx \leq \liminf_n S''(f,\sigma_n) \leq \limsup_n S''(f,\sigma_n) \leq$$

$$\leq \lim_n \left(S''(f,\sigma) + M\delta(\sigma_n)N(\sigma)\right)$$

$$= S''(f,\sigma)$$

Anche facendo il limsup viene $S''(f,\sigma)$

$\Rightarrow$ Faccio l'inf al variare di σ (posso farlo perché la disuguaglianza di sopra vale per un σ generico)

$${}^*\int_a^b f(x)\,dx \leq \liminf S''(\sigma_n) \leq \limsup S''(\sigma_n) \leq {}^*\int_a^b f(x)\,dx$$

$\Rightarrow =$ $\square$

Reminder

se $\liminf(x_n) = \limsup(x_n)$

$\Rightarrow$ (x_n) ha limite e

$\lim(x_n) = \liminf(x_n) = \limsup(x_n)$

manca la dimostrazione di $*$

$\hookrightarrow$ f integrabile $\Rightarrow {}_*\int_a^b f(x)\,dx = {}^*\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$

$\forall n \in \mathbb{N}$, vale $S'(f,\sigma_n) \leq S(f,\sigma_n,\bar{x}_i) \leq S''(f,\sigma_n)$

$S'(f,\sigma_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, $S''(f,\sigma_n) \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dx$, per confronto $S(f,\sigma_n,\bar{x}_i) \to \int$ "

INTEGRALI (secondo Riemann) 22/04/2024

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

$\sigma = \{ \underset{a}{\overset{\shortparallel}{x_0}} < \cdots < \underset{b}{\overset{\shortparallel}{x_n}} \}$ suddivisione di $[a,b]$

$\delta(\sigma)$ parametro di finezza

$$\delta(\sigma) = \max_{i=1,\dots,n} (x_i - x_{i-1})$$

$$\underbrace{S'(f,\sigma)}_{\text{somma di Riemann superiore}} := \sum_{i=1}^{n} \sup_{x \in I_i} f(x) \cdot (-x_{i-1} + x_i)$$

$$\underbrace{S''(f,\sigma)}_{\text{somma di Riemann inferiore}} = \sum_{i=1}^{n} \inf_{x \in I_i} f(x) \cdot (-x_{i-1} + x_i)$$

INT. SUP.

$$^*\!\int_a^b f(x)\,dx = \inf \{ S''(f,\sigma) \mid \sigma \text{ ammissibile} \}$$

$\to$ tutte le possibili partizioni

INT. INF.

$$_*\!\int_a^b f(x)\,dx = \sup \{ S'(f,\sigma) \mid \sigma \text{ ammissibile} \}$$

$^*\!\int = {}_*\!\int \Rightarrow$ integrabile secondo Riemann

ES di funtione non integrabile

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \to \text{FUNZIONE DI DIRICHLET}$$

$$^*\!\int_a^b f(x)\,dx = b-a \; ; \quad _*\!\int_a^b f(x)\,dx = 0 \qquad \forall \sigma$$

$$\Uparrow \qquad\qquad \Uparrow$$

$$S''(f,\sigma) = b-a \qquad S'(f,\sigma) = 0$$

PROP. Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata

Sia (σ_n) una succ. di suddivisioni t.c. $\delta(\sigma_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$

Allora $S''(f,\sigma_n) \to {}^*\!\int_a^b f(x)\,dx$

$S'(f,\sigma_n) \to {}_*\!\int_a^b f(x)\,dx$

Se f è integrabile

$$S(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,(x_i - x_{i-1})$$

$\uparrow$ qualsiasi punto dell'intervallo i-esimo

$$x_{i-1} \leq \bar{x}_i \leq x_i$$

$S''(f, \sigma_n, \dots) \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$

Qualsiasi somma di Riemann approssima l'integrale

PROP. 2 Proprietà dell'integrale

1) $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ ADDITTIVITÀ

se $f : [a,c] \to \mathbb{R}$ è integrabile $a<b<c$, allora f è integrabile su $[a,b]$ e $[b,c]$ e vale la formula di sopra

Come al primo semestre $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

2) LINEARITÀ

(a) $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili, allora $f+g$ è integrabile e

$$\int_a^b f(x)+g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

(b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora $\forall$ cf integrabile e

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

3) Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili t.c. $f \leq g$ allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$$

4) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora $|f(x)|$ è integrabile e vale

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dim 2. σ suddivisione, I intervallo della suddivisione

$$\sup f+g \leq \sup f + \sup g$$

$$\Rightarrow \quad S''(f+g, \sigma_n) \leq S''(f, \sigma_n) + S''(g, \sigma_n)$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n \to +\infty$$

$$\int^{*b}_a (f+g)(x)\,dx \leq \int^{*b}_a f(x)\,dx + \int^{*b}_a g(x)\,dx$$

$$\inf f+g \geq \inf f + \inf g$$

...

$$\int_{*a}^{b} (f+g)(x)\,dx \geq \int_{*a}^{b} f(x)\,dx + \int_{*a}^{b} g(x)\,dx$$

$$\underbrace{\int_* f + \int_* g \leq \int_* f+g \leq \int^* f+g \leq \int^* f + \int^* g}$$

↳ sono uguali se f e g sono integrabili $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ nella catena sono tutte uguaglianze

ma funziona:
$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1 & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

$g(x) = \begin{cases} 1 & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 0 & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

Se f non è integrabile nella disuguaglianza
$$ {}^*\!\int_a^b f\,dx + {}^*\!\int_a^b g\,dx \geq {}^*\!\int_a^b f+g\,dx $$

può valere il maggiore stretto (provare con la funz. di Dirichlet e funz. di Dirichlet - 1)
non ho capito

La prop. 1 vale separatamente per somme inf e sup.
(provare a dimostrarlo)

Dim. 3
$$ f \leq g $$
$$ \sup_I f \leq \sup_I g $$
$$ \Rightarrow S''(f, \sigma_n) \leq S''(g, \sigma_n) $$
$$ \Rightarrow {}^*\!\int_a^b f(x)\,dx \leq {}^*\!\int_a^b g(x)\,dx $$

ugualmente per gli integrali inferiori

Dim. 4
$$ -|f| \leq f \leq |f| $$
(nell'ip. in cui $|f|$ è integrabile)
$$ \Downarrow (3) $$
$$ \int_a^b -|f|\,dx \leq \int_a^b f\,dx \leq \int_a^b |f|\,dx $$

che equivale a dire $\left| \int_a^b f\,dx \right| \leq \int_a^b |f|\,dx$

Provare a dimostrare f integrabile $\Rightarrow$ $|f|$ integrabile
(hint: partire da $\underset{I}{\mathrm{osc}}\, f := \sup f - \inf f \geq \underset{I}{\mathrm{osc}}\, |f|$)
$$ \Downarrow $$
$$ {}^*\!\int |f| - {}_*\!\int |f| \leq {}^*\!\int f - {}_*\!\int f $$

Scopo ultimo del gioco: DIMOSTRARE CHE LE FUNZIONI CONTINUE SONO INTEGRABILI

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

Def. $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \to \mathbb{R}$ si dice uniformemente continua se
$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \mid \forall x, \bar{x} \in X$
$$ |x - \bar{x}| \leq \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| \leq \varepsilon $$

$\boxed{\text{OSS}}$ Sia $f: X \to \mathbb{R}$. Allora f non uniformemente continua
$$ \Updownarrow $$
$$ \exists\, \varepsilon > 0,\ \exists\, (x_n), (\bar{x}_n) \subset X \mid \bar{x}_n - x_n \to 0 \text{ e } |f(\bar{x}_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon\ \forall n $$

Dim. $\Uparrow$ Suppongo per assurdo che f è uniformemente continua
allora dato che $\bar{x}_n - x_n \to 0 \Rightarrow \exists\, n_0\ |\bar{x}_{n_0} - x_{n_0}| \leq \delta(\frac{\varepsilon}{2})$

$\Rightarrow |f(\bar{x}_{n_0}) - f(x_{n_0})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ↯ in contraddizione con l'ipotesi $|f(\bar{x}_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon$

$\Downarrow$ f non uniformemente continua:

$\exists \varepsilon > 0 \ \forall \delta > 0, \ \exists x, \bar{x} \in X$ tali che

$|x - \bar{x}| \leq \delta$ e $|f(x) - f(\bar{x})| > \varepsilon$

$\exists \varepsilon \mid \forall \delta = \frac{1}{n} \ \exists x_n, \bar{x}_n \in X$ tali che

$$|x_n - \bar{x}_n| \leq \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(\bar{x}_n)| > \varepsilon$$

$$\downarrow$$

$$x_n - \bar{x}_n \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

✓

ES 1

- $\operatorname{sen} x$ è uniformemente continua su $\mathbb{R}$ con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$ vale anzi

$$|\operatorname{sen}(x) - \operatorname{sen}(\bar{x})| \leq |x - \bar{x}|$$

$$\downarrow \text{dim.}$$

$$\left| \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \bar{x}}{x - \bar{x}} \right| = \overbrace{|\cos \hat{x}|}^{D^1(\operatorname{sen} x)(\hat{x})} \leq 1 \Rightarrow |\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \bar{x}| \leq |x - \bar{x}|$$

per Lagrange

- $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile con derivata limitata

$$|f'(x)| \leq L \quad \forall x \in I$$

Allora $|f(x) - f(\bar{x})| \leq L |x - \bar{x}|$ (stessa dimostrazione)

$\Rightarrow$ f è uniformemente continua con $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{L}$

ES 2

e^x NON è uniformemente continua su $\mathbb{R}$

Prendo $\bar{x}_n = \log(n+1)$, $x_n = \log n$

Allora $\bar{x}_n - x_n = \log(n+1) - \log n = \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \to 0$

ma $e^{\bar{x}_n} - e^{x_n} = (n+1) - n = 1$

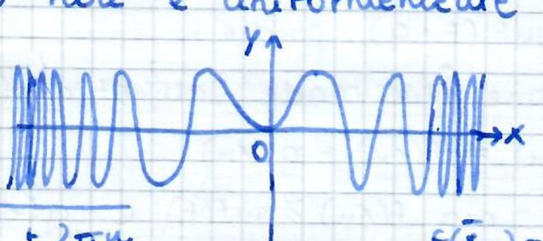
ES 3

$\sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0, +\infty)$

(la derivata $\frac{1}{\sqrt{x}}$ non è limitata)

con $\delta(\varepsilon) = \varepsilon^2$ ... esercizio

- $\operatorname{sen}(x^2)$ non è uniformemente continua su $\mathbb{R}$



$\bar{x}_n = \sqrt{\pi/2 + 2\pi n}$ $\qquad f(\bar{x}_n) = 1$

$x_n = \sqrt{2\pi n}$ $\qquad f(x_n) = 0$ $\qquad \forall n$

$$\bar{x}_n - x_n = \sqrt{\pi/2 + 2\pi n} - \sqrt{2\pi n} = \sqrt{2\pi n}\left(\sqrt{\frac{1}{4n}+1} - 1\right)$$
$$\downarrow$$
$$0$$

TUTORATO DEL 23/04 - DIMOSTRAZIONE PIÙ PRECISA DELLE PROPRIETÀ DELL' INTEGRALE

① Se $f:[a,c] \to \mathbb{R}$ è integrabile e $a<b<c$, allora f è integrabile su $[a,b]$ e $[b,c]$ e vale la formula
$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Dim. (σ_n^1) successione di partizioni per $[a,b]$ | $\delta(\sigma_n^1) \to 0$

