VELOCITA' ANGOLARE

lunedì 15 aprile 2024 17:52

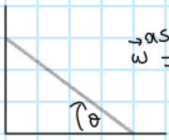
formula fondamentale della cinematica rigida

$\boxed{\vec{v}_P = \vec{v}_Q + \vec{\omega} \times (P-Q)}$ con P, Q pti solidali al corpo rigido

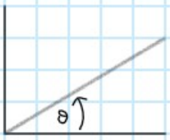
Cose da sapere

1) Nei moti piani $\vec{\omega} = \omega \hat{e}_3$ cioè la vel. angolare ha direz. cost ed è diretta lungo $\hat{e}_3$

2) Se riesco a trovare una direzione solidale al corpo rigido identificata da un angolo da un angolo θ rispetto alla direzione fissa del S.R Oxy di partenza allora $\vec{\omega} = \pm\dot{\theta}\,\hat{e}_3$ (scelgo il $+$ se θ è antiorario)



$\vec{\omega}^{asta} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_3$



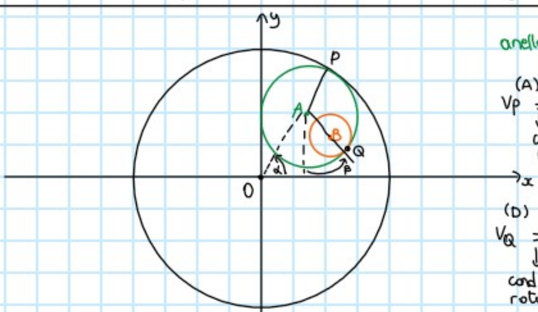
$\vec{\omega}^{(Asta)} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$

Nell'es devo scrivere $\vec{\omega} = \dot{\theta}\,\hat{e}_3$ in quanto un SR solidale all'asta è ruotato di un angolo θ rispetto a Oxy

3) La f.f.c.r si usa in 2 modi : 1) conosco $\vec{v}_Q$ e $\vec{v}_P$ e voglio determinare $\vec{\omega}$

2) Conosco $\vec{v}_Q$ e $\vec{\omega}$ e voglio trovare $\vec{v}_P$

4) cond. di puro rotolamento



anello guida disco

$v_P^{(A)} = v_P^{(guida)} = 0$

cond. puro rotol.

P è un pto solidale alla guida (che è ferma)

$v_Q^{(D)} = v_Q^{(A)} \neq 0$

cond puro rotolam.

non è più 0 perchè A si muove

Step per trovare $\vec{\omega}^{(A)}$

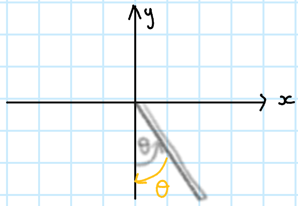
$v_A = v_P + \vec{\omega}^A \times (A-P)$ $\quad \vec{v}_A = (A-O)'$, $\vec{v}_P = 0$

Per trovare $\vec{\omega}^{(D)}$

$v_Q^{(A)} = v_A^{(A)} + \vec{\omega}^A \times (Q-A)$ e trovo $v_Q^{(A)} = v_Q^{(D)}$

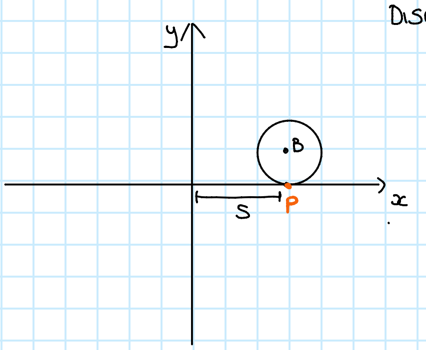
$\vec{v}_B^{(D)} = \vec{v}_Q^D + \vec{\omega}^D \times (B-Q)$ e trovo $\vec{\omega}^D$

Esempi noti



asta incernierata all'origine

$\vec{\omega} = \dot{\theta}\, e_3$ se avessi preso questo θ cioè inverso orario avrei avuto $\vec{\omega} = -\dot{\theta}\,\hat{e}_3$



