# Analisi matematica I

AM1gest 20/21

Lezione 1

29/9/2020

# Introduzione

Docenti: Giovanni Alberti, Alessandra Pluda

Programma

- ripasso nozioni di base
- derivate: calcolo e applicazioni
- integrali: calcolo e applicazioni
- serie numeriche
- equazioni differenziali ← forse l'argomento più importante per i corsi che seguono

Nota: in questo corso si da più peso agli aspetti operativi (risoluzione di problemi) che a quelli teorici (che comunque verranno trattati).
In questo senso il corso è più vicino ad un corso di "Calcolo" che di "Analisi".

nel senso americano del termine

# Esame

Ogni anno avete 7 occasioni di passare l'esame (7 "appelli"): in pratica si tratta di 7 date in cui si svolge la prova scritta (3 a gennaio-febbraio, 3 a luglio-agosto, 1 a settembre).

Attenzione: potete tentare l'esame al più 4 volte.

Struttura esame:

**SCRITTO** + **ORALE**

| SCRITTO: 1ª parte | SCRITTO: 2ª parte | ORALE |
| --- | --- | --- |
| domande a cui dare solo la risposta | esercizi di cui dare soluzioni motivate | esercizi (se lo scritto è solo suff.) + enunciati dei teoremi + dimostrazioni (per i voti alti) |
| di solito: 8 in un'ora | di solito: 3 in due ore | |

Nota: la consegna della prima parte dello scritto conta come aver tentato l'esame.

# Strumenti del corso

**TEAMS**

- lezioni
- ricevimento: G.A.: Ven. 11.30-13
  A.P.: Lun. 18-19.30
- registrazioni delle lezioni

**portale E-LEARNING di Ingegneria**

https://elearn.ing.unipi.it

e poi cercate questo corso ....

- Comunicazioni (sugli esami e altro)
- materiale didattico
  - liste di esercizi
  - appunti delle lezioni
  - testi e soluzioni degli esami

pagina web di G.A.

http://pagine.dm.unipi.it/alberti

- testi e soluzioni degli scritti degli anni passati.
- breve presentazione del corso

e-mail di G.A. giovanni.alberti@unipi.it

Solo per le emergenze!

libri di testo

non seguiamo un testo preciso:

come supporto o complemento più o meno ogni testo universitario va bene!

registro delle lezioni

link sulla mia pagina web.

# Osservazioni Sparse

- il corso inizia lento poi si accelera;
  è facile rimanere indietro!
- il voto finale dipende solo dall'esame;
- la frequenza non è obbligatoria
  (anche perché ci sono le registrazioni delle lezioni!);
- durante le lezioni fate domande
  (a voce meglio che in chat);
- la parte fondamentale dell'esame è lo scritto;
  l'orale serve a determinare il voto finale all'interno della fascia data dallo scritto;
  raramente si viene bocciati all'orale;
- piuttosto che imparare a memoria la procedura per risolvere gli esercizi bisogna capire il ragionamento che ci sta dietro;

- studiare insieme ad altri molto utile (magari non ugualmente utile per tutti);
- se qualcosa non va nel corso potete rivolgervi a:
    - me (anche se può essere difficile);
    - Alessandra Pluda;
    - rappresentanti degli studenti!

Fine della presentazione del corso

Passo ora al contenuto matematico.

## Avvertenze di carattere generale

- In questo corso il logaritmo è sempre in base $e$ ($= 2,718\ldots$ , costante di Napier) Nepero (ITA) Eulero

$$\log x = \log_e x = \ln x$$ → logaritmo naturale

Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate, ma non è quella usuale in ambito ingegneristico.

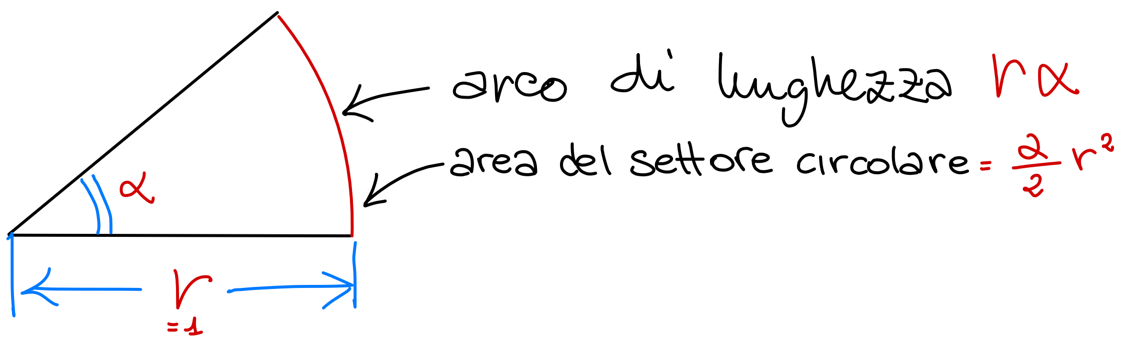
- Gli angoli sono misurati in radianti.

$360° = 2\pi$

Quindi $90°$ diventa $\frac{\pi}{2}$, $45°$ diventa $\frac{\pi}{4}$ etc.

Questa scelta semplifica alcune formule nel calcolo delle derivate.

Significato geometrico della misura in radianti:



# Grafici delle funzioni elementari

In questo corso considereremo quasi sempre funzioni $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

GRAFICO di una funzione $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\Gamma_f := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x) \text{ con } x \in X\}$

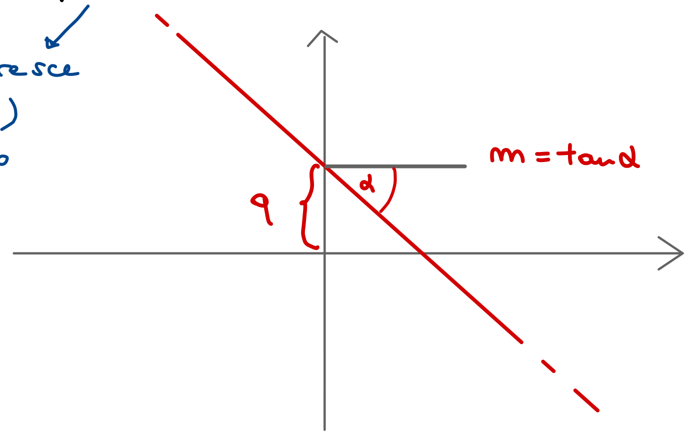
## RETTE

* Come disegnare una retta $y = mx + q$

$q$ mi indica l'altezza con cui la retta interseca l'asse delle $y$ ed

$m$ mi indica la pendenza

di quanto sale/cresce (scende/decresce) la $y$ aumentando la $x$ di $1$.




$\alpha$ è l'angolo acuto formato dalla retta e da una qualsiasi retta orizzontale

$\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

senso antiorario ↺ $\alpha$ positivo

senso orario ↻ $\alpha$ negativo

In questo modo disegno tutte le rette, tranne quelle verticali che NON sono funzioni

## POTENZE

Ricordiamo che

se $a \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$, $\sqrt{a}$ è la radice quadrata positiva di $a$.

se $a \in \mathbb{R}$, $b$ intero positivo non nullo allora $a^b = a \cdot \ldots \cdot a$ $b$ volte

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $b$ intero positivo non nullo $a^{-b} = \frac{1}{a^b}$

se $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $a^0 := 1$ ( $0^0$ non viene definito )

se $a \geq 0$, $b > 0$, $b = \frac{p}{q}$ (con $p, q$ interi positivi non nulli) $a^b = \sqrt[q]{a^p}$

se $a > 0$, $b < 0$, $b = -\frac{p}{q}$ $a^b = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

Perché serve $a$ positivo?

Supponiamo $b = \frac{1}{3} = \frac{2}{6}$ e $a = -8$.

Allora avremmo $-8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-8^1} = -2$

$-8^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{-8^2} = \sqrt[6]{64} = 2$

Si definisce $a^b$ con $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ($a > 0$ se $b$ neg) per approssimazione $\pi = 3{,}1416\ldots$

$2^\pi = 2^{3{,}1416\ldots} \to$ limite $2^3, 2^{3{,}1}, 2^{3{,}14}\ldots$

* Funzioni potenza $x^a$

(per quali $x \in \mathbb{R}$, l'espressione $x^a$ ha significato → l'insieme di definizione è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$)

$y = x^a$

insieme di definizione

se $a > 0$ con $a$ intero, l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$

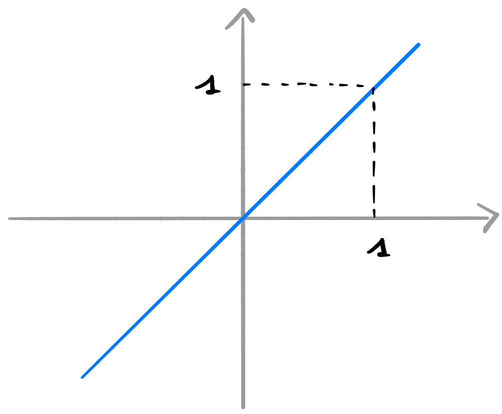
se $a \leq 0$ con $a$ intero, $x \neq 0$, ossia l'insieme di definizione è $\mathbb{R} \setminus \{0\}$

se $a > 0$, con $a$ non intero, $x \geq 0$, l'insieme di definizione è $\mathbb{R}^+$

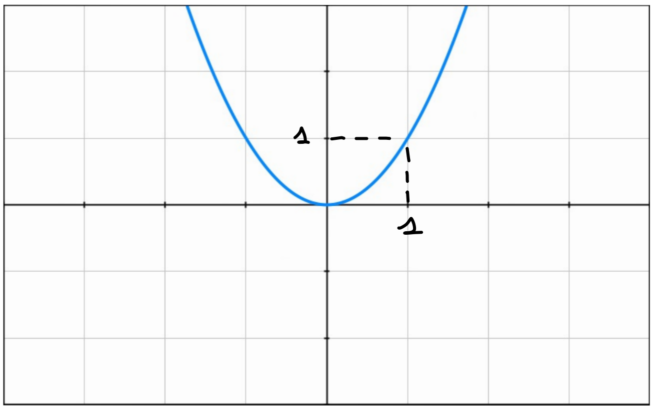
se $a < 0$, con $a$ non intero, $x > 0$, l'insieme di definizione è $(0, +\infty)$.

## GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a \geq 1$

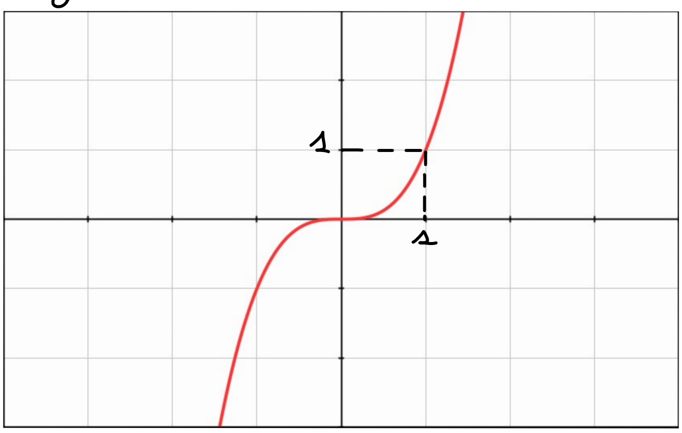
$y = x$



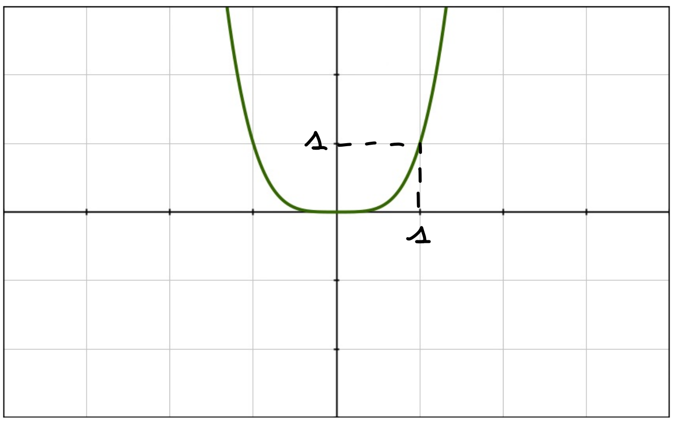

$y = x^2$




$y = x^3$



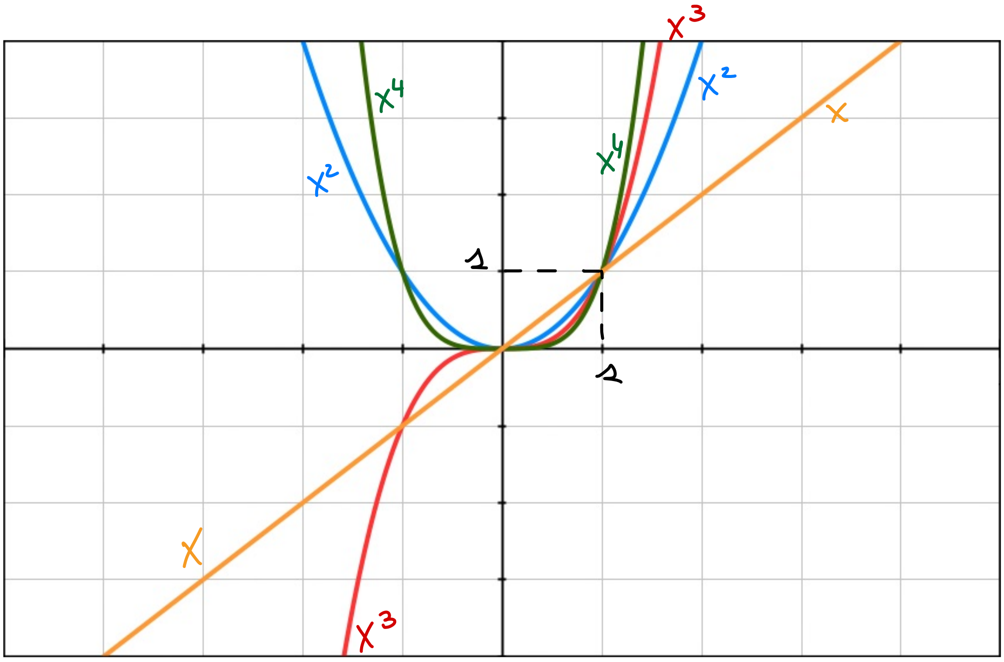

$y = x^4$




Notiamo che:

per $a$ pari → funzione pari
per $a$ dispari → funzione dispari

$f$ PARI: $f(-x) = f(x)$
simmetria rispetto asse $y$
$f$ DISPARI: $f(-x) = -f(x)$
simmetria centrale rispetto all'origine.

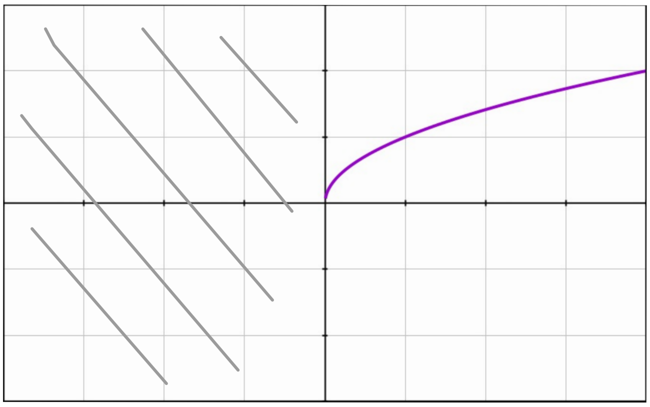



tutte passano per (0,0) e per (1,1)

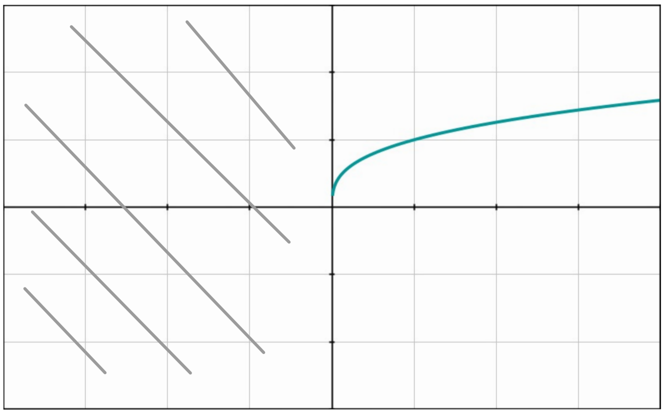
ATTENZIONE ALLA CRESCITA! (in che "ordine" sono le funzioni prima di 1 e dopo 1)

## GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $0 \leq a \leq 1$

$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$



$y = x^{1/3}$

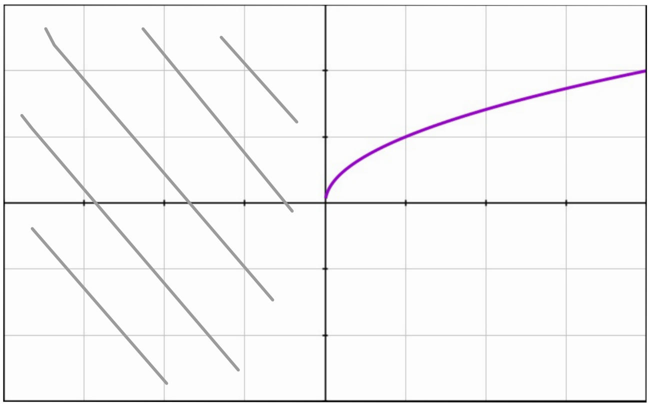


Attenzione: DIFFERENZA tra funzioni POTENZA e RADICI: abbiamo visto che se $0 < a < 1$, allora il dominio di $y = x^a$ è $x \geq 0$.