(σ_n^2) successione di partizioni per $[b,c]$ | $\delta(\sigma_n^2) \to 0$

$$\lim S'(f,\sigma_n^1) = {}_*\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\lim S'(f,\sigma_n^2) = {}_*\int_b^c f(x)\,dx$$

(posso spezzare in due parti la sommatoria ottenendo le due precedenti)

$(\sigma_n) = (\sigma_n^1) \cup (\sigma_n^2)$ succ. di partizioni per $[a,b]$ | $\delta(\sigma_n) \to 0$

$$ {}_*\int_a^c f(x)\,dx = {}_*\int_a^b f(x)\,dx + {}_*\int_b^c f(x)\,dx$$
$$\qquad\qquad\qquad\wedge\!\!\!\backslash \qquad\qquad \wedge\!\!\!\backslash$$

$\|$ – per ip.

$$ {}^*\int_a^c f(x)\,dx = {}^*\int_a^b f(x)\,dx + {}^*\int_b^c f(x)\,dx$$ $\Rightarrow$ affinché sia vero devono valere le uguaglianze al posto dei $\geqslant$

$\Rightarrow$ $f(x)$ integrabile anche su $[a,b] \wedge [b,c]$ $\square$

② a) $f,g:[a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili, allora $f+g$ è integrabile su $[a,b]$ e vale
$$\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. σ_n partizione per $[a,b]$ | $\delta(\sigma_n) \to 0$

$$S'(f,\sigma_n) \to {}_*\int_a^b f(x)\,dx$$
$$S'(g,\sigma_n) \to {}_*\int_a^b g(x)\,dx$$

Ma $\inf(f) + \inf(g) \leqslant \inf(f+g)$ poiché:

sia (x_n) una successione che tende all'inf di $(f+g)(x)$

$(f+g)(x_n) = f(x_n) + g(x_n)$

ma $f(x_n) \geqslant \inf(f)$ e $g(x_n) \geqslant \inf(g)$

$\Rightarrow \inf(f) + \inf(g) \leqslant \inf(f+g) \Rightarrow S'(f,\sigma_n) + S'(g,\sigma_n) \leqslant S'(f+g,\sigma_n)$

vale su ogni intervallino

$$\Rightarrow \underset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx + \underset{*}{\int_a^b} g(x)\,dx \leqslant \underset{*}{\int_a^b} (f+g)(x) \quad \text{e analogamente}$$

$$\overset{*}{\int_a^b} (f+g)(x) \leqslant \overset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx + \overset{*}{\int_a^b} g(x)\,dx$$

Per cui i $\leqslant$ in realtà sono tutte uguaglianze $\square$

b) $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, $c \in \mathbb{R}$, cf è integrabile e vale la formula

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$

Dim. (σ_n) successione di partizioni per $[a,b] \mid \delta(\sigma_n) \to 0$

CASO $c<0$ ($c>0$ è più facile)

$\sup(cf(x)) = c\,\underbrace{\inf(f(x))}_{m}$

$\Rightarrow m \leqslant f(x)$; $cm \geqslant cf(x) \to$ è un maggiorante

Supponiamo per assurdo che esista $n \neq cm$ t.c.

$cm > n \geqslant cf(x) \to m < \frac{n}{c} \leqslant f(x)$

ma m per ipotesi era l'inf. di f ↯ $\to$ è il sup

Analogamente $\inf(cf(x)) = c\sup(f(x))$

$\left(\begin{array}{l} m \geqslant f(x) \\ cm \leqslant f(x) \\ cm < n \leqslant f(x) \\ m > \frac{n}{c} \geqslant f(x) \ ↯ \end{array} \right)$

Per cui $S'(cf,\sigma_n) = S''(f,\sigma_n)\cdot c \to c\overset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx$

$S''(cf,\sigma_n) = c\cdot S'(f,\sigma_n) \to c\underset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx$

ma $\overset{*}{\int} f = \underset{*}{\int} f$ per ipotesi

$\Rightarrow cf$ integrabile su $[a,b]$ e $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

③ Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabili t.c. $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in [a,b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$$

Dim. Su ogni intervallo $f(x) \leqslant g(x) \Rightarrow \sup g \geqslant \sup f$ (i)

$\inf g \geqslant \inf f$ (ii)

(i) Per assurdo $\sup f > \sup g \Rightarrow \sup g$ non è un maggiorante di f, cioè $\exists \bar{x} \mid f(\bar{x}) > \sup g \geqslant g(x) \quad \forall x \in I$ ↯

(ii) Per assurdo $\inf g < \inf f \Rightarrow \inf f$ non è un minorante di g, cioè $\exists \bar{x} \mid g(\bar{x}) < \inf f \leqslant f(x) \quad \forall x \in I$ ↯

$\Rightarrow S''(g,\sigma_n) \geqslant S''(f,\sigma_n) \Rightarrow \overset{*}{\int_a^b} g(x)\,dx \geqslant \overset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx$

$S'(g,\sigma_n) \geqslant S'(f,\sigma_n) \Rightarrow \underset{*}{\int_a^b} g(x)\,dx \geqslant \underset{*}{\int_a^b} f(x)\,dx$

per una prop. già vista per i limiti

$\Rightarrow \int_a^b g(x)\,dx \geqslant \int_a^b f(x)\,dx$ $\square$

④ $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabile, allora $|f(x)|$ integrabile e vale

$$\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Dim. $0 \leq S''(|f|, \sigma_n) - S'(|f|, \sigma_n) \leq S''(f, \sigma_n) - S'(f, \sigma_n)$

$\downarrow$

poiché $\sup|f| - \inf|f| \leq \sup f - \inf f$

(se sup e inf hanno lo stesso segno la distanza rimane uguale altrimenti diminuisce, andrebbe studiato caso per caso)

$$\Rightarrow 0 \leq {}^*\!\!\int_a^b |f(x)|\,dx - \int_{*a}^b |f(x)|\,dx \leq {}^*\!\!\int_a^b f(x)\,dx - \int_{*a}^b f(x)\,dx$$

$$\overset{\shortparallel}{0}$$

$\Rightarrow |f(x)|$ integrabile su $[a,b]$

inoltre $\sup|f| \geq \sup f$ (già dimostrato nel punto ③
$\inf|f| \geq \inf f$ poiché $|f| \geq f$)

più precisamente $\sup|f| \geq |\sup f| \Rightarrow S''(|f|, \sigma_n) \geq |S''(f, \sigma_n)|$

$\Downarrow$??? ⊛

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \quad \square$$

⊛ $S''(|f|, \sigma_n) \geq |S''(f, \sigma_n)|$

$\downarrow$

$${}^*\!\!\int_a^b |f(x)|\,dx \geq \left| {}^*\!\!\int_a^b f(x)\,dx \right|$$

$$\shortparallel$$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

23/04/2024

TEOREMA DI HEINE - CANTOR

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ f uniformemente continua

($[a,b]$ intervallo chiuso e limitato)

Dim.

Per assurdo f non uniformemente continua, ossia:

$\exists \varepsilon > 0$ $\exists (x_n), (\bar{x}_n) \in [a,b]$ t.c. $x_n - \bar{x}_n \to 0$ per $n \to +\infty$ e

$|f(x_n) - f(\bar{x}_n)| > \varepsilon$ $\forall n \in \mathbb{N}$

Per Bolzano-Weierstrass $\exists$ (n_k) sottosuccessione di indici t.c.

$x_{n_k} \to \bar{x}$, $\bar{x} \in [a,b]$

Allora $\bar{x}_{n_k} = \bar{x}_{n_k} + x_{n_k} - x_{n_k} = x_{n_k} + (\bar{x}_{n_k} - x_{n_k}) \to \bar{x} + 0$ per $k \to \infty$

Visto che f è continua, per $k \to +\infty$ vale

$f(x_{n_k}) \to f(\bar{x})$ e $f(\bar{x}_{n_k}) \to f(\bar{x})$ dunque

$f(x_{n_k}) - f(\bar{x}_{n_k}) \to 0$ assurdo $\lightning$

TEOREMA (le funzioni continue su $[a,b]$ sono integrabili)

Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Allora f è integrabile secondo Riemann. Inoltre $\forall \varepsilon > 0$ sia $\delta = \delta\left(\frac{\varepsilon}{b-a}\right)$ il δ associato a $\frac{\varepsilon}{b-a}$ nell'uniforme continuità.

Allora $\forall \sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ partizione di $[a,b]$ con $\delta(\sigma) < \delta$ e $\forall$ scelta di $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ con $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ la somma di Riemann $S(f, \sigma, \bar{x}_i) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) f(\bar{x}_i)$ approssima l'integrale $\int_a^b f(x)dx$ con errore inferiore a ε.

Dim. Fissata una qualsiasi partizione $\sigma = \{x_0, \dots, x_n\}$ chiamo $I_i = [x_{i-1}, x_i]$. Allora

$$f(\bar{x}_i) - \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \inf_{I_i} f(x) \leq f(\bar{x}_i) \leq \sup_{I_i} f(x) \leq f(\bar{x}_i) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall i$$

moltiplico tutto per $(x_{i-1} - x_i)$ e poi sommo per $i = 1, \dots, n$

$$(*) \quad S(f, \sigma, \bar{x}_i) - \varepsilon \leq S'(f, \sigma) \leq S(f, \sigma, \bar{x}_i) \leq S''(f, \sigma) \leq S(f, \sigma, \bar{x}_i) + \varepsilon$$

da cui:

$$(1) \quad S - \varepsilon \leq S' \leq {}_*\!\int_a^b f(x)dx \leq {}^*\!\int_a^b f(x)dx \leq S + \varepsilon$$

ossia $\displaystyle {}^*\!\int_a^b f(x)\,dx \leq S + \varepsilon$

$\displaystyle -{}_*\!\int_a^b f(x)\,dx \leq -S + \varepsilon$

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua
- ammette massimo e minimo (Weierstrass)
- è uniformemente continua (Heine-Cantor)
- è integrabile secondo Riemann

$$\Rightarrow 0 \leq {}^*\!\int_a^b f(x)\,dx - {}_*\!\int_a^b f(x)\,dx \leq 2\varepsilon \Rightarrow f \text{ è integrabile}$$

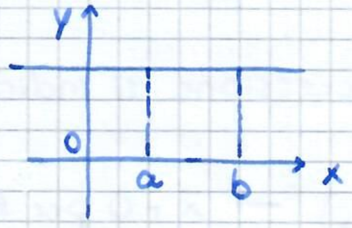
Sapendo ora che f è integrabile da (1) otteniamo

(2) $$S-\varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq S+\varepsilon$$

ossia $$-\varepsilon \leq \int_a^b f(x)\,dx - S \leq \varepsilon \Rightarrow \left|\int_a^b f(x)\,dx - S\right| \leq \varepsilon$$

OSSERVAZIONE PRELIMINARE: sia $[a,b] \subset \mathbb{R}$

Sia $f(x) \equiv 1 \quad \forall x \in [a,b]$



Chiaramente $\inf\limits_{x\in[a,b]} f = \sup\limits_{x\in[a,b]} f = 1$

Data una qualsiasi partizione di $[a,b]$

$$\Rightarrow S'(f,\sigma) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \inf f =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) \sup f = b-a$$

Dunque ovviamente $$\int_{*a}^{b} 1\,dx = {}^{*}\!\int_a^b 1\,dx = \int_a^b 1\,dx = b-a$$

Inoltre sappiamo che $\forall c \in \mathbb{R}$ vale che $g(x) \equiv c \;\; \forall x \in I$ è integrabile e $\int_a^b c\,dx = c\int_a^b 1\,dx = c(b-a)$

Utilizzando la definizione so integrare solo le costanti: molto deludente $\Rightarrow$ serve il TFCI

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE

Def. Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ continua, $F: I \to \mathbb{R}$ derivabile.