Disco di raggio R, centrato in B

$$\vec{V}_B = \underbrace{\vec{V}_P}_{=0} + \vec{\omega}^D \times (B-P)$$

perchè P è pto di contatto

$$(B-O) = s\,\hat{e}_1 + R\,\hat{e}_2$$

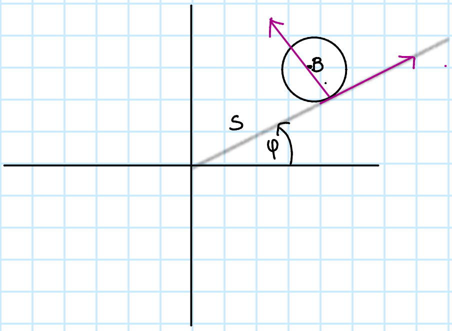
$$\vec{V}_B = (B-O)' = \dot{s}\,\hat{e}_1$$

$$(B-P) = R\,\hat{e}_2$$

$$\vec{\omega}^D = \omega^D\,\hat{e}_3$$

$$\omega^D\,\hat{e}_3 \times (B-P) = \omega^D\,\hat{e}_3 \times R\,\hat{e}_2 = -\omega^D R\,\hat{e}_1$$

$$\Rightarrow \quad \vec{V}_B = \dot{s}\,\hat{e}_1 = 0 + \omega^D R\,\hat{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \omega^D = \frac{\dot{s}}{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{\omega}^D = \frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$$

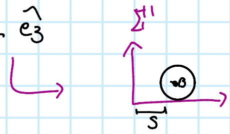


asta lunga ℓ, disco che rotola senza strisciare sull'asta

- $\vec{\omega}^A = \dot{\varphi}\,\hat{e}_3$
- Per $\vec{\omega}^D$ considero un SR solidale all'asta Σ'' (con l'asse x' lungo l'asta, $y' \perp x'$) (la sua $\omega' = \dot{\varphi}\,\hat{e}_3$ rispetto a Oxy)

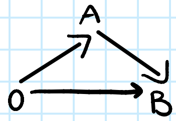
In questo Σ'' la $\omega^D = \omega'' = -\frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3{}' \underset{\hat{e}_3' = \hat{e}_3}{=} -\frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$

$$\vec{\omega}^D = \omega' + \omega''$$
$$= \dot{\varphi}\,\hat{e}_3 - \frac{\dot{s}}{R}\,\hat{e}_3$$

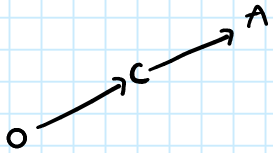


Robe sui vettori

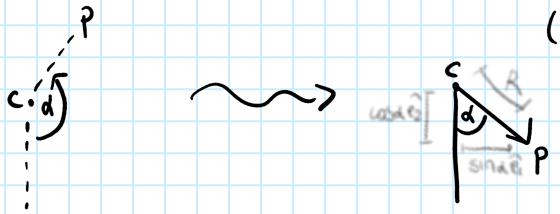
$A-P$ e' il vettore da P ad A



$$B-O = (A-O) + (B-A)$$



$$(A-O) = (A-C) + (C-O)$$

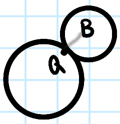


$(P-C)$ lo vedo così

$$= R\sin\alpha\,\hat{e}_1 - R\cos\alpha\,\hat{e}_2$$

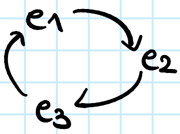
va ↓ rispetto a $\hat{e}_2$ ↑

$$\cos(90-\theta) = \sin\theta \qquad \sin(90-\theta) = \cos\theta$$



meglio fare $B-Q$ al posto di $Q-B$

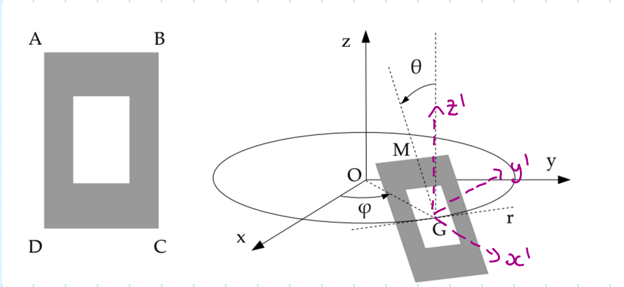
$$(Q-B) = -(B-Q)$$



$$\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{e}_3$$
$$\hat{e}_3 \times \hat{e}_2 = -\hat{e}_1$$