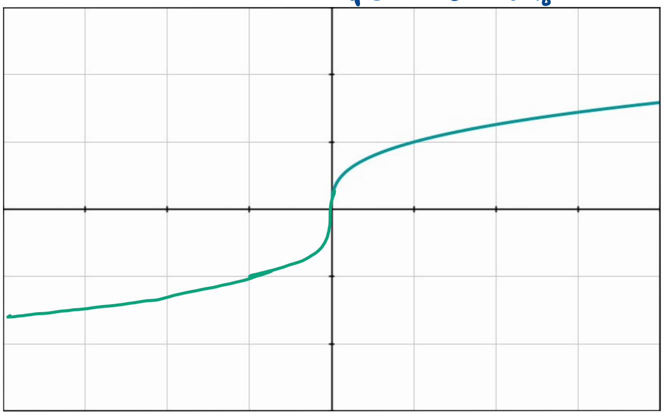
Se però parliamo della funzione $y = \sqrt[m]{x}$ con $m \in \mathbb{N}$ dispari allora l'insieme di definizione è tutto $\mathbb{R}$.

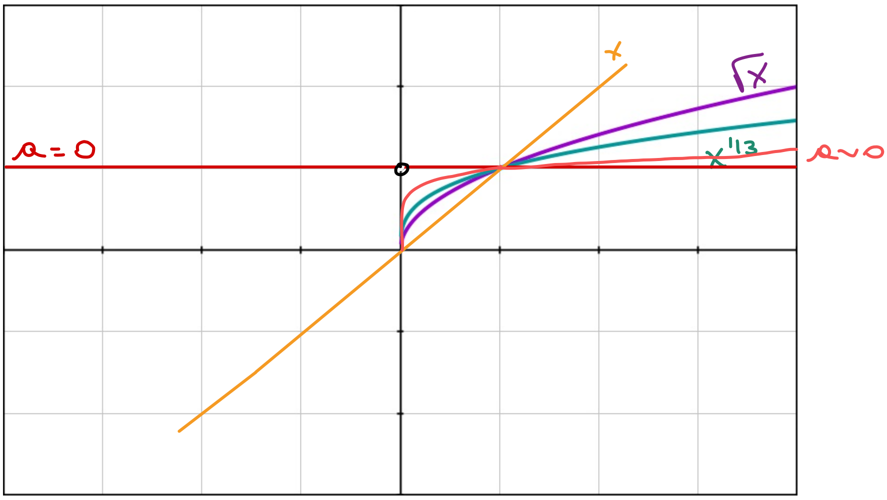
sono funzioni dispari, simmetriche rispetto all'origine

$y = \sqrt{x}$

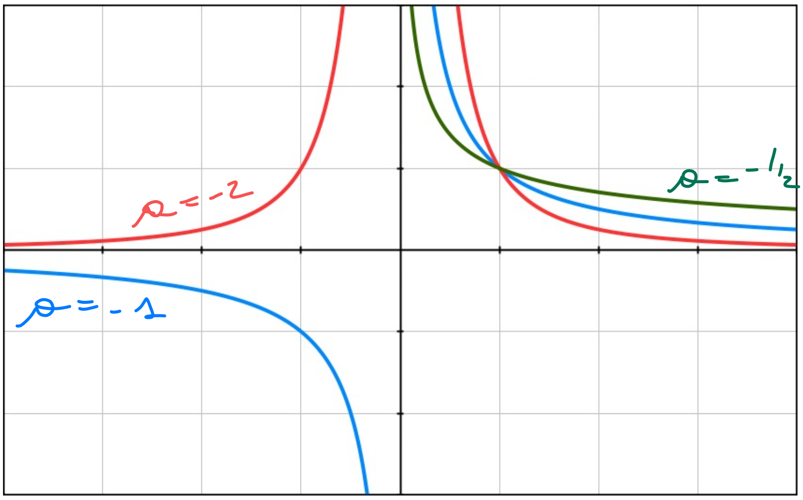


$y = \sqrt[3]{x}$






## GRAFICI delle FUNZIONI POTENZA $a<0$

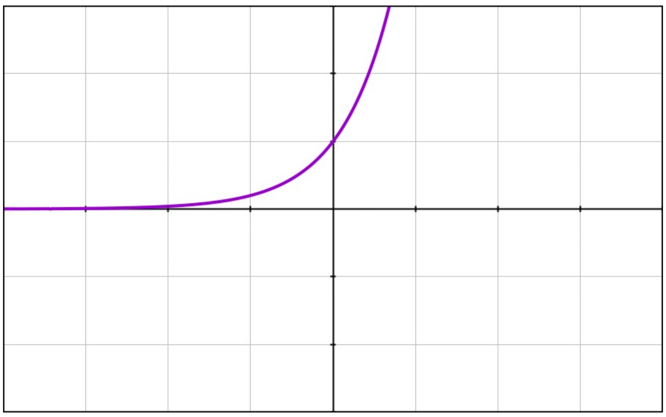



Se $a$ è intero, sappiamo che la funzione ha come insieme di definizione $\mathbb{R}\setminus\{0\}$
E' dunque definita simmetricamente per gli $x$ negativi.
Di nuovo se $a$ pari la funzione è pari,
per $a$ dispari, la funzione è dispari

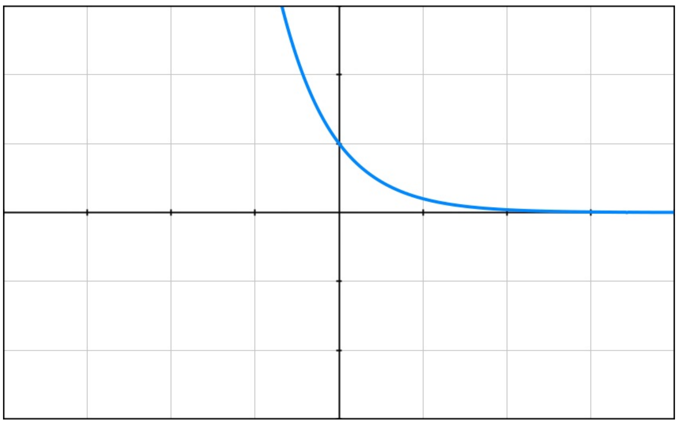
## ESPONENZIALI

Sia $a>0$, consideriamo $y=a^x$
Notiamo che qualsiasi sia $a$, $a^0=1$, $a^1=a$.

Inoltre la funzione è sempre positiva.



$a>1$



$a<1$

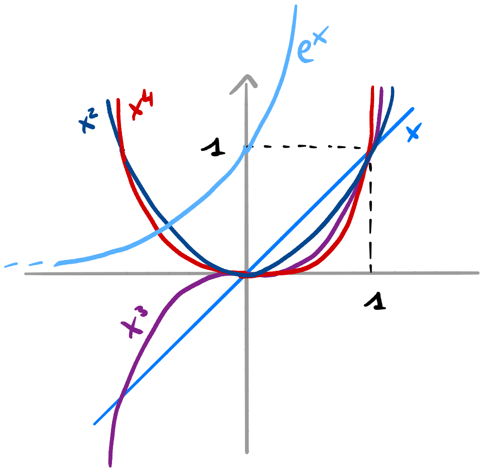
Tra tutti gli $a>0$ possibili come base dell'esponenziale privilegiamo il numero

$$e \simeq 2{,}718\ldots$$

"e" è il numero di Nepero

Notiamo che ogni potenza può essere scritta in base e

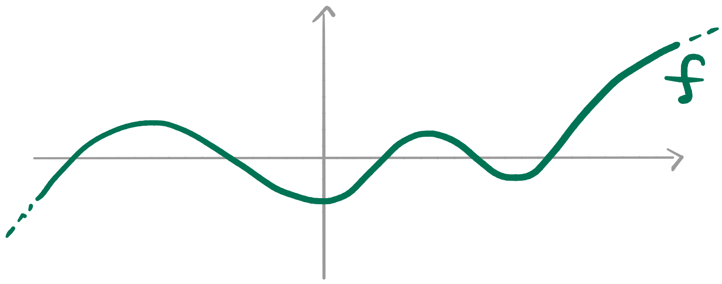
$$\boxed{a^b = e^{\log_e a^b} = e^{b \log_e a}}$$




Confronto con le funzioni potenza $x^a$ con $a \in \mathbb{N}$
La funzione $e^x$ va all'infinito PIÙ VELOCEMENTE di $x^a$, non importa quanto grande sia $a$.

# Operazioni sui grafici

Dato il grafico di una funzione $f$ e un numero reale $a$




vogliamo disegnare:

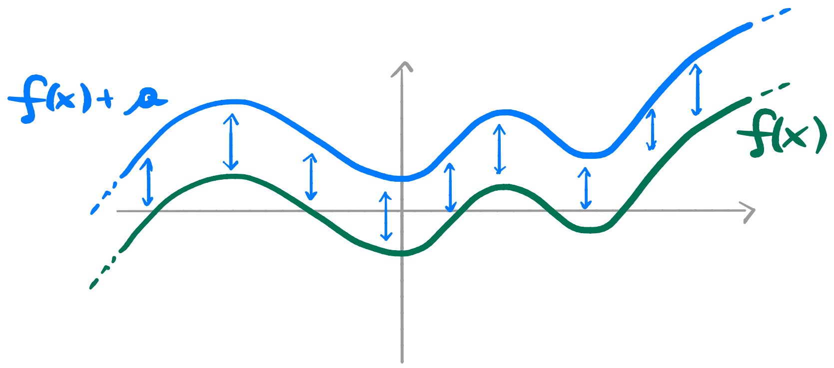
i) il grafico di $f(x)+a$

ii) il grafico di $f(x+a)$

Data $f(x)$ il grafico di $f(x)+a$ si ottiene per traslazione verticale $\updownarrow$

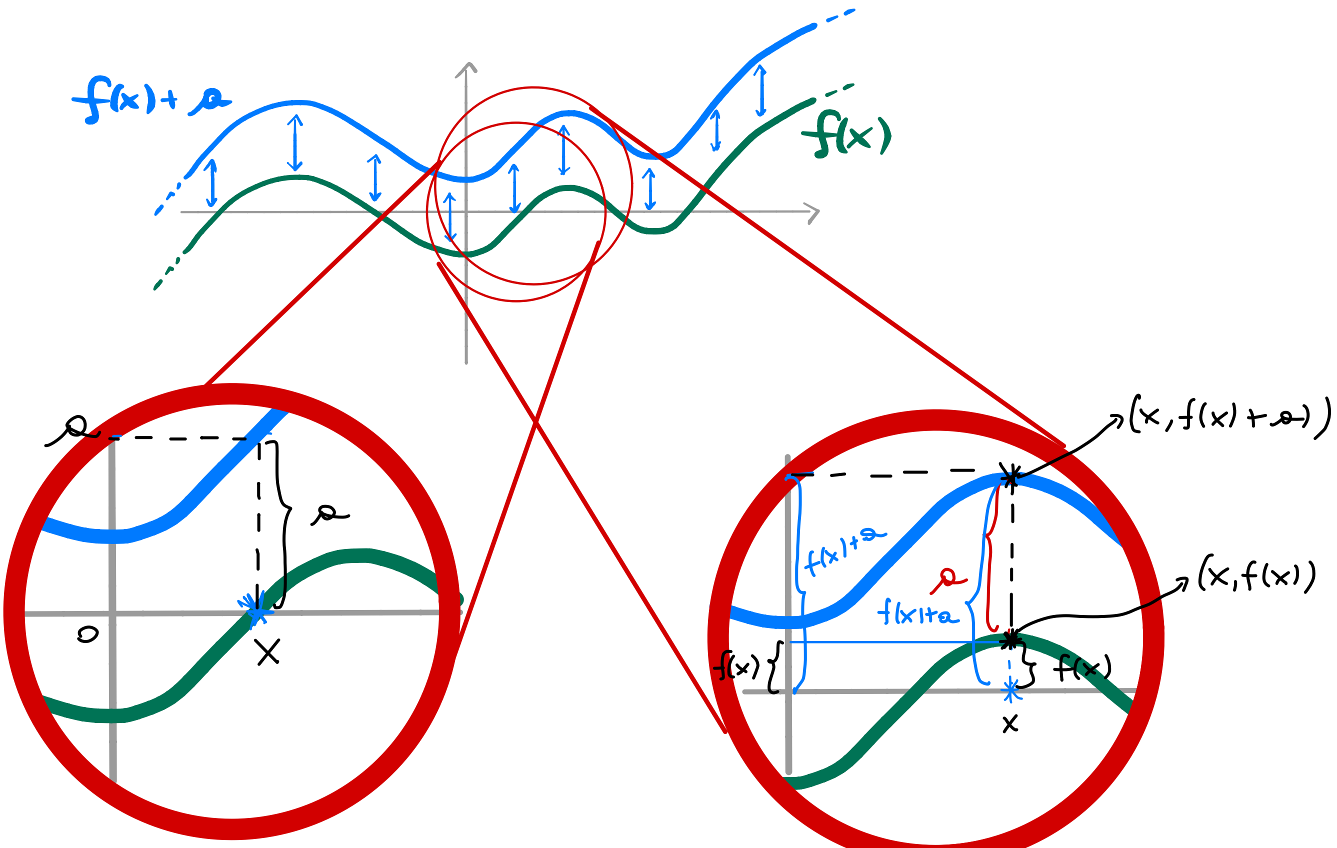
verso l'alto di $+a$, se $a$ è positivo

verso il basso di $-a$, se $a$ è negativo.




Consideriamo il caso $a > 0$

(chiaramente se $a = 0$ non succede niente)




Prendiamo un punto in cui la funzione vale zero

(ossia un $x \in \mathbb{R}$ t.c. $f(x) = 0$, $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$,

$\to$ dove il grafico della funzione interseca l'asse delle x)

Allora $f(x)+a$ varrà $a$

($f(x) + a = 0 + a = a$)

Prendiamo un punto qualsiasi del grafico $(x, f(x))$

Vogliamo disegnare il punto $(x, f(x)+a)$)

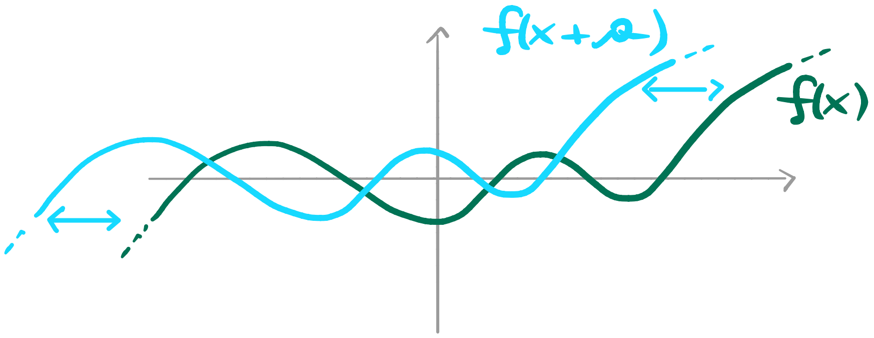
Gli zeri della funzione cambiano!

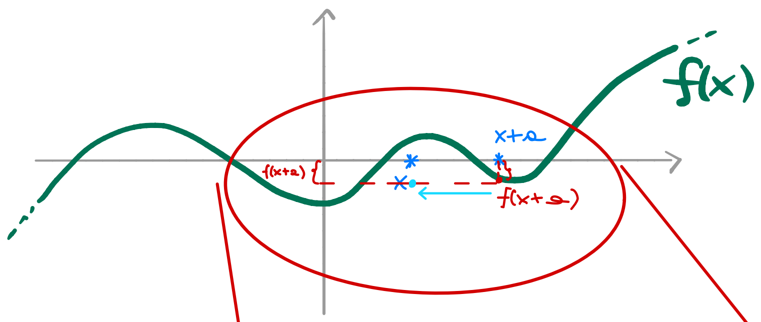
$\hookrightarrow$ $f: X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

i punti $x \in X$ tali che $f(x) = 0$

Data $f(x)$ il grafico di $f(x+a)$ si ottiene per traslazione orizzontale $\longleftrightarrow$

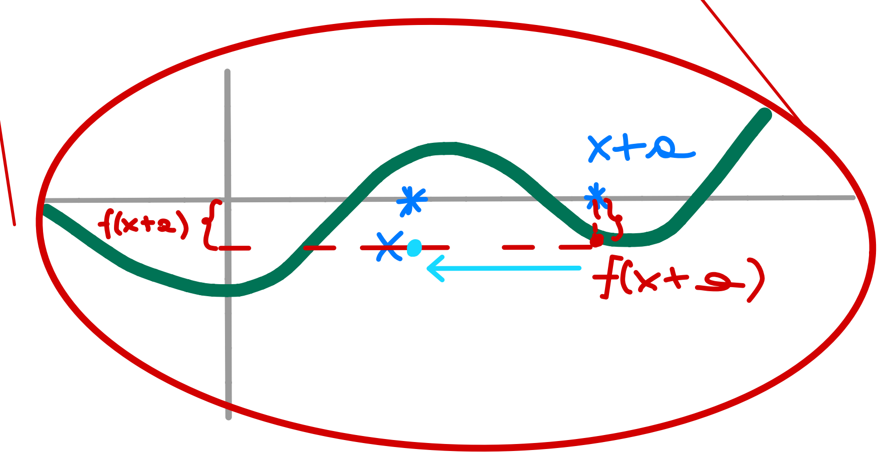
verso sinistra di $+a$, se $a$ è positivo
verso destra di $-a$, se $a$ è negativo.