Diciamo che F è una primitiva di f se $\forall x \in I$ vale
$$F'(x) = f(x)$$

TEO Sia $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, F una primitiva di f. Allora
$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

OSS: il teo. è cruciale perché ci permette di calcolare gli integrali.

TEO: esistenza di una primitiva

Sia $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f: I \to \mathbb{R}$ continua

La funzione $G: I \to \mathbb{R}$ definita da $G(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in I$ è derivabile $\forall x \in I$ ed è una primitiva di f.

Dim. (reminder: $\int_a^x f(t)\,dt = -\int_x^a f(t)\,dt$)

Dobbiamo mostrare che $\forall x \in I$ vale $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$

(dunque chiaramente G ammette derivata definita)

Supponiamo che $x \in [a, \sup I)$ e dimostriamo $\lim_{h \to 0^+} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = f(x)$

Sia $h > 0$ t.c. $x+h \in I$

Per definizione di G si ha

$$G(x+h) = \int_a^{x+h} f(t)\,dt \underset{\text{additività}}{=} \int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

dunque

$$G(x+h) - G(x) = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

f è continua in $x \in I \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0 \mid |t-x| \leq \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(t) - f(x)| \leq \varepsilon$

Sia ora $h \leq \delta_\varepsilon$, allora

$\forall t \in [x, x+h]$ si ha $|t-x| \leq h \leq \delta_\varepsilon$

$\Rightarrow$ $f(x) - \varepsilon \leq f(t) \leq f(x) + \varepsilon$ $\Rightarrow$ per la prop. (iii) dell'integrale vale $\int_x^{x+h} (f(x) - \varepsilon)\,dt \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq \int_x^{x+h} (f(x) + \varepsilon)\,dt$

$$\Rightarrow (f(x) - \varepsilon)h \leq \int_x^{x+h} f(t)\,dt \leq (f(x) + \varepsilon)h$$

$\Rightarrow$ (h positivo)

$$f(x) - \varepsilon \leq \frac{\int_x^{x+h} f(t)\,dt}{h} \leq f(x) + \varepsilon$$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \forall h$ t.c. $0 < h \leq \delta_\varepsilon$ vale

$$\left| \frac{G(x+h) - G(x)}{h} - f(x) \right| \leq \varepsilon$$

PROP. due primitive differiscono per una costante

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo, $f : I \to \mathbb{R}$ continua, $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ due primitive di f

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $\forall x \in I$ $\quad F_1(x) = F_2(x) + c$

Dim.

Chiamo $h(x) = F_1(x) - F_2(x)$

Devo dimostrare che h è una funzione costante.

So che $\forall x \in I$ vale $h'(x) = (F_1(x) - F_2(x))' = 0$

Allora per il teo. di Lagrange, $\exists \tilde{x} \in [x_0, x_1]$ t.c.

$$\frac{h(x_1) - h(x_0)}{x_1 - x_0} = h'(\tilde{x}) = 0 \Rightarrow h(x_1) = h(x_0)$$

OSS: La dimostrazione usa Lagrange $\Rightarrow I$ deve essere un intervallo. In ogni caso la proposizione è falsa se

I non è un intervallo.

Sia ad esempio $I = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $f(x) = 0 \ \forall x \in I$

Allora $F_1(x) \equiv 0$ e anche $F_2(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$

sono primitive di f, ma $F_1 - F_2 \neq c$.

Dim. TFCI

$f: [a,b] \to \mathbb{R}$ continua $\Rightarrow$ $G(x) := \int_a^x f(t)\,dt \ \forall x \in I$ è una primitiva di f.

Sia F una qualsiasi primitiva di f.

Allora $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F = G + c$

$$\Rightarrow F(b) - F(a) \underset{\substack{G \text{ primitiva} \\ F = G+c}}{=} (G(b)+c) - (G(a)+c) = G(b) - G(a) \underset{\text{def. di } G}{=}$$

$$= \int_a^b f(t)\,dt - \underbrace{\int_a^a f(t)\,dt}_{=0} = \int_a^b f(t)\,dt$$

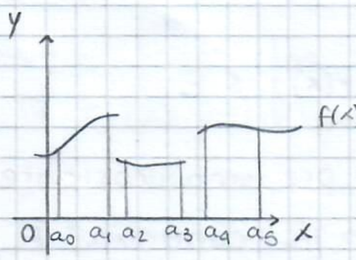
29/04/2024

Integrali (di R.) per funzioni $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitate

TH $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ limitata $D := \{$punti di discontinuità$\}$

(i) f continua ($D = \emptyset$) $\Rightarrow$ integrabile (dimostrato)

(ii) D finito $\Rightarrow$ f integrabile (per esercizio)



$$\int^{*b}_{a} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{5} \int^{*a_i}_{a_{i-1}} f(x)\,dx$$

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{5} \int_{*a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

coincidono per $i = 1, 3, 5$

oscillazione

Per $i = 2,4 \Rightarrow 0 \leq \int^{*a_i}_{a_{i-1}} - \int_{*a_{i-1}}^{a_i} \leq M(a_i - a_{i-1})$

(iii) $\forall \varepsilon \ \exists I_1, \dots, I_n \mid D \subset I_1 \cup \dots \cup I_n$ e $\sum$ lungh$(I) \leq \varepsilon \Rightarrow$

$\Rightarrow$ f integrabile (esercizio)

condizione verificata se D ha un numero finito di punti di accumulazione

(iv) $\forall \varepsilon \ \exists I_1, \dots, I_n, \dots$ (succ.) $\mid D \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ e $\sum_i$ lungh$(I_i) < \varepsilon \Leftrightarrow$

$\Longleftrightarrow$ f integrabile

COSA RIMANE FUORI: $\int_0^{+1} \frac{1}{x}\,dx$; $\int_R^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

(f non limitata) (intervallo non limitato)

Def. $\int_a^b f(x)\,dx$ si dice INTEGRALE IMPROPRIO SEMPLICE in b se $a \in \mathbb{R}$, $b \in [a, +\infty]$, f è definita in $[a,b)$, f integrabile su $[a,b']$ $\forall b' < b$ (*)

(ma f potrebbe non essere integrabile su $[a,b]$)

In tal caso

$$\int_a^b f(x)\,dx := \lim_{b' \to b} \int_a^{b'} f(x)\,dx \quad \text{se il limite esiste}$$

OSS 1

La condizione (*) è di difficile verifica

(*) $\Leftarrow$ f è definita in $[a,b)$ ed è continua (caso più rilevante)

è implicata da:

$\Downarrow$

f è continua in $[a,b']$ $\forall b'$ t.c. $a \leq b' < b$
e quindi f è integrabile su $[a,b']$

(*) $\Leftarrow$ f è definita in $[a,b)$, limitata su $[a,b']$ $\forall b' < b$
e ha un numero finito di punti di discontinuità

Possibili comportamenti di un integrale improprio

1) esiste finito
2) è $+\infty$
3) è $-\infty$
4) non esiste
5) non ha senso $\xrightarrow{\text{es.}}$ $\int_{-1}^{1} \log x\,dx$

ESEMPI

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$; $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\cos x}\,dx$; $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx$

improprio semplice in a

$\Downarrow$

scrivere una def.

$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow$ INT. IMPROPRIO NON SEMPLICE (vedremo in seguito)

$\int_0^{\infty} \log x\,dx \Rightarrow$ INT. IMPROPRIO NON SEMPLICE

ES. $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx \qquad a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim_{b'\to+\infty} \int_1^{b'} \frac{1}{x^a}\,dx \underset{\text{se } a\neq 1}{=} \lim_{b'\to+\infty} \left|\frac{x^{1-a}}{1-a}\right|_1^{b'} =$$

$$= \lim_{b'\to+\infty} \frac{(b')^{1-a}}{1-a} - \frac{1}{1-a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a<1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a>1 \end{cases}$$

$$a=1 \Rightarrow \lim_{b'\to+\infty} |\log|_1^{b'} = +\infty$$

In definitiva: $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a\leq 1 \\ \frac{1}{a-1} & \text{se } a>1 \end{cases}$

Se $F:[a,b)\to\mathbb{R}$ è una primitiva di f

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{b'\to b} |F(x)|_a^{b'} = \left(\lim_{b'\to b} F(b')\right) - F(a) = \underset{\text{definita dal limite}}{F(b)} - F(a)$$

30/04/2024

INTEGRALI IMPROPRI SEMPLICI

COMPORTAMENTI

1) finito es $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \left|-\frac{1}{x}\right|_1^{+\infty} = -\frac{1}{+\infty} + 1 = 1$ (va inteso come limite)

2) infinito es $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = +\infty$

3) non esiste es $\int_0^{+\infty} \cos x\,dx = |\sin x|_0^{+\infty}$ NON ESISTE

ESEMPI IMPORTANTI:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a\leq 1 \quad (\text{include } a<0) \\ \text{finito} = \frac{1}{a-1} & \text{se } a>1 \end{cases}$$

$$\int_0^{1} \frac{1}{x^a}\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } a\geq 1 \\ \text{finito} = \frac{1}{1-a} & \text{se } a<1 \quad (\text{include } a<0) \end{cases}$$

si conoscono le primitive esplicite

Prob. Determinare il comportamento dell'integrale improprio senza conoscere la primitiva

(*) ($\int_a^b f(x)\,dx$ improprio semplice in b, $f:[a,b)\to\mathbb{R}$ continua

NOTAZIONE (a uso interno):

$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_c^d g(x)\,dx \to$ stesso comportamento $\begin{bmatrix} \text{finito} / \text{finito} \\ +\infty / +\infty \\ -\infty / -\infty \end{bmatrix}$

Fatti elementari rilevanti (sempre nell'ipotesi (*))

① $\int_a^b f(x)\,dx \overset{\text{imp. sempl.}}{\approx} \int_{a'}^b f(x)\,dx$ es $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \approx \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx \not\approx \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$

se $a < a' < b$; $f: [a, b) \to \mathbb{R}$ continua

Dim.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

numeri finiti $\Rightarrow$ non cambiano il comportamento

$$\int_{a'}^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_{a'}^b = \underbrace{\lim_{x \to b^-} F(x)}_{= F(b^-)} - F(a')$$

□

② $$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \begin{cases} +\infty & \text{se } \lim_{x \to +\infty} f(x) > 0 \\ -\infty & \text{se } \lim_{x \to +\infty} f(x) < 0 \end{cases}}$$

? negli altri casi

Dim. per $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L > 0$ allora dalla def. di limite

$\exists\, a'$ t.c. $f(x) \geq L/2$ per $x \geq a'$ — la funzione è definitivamente maggiore di $L/2$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\uparrow}{\approx} \int_{a'}^{+\infty} f(x)\,dx \underset{\uparrow}{\geq} \int_{a'}^{+\infty} L/2\,dx = \Big| \frac{L}{2} x \Big|_{a'}^{+\infty} = +\infty$$

Fatto 1

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \geq \int_{a'}^{b'} L/2\,dx = \Big| \frac{L}{2} x \Big|_{a'}^{b'} \xrightarrow{b' \to +\infty} +\infty$$

$\Rightarrow \int_{a'}^{b'} f(x)\,dx$ tende a $+\infty$ per confronto

□

ESERCIZIO:

Far vedere che se $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ tutti i comportamenti sono possibili

$$\int_3^{+\infty} \frac{\sin(\log x)}{x}\,dx \quad \text{NE}$$

③ Se $f \geq 0$ in un intorno (SINISTRO) di b, allora

$$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases}$$ (sono esclusi i casi $-\infty$ e non esiste)

$f \leq 0$ in un intorno di b $\Rightarrow$ $$\int_a^b f(x)\,dx = \begin{cases} \text{finito} \\ -\infty \end{cases}$$

Dim. $f \geq 0$ in un intorno di $b \Rightarrow \exists\, a' \mid f(x) \geq 0$ per $x \geq a' \wedge x < b$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big| F(x) \Big|_a^b = \lim_{x \to b^-} F(x) - F(a)$$

esiste ($+\infty$ o finito) perché F è crescente (ha derivata f positiva)

④ CRITERIO DEL CONFRONTO

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ continue t.c.