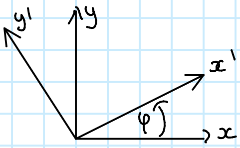
tipo i quaternioni ★

Moti non piani 20-07-2023



Step 1

$\Sigma \xrightarrow{R_3^\varphi} \Sigma'$



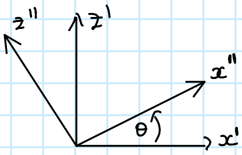
R_3^φ =: rotazione attorno all'asse $\hat{e_3}$ di un angolo φ

$z = z'$, x' coincide con la direz della guida , $y' \perp x'$

$\omega' = \dot\varphi \, \hat{e_3}$

Step 2

$\Sigma' \xrightarrow{R_2^{-\theta}} \Sigma''$



e_2 è entrante nel piano $\Rightarrow -\theta$

$\hat{e_2}'' = \hat{e_2}'$

$\omega'' = -\dot\theta \, \hat{e_2}'$

Step 3

Scrivere tutto in Σ'

$\hat{e}_1' = R_3^\varphi \underset{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\hat{e_1}}}$

$$R_3^\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

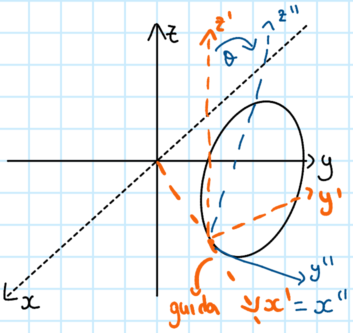
$\hat{e_3}'' = R_3^\varphi R_2^{-\theta} \underset{\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}}{\underset{\shortparallel}{\hat{e_3}}}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{R_3^\varphi} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}}_{R_2^{-\theta}}$$

Conclusione

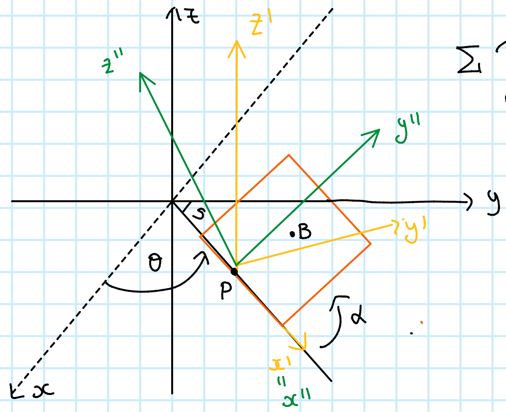
$$\omega = \omega' + \omega'' = \dot\varphi \, \hat{e_3} - \dot\theta \underset{R_3^\varphi \hat{e_2}}{\underset{\shortparallel}{\hat{e_2}'}}$$

Es. 2



$$\Sigma \underset{\omega' = \dot\varphi \hat{e_3}}{\xrightarrow{R_3^\varphi}} \Sigma' \underset{\omega'' = -\dot\theta \hat{e_1}}{\xrightarrow{R_1^{-\theta}}} \Sigma''$$

Es 3



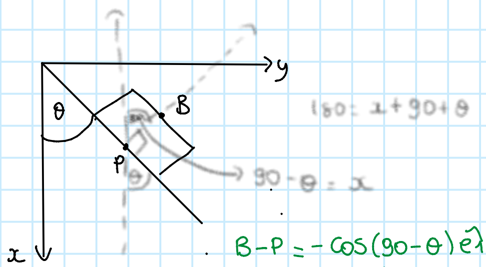
$$\Sigma \xrightarrow[\omega' = \dot\theta\, \hat e_3]{R_3^\theta} \Sigma' \xrightarrow[\omega'' = \dot\alpha\, \hat e_1]{R_1^\alpha} \Sigma''$$

Se voglio leggere tutto in Σ''

$R_3^\theta R_1^\alpha$ mat da Σ'' in Σ

$(R_3^\theta R_1^\alpha)^T = R_1^{-\alpha} R_3^{-\theta}$ da Σ in Σ''

$(B-P)$



$$B-P = \underset{= -\sin\theta\, \hat e_1}{-\cos(90-\theta)\hat e_1} + \underset{= \cos\theta\, \hat e_2}{\sin(90-\theta)\hat e_2}$$

En. Cinetica

$$\boxed{T = \frac{1}{2} m |v_G|^2 + \frac{1}{2}\, \omega \cdot I_G\, \omega}$$ Teo. König

$\omega I_G \omega$ e' indip. dalla scelta della base ortonormale