Partiamo dal grafico di $f$, abbiamo l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x))$
Ora dobbiamo disegnare l'insieme di tutte le coppie $(x, f(x+a))$
Supponiamo che $a>0$ (come prima, se $a=0$ non succede nulla), ad esempio $a=2$.

Prendiamo un punto $x$ qualsiasi, ci segnamo sull'asse delle $x$ il punto $x+a$
L'altezza sulle ascisse (valore della funzione) che dobbiamo ora associare a $x$ per disegnare il punto $P=(x, f(x+a))$ è il valore della funzione in $x+a$.



AM1 gest 20/21 lezione 3

1/10/20

# Grafici di funzioni elementari

Perché è utile disegnare i grafici di funzioni?

Perché serve a visualizzare le informazioni contenute nella formula

Metodi per disegnare grafici:

STUDIO DI FUNZIONI

COMPUTER

$\boxed{\text{GRAFICI DI FUNZIONI ELEMENTARI e operazioni sui grafici}}$

argomento delle prossime lezioni

## Esercizio

Partendo dal grafico di $f(x)$ disegnato sotto risolvere (graficamente) le seg. equazioni e diseq.

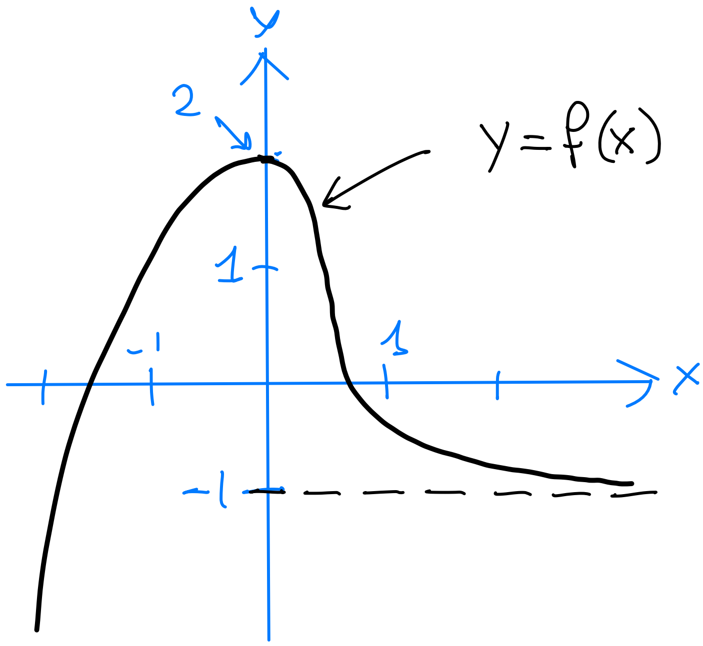
a) $f(x)=1$

b) $f(x)\geq 1$

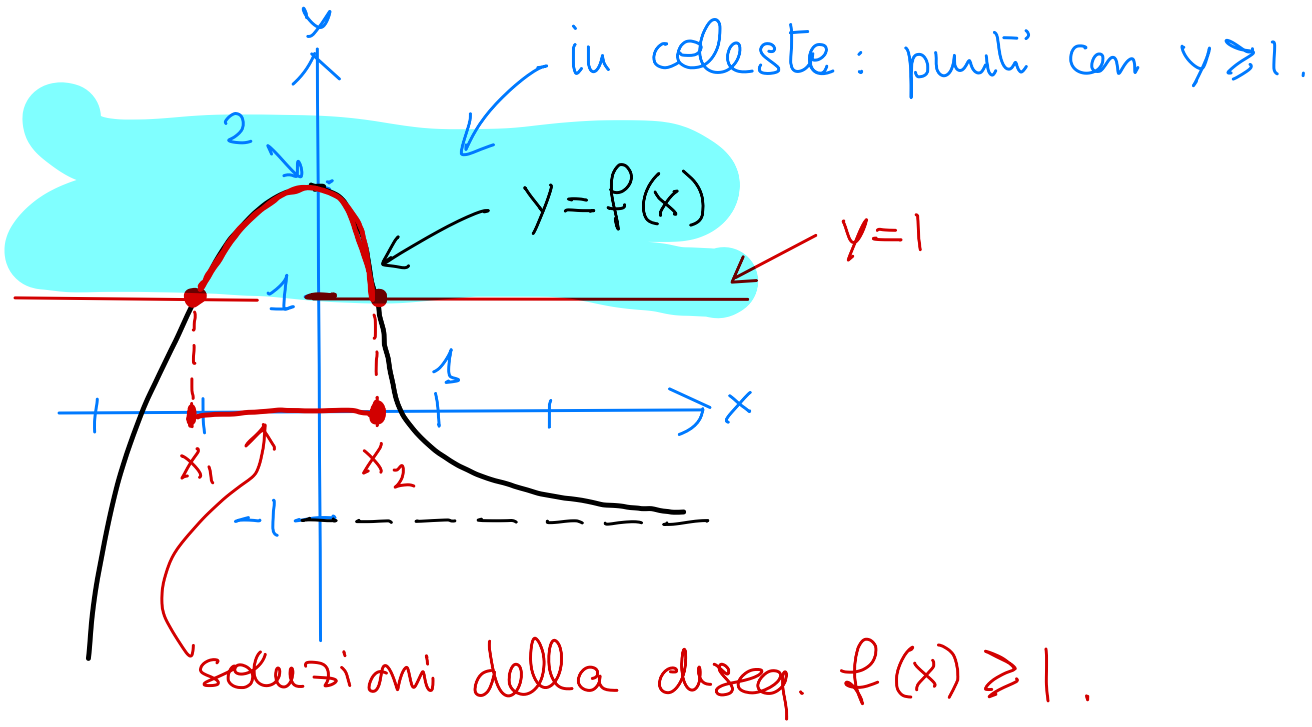
c) $f(x)=x^2$

d) $f(x)\geq x^2$

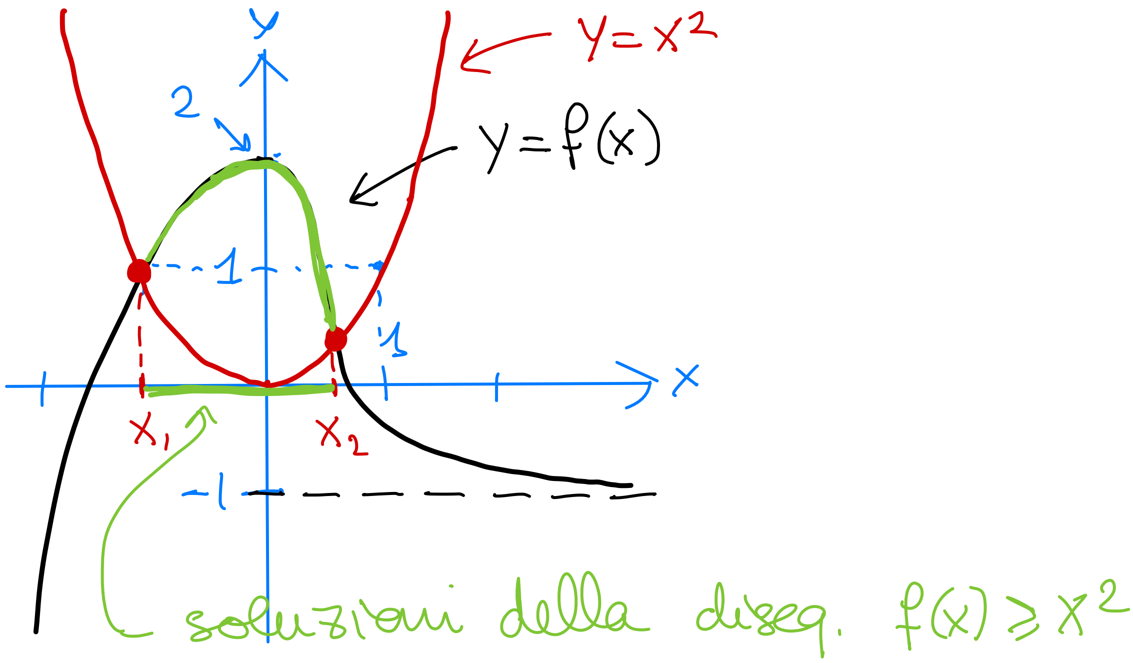
e) $f(x)\leq e^x-1$



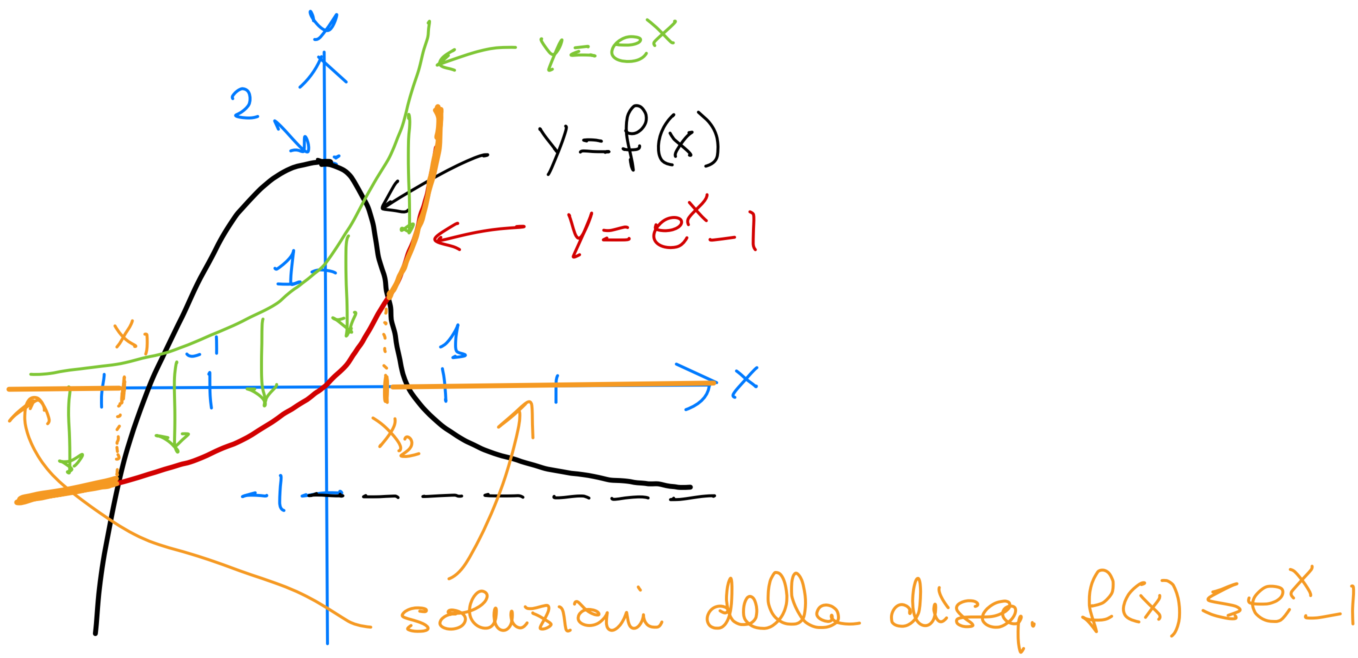

b) $f(x)\geq 1$

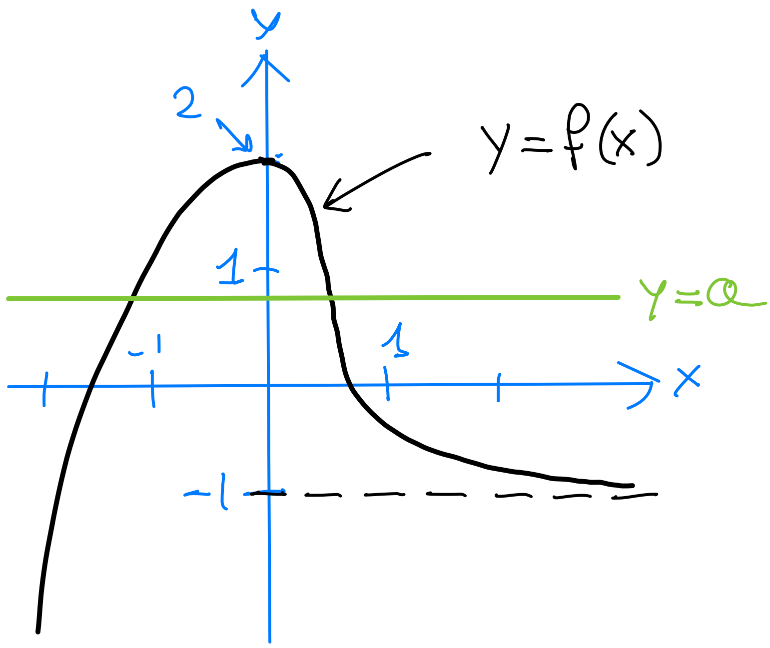


d) $f(x) \geqslant x^2$




e) $f(x) \leqslant e^x - 1$





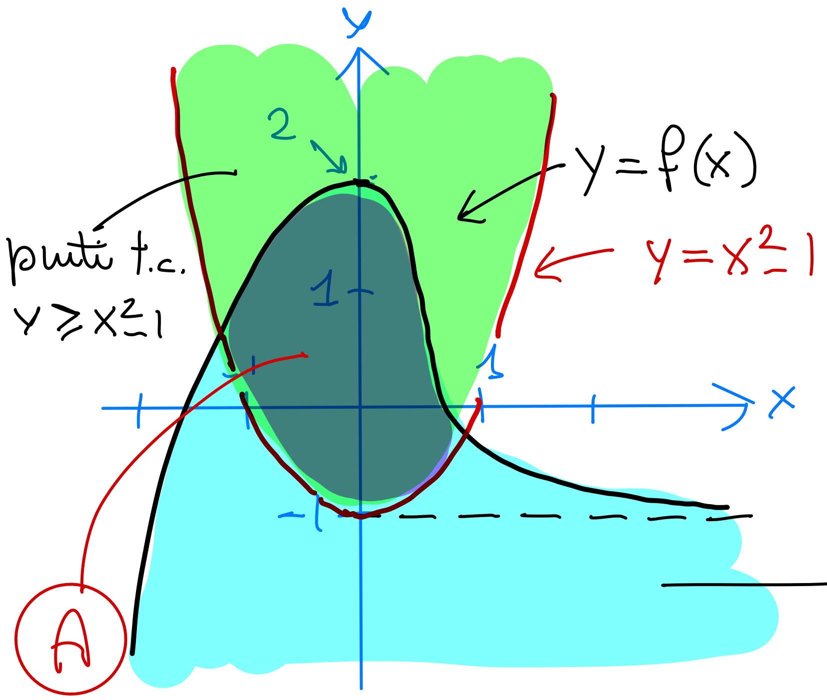

Domanda:

per quali $a \in \mathbb{R}$
l'equazione $f(x)=a$
ha 2 soluzioni?

Risp.: $-1 < a < 2$

$a \in (-1, 2)$

$\cancel{a < 2 \wedge a > -1}$




Disegnare l'insieme A
dei punti (x, y) tale
che $x^2-1 \le y \le f(x)$

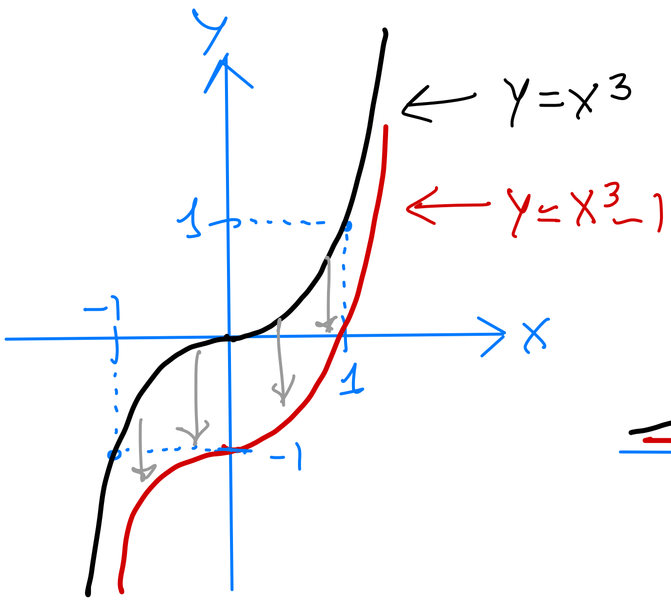
punti t.c. $y \le f(x)$

E se avessi chiesto l'insieme dei punti
t.c. $x^2-1 \le y$ <u>oppure</u> $y \le f(x)$?