- $f(x) \geq g(x) \geq 0$ in un intorno sinistro di b

$\hookrightarrow$ ($\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ esistono finiti o $= a + \infty$)

Allora:

(i) $\underbrace{\int_a^b f(x)\,dx < +\infty}_{\text{converge}} \Rightarrow \underbrace{\int_a^b g(x)\,dx < +\infty}_{\text{converge}}$

(ii) $\int_a^b g(x)\,dx = +\infty \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx = +\infty$

stessa cosa

ESEMPIO

- $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4+2x+1}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4}\,dx < +\infty$

- $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^6+3}\,dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6+3}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^6}\,dx < +\infty$

Dim. (i) Prendo a' t.c. $f(x) \geq g(x) \geq 0$ per $a' \leq x < b$

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,dx \geq \int_{a'}^{b'} g(x)\,dx$$

$\downarrow b' \to b^-$ $\downarrow b' \to b^-$

$$\int_{a'}^{b} f(x)\,dx \geq \int_{a'}^{b} g(x)\,dx \approx \int_{a}^{b} g(x)\,dx$$

$\approx$

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

$\square$

ACHTUNG!
le prendo positive quindi non possono non esistere

⑤ CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO

$f, g : [a,b) \to \mathbb{R}$ continue t.c.

- $f, g \geq 0$ in un intorno sx di b
- $g(x) = O(f(x))$ per $x \to b$ $\to$ di verifica più facile rispetto a $f(x) \geq g(x)$

allora valgono le stesse conclusioni del punto 4

Dim $g(x) = O(f(x))$ per $x \to b^-$ significa che

$\exists a' \, \exists M > 0 \mid$ per $a' \leq x < b$ vale $|g(x)| \leq M|f(x)|$

Posso supporre $f, g \geq 0$ da a' in poi (potrebbe essere un indice diverso ma basta prendere il max)

$\Rightarrow 0 \leq g(x) \leq M f(x)$

$$\int_{a'}^{b} g(x)\,dx \leq M \int_{a'}^{b} f(x)\,dx \approx \int_{a'}^{b} f(x)\,dx \approx \int_{a}^{b} f(x)\,dx$$

$\approx$

$$\int_a^b g(x)\,dx$$

6 CRITERIO DEL CONFRONTO ASINTOTICO FORTE

$f,g : [a,b) \to \mathbb{R}$ continue
- $f \geq 0$ in un intorno sx di b
- $g(x) \sim \mu f(x)$ per $x \to b^-$ con $\mu > 0$

Allora $g(x) \geq 0$ in un intorno sx di b e

$$\int_a^b f(x)\,dx \Leftrightarrow \int_a^b g(x)\,dx$$

__Dim.__ per ipotesi $\frac{g(x)}{\mu f(x)} \xrightarrow[x\to b^-]{} 1 \Rightarrow \frac{g(x)}{f(x)} \to \mu \Rightarrow g(x) = O(f(x))$

$$\Downarrow$$

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{1}{\mu} \Rightarrow f(x) = O(g(x))$$

Basta applicare il criterio 5 (scambiando se necessario f e g)

ESEMPI:

- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{e^x + x^2}\,dx \approx \left(\frac{1}{e^x+x^2} \sim \frac{1}{e^x} \text{ per } x \to +\infty\right)$

$$\approx \int_2^{+\infty} e^{-x}\,dx = e^{-2} < +\infty$$

- $\int_1^{+\infty} 1/2^x\,dx \qquad 2^x \gg x^2$ per $x \to +\infty \Rightarrow \frac{1}{x^2} \gg \frac{1}{2^x}$

↳ finito per confronto asintotico con $\int_1^{\infty} 1/x^2\,dx$

$\log x \ll x^a$ per $a > 0$

$\frac{1}{\log x} \gg \frac{1}{x^a}$ per $a > 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{\log x} \gg \frac{1}{x}$

per confronto asintotico con $\int_2^{+\infty} 1/x\,dx = +\infty$

$$\int_2^{+\infty} 1/\log x\,dx = +\infty$$

H/W

- $\int_0^1 \frac{\log x}{x}\,dx$ $\quad -\infty$
- $\int_1^{+\infty} \frac{\log x}{x^2+1}\,dx$ $\quad < +\infty$
- $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^3}\,dx < +\infty$

↳ si trova facilmente una primitiva esplicita

- $\int_2^{+\infty} \frac{\log x}{x+1}\,dx$ $\quad +\infty$

7 CRITERIO DI CONVERGENZA ASSOLUTA

$f : [a,b) \to \mathbb{R}$ continua t.c. $\int_a^b |f(x)|\,dx < +\infty$ (converge)

allora $\int_a^b f(x)\,dx$ esiste ed è finito

Dim.

NOTAZIONE $a \in \mathbb{R}$

$$a^+ = \begin{cases} a & \text{se } a \geq 0 \\ 0 & \text{se } a < 0 \end{cases} \qquad a^- = \begin{cases} -a & \text{se } a \leq 0 \\ 0 & \text{se } a > 0 \end{cases}$$

parte positiva

$a^+, a^- \geq 0$

$|a| = a^+ + a^-$, $a = a^+ - a^-$

ES $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+1} dx$

$$\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x^2+1} dx \leq \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx < +\infty$$

Funzioni positive

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f^+(x) - f^-(x)\,dx = \int_a^b f^+(x)\,dx - \int_a^b f^-(x)\,dx \Rightarrow < +\infty$$

Finito per confronto con $\int_a^b |f(x)|\,dx$ — Finito per confronto con $\int_a^b |f(x)|\,dx$

ho scritto il lim della differenza come differenza di lim. LEGITTIMO SE SONO FINITI ✓

ESERCIZI SU INTEGRALI IMPROPRI

02/05/2024

- $\int_0^2 \frac{\sin x}{x^5+x^3+x^2} dx \approx \int_0^1 \frac{1}{x} dx = +\infty$

  improprio in 0

  per $x \to 0^+$ $\sin x \sim x$

  $x^5 \ll x^2$, $x^3 \ll x^2$

  $$\frac{\sin x}{x^5+x^3+x^2} \sim \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$$

- $\int_4^{+\infty} \frac{x^6+\log x}{x^{10}+x} \approx \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^4} dx < +\infty$

  $x^6 + \log x \sim x^6$

  $x^{10} + x \sim x^{10}$

- $\int_0^{+\infty} \frac{x^5+1}{e^x+x^2} dx$

  $x^5+1 \sim x^5$

  $e^x \gg x^a \quad \forall a$

  $e^x + x^2 \gg x^a$ $\qquad \frac{1}{e^x+x^2} \ll \frac{1}{x^a} \quad \forall a$

  $\frac{x^5+1}{e^x+x^2} \ll \frac{1}{x^{a-5}}$ l'integrale si comporta deh al più come questo

  Per $a = 15$ $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{10}} < +\infty \Rightarrow \int_0^{+\infty} \frac{x^5+1}{e^x+x^2} dx < +\infty$

• $\int_1^2 \frac{1}{\log x}\,dx \underset{\substack{x-1=t\\ dx=dt\\ x=t+1}}{=} \int_0^1 \frac{1}{\log(t+1)}\,dt \approx \int_0^1 \frac{1}{t}\,dt = +\infty$

con un cambio di variabile sposto il punto in cui è improprio in 0

• $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos x}}\,dx \underset{\substack{x=t+\frac{\pi}{2}\\ dx=dt}}{=} \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{\cos(t+\frac{\pi}{2})}}\,dt = \int_{-\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{-\sin t}}\,dt =$

$\cos(t+\frac{\pi}{2}) = -\sin t$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin t}}\,dt \approx \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt < +\infty$

$-\sin t = \sin(-t)$

$-t = y$

$dt = -dy$

$-\int_{\pi/2}^{0} \frac{1}{\sqrt{\sin y}}\,dy$

• $\int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx$; $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x\log x}\,dx$; $\int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx$; $\int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2\log x}\,dx$

(i) (ii) (iii) (iv)

(i) $\log x \geq 1 \quad \forall x \in [e, +\infty]$

$\frac{\log x}{x} \geq \frac{1}{x}$

Per confronto $\int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x}\,dx = +\infty$

(iv) $x^2 \log x \gg x^2$

$\frac{1}{x^2\log x} \ll \frac{1}{x^2}$

$\Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{1}{x^2\log x}\,dx < +\infty$

(iii) $\log x \ll x^a \quad \forall a$

$\frac{\log x}{x^2} \ll x^{a-2} = \frac{1}{x^{2-a}}$

Scegliendo $a = 1/2$

$\frac{\log x}{x^2} \ll \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{\log x}{x^2}\,dx < +\infty$

(ii)

$x\log x \gg x \qquad x \to +\infty$

$$\frac{1}{x\log x} \ll \frac{1}{x}$$

↳ diverge, informazione inutile

$$\frac{1}{x^{1+a}} \ll \frac{1}{x\log x} \ll \frac{1}{x}$$

Cambio di variabile:

$\log x = y$

$\frac{1}{x}dx = dy$

$$= \int_1^{+\infty} \frac{1}{y}\,dy = +\infty$$

- $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^a(\log x)^b}\,dx$

$a>1,\ \forall b$ converge

$a<1,\ \forall b$ diverge

$a=1,\ b>1$

$a=1,\ b<1$

$a=1,\ b=1$

↑

da Dimostrare

- $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 1,\ \sqrt{x}\leq y\leq\sqrt{x+1}\}$

$|A|$ è finita?

<u>OSS</u> $\sqrt{x+1} > \sqrt{x} \quad \forall x\geq 1$

$$|A| = \int_1^{+\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,dx$$

(se li spezzo ottengo $+\infty-\infty$)

Per $x\to+\infty \qquad \sqrt{x+1}\sim\sqrt{x}$

$$f(x) = \sqrt{x+1}-\sqrt{x} = \sqrt{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}-\sqrt{x} = \sqrt{x}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{1/2}-1\right] =$$

$$= \sqrt{x}\left[\cancel{1}+\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\cancel{-1}\right] = \frac{1}{2\sqrt{x}}+o\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$\int_1^{+\infty}\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\,dx \approx \int_1^{+\infty}\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = +\infty$$

Sia $a > 0$

$$B = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 3, \ x^{3/2} \leq y \leq f(x) \}$$

con $f(x) = \dfrac{(x^3+1)^{a+1/2}}{(x^3-1)^a}$

Per quali $a > 0$ l'area di B è finita

INTEGRALI IMPROPRI NON SEMPLICI

Def. Sia $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a<b$

Dico che $\int_a^b f(x)dx$ è improprio se $\exists\, a_0,\dots,a_n$ con $n \in \mathbb{N}$ t.c. $a=a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ e $\forall i = 1,\dots,n$ $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$ è <u>improprio semplice</u>

In particolare $\int_a^b f(x)dx$ <u>esiste se tutti gli $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$ esistono e tra i loro valori non compare sia $+\infty$ che $-\infty$</u>

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{n} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,dx$$

ES.

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}dx = +\infty$$

integrale improprio in $x=0$

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x}dx = \int_{-1}^{0}\frac{1}{x}dx + \int_0^1 \frac{1}{x}dx \qquad \text{NON ESISTE}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\log x}dx = \int_0^{1/2}\frac{1}{\log x}dx + \underbrace{\int_{1/2}^{1}\frac{1}{\log x}dx}_{\substack{\downarrow \\ -\infty \\ \text{(per simmetria)}}} + \underbrace{\int_1^2\frac{1}{\log x}dx}_{\substack{\downarrow \\ +\infty \\ \text{(visto prima)}}} + \int_2^{+\infty}\frac{1}{\log x}dx$$

$\Rightarrow$ NON ESISTE

03/05/2024

- $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^2}dx < +\infty \longrightarrow \int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|dx \le \int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx < +\infty$
- $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x^2}dx < +\infty$ stesse argomentazioni
- $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}dx$

$c \in \mathbb{R}$

$$\int_1^c \frac{\sin x}{x}dx = -\int_1^c -\frac{1}{x^2}(-\cos x)\,dx - \frac{\cos x}{x}\Big|_1^c =$$

$$= \int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx - \underbrace{\frac{\cos x}{x}\Big|_1^c}$$

$$= -\frac{\cos c}{c} + \cos 1$$

$$\lim_{c\to+\infty}\int_1^c \frac{\sin x}{x}dx = \lim_{c\to+\infty} -\int_1^c \frac{\cos x}{x^2}dx - \frac{\cos c}{c} + \cos 1 < +\infty$$

l'integrale di partenza converge

H/W :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^a}\,dx \qquad \int_1^{+\infty} \sin x^2\,dx$$

① $\left(\begin{array}{l} x^2 = y \\ 2x\,dx = dy \end{array}\right.$ metodo Pluda

② $\sin x^2 \cdot 1$ per parti metodo Alberti

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \qquad |\sin x| \geq \sin^2 x \quad \forall x \in [1, +\infty)$$

$$\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx \geq \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,dx$$

$$\sin^2 x = \frac{-\cos(2x)+1}{2}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x} - \frac{\cos(2x)}{2x}\,dx =$$

$$\| $$

$$+\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int_2^{+\infty} -\frac{\sin t}{t^2}\,dt + \frac{1}{2}\left[\frac{\sin t}{t}\right]_2^{+\infty} \to \text{converge}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = +\infty$$

ESERCIZI A METÀ TRA PRIMA E SECONDA PARTE

$a > 0$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}}\,dx$$ Achtung! Integranda NON positiva

↳ improprio in 0

$\sin x \sim x$ per $x \to 0$

$(\sin x)^a \sim x^a$ per $x \to 0$

$\boxed{a > 3/2}$ $\quad f(x) \sim \frac{1}{x^a}$

$$\frac{1}{(\sin x)^a} \gg \frac{1}{x^{3/2}} \Rightarrow \frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}} \sim \frac{1}{x^a}$$

per confronto asintotico con $\int_0^{\pi/2} \frac{1}{x^a}\,dx \quad a > \frac{3}{2} > 1$

diverge a $+\infty$

$\boxed{a < 3/2}$ $\qquad x^a \gg x^{3/2} \quad x \to 0$

$\qquad \frac{1}{x^a} \ll \frac{1}{x^{3/2}} \quad x \to 0$

$\frac{1}{x^a} - \frac{1}{x^{3/2}} \sim -\frac{1}{x^{3/2}} \quad x \to 0$

$(\sin x)^a \sim x^a$

$\frac{1}{(\sin x)^a} \sim x^a$

$\frac{1}{(\sin x)^a} - \frac{1}{x^{3/2}} \sim -\frac{1}{x^{3/2}}$ per $x \to 0$ e per confronto tende a $-\infty$

$\boxed{a = 3/2}$

$\frac{1}{(\sin x)^{3/2}} - \frac{1}{x^{3/2}} = *$

$(\sin x)^{3/2} = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^{3/2} = \left(x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)\right)^{3/2} =$

$x^{3/2}\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^{3/2} = x^{3/2}\left(1 - \frac{1}{4}x^2 + o(x^4)\right)$

$* = \frac{1}{x^{3/2}(1 - 1/4\, x^2 + o(x^4))} - \frac{1}{x^{3/2}} =$

$= \frac{1}{x^{3/2}}\left(\frac{1/4\, x^2 + o(x^4)}{1 - x^2/4 + o(x^4)}\right) \sim \frac{1}{4} \cdot \frac{x^2}{x^{3/2}} \sim \frac{\sqrt{x}}{4}$

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\log x} - 1}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{e^{\log^2 x} - 1}\, dx$

$x^{\log x} = e^{\log^2 x} \qquad e^{\log^2 x} - 1 > 0 \quad \forall x > 1$

improprio sia in 1 che a $+\infty$ (e non altrove)

$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\log x} - 1}\, dx = \int_1^2 \frac{1}{x^{\log x} - 1}\, dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^{\log x} - 1}\, dx$

Se uno dei due fa $+\infty$ ho finito

Provo il primo:

$x = t + 1$

$dx = dt$

$x = 1 \quad t = 0$
$x = 2 \quad t = 1$ $\Rightarrow \int_0^1 \frac{dt}{e^{(\log(t+1))^2} - 1}$

$e^y - 1 \sim y \quad y \to 0$

$e^{(\log(t+1))^2} - 1 \sim t^2 \quad t \to 0$

LEVEL HARD

alternativa: facciamo tutti i conti

$e^{(\log(t+1))^2} - 1 = e^{(t + o(t^2))^2} - 1 = e^{t^2 + o(t^3)} - 1 =$

$= \cancel{1} + t^2 + o(t^3) - \cancel{1} = t^2 + o(t^3)$

Per confronto asintotico con $\int_0^1 \frac{dt}{t^2}$ ottengo che $\int_1^2 \frac{1}{e^{(\log x)^2}-1}\,dx$ fa $+\infty$ $\Rightarrow$ anche quello di partenza fa $+\infty$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(\exp(x^a)-1)^{a+2}}\,dx \quad (a>0) = \int_0^1 \frac{dx}{(\exp(x^a)-1)^{a+2}} + \int_1^{+\infty} \text{''}\,dx$$

improprio sia in 0 che a $+\infty$

$e^{x^a}-1 \sim x^a$ se $x \to 0$

$(e^{x^a}-1)^{a+2} \sim x^{a^2+2a}$ $\qquad \sim \int_0^1 \frac{1}{x^{a^2+2a}}\,dx$

$a^2+2a \geq 1$

$a^2+2a-1 \geq 0$

$(a+1+\sqrt{2})(a+1-\sqrt{2}) \geq 0 \quad \overset{a>0}{\Rightarrow}$ se $a \geq \sqrt{2}-1$ l'integrale diverge

se $a < \sqrt{2}-1$ l'integrale converge

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\exp(x^a)-1}\,dx$$

$\exp(x^a)-1 \gg x^{100} \rightarrow \frac{1}{\exp(x^a)-1} \ll \frac{1}{x^{100}} \Rightarrow$ per confronto converge ($\forall a>0$)

In conclusione l'integrale si comporta sempre come il primo pezzo

SERIE

Def. Sia (a_n) una succ. di addendi in $\mathbb{R}$

Chiamo $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ somma parziale

Chiamiamo SERIE $\boxed{\lim_{N\to+\infty} S_N}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n = \lim_{N\to+\infty} S_N$$

Essendo un limite può avere tutti i comportamenti possibili

<u>OSS</u> Se la serie è a TERMINI POSITIVI ($a_n \geq 0 \ \forall n$) allora può solo convergere o divergere a $+\infty$

ESEMPIO serie geometrica

Sia $x \in \mathbb{R}$

chiamiamo serie geometrica $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{se } x \geq 1 \\ \frac{1}{1-x} & \text{se } -1 < x < 1 \\ \text{NON ESISTE} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$$

$x \neq 1 \quad N \in \mathbb{N}$

$$(1 + x + \dots + x^{N-1})(1-x) = 1 + \cancel{x} + \dots + \cancel{x^{N-1}} - \cancel{x} - \cancel{x^2} - \dots - \cancel{x^{N-1}} - x^N = 1 - x^N$$

$$(1 + \dots + x^{N-1}) = \frac{1-x^N}{1-x} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \;\text{"}x^n\text{"}$$

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=0}^{N} \boxed{\frac{1-x^N}{1-x}} = \begin{cases} \frac{1}{1-x} & \text{se } x \in (-1,1) \\ \text{NE} & \text{se } x \leq -1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$x = 1$ va fatto separatamente

06/05/2024

Prop. di base delle serie

OSS. ① Se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge a un numero finito allora

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$$

↳ condizione necessaria e non sufficiente per la convergenza della serie

ES. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ ma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ diverge

Dim $S_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \qquad S_{n-1} = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

per ip. la serie converge a un num. finito

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} S_n - S_{n-1} = 0$$

$\ell - \ell$

□

OSS. ② $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$

hanno lo stesso comporta= mento

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \approx \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{2^n}$$ → entrambe convergono, ma non allo stesso valore

Inoltre abbiamo che:

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$ se $a_n = b_n$ tranne un numero finito di termini

Dim. $$\sum_{n=0}^{N} a_n = \sum_{n=0}^{n_0} a_n + \sum_{n=n_0}^{N} a_n$$

questo pezzo non dipende da N

$N \to +\infty$

$\exists\, n_1 > 0 \mid \forall n > n_1 \Rightarrow a_n = b_n$ — da un certo indice in poi sono definitivamente uguali

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_1}^{\infty} a_n = \sum_{n=n_1}^{\infty} b_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

$\square$

OSS

③ Se $a_n \geq 0$ definitivamente ($\exists\, n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$ vale che $a_n \geq 0$)
allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ esiste e ha solo due possibili comportamenti:

- converge a un numero (positivo o negativo)
- diverge a $+\infty$

La successione in cui
$a_0 = -10$
$a_n = \frac{1}{2^n}$ $n \geq 1$
è definitivamente positiva ma converge a -9

$\Rightarrow$ può convergere anche a un numero negativo

Dim. $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n$ ↳ ha tutti termini positivi

$S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n \Rightarrow$ crescente $\Rightarrow$ ammette limite

$\lim_{N\to\infty} S_n = \sup\{S_N \mid N \geq n_0\}$ $\begin{cases} \ell \in \mathbb{R} \\ +\infty \end{cases}$

sup delle somme parziali

$\square$

RELAZIONE TRA SERIE E INTEGRALI IMPROPRI

Teorema del confronto tra serie e integrali

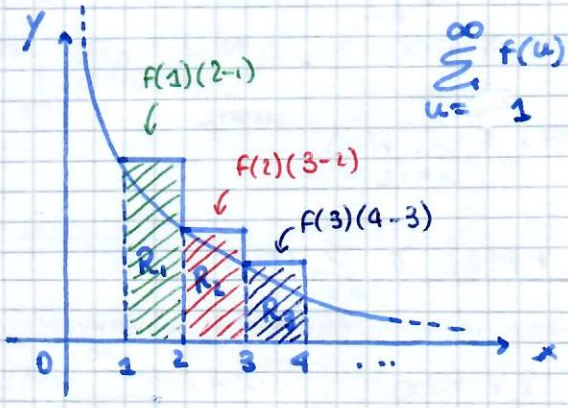
$f: [1, +\infty) \to \mathbb{R}$, positiva, decrescente e continua (definitivamente)

Allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$, $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ esistono

La serie è compresa tra il valore dell'integrale e il valore dell'integrale $+ f(1)$

* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx < \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1)$
* $\int_1^{\infty} f(x)\,dx \approx \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ (valgono entrambi $+\infty$ o un valore reale)

IDEA:



$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots =$

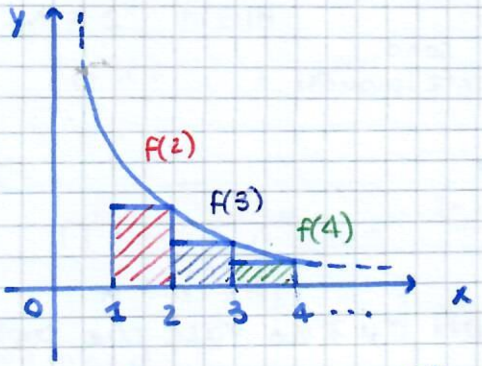
$= f(1)(2-1) + f(2)(3-2) + \ldots =$

$= \sum area(R_i)$

dove gli R_i sono rettangoli di base 1 e altezza $f(i)$

Vedo dal disegno che l'area del sottografico è minore della somma delle aree dei rettangoli.