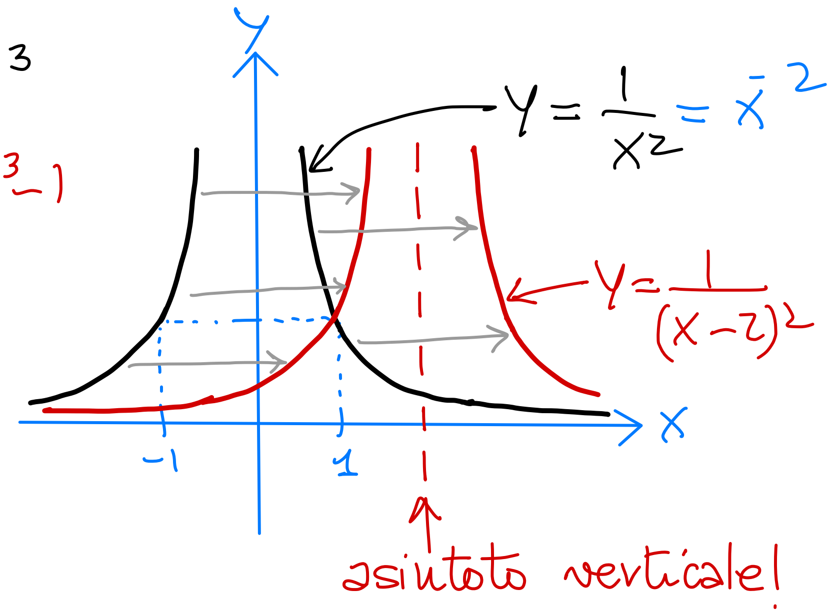
In tal caso si prende l'unione dell'area
verde e di quella celeste.

Esempi: disegnare i seguenti grafici

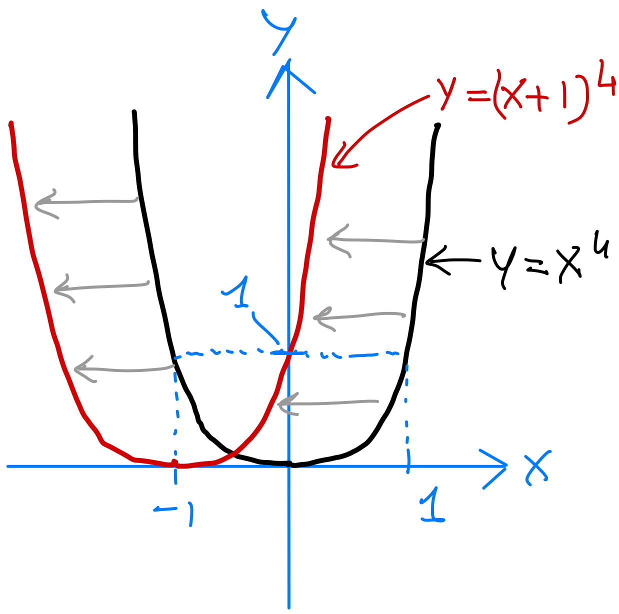
a) $y = x^3 - 1$



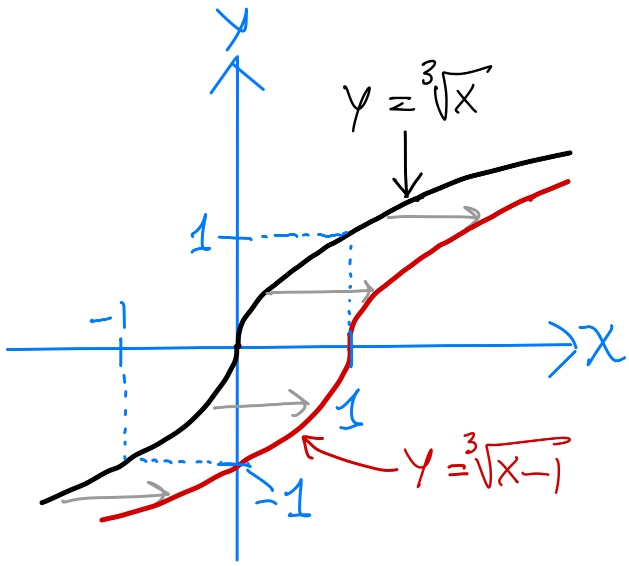

b) $y = \frac{1}{(x-2)^2}$




c) $y = (x+1)^4$




d) $y = \sqrt[3]{x-1}$

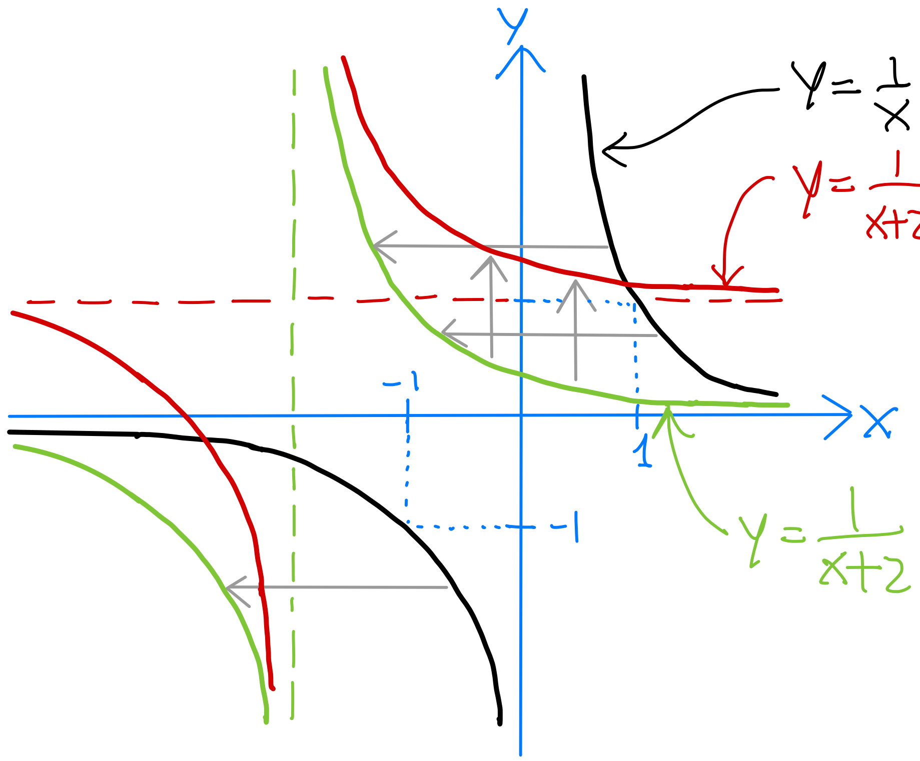


e) $\dfrac{1}{x+2}+1$

in due passi: $\dfrac{1}{x} \rightsquigarrow \dfrac{1}{x+2} \rightsquigarrow \dfrac{1}{x+2}+1$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+2)$ sposto verso sinistra di 2

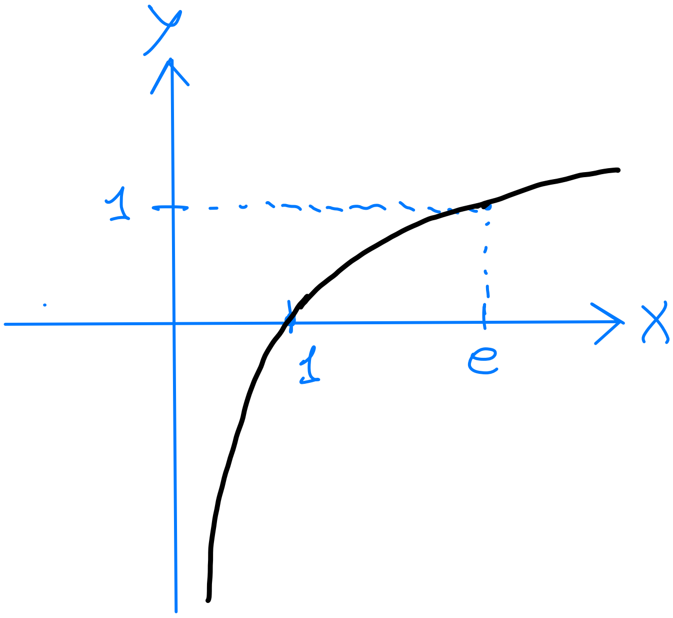
$f(x) \rightsquigarrow f(x)+1$ sposto verso l'alto di 1




Nota: va bene invertire l'ordine delle operaz.

$$\frac{1}{x} \rightsquigarrow \frac{1}{x}+1 \rightsquigarrow \frac{1}{x+2}+1$$

grafico del logaritmo $y = \log x = \log_e x$



AM1 gest 20/21 lezione 4

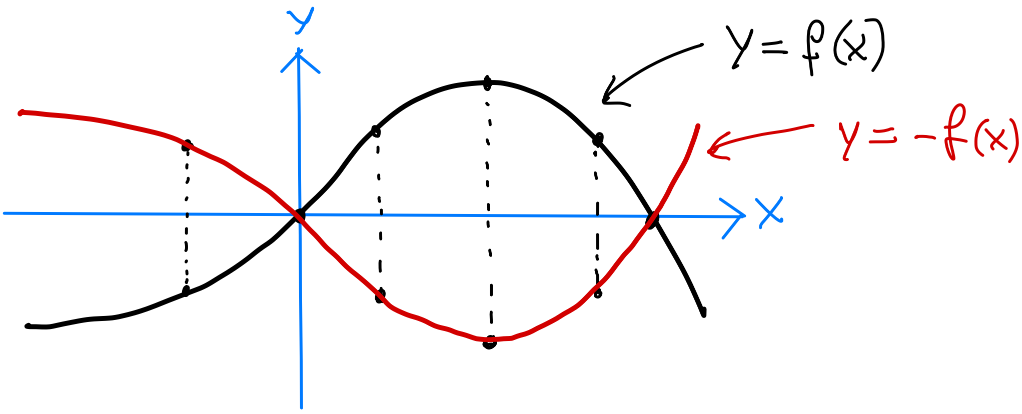
2/10/2020

Lezione del Venerdì : 9.40 ⟶ 11.40

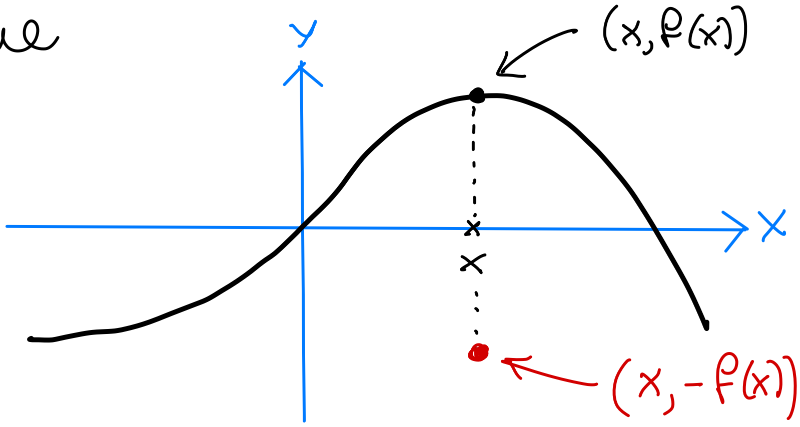
con pausa in mezzo $\boxed{\text{inizio reale}}$

## Operazioni sui grafici II

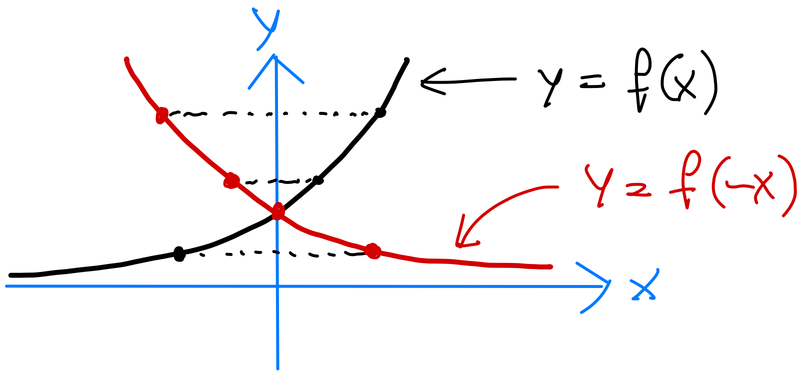
a) Il grafico di $-f(x)$ è ottenuto riflettendo quello di $f(x)$ rispetto all' asse delle x



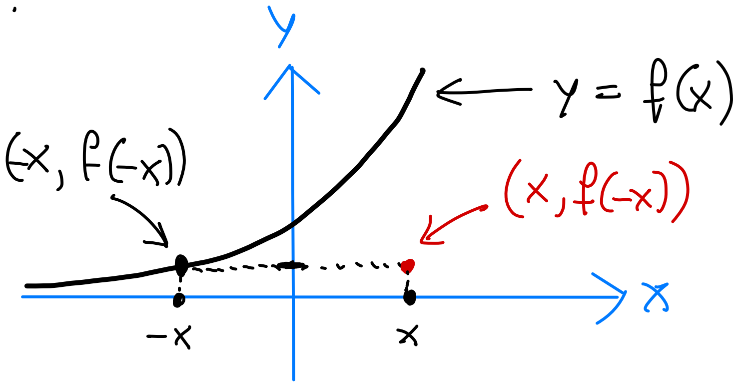

Spiegazione



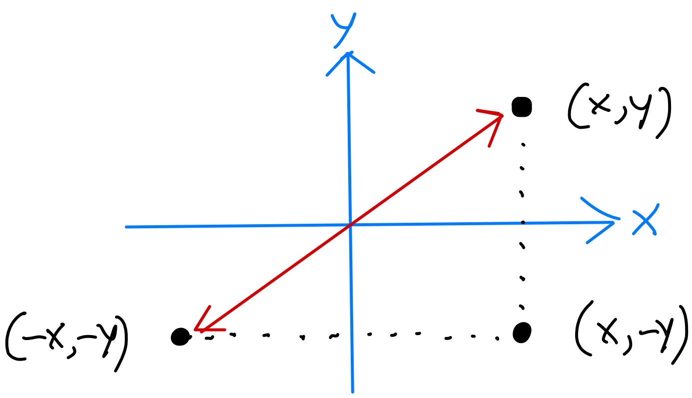
b) Il grafico di $f(-x)$ è la riflessione del grafico di $f$ rispetto all' asse $y$



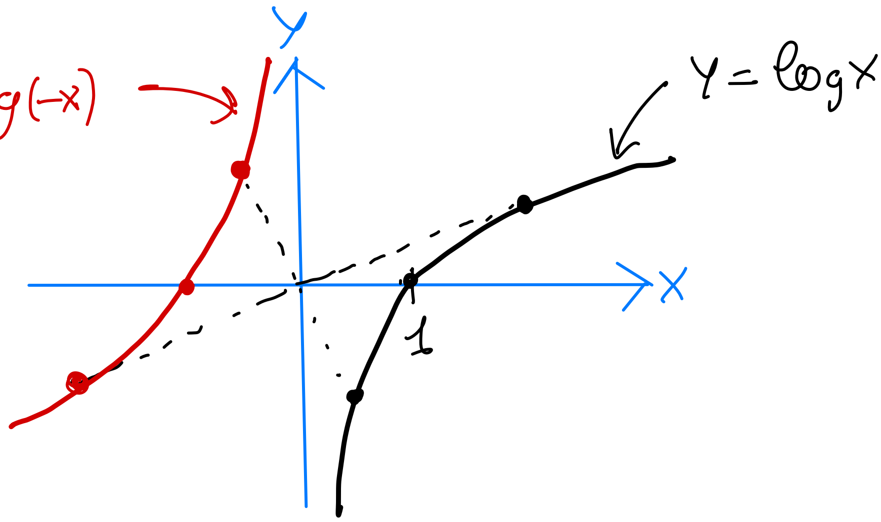

Spiegazione:




Osservazione: se rifletto un punto $(x,y)$ rispetto ad un asse e poi rispetto all' altro ottengo la riflessione rispetto all' origine

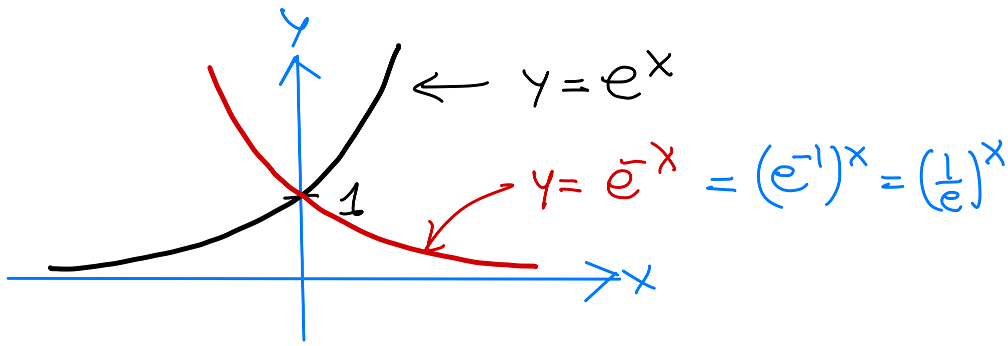


c) il grafico di $-f(-x)$ è quello di $f(x)$ riflesso prima rispetto all'asse x e poi all'asse y che è lo stesso che riflettere rispetto all'origine