$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) = f(2) + f(3) + \ldots$



$= f(2)(2-1) + f(3)(3-2) + \dots$

$\Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx + f(1)$$

Versione precisa:

Dim.

$f: [1,N] \to \mathbb{R}$

$\forall \sigma$ partizione di $[1,N]$

vale

$S'(f,\sigma) \leq \int_1^N f(x)\,dx \leq S''(f,\sigma)$

In particolare come partizione di $[1, N+1]$ prendo $\sigma = \{1, 2, \dots, N+1\}$
(partizione equispaziata con $\delta = 1$)

$$S''(f,\sigma) = \sum_{n=1}^{N} f(n) = \sum_{n=1}^{N} \sup_{n \leq x \leq n+1} f(x)\,((n+1)-n)$$

$$\int_1^{N+1} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{N} f(n)$$

passo al limite per $N \to +\infty$ $\to \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$
(abbiamo ottenuto la prima parte della disuguaglianza)

$f: [1,N] \to \mathbb{R}$

$$\sum_{n=2}^{N} \inf_{n-1 \leq x \leq n} f(x)\,(n-(n-1)) = \sum_{n=2}^{N} f(n) = S'(f,\sigma) \leq \int_1^N f(x)\,dx$$

Passo al limite per $N \to +\infty$ $\quad \sum_{n=2}^{N} (f(n)) \leq \int_1^N f(x)\,dx$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \geq \sum_{n=2}^{\infty} f(n)$$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1) \geq \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

mettendo insieme questa e la precedente: $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = \ell \in \mathbb{R}$ $\quad \ell < +\infty$

la serie $\exists$ perché è a termini positivi

poiché vale $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) < +\infty$

si ha $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx < +\infty$

$\Downarrow$

devo far vedere che esiste anche l'integrale

- Se $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) = +\infty$ allora $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty$

poiché $\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$

ES. $\sum_{n=1}^{\infty} \sin(\pi n) = 0$ $\qquad$ $\sum_{n=1}^{\infty} |\sin(\pi n)| = 0$

$\int_1^{+\infty} \sin(\pi x)\,dx$ N.E. $\qquad$ $\int_1^{+\infty} |\sin(\pi x)|\,dx = +\infty$

↳ questo mostra che serve l'ipotesi $f(x)$ positiva e decrescente

SERIE ARMONICA GENERALIZZATA

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a} = \begin{cases} +\infty & \text{se } a \leq 1 \\ \text{finito} & \text{se } a > 1 \end{cases} \qquad \int_1^{\infty} \frac{1}{x^a}\,dx$$

TEOREMA DEL CONFRONTO

Se $0 \leq a_n \leq b_n$ definitivamente, allora

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n \quad \text{inoltre se } \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = +\infty$$

se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$

Dim. Per ipotesi $\exists n_0 > 0$ t.c. $\forall n \geq n_0$ vale $0 \leq a_n \leq b_n$

Passo al limite $N \to +\infty$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$$

$\square$

Proprietà: $b_n \geq 0$ $\forall n$, $M > 0$, $M \in \mathbb{R}$ (forse non serve $b_n \geq 0$)

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \approx \sum_{n=0}^{\infty} M b_n$

TEOREMA DEL CONFRONTO ASINTOTICO DEBOLE

Se $\exists n_0$ t.c. $\forall n > n_0$ $a_n \geq 0, b_n \geq 0$

e inoltre $a_n = O(b_n)$ per $n \to +\infty$

allora se $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < +\infty$

se $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = +\infty \Rightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = +\infty$

[IDENTICI A QUELLI PER GLI INTEGRALI IMPROPRI

Dim. $a_n = O(b_n)$ $n \to +\infty$

significa che $\exists n_1 > 0$, $\exists M > 0$ t.c.

$|a_n| \leq M |b_n|$ $\forall n \geq n_1$

$a_n \leq M b_n$ $\forall n \geq \max\{n_1, n_0\} = n_2$

Per il confronto ottengo la tesi per

$\sum_{n=n_2}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=n_2}^{\infty} M b_n$ inoltre $\sum_{n=n_2}^{\infty} M b_n \approx \sum_{n=n_2}^{\infty} b_n$

TEO. DEL CONFRONTO ASINTOTICO FORTE

Se $\exists\, n_0 > 0$ t.c. $\forall n \geq n_0$, vale $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ e inoltre $M > 0$ e $a_n \sim M b_n$ per $n \to +\infty$, allora $\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \approx \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$

Dim. Osservo che abbiamo $a_n \sim M b_n$ ma anche $b_n \sim \frac{1}{M} a_n$ per $n \to +\infty$

$\Rightarrow$ vale $a_n = O(b_n)$ e $b_n = O(a_n)$

Concludo con il teo. del confronto asintotico debole applicato due volte

07/05/2024

Ex: comportamento di $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge, per $a > 1$

confronto asintotico $\frac{1}{n(n+1)} \sim \frac{1}{n^2}$ $n \to +\infty$

si comporta come $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}\, dx$

(SERIE ARMONICA GENERALIZZATA)

Ex: Calcolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$

$= \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{3}} - \frac{1}{4}\right) + \dots$

Versione precisa:

$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \left(1 - \cancel{\frac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\frac{1}{2}} - \cancel{\frac{1}{3}}\right) + \dots + \left(\cancel{\frac{1}{N}} - \frac{1}{N+1}\right) =$

$= 1 - \frac{1}{N+1}$ $\qquad \lim_{N \to +\infty} 1 - \frac{1}{N+1} = 1$

Caso particolare del seguente fatto generale:

Sia (a_n) succ. t.c. $\exists (A_n)$ t.c. della forma $a_n = A_n - A_{n+1}$ con formula esplicita

Allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A_1 - \lim_{N \to +\infty} A_n$

Dim $S_N = a_1 + a_2 + \dots + a_N = (A_1 - \cancel{A_2}) + (\cancel{A_2} - A_3) + \dots + (\cancel{A_N} - A_{N+1})$

$\lim_{N \to \infty} S_N = \lim_{N \to +\infty} A_1 - A_{N+1} = A_1 + \lim_{N \to +\infty} A_N$

$\boxed{\text{SERIE TELESCOPICHE}}$

COMMENTO: $a_n = \underbrace{(-A_{n+1}) - (A_n)}_{\text{"primitiva"}}$ → posso vederlo come una sorta di rapporto incrementale

(?)

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ → "integrale" → pari a val. iniziale - val. finale

DETERMINARE IL COMPORTAMENTO DELLE SEGUENTI SERIE

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-30}{n^4-2n+3}$ Il denominatore non si annulla per gli n interi considerati

$\Big\downarrow$ confronto asintotico

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-30}{n^4-2n+3} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \text{converge}$$

Ma è necessario che sia definitivamente positiva, ma lo è perché lo è $\frac{1}{n^2}$

$\frac{1}{n^2}$ def. positiva $\Rightarrow \frac{n^2-30}{n^4-2n+3}$ def. positiva (perché sono asintoticamente equivalenti)

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n-3}{n}$ $\qquad \frac{\log n-3}{n} \sim \frac{\log n}{n} \gg \frac{1}{n} \to$ diverge

definitivamente positiva ($n > e^3$)

Per confronto asintotico debole $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log n-3}{n}$ diverge

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^a-6}{2^n-25}$ $\quad a \in \mathbb{R}$

ben definita $\forall n \geq 1$ e definitivamente positiva, poiché $\sim \frac{n^a}{2^n}$ se $a>0$

$$a_n \sim \frac{n^a}{2^n} \ll \frac{n^a}{n^b} = n^{a-b} = \frac{1}{n^{b-a}} \quad \text{converge se } b > a+1$$

$\forall b$

Allora la serie iniziale converge per confronto asintotico ad esempio con $\frac{1}{n^2}$ $(b = a+2)$

se $a=0$

$$\frac{n^a-6}{2^n-25} \sim \frac{-5}{2^n} \Rightarrow \text{converge (ad esempio per confronto asintotico con la serie geom.)}$$

$a<0$

$$\frac{n^a-6}{2^n-25} \sim \frac{-6}{2^n}$$

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{1-2^n} = -\infty$ (come serie)

$\Big\downarrow n \to +\infty$

-1 (come successione)

• $\sum_{n=1}^{\infty} \left[1-\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)\right]$

- se $\underline{a>0} \Rightarrow a_n \longrightarrow 0$

$\cos\left(\frac{1}{n^a}\right)$

$x = \frac{1}{n^a}$ se $n \to +\infty$, $x \to 0$

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3) = 1 - \frac{1}{2n^{2a}} + o\left(\frac{1}{n^{6a}}\right)$

$1-\cos\left(\frac{1}{n^a}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^{2a}}$

allora la serie converge se e solo se $a > \frac{1}{2}$

- se $\underline{a \leq 0}$ $\quad a=0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 1-\cos 1 = +\infty$

$a<0$

Va dimostrato che $\lim_{n\to+\infty} \cos(n^b)$ non esiste (come?)
$b>0$

Prop. CRITERIO DELLA CONVERGENZA ASSOLUTA

Sia $(a_n) \subset \mathbb{R}$ t.c. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$ → sarebbe sbagliato scrivere $\sum a_n < +\infty$

allora $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge a un numero finito

così potrebbe non esistere invece esiste sempre!

(Una serie così si dice assolutamente convergente)

Dim. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^+ - a_n^-) \overset{?}{=} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ - \sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$

posso spettarlo se non sono in un caso $+\infty - \infty$

convergono per confronto con $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$

$(0 \leq a_n^+, a_n^- \leq |a_n|)$

ES. • $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ converge assolutamente $\Rightarrow$ converge

$\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n^2+1}\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge

• $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n^3+2}$ converge assolutamente

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\operatorname{sen} n|}{n^3+2} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^3+2} \approx \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ converge

confronto asintotico forte

- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ non converge assolutamente $\Rightarrow$ non so cosa fa la serie

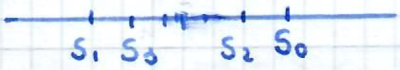
Prop. CRITERIO DI LEIBNIZ

$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$, a_n decrescente, $a_n \to 0$ (definitivamente)

allora la serie converge

(Per cui in particolare $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge)

Dim.