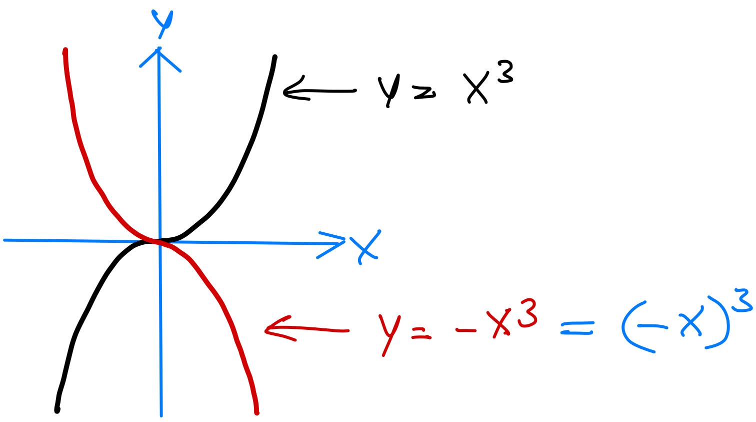



Esempi

1) $e^{-x}$




2) $-x^3$

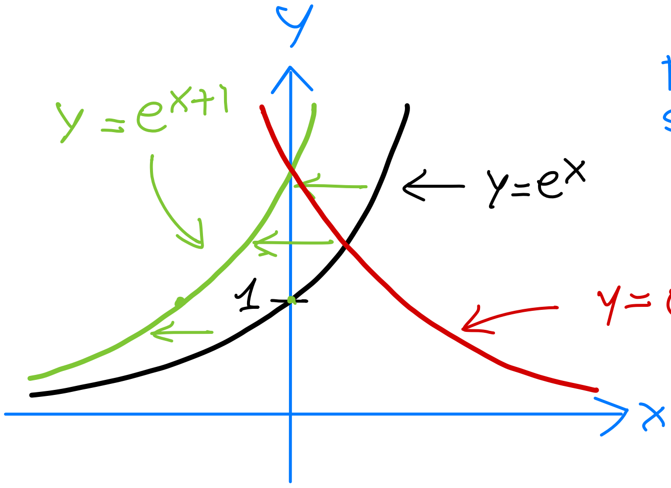


3) $e^{1-x}$

ci arrivo in due mosse: $e^{x} \rightsquigarrow e^{x+1} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

$f(x) \rightsquigarrow f(x+1)$
traslaz. verso SINISTRA di 1

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$
riflessione rispetto asse y

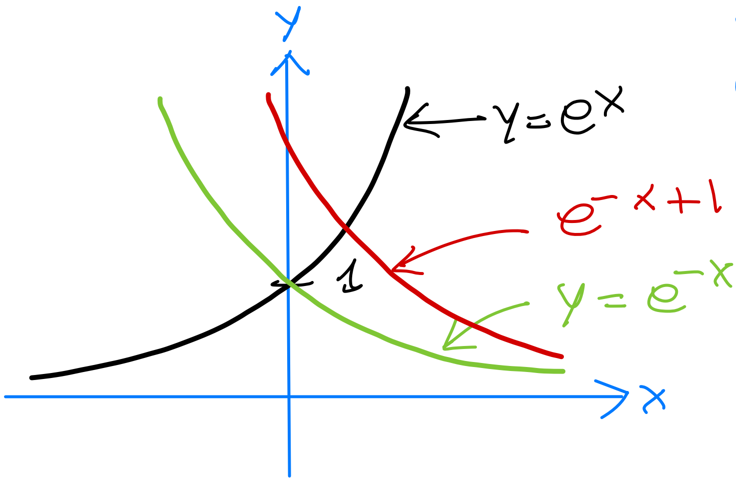



Versione alternativa

$e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-x+1}$

rifless. risp. asse y

$f(x) \rightsquigarrow f(\cancel{x+1})$ $x-1$
traslaz. verso ~~sinistra~~ destra di 1



# Funzioni pari

Una funzione $f(x)$ si dice "pari" se

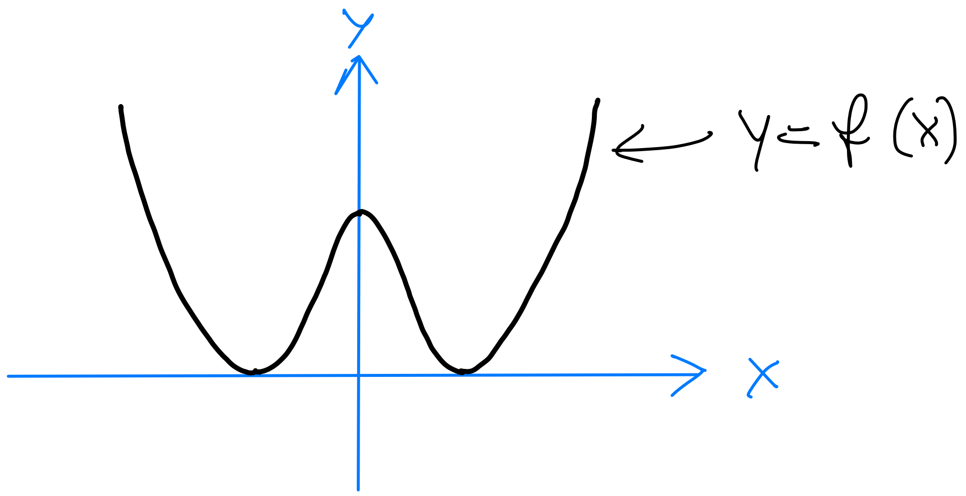
$f(-x) = f(x)$ per ogni $x$

esempio base $f(x) = x^n$ con $n$ pari

altro esempio $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x^2+1}$

$f(x)$ è pari se riflettendo il grafico rispetto asse y ottengo lo stesso grafico

cioè se il grafico di $f(x)$ è simmetrico rispetto all' asse y

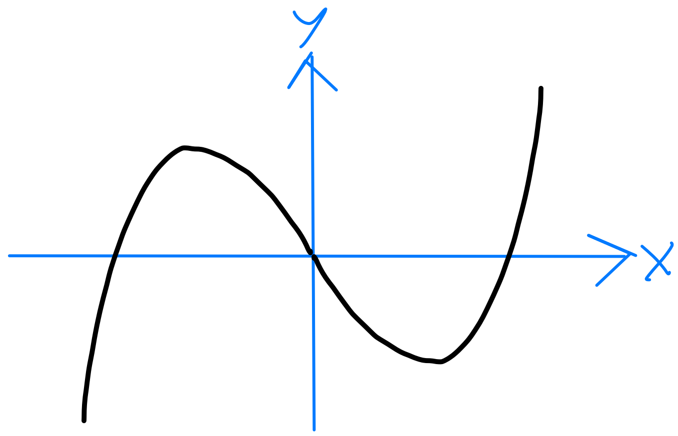


# Funzioni dispari

Una funz. $f(x)$ si dice "dispari" se
$f(-x) = -f(x)$ per ogni $x$.

Esempio base: $x^n$ con $n$ dispari

L'equazione $f(-x) = -f(x)$ equivale a
$f(x) = -f(-x)$ e quindi $f(x)$ è dispari se
riflettendo il suo grafico rispetto all'
origine ottengo lo stesso grafico, cioè
il grafico è simmetrico rispetto all'origine.

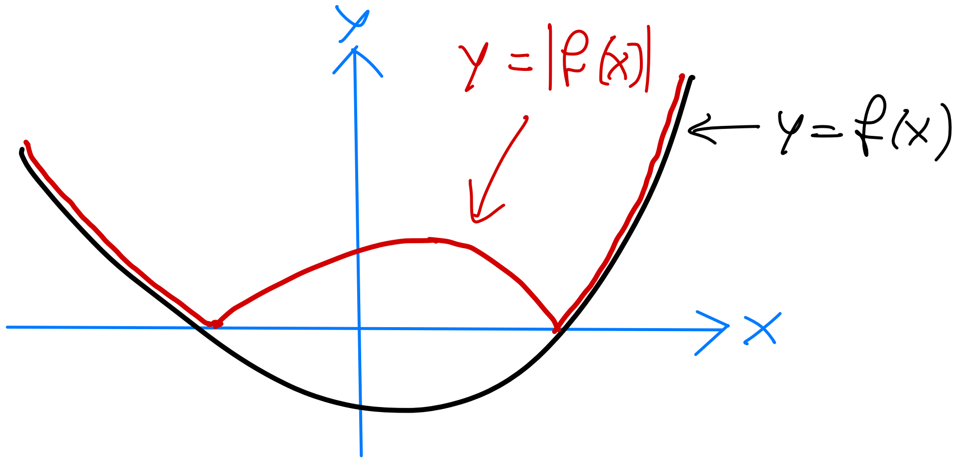



Esistono funzioni né pari né dispari

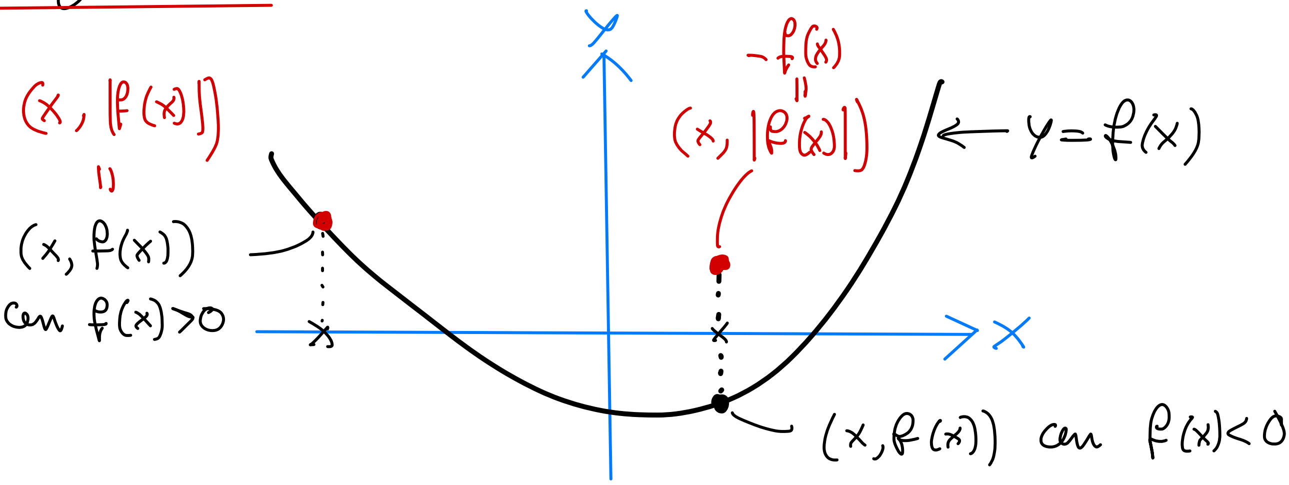
es.: $e^x$, $\log x$, $(x+1)^2$, $x^3-1$

# Operazioni sui grafici III

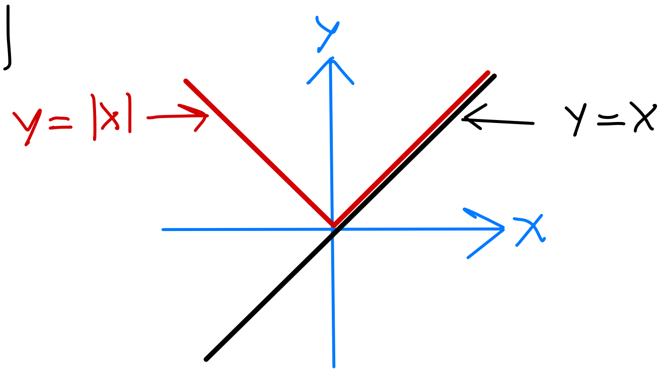
a) Il grafico di $|f(x)|$ si ottiene ribaltando la parte del grafico di $f(x)$ sotto l'asse $x$ (e portandola sopra l'asse $x$)



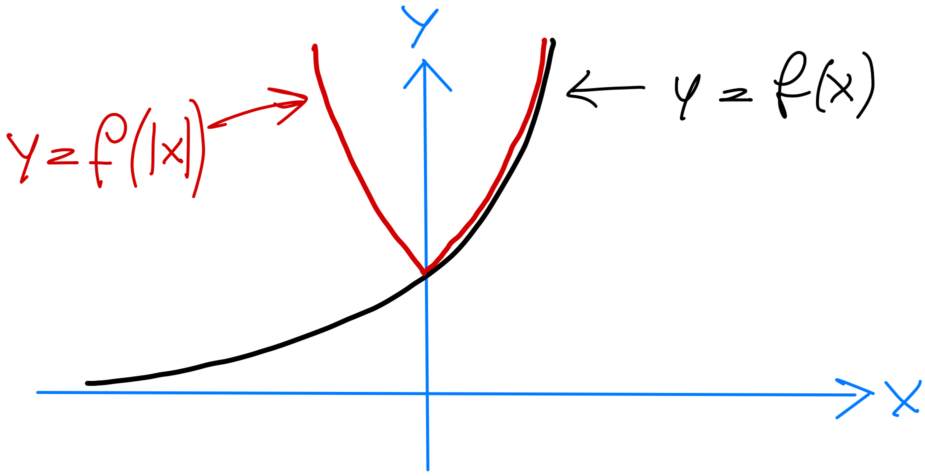

## Spiegazione




## Esempio: $|x|$



b) Il grafico di $f(|x|)$ è dato dalla parte del grafico di $f(x)$ a destra dell'asse y unita alla sua riflessione rispetto all'asse y.




Spiegazione: se $x > 0$, $f(|x|) = f(x)$

quindi il graf. di $f(|x|)$ a destra dell'asse y coincide con quello di $f(x)$;

inoltre $f(|x|)$ è una funzione pari.

quindi la parte del grafico a sinistra dell'asse y si ottiene riflettendo quella a destra!

(qualunque sia $f$ !!)

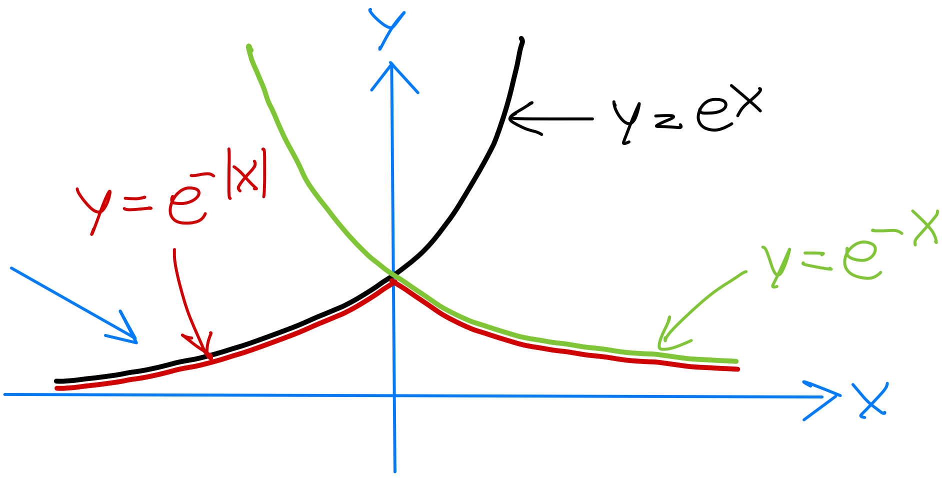
Esempio: $e^{-|x|}$

strategia: $e^{x} \rightsquigarrow e^{-x} \rightsquigarrow e^{-|x|}$

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$ riflessione risp. asse $y$

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$ ....

per $x<0$
$|x| = -x$
$-|x| = x$
$e^{-|x|} = e^{x}$




versione alternativa?

$e^{x} \rightsquigarrow e^{|x|} \rightsquigarrow e^{\cancel{+}|x|}$

$f(x) \rightsquigarrow f(|x|)$

$f(x) \rightsquigarrow f(-x)$

non funziona!