Si avvicinano sempre di più. La distanza tende a 0?

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{\pm a_{n+1}} = S_{n+1} - S_n$$

Versione precisa:

PASSO 1: $S_0 \geq S_2 \geq S_4 \geq \dots$

(la succ. S_{2n} è decrescente) $\Rightarrow S_{2n} \to \underset{\text{limite}}{S_p} \in [-\infty, +\infty)$

PASSO 2: $S_1 \leq S_3 \leq S_5 \leq \dots$

(la succ. S_{2n+1} è crescente)

$\Rightarrow S_{2n+1} \to S_d \in (-\infty, +\infty]$

PASSO 3:

$S_d - S_p = 0 \Rightarrow S_p = S_d \in \mathbb{R}$

① $\forall n \quad S_{2n+2} \leq S_{2n}$

infatti $S_{2n+2} = S_{2n} + (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} =$

$$= S_{2n} - \underbrace{(a_{2n+1} - a_{2n+2})}_{\geq 0} \Rightarrow S_{2n+2} \leq S_{2n}$$

perché la succ. è decrescente

② Analogo al PASSO 1

③ $S_d - S_p = \lim_{n \to +\infty} S_{2n+1} - S_{2n} = \lim_{n \to +\infty} (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -\lim_{n \to \infty} a_{2n+1} = 0$

lecito se non sono $-\infty + \infty$

□

È necessaria l'ipotesi a_n decrescente?

Sì! Trovare un controesempio $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{(-1)^n + 1}{n}}$ $= +\infty$

positiva
tende a 0
non decrescente

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

$\downarrow$

$\to 0$
non decrescente

E mostra anche che il <u>criterio del confronto asintotico richiede segno definitivamente costante</u>

$$a_n \approx \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \quad \text{ma} \quad \sum a_n \not\approx \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

EX. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ converge assolutamente per $a > 1$

converge NON assolutamente per $0 < a \leq 1$

per Leibniz

$a = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ non esiste

$a < 0$ sappiamo che non può convergere a un numero finito (non tende a 0)

- $+\infty$
- $-\infty$
- NON ESISTE ← H/W

EX. Sia (a_n), $a_n > 0$, a_n crescente

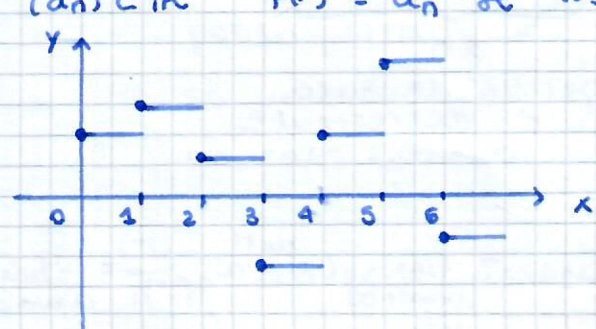
Allora $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ non esiste H/W

EX. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n}$ → cambia segno ma non con regolarità

difficile

(converge) → legata alla convergenza della funzione Zeta di Riemann

EX. $(a_n) \subset \mathbb{R}$ $\quad f(x) = a_n$ se $n \leq x < n+1$



DIMOSTRARE che $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \int_0^{\infty} f(x)\,dx$

In effetti $S_n = \int_0^n f(x)\,dx$ (bisogna far vedere che il limite con $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$ sono uguali)

Punto di vista qua^{nti}tativo 10/05/2024

STIME sulle CODE di una SERIE

? Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \ell$ con $\ell \in \mathbb{R}$,

Se la serie converge la succ. tende a 0

e abbiamo un margine di errore $\varepsilon > 0$ fissato.

Quanto grande devo prendere N in modo che $S_N = \sum_{n=0}^{N} a_n$ stima la serie con errore $< \varepsilon$?

Come scelgo N | $|S_N - \ell| \leq \varepsilon$?

PROP. Sia $\sum_{n=0}^{N} a_n = S_N$. $S \in \mathbb{R}$

Sia $f : [\bar{N}, +\infty) \to \mathbb{R}$ continua, decrescente, positiva t.c. $\forall n \geq \bar{N}$ valga $|a_n| \leq f(n)$

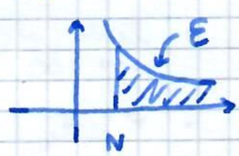
Allora $\forall N \geq \bar{N}$

$$\boxed{|S - S_N| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx}$$

$\sum_{n=0}^{N} a_n$

Applicazione: dato $\varepsilon > 0$ trovo f con le prop. della proposizione e N | $F(N) = \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ sia minore di ε. Allora

$$|S - S_N| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx < \varepsilon$$



Dim. $|S - S_N| = \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n - \sum_{n=0}^{N} a_n \right| =$

$$= \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \qquad \square$$

sottraendo $f(N)$

$$\sum_{n=N}^{\infty} |a_n| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx + f(N)$$

PUNTO CHIAVE:

1) $\left| \sum_{i=1}^{K} a_i \right| \leq \sum_{i=1}^{K} |a_i|$ generalizzazione di $|a+b| \leq |a| + |b|$

↳ vale lo stesso per $K \to \infty$

2) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$

$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx + f(1)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f(n) \leq \int_1^{+\infty} f(x)\,dx \overset{?}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} f(n) \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx$$

Esercizio: trovare N per stimare

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ con errore inferiore a $\varepsilon = 10^{-2}$

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} \right| \underset{\text{vale } =}{\leq} \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \int_N^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \frac{1}{N} \leq 10^{-2}$$

potrebbe essere difficile trovare questa disuguaglianza

$\frac{1}{N} \leq 10^{-2}$

$N \geq 100$

CRITERIO DELLA RADICE

Sia (a_n) una successione di numeri positivi

Supponiamo che esista $\underbrace{\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell}$

Radice n-esima del termine n-esimo

allora (1) Se $\ell < 1$

(di interesse $L \in (\ell, 1)$)

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$
- $\forall L > \ell$, $a_n \ll L^n$ per $n \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n < +\infty$

(2) Se $\ell > 1$

- $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$
- $\forall L \in (0, \ell)$, $L^n \ll a_n$ $n \to +\infty$
- $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$

Dim.

$\ell \in \mathbb{R}$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0, \exists\ n_0 \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq n_0$ vale

$$\ell - \varepsilon \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \ell + \varepsilon \quad (*)$$

$\ell < 1$

Da $(*)$ $\forall L > \ell$

$\forall n \geq n_0$ vale $\sqrt[n]{a_n} \leq L$ ossia $a_n \leq L^n$

Dato $L > \ell$

prendo $\lambda \in (\ell, \min(L, 1))$

$\forall n \geq n_0$, $0 \leq a_n \leq \lambda^n$

Per confronto $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

Per confronto con $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n < +\infty$ anche $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge

$0 \leq \frac{a_n}{L^n} \leq \frac{\lambda^n}{L^n} = \left(\frac{\lambda}{L}\right)^n \to \frac{\lambda}{L} < 1$ per cui $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^n = 0$

$\Rightarrow$ Per confronto $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{L^n} = 0$

$\ell > 1$

Da (*) $\forall L \in (0,\ell)$ vale $L \leq \sqrt[n]{a_n}$ ossia $L^n \leq a_n$
$\forall n \geq n_0$

Dato $L \in (0,\ell)$, prendo $\lambda \in (\max(1,L), \ell)$

$\forall n \geq n_0$, $\lambda^n \leq a_n$

quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow$ la serie diverge $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

per confronto $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$

Inoltre, $0 \leq \frac{L^n}{a_n} \leq \left(\frac{L}{\lambda}\right)^n \to 0$. Per confronto $\lim_{n\to+\infty} \frac{L^n}{\lambda^n} = 0$

(Volendo potevo anche farla simmetrica al primo caso)

$\ell = 1$?

Non posso dire nulla:

ES. $a_n = n^\alpha$

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \exp\left(\frac{\alpha}{n}\log n\right) = 1$$

Se la serie non è a termini positivi (considerando la radice n-esima del modulo)

Allora: (1) tutto uguale ma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

(2) tutto uguale ma

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$$

quindi $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ NON converge a $\ell \in \mathbb{R}$

perché $\lim_{n\to+\infty} |a_n| = +\infty \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0$

Tornando all'enunciato con serie a termini positivi, senza supporre che il limite esista

Chiamo $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$

Dim.

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \iff \forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c. $\forall n \geq n_0$ vale

$L' \leq \sqrt[n]{a_n} \leq L$

$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \quad \sqrt[n]{a_n} \leq L$ definitivamente

$L' \leq \sqrt[n]{a_n}$ frequentemente

La prima metà è uguale, la seconda è più debole:

$\exists n_k$ t.c. $\sqrt[n_k]{a_{n_k}} \to \ell$

$\Rightarrow \forall L' \in (0, \ell) \ \exists k_0 \in \mathbb{N} \ / \ \forall k \geq k_0$

vale $L' \leq \sqrt[n_k]{a_{n_k}}$

$(L')^{n_k} \leq a_{n_k} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} a_n \neq 0$ perché deve esistere (succ a termini positivi) ma non può essere finito

$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$

COSA SUCCEDE SE CI METTO IL LIMINF?! $= \ell$: Posso fare le stesse identiche conclusioni se $\ell > 1$, se $\ell < 1$ non posso dire niente

CRITERIO DEL RAPPORTO

Su (a_n) una successione di numeri strettamente positivi

Supponiamo che esista

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \ell$$

Allora (1) Analoghi
(2) al caso precedente

Per $\ell = 1$ non posso dire nulla: ES: $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} = 1$

Dim. $\ell \in \mathbb{R}$

(1) $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ t.c.

$\forall n \geq n_0$ vale $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - \ell \right| \leq \varepsilon$

$\Rightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \ell + \varepsilon$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L \quad \forall L > \ell$
$1 > L > \ell$

$\forall n \geq n_0, \ a_{n+1} \leq L a_n$

$a_{n+2} \leq L a_{n+1} \leq L \cdot L \cdot a_n = L^2 a_n$

$a_{n+3} \leq L a_{n+2} \leq L^3 a_n$

in generale

$0 \leq a_n \leq L^{n-n_0} a_{n_0}$

Per confronto $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_{n_0} L^{-n_0} L^n = \frac{a_{n_0}}{L^{n_0}} \cdot \sum_{n=n_0}^{\infty} L^n < +\infty$$

per confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n < +\infty$$

$$0 \leq \frac{a_n}{L^n} \leq \frac{a_{n_0} \lambda^{n-n_0}}{L^n} \quad \text{con } \lambda \in (\ell, L)$$

$$\| $$

$$a_{n_0} \lambda^{-n_0} \left(\frac{\lambda}{L}\right)^n \to 0$$

Per confronto $a_n \ll L^n \ \forall L > \ell$

CRITERIO RADICE / RAPPORTO

EX: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{n!}$ → posso usare il criterio del rapporto

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{4^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{4^n} = \frac{4}{n+1} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \implies \text{questa serie converge}$$

EX: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{(n+1)(n^n)}{(n+1)^{n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to \frac{1}{e}$$

$$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e$$

$$\Uparrow$$

$$(1+x)^{1/x} \xrightarrow[x\to 0]{} e \qquad (1+x)^{1/x} = $$

$$= \exp \frac{1}{x} \log(1+x) \to e^1 = e$$

La serie converge per il criterio del rapporto

EX: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! \sin n}{n^n}$ Non posso usare direttamente il criterio della radice o del rapporto: non è a termini positivi ⚠

$$\left| \frac{n! \sin n}{n^n} \right| \leq \frac{n!}{n^n}$$

$$\downarrow$$

converge

⇒ La serie converge assolutamente

EX. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{((n+1)!)^2}{(2(n+1))!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \sim \frac{n^2}{4n^2} \longrightarrow \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ converge per il criterio del rapporto