AM1 gest 20/21

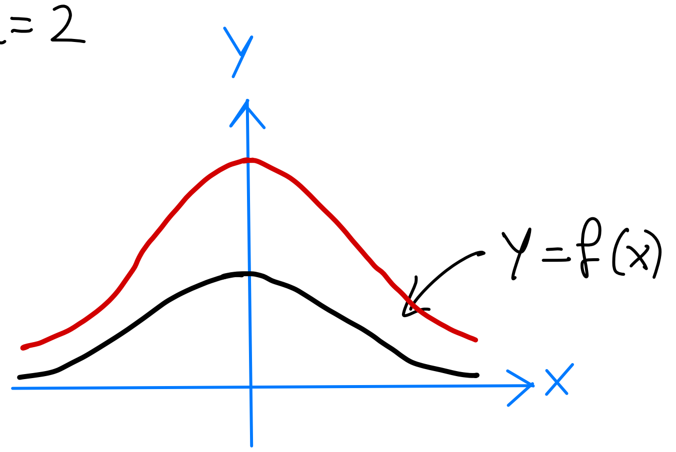
Lezione 5
prima parte

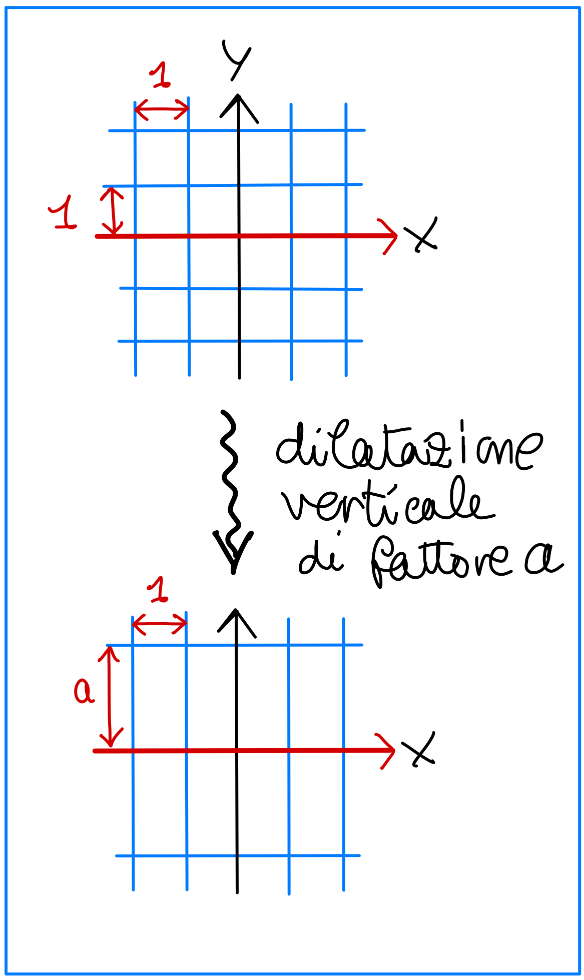
3/10/2020

## Operazioni sui grafici IV

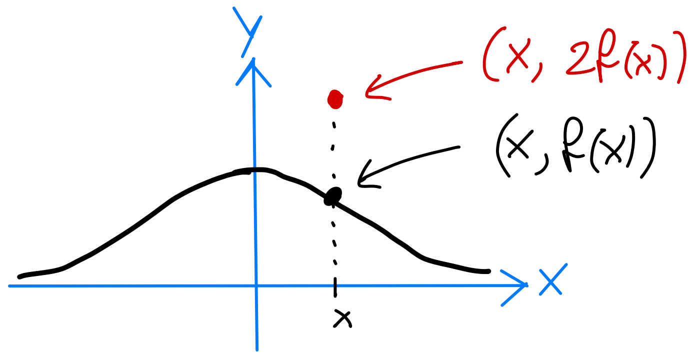
a) Dato $a>1$ il grafico $a\cdot f(x)$ è ottenuto dilatando il grafico di $f(x)$ verticalmente di un fattore $a$ (lasciando fisso l'asse $x$)

$a=2$



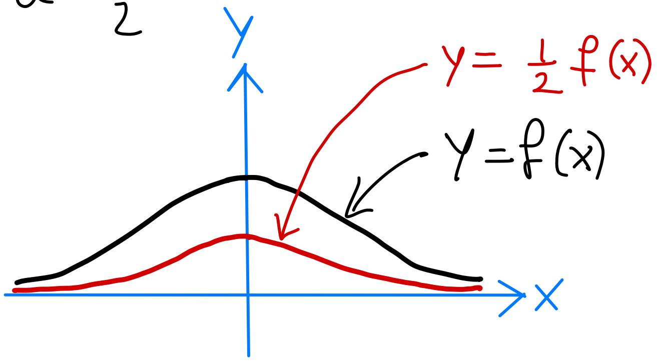



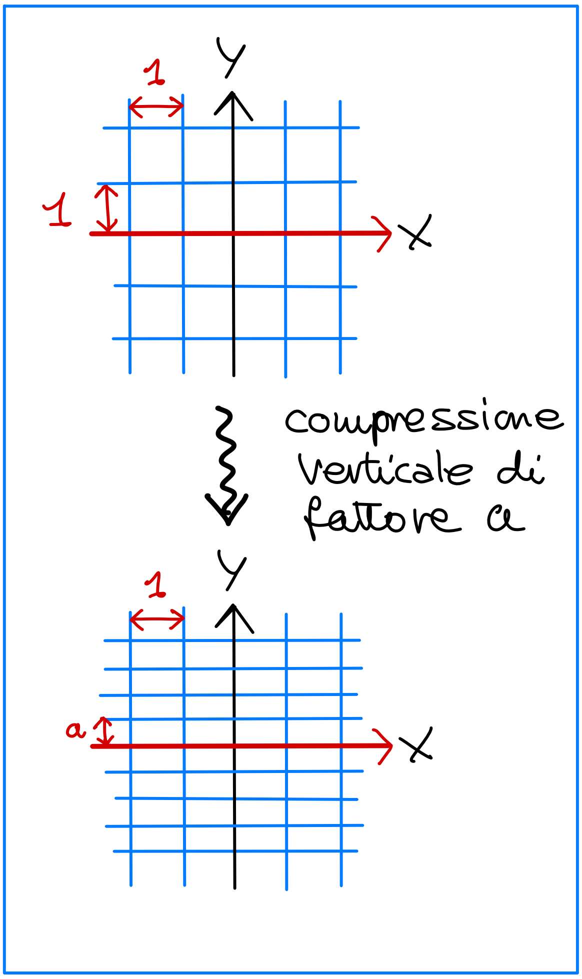

Spiegazione:



b) Dato $0<a<1$ il grafico di $a\,f(x)$ si ottiene comprimendo verticalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore $a$ (lasciando fisso l'asse $x$)

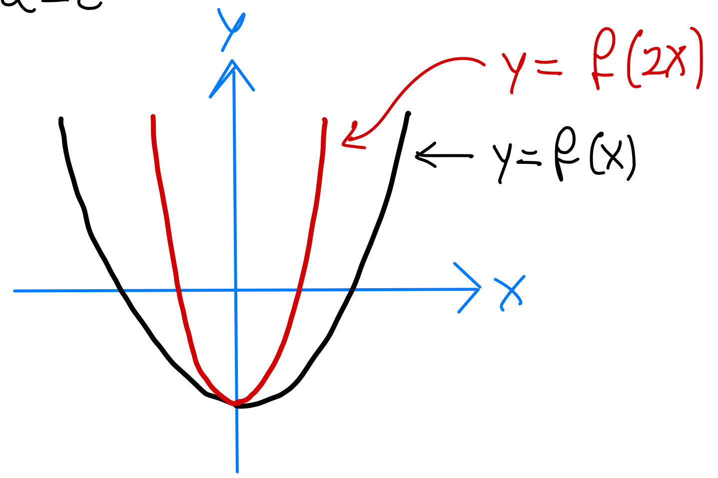
$a = \frac{1}{2}$

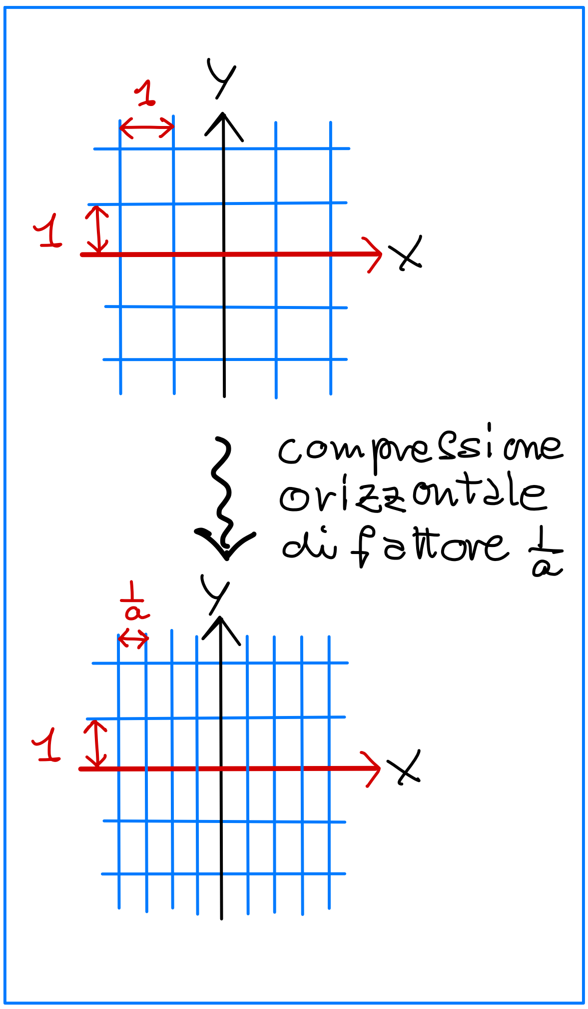


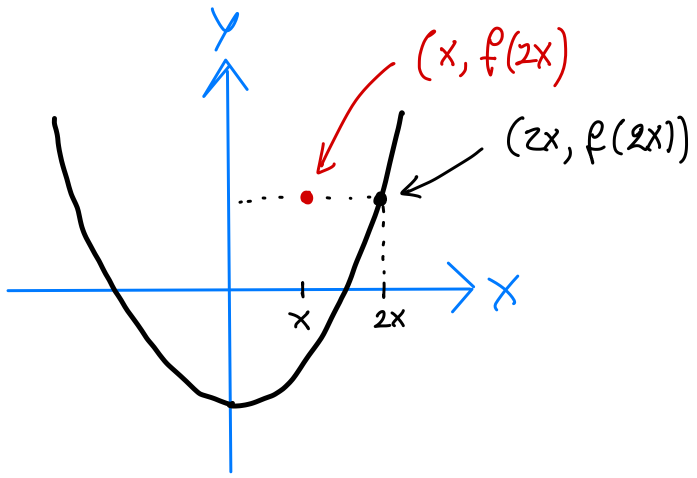
c) per $a > 1$ il grafico di $f(ax)$ si ottiene comprimendo orizzontalmente il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ (lasciando fisso l'asse delle $y$)

$a = 2$




spiegazione :

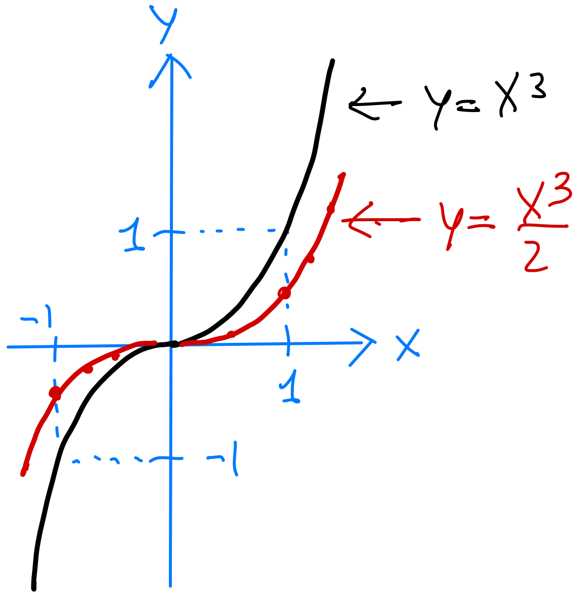



d) Se $0 < a < 1$, il grafico di $f(ax)$ si ottiene dilatando orizzont. il grafico di $f(x)$ di un fattore $\frac{1}{a}$ etc. etc.

## Esempi

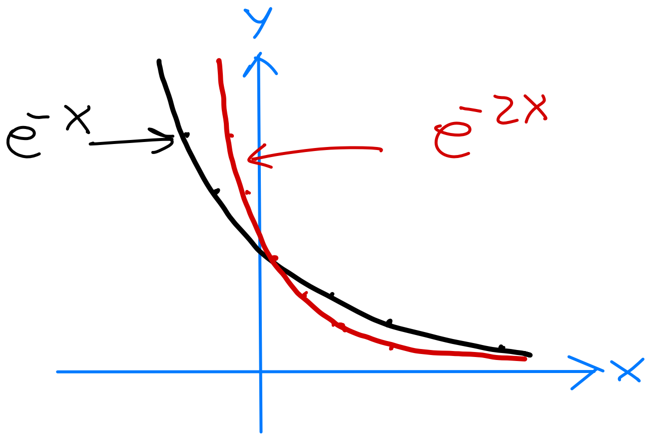
a) $\frac{x^3}{2}$ $\quad x^3 \rightsquigarrow \frac{1}{2}\cdot x^3$

compressione verticale di fattore $\frac{1}{2}$

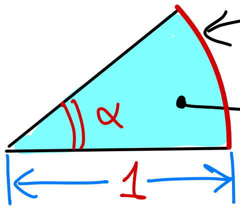



b) $e^{-2x}$ $\quad e^{-x} \rightsquigarrow e^{-(2\cdot x)}$

compressione orizzontale di fattore $\frac{1}{2}$



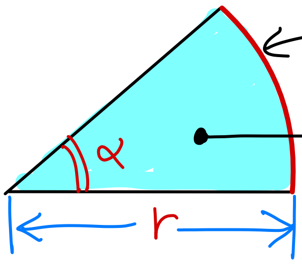
# Ripasso di trigonometria




arco di lunghezza $\alpha$

settore circ. di area $\frac{\alpha}{2}$

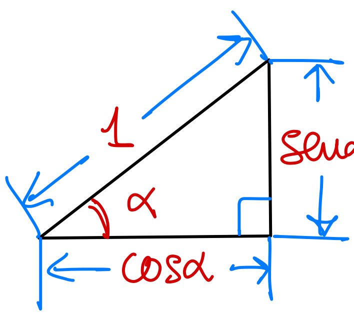
e per similitudine (cosa vuol dire?) ottengo

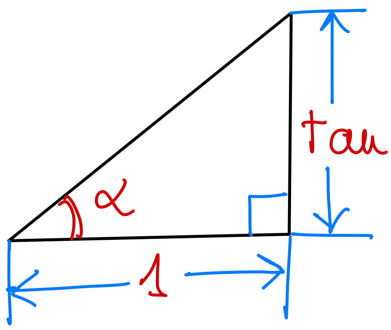



arco di lunghezza $r\alpha$

settore circ. di area $\frac{\alpha r^2}{2}$

## Definizione di $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ per $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$



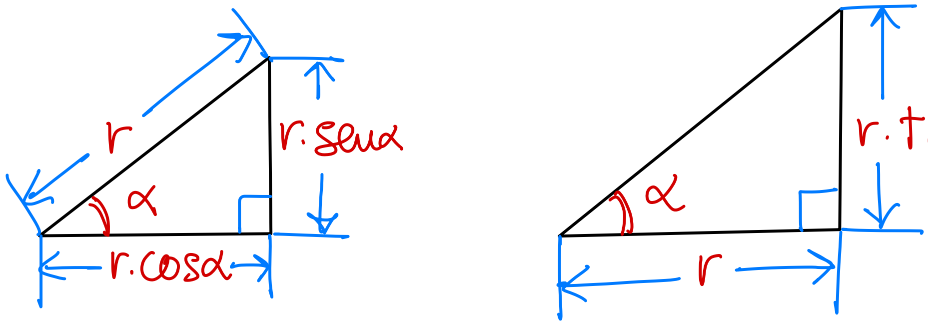




## Proprietà

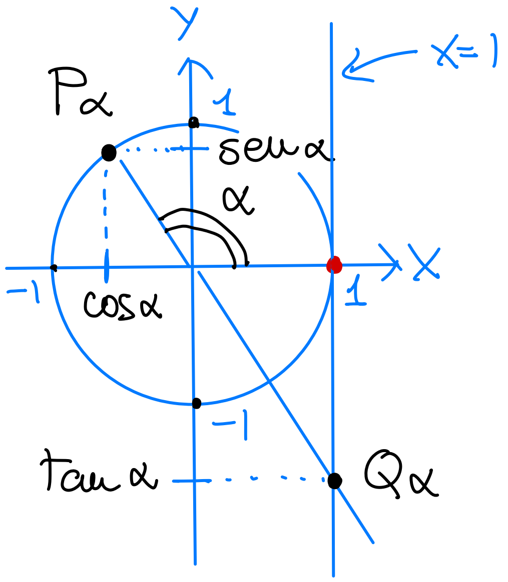
- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftarrow$ teor. di Pitagora

$$\boxed{\text{notazione: } \cos^2\alpha = (\cos\alpha)^2 \neq \cos\alpha^2 = \cos(\alpha^2)}$$

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Leftarrow$ similitudine




## Definizione di $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ per $\alpha \in \mathbb{R}$




$P_\alpha$ punto ottenuto partendo da $(1,0)$ e percorrendo una distanza $|\alpha|$ lungo la circonferenza in senso antiorario se $\alpha > 0$ e in senso orario se $\alpha < 0$.

$\boxed{P_\alpha \text{ ha coordinate } (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)}$

$Q_\alpha$ intersezione della retta verticale di eq. $x=1$ con la retta che passa per $P_\alpha$ e l'origine.