$a_n > 0$

$\ell_{rapp} = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\ell_{rad} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n}$

questi due numeri hanno la stessa funzione

Dai teoremi sono entrambi minori di 1 o entrambi maggiori

$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \Rightarrow \forall\ L, L'$ con $L' < \ell_{rapp} < L$
$L'^n \ll a_n \ll L^n$

$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} \Rightarrow \forall\ L', L$ con $0 \leq L' < \ell_{rad} < L$
$L'^n \ll a_n \ll L^n$

Prop 1 Se ℓ_{rad} e ℓ_{rapp} esistono, allora $\ell_{rad} = \ell_{rapp}$

Dim.
$\ell_{rad} \neq \ell_{rapp}$
Supponiamo $\ell_{rad} < \ell_{rapp}$
prendo L, $|$ $\ell_{rad} < L < \ell_{rapp}$

ma allora

$$\underset{\substack{\uparrow\\ \text{radice}}}{a_n \ll L^n} \underset{\substack{\uparrow\\ \text{rapporto}}}{\ll a_n} \quad \lightning$$

Prop 2 ℓ_{rad} e ℓ_{rapp} possono non esistere

es: $a_n = \begin{cases} 2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ 1 & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$ $\quad \nexists\ \ell_{rapp}$ ma $\exists\ \ell_{rad}$

$a_n = \begin{cases} 2^n & n \equiv 0 \ (2) \\ 3^n & n \equiv 1 \ (2) \end{cases}$ $\quad \nexists\ \ell_{rad}\ \nexists\ \ell_{rapp}$

$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} 1 & \text{se } n \equiv 1 \ (2) \\ \sqrt[n]{2} & \text{se } n \equiv 0 \ (2) \end{cases}$ $\quad$ allora $\sqrt[n]{a_n} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

$\sqrt[n]{2} \xrightarrow{n\to+\infty} 1$

Prop 3 Se ℓ_{rapp} esiste allora ℓ_{rad} esiste

Dim. Dalla dimostrazione del teo. del rapporto:

Ip: $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell_{rapp}$ prendete $L' < \ell_{rapp} < L$

Gio 14-16
Ven 11-13
Ricevimento regolare fino a inizio giugno
MARTEDÌ MATTINA

Allora $\exists\, n_0 \mid \forall n \geq n_0 \quad L' \leq \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq L \Rightarrow$

$$\Rightarrow (L')^{n-n_0} a_{n_0} \leq a_n \leq L^{n-n_0} a_{n_0}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{(L')^{n_0}}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \cdot L' \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\frac{a_{n_0}}{L^{n_0}}}}_{\xrightarrow[n \to +\infty]{} 1} \cdot L$$

Se sapessi che $\exists \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n}$ sarebbe compreso tra L' e L ma non so se esiste davvero

ma:

$$L' \leq \liminf_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq L \qquad \forall\, L' < \ell_{rapp} < L$$

$$\Downarrow$$

$$\liminf_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell_{rapp}$$

SERIE DI TAYLOR

14/05/2024

I intervallo, $f: I \to \mathbb{R}$ derivabile ∞ volte (cioè C^∞)
$\overset{\in}{0}$ Posso definire la serie di Taylor in 0 di f

$$f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2!}f''(0)x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n \quad (*)$$

1) Per quali x la serie $(*)$ converge (oltre a $x=0$)?

2) Se converge, converge al valore di $f(x)$?

$\boxed{\text{FATTO 1}}$

$\forall$ succ. $(a_n) \subseteq \mathbb{R}$, $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ la cui serie di Taylor è $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

(cioè $\frac{D^n f(0)}{n!} = a_n \ \forall n$)

ANALISI 2

In particolare $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c. la serie di T. è $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n \quad (**)$

NOTA: $(**)$ converge solo per $x=0$

Infatti: $\sqrt[n]{|n^n x^n|} = \sqrt[n]{|nx|^n} = |nx| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty \quad \forall x \neq 0$

$$(**) = \begin{cases} +\infty & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x=0 \\ \text{N.E.} & \text{per } x<0 \end{cases}$$

Risposte:

1) $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c. $(*)$ converge solo per $x=0$

2) $\exists f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ t.c. $(*) = 0 \ \forall x$ e $f(x) \neq 0 \ \forall x \neq 0$

Esempio:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{per } x>0 \\ 0 & \text{per } x \leq 0 \end{cases}$$

oppure

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} e^{-1/|x|} & \text{per } x \neq 0 \\ 0 & \text{per } x=0 \end{cases}$$

Sono funzioni C^∞ con $D^n f(0) = 0 \ \forall n \Rightarrow$ la serie di 0 è tutta nulla

(la funzione coincide con la sua serie di Taylor, il resto è nullo)

PROP: $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n \iff R_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

Resto di Taylor n-esimo in zero

Dim. $f(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n + R_N(x)$

Somma parziale N-esima della serie di T.

$f(x) - R_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{D^n f(0)}{n!} x^n$ Se $R_N \to 0$ la funzione tende al suo sviluppo

ES 1 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Dim. Devo far vedere che $R_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La formula del resto di Lagrange dice che esiste $\hat{x} \in [0, x]$ (se $x > 0$) t.c. dipende da x e da n

$$R_n(x) = \frac{D^{n+1} f(\hat{x})}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^{\hat{x}}}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = \frac{e^{\hat{x}}}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq$$

(max $\{e^x / 1\}$ x positivi / x negativi opp. $e^{|x|}$)

$$\leq \left(\max\{e^x, 1\}\right) \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Resta da dimostrare che $\frac{a^n}{n!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall a > 0$

CRITERIO DEL RAPPORTO:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a^n} = \frac{a}{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ES 2 $\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

oppure

$$R_n(x) = \frac{D^{n+1} f(\hat{x})}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{\pm \cos x / \pm \sin x}{(n+1)!} x^{n+1}$$

$$\Rightarrow |R_n(x)| = \frac{|\cos x / \sin x|}{(n+1)!} |x|^{n+1} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

ES 3 $\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ES 4 $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$ $(1+x)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ ($\binom{a}{n}$ coeff. binomiale) $\forall x \in (-1, 1)$

(per $a = -1$ e x scambiato con $-x$ ottengo la serie geometrica)

La serie non converge per $x > 1 \vee x < -1$, per $x = \pm 1$ dipende da a

ESERCIZIO

Usando la formula del resto di Lagrange

$$R_n(x) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{se} \quad -\frac{1}{2} < x < 1$$

Usando la formula del resto integrale si ottiene lo stesso per
$-1 < x < 1$

ES 5 $\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n \quad \forall x \in (-1, 1]$

Serie di potenze

Data $(a_n) \subset \mathbb{R}$ $\quad x \in \mathbb{R}$ considero

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \leftarrow \text{SERIE DI POTENZE}$$

Caso più interessante: $(a_n) \subset \mathbb{C}$, $x \in \mathbb{C}$

Ponete $L := \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in [0, +\infty]$ e ponete $R := \frac{1}{L}$

BASTA IL limsup, NON SERVE ESISTA IL LIMITE

(con la convenzione $\frac{1}{0} = +\infty$ e $\frac{1}{+\infty} = 0$)

TEO (i) $|x| < R \Rightarrow (*)$ converge (assolutamente)
$(-R < x < R)$

(ii) $|x| > R \Rightarrow (*)$ non converge $\begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ NE \end{cases}$

$(x < -R \vee x > R)$ non posso fare ulteriori previsioni sul comportamento

OSS: per $|x| = R$ $(x = \pm R)$ non si sa nulla a priori

Dim. Applico il CRITERIO DELLA RADICE (con limsup)

$(x \neq 0)$ $\sqrt[n]{|a_n x^n|} = \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$

$$\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = L|x| \begin{cases} < 1 \text{ se } |x| < \frac{1}{L} = R \\ \quad \Rightarrow \text{la serie converge} \\ > 1 \text{ se } |x| > \frac{1}{L} = R \\ \quad \Rightarrow \text{la serie non converge} \end{cases}$$

OSS. (utile a calcolare L e R)

Se esiste $\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ allora è L

PER I COMPLESSI

1. Data $(z_n) \subset \mathbb{C}$, $z \in \mathbb{C}$ dico che

$$\underset{x_n + iy_n}{\overset{}{z_n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{z}_{= x+iy} \quad \text{se} \quad x_n \to x \text{ e } y_n \to y$$

② Se $(z_n) \subset \mathbb{C}$ e $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n| < +\infty$

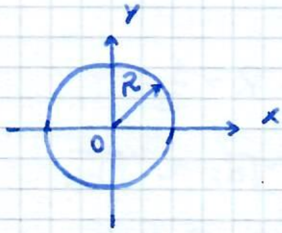
allora $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge (equivalente della converg. assoluta)

③ Se $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge $\Rightarrow z_n \to 0$

TEO $\mathbb{C}$

(i) $|x| < R \Rightarrow (*)$ converge

(ii) $|x| > R \Rightarrow (*)$ non converge



R è detto raggio di convergenza

TEO 2 ($\Rightarrow$ vedi Analisi 2)

$\sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{a_n n x^{n-1}}^{g(x)}$ ha lo stesso raggio di convergenza

di $\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}_{f(x)}$ e $g(x) = f'(x)$ per $-R < x < R$

Calcolare R (e specificare il comportamento) per le serie di potenze seguenti:

① $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

radice: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = ?$

rapporto: $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot n! = \frac{1}{n+1} \to 0$

$\Rightarrow L = 0 \Rightarrow R = +\infty$

② $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} x^n$ $\quad \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{\cancel{a(a-1)\cdots}(a-n)}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{\cancel{a(a-1)\cdots(a-n+1)}} \right| =$

$= \left| \frac{a-n}{n+1} \right| = \frac{|a-n| \sim n}{|n+1| \sim n} \longrightarrow 1 \quad \Rightarrow L = 1 \Rightarrow R = 1$

$a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

③ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ $\quad \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{\sqrt[n]{n^n}} = \frac{1}{n} \to 0 \Rightarrow L = 0 \Rightarrow R = +\infty$

④ $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ $\quad R = 0$

(5) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{2n}$ $\quad a_n = \begin{cases} 3^{n/2} & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n]{3^{n/2}} = \sqrt{3} & \text{se } n \text{ pari} \\ 0 & \text{se } n \text{ dispari} \end{cases}$$

$$L = \limsup_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = \sqrt{3} \Rightarrow R = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(avrei potuto farlo direttamente mettendo $\sqrt[2n]{|a_n|}$)

(6) $\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(-1)^n (2^n + n)}_{a_n} x^n$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{2^n + n} \sim \sqrt[n]{2^n} = 2 \Rightarrow R = \frac{1}{2}$$

ho usato $a_n \sim b_n \Rightarrow \sqrt[n]{a_n} \sim \sqrt[n]{b_n}$

(con le radici è vera ma con le potenze no: dimostrarlo!)

$$a_n \sim b_n \not\Rightarrow a_n^n \sim b_n^n$$

DEFINIZIONE DI FUNZIONE ANALITICA

Una funzione è analitica se è tale che la sua serie di Taylor $T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$ in ogni punto x_0 appartenente al dominio converge a $f(x)$ per x in un intorno di x_0.