$\boxed{Q_\alpha \text{ ha coordinate } (1, \tan\alpha)}$

## Osservazioni

- $\tan\alpha$ non è definita se $\alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k$ = intero anche negativo perché $Q_\alpha$ non esiste;

- $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ non sono sempre positivi;

- $P_{\alpha+2\pi} = P_\alpha \Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+2\pi) = \cos\alpha \\ \sin(\alpha+2\pi) = \sin\alpha \end{cases}$

  cioè le funzioni $\sin\alpha$ e $\cos\alpha$ hanno periodo $2\pi$.

> Ricordo che una funzione $f(x)$ ha periodo $T$ se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x$
> 
> $T$: numero positivo

- $P_{\alpha+\pi}$ è l'opposto (risp. all'origine) di $P_\alpha$

  $\Rightarrow \begin{cases} \cos(\alpha+\pi) = -\cos\alpha \\ \sin(\alpha+\pi) = -\sin\alpha \end{cases}$

- $Q_{\alpha+\pi} = Q_\alpha \Rightarrow \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha$

  cioè la funz. $\tan\alpha$ ha periodo $\pi$

- Valori per alcuni angoli significativi

| $\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{sen}\alpha$ | $\tan\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $0$ | $1$ | $0$ | $0$ |
| $\pi/6$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\pi/4$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $1$ |
| $\pi/3$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\pi/2$ | $0$ | $1$ | non def. |

- formule utili:

a) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \implies \begin{cases} \operatorname{sen}\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} \end{cases}$

che significa?

b) $\tan\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$

c) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\alpha$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \operatorname{sen}\alpha$

d) $\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$

# Lezione 5 – II$^a$ PARTE

* Esercizio: Disegnare l'insieme A dei punti $(x,y)$ del piano tali che

$$-1 \le x \le 1, \qquad (x+1)^3 \le y \le e^{-x}$$

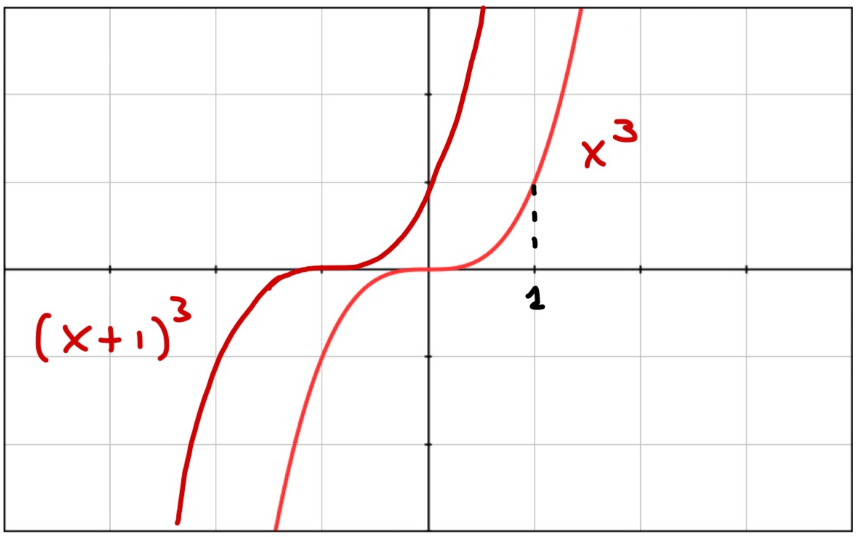
**Soluzione:**

**PRIMO PASSO:** disegno il grafico di $y=(x+1)^3$

Il disegno del grafico della funzione $g:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)^3 \end{cases}$

si ottiene traslando orizzontalmente a sinistra di 1 il disegno del grafico della funzione $f:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^3 \end{cases}$

(come ottenere il grafico di $g(x) = f(x+a)$ con $a>0$ a partire dal grafico di $f(x)$).

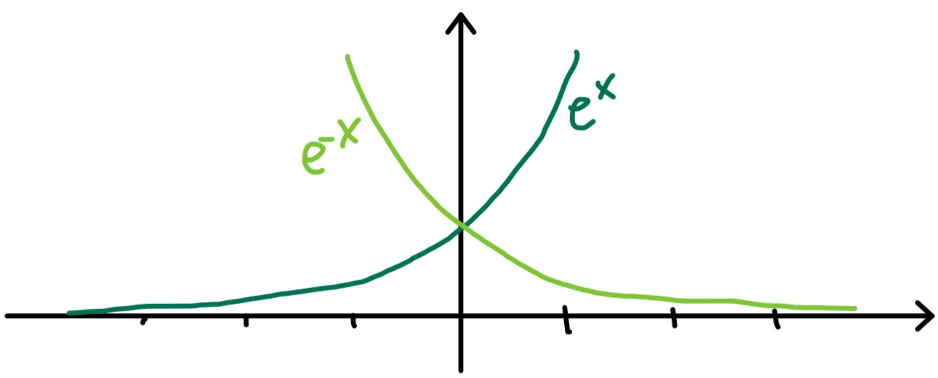



**SECONDO PASSO:** disegno il grafico di $e^{-x}$

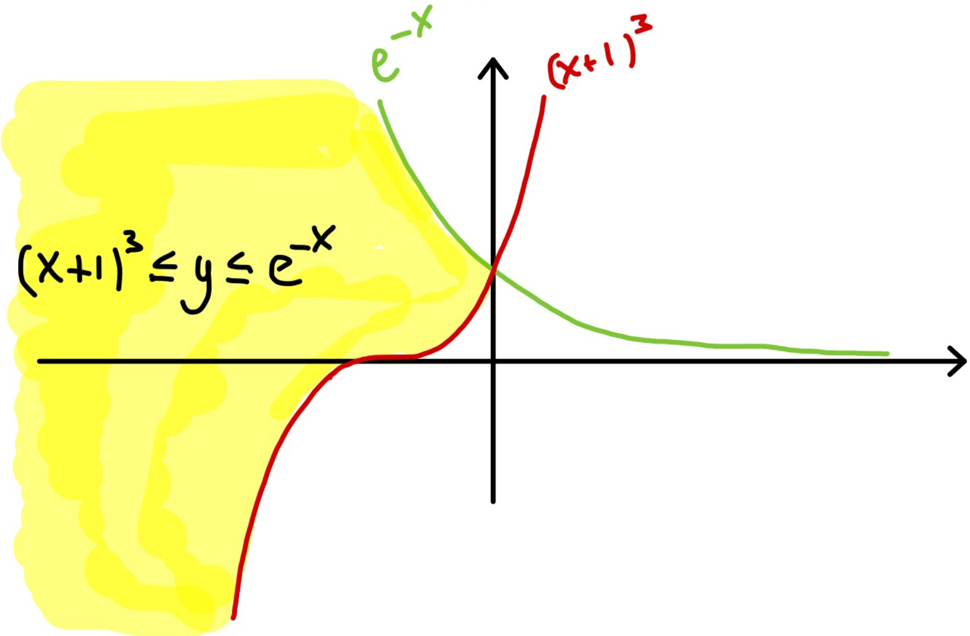
Il disegno del grafico della funzione $h:\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^{-x} \end{cases}$

si ottiene riflettendo rispetto all'asse delle y il disegno del grafico della funzione esponenziale con base e

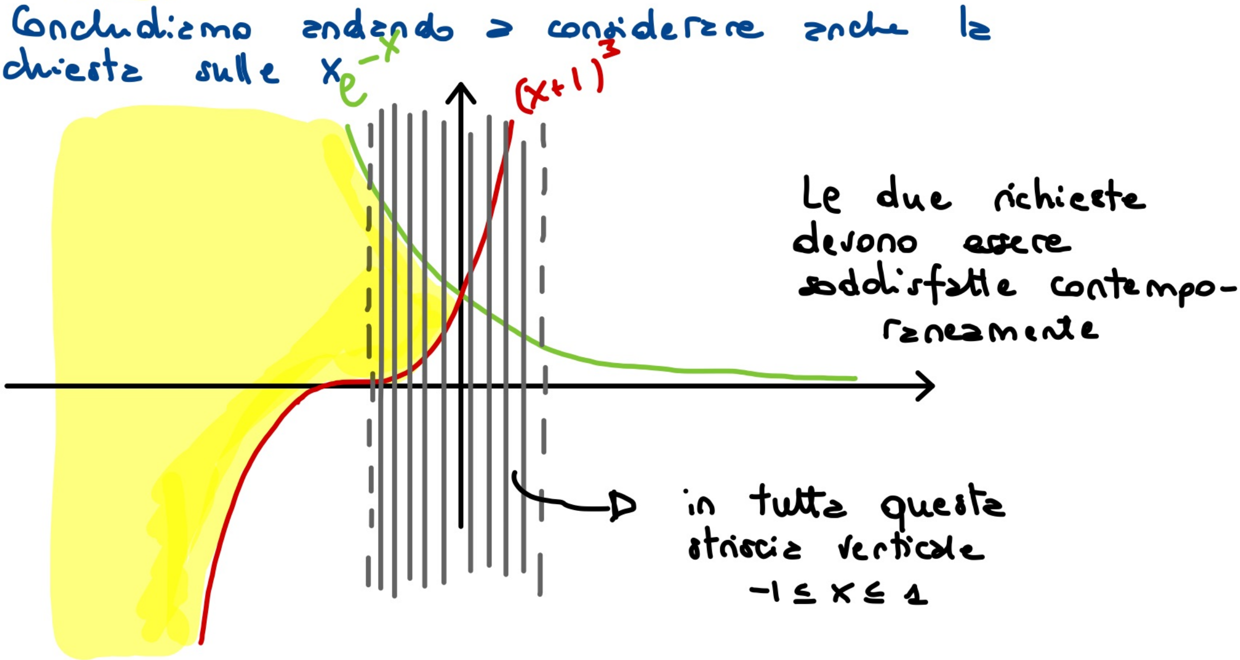
(come ottenere il grafico di $f(-x)$ a partire dal grafico di $f(x)$).



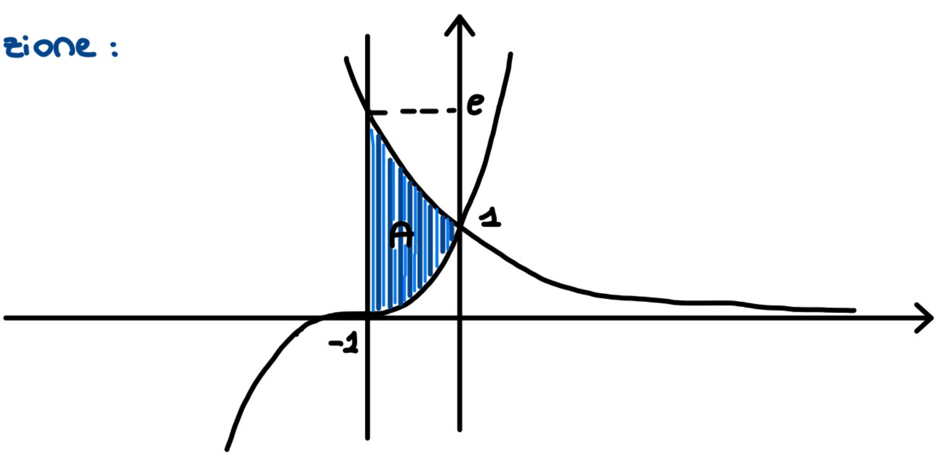
PASSO 3: Riportiamo i grafici delle due funzioni in un unico disegno e individuiamo le y richieste




PASSO 4: Concludiamo andando a considerare anche la richiesta sulle x



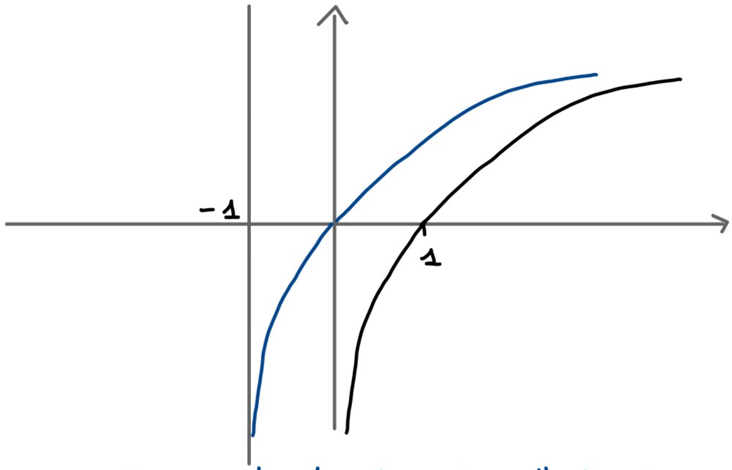

Soluzione:



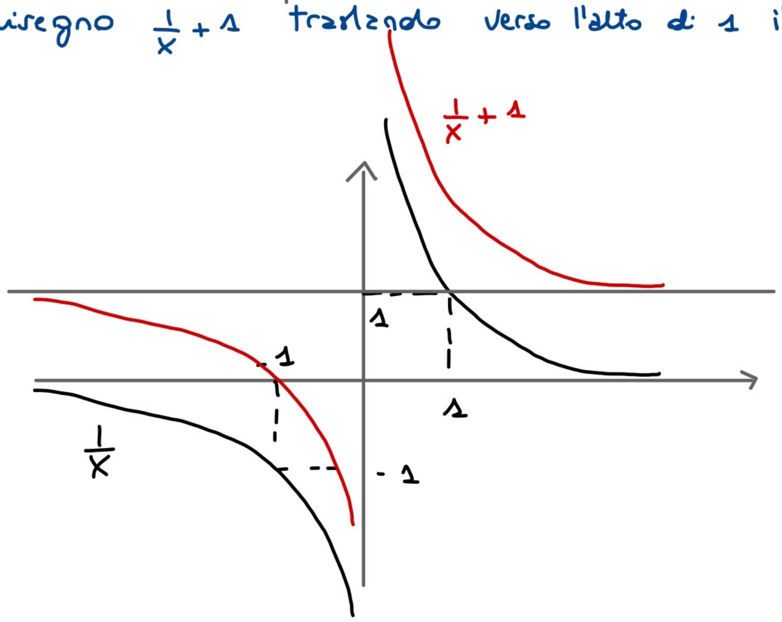
*** Esercizio: Risolvere graficamente la disequazione** $\log(x+1) \geq \frac{1}{x} + 1$.

Osservazione preliminare: le soluzioni della disequazione sono delle $x \in \mathbb{R}$. Quando vado a rappresentare nel piano cartesiano il grafico di una funzione $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, l'insieme di partenza $\mathbb{R}$, dove variano le $x$, è identificato (rappresentato nel disegno) con l'asse delle ascisse. Dovremo dunque andare a evidenziare parti di questo asse.

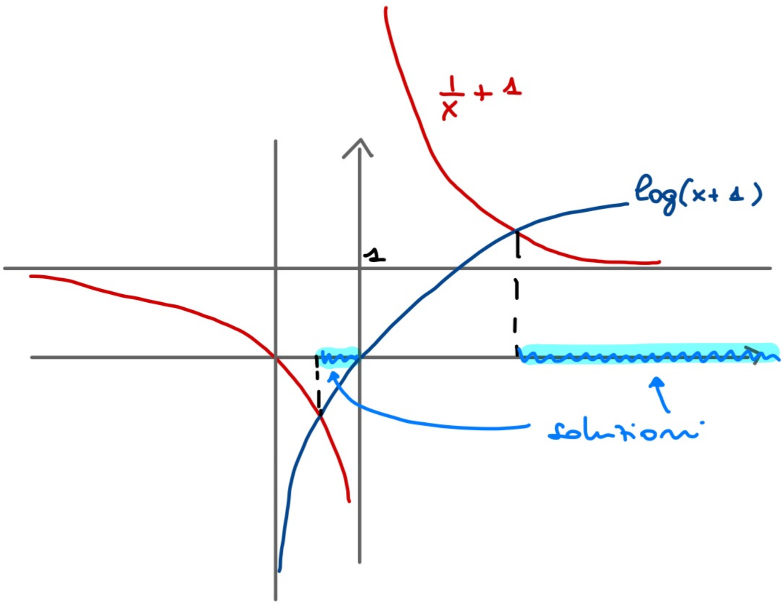
PASSO 1: disegno $\log(x+1)$ $\rightarrow$ traslazione orizzontale verso sinistra di 1 della funzione logaritmo naturale.




PASSO 2: disegno $\frac{1}{x}+1$ traslando verso l'alto di 1 il grafico di $\frac{1}{x}$



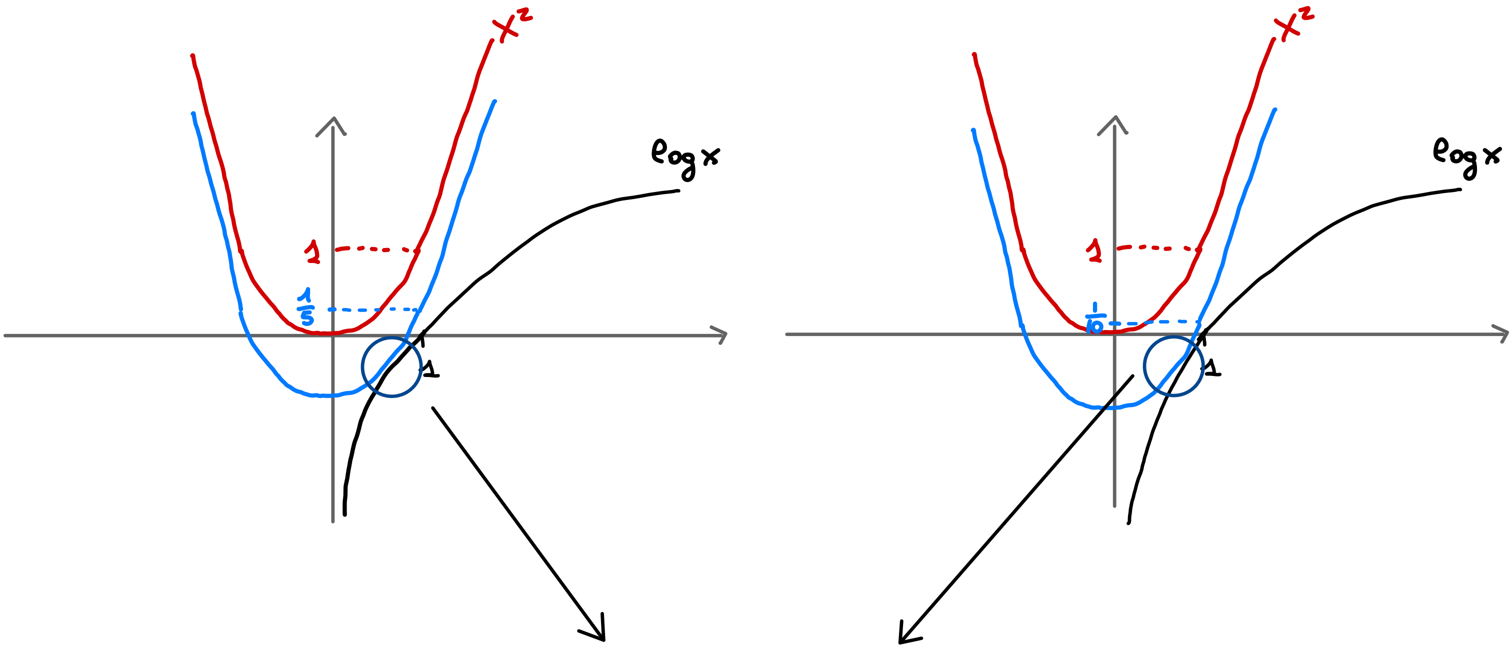

Soluzione:



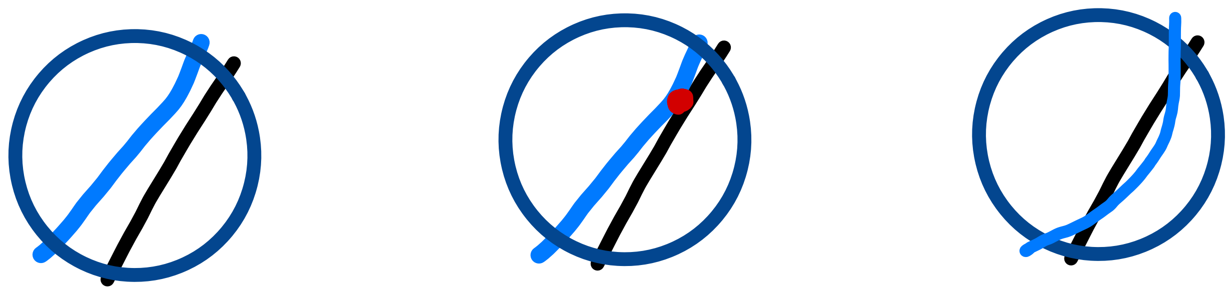
ATTENZIONE: la risoluzione grafica di una disequazione è sempre attendibile?

ESEMPIO: Risolvere graficamente la disequazione

$\log(x) \geq x^2 - \frac{4}{5}$ $\qquad\qquad$ $\log(x) \geq x^2 - \frac{9}{10}$




che comportamento abbiamo nella zona cerchiata?



nessuna intersezione? $\qquad$ un punto di contatto? $\qquad$ due intersezioni?

Il disegno del grafico non è abbastanza preciso per fornirmi questa informazione.

* Esercizio : disegnare il grafico della funzione

$$f(x) = \left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right|$$

**Soluzione :** Ci chiediamo qual è l'insieme di definizione di $f$: $x$ deve essere diverso da $-2$. (Il disegno del grafico dovrà rispecchiare questa proprietà).

Quindi $f : \begin{cases} (-\infty,-2) \cup (-2,+\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right| \end{cases}$

Notiamo inoltre che la funzione è sempre positiva.

Dobbiamo cercare di ridurci ad una funzione elementare: la potenza $\frac{1}{x^2}$.

Cerchiamo di fare operazioni sui grafici che ci permettano di passare da $\frac{1}{x^2}$ a $f$.

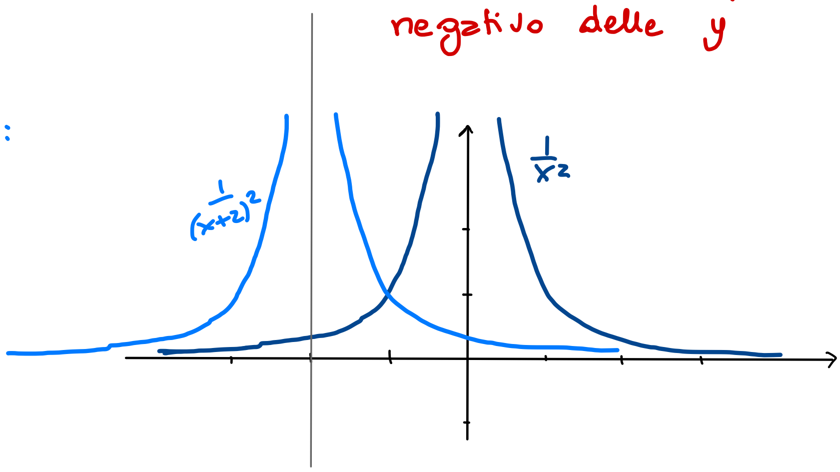
PASSO 0 : $\frac{1}{x^2}$

PASSO 1 : $\frac{1}{(x+2)^2}$ → traslazione orizzontale di $\frac{1}{x^2}$ a sinistra di 2

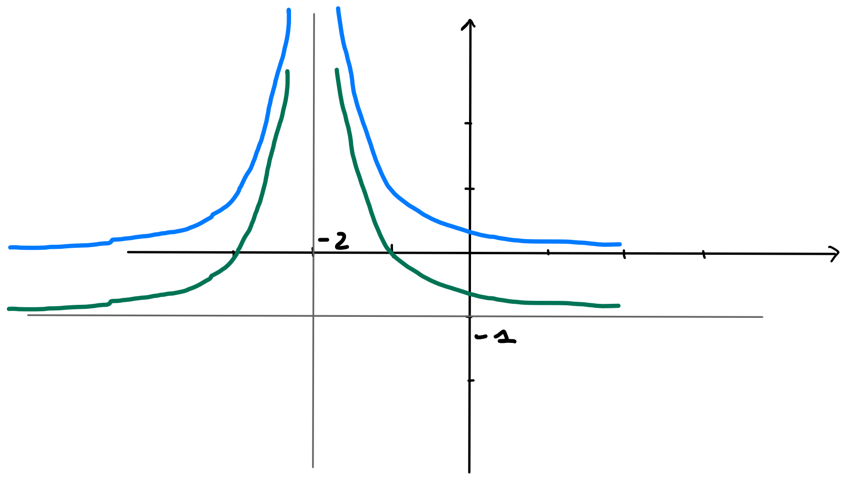
PASSO 2 : $\frac{1}{(x+2)^2} - 1$ → traslazione verticale di $\frac{1}{(x+2)^2}$ verso il basso di 1

PASSO 3 : $\left| \frac{1}{(x+2)^2} - 1 \right|$ → rifletto rispetto all'asse $x$ tutta la parte del grafico di $\frac{1}{(x+2)^2} - 1$ che sta nel semipiano negativo delle $y$

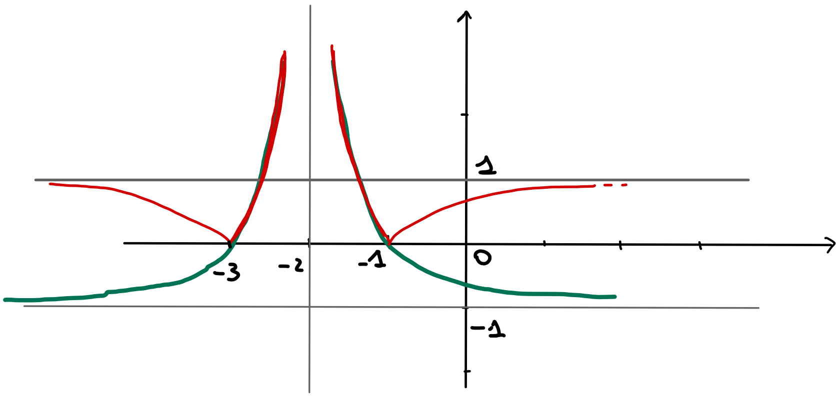
PASSO 1 :



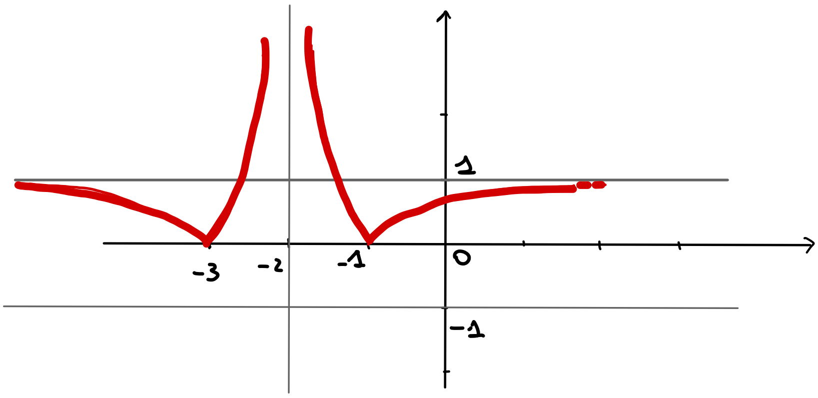

PASSO 2 :



PASSO 3:



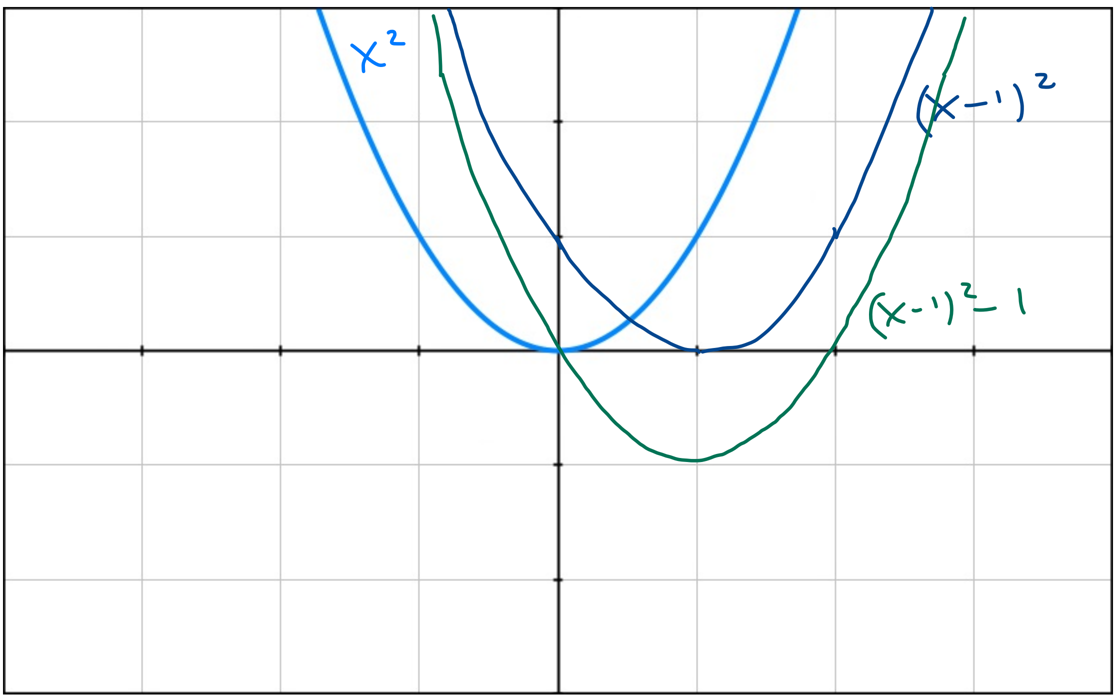

Soluzione:




controllo 1: insieme di definizione
controllo 2: funzione positiva.

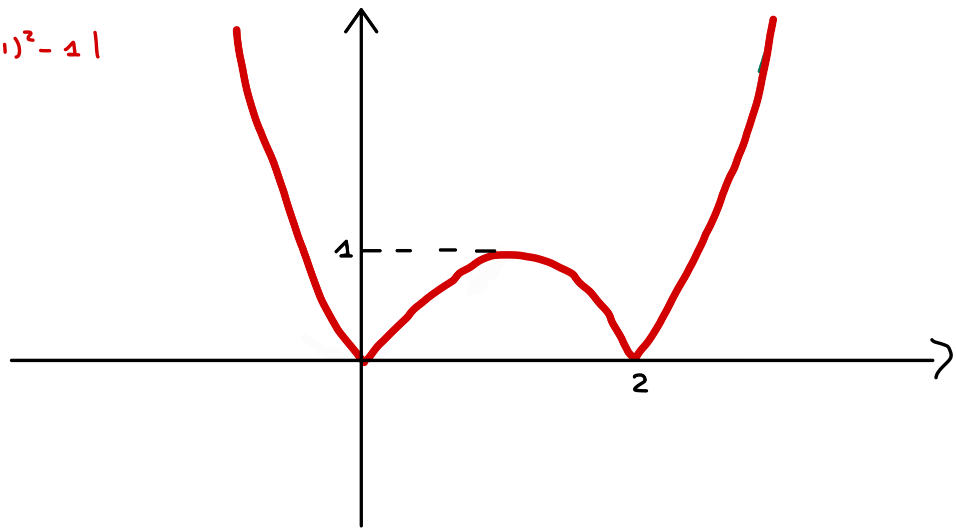
* Esercizio : Determinare al variare di $a \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $|(x-1)^2 - 1| = a$

Soluzione: disegno il grafico della funzione data dalla formula $|(x-1)^2 - 1|$



disegno del grafico di:

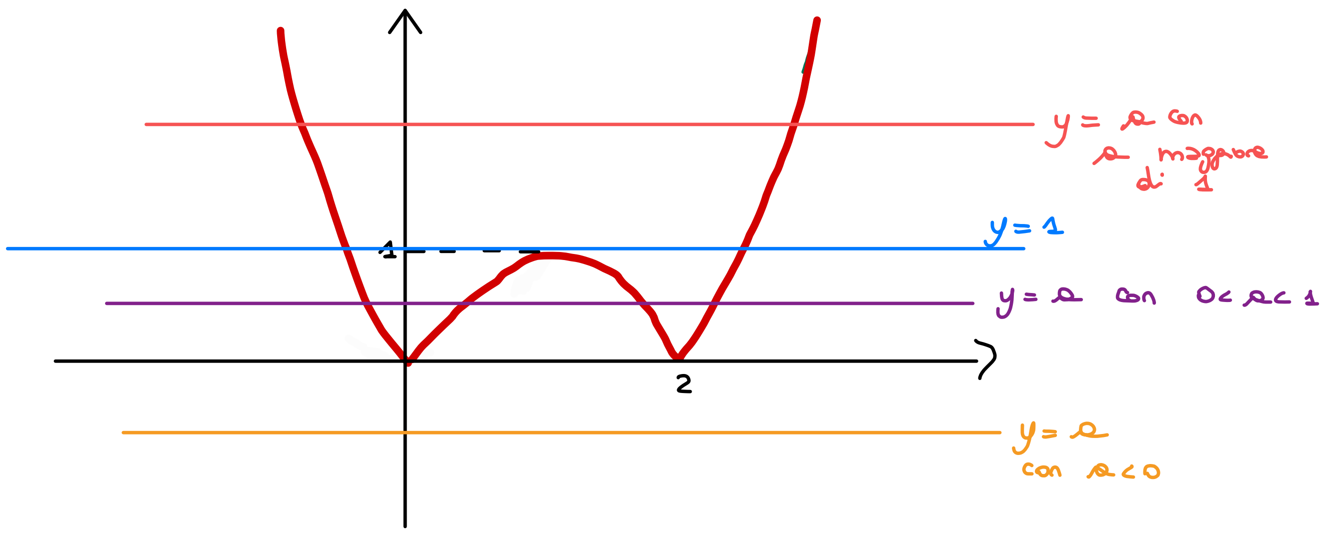
$$f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto |(x-1)^2 - 1| \end{cases}$$




$y = a$ è una retta orizzontale.
Al variare di $a$ dobbiamo contare quante sono le intersezioni di questa retta con il grafico di $f$.

Se $a$ è negativo non c'è nessuna intersezione
se $a$ è zero, ce ne sono 2
se $a$ è compreso tra zero e 1 ce ne sono 4

se $a$ è maggiore di 1 ce ne sono 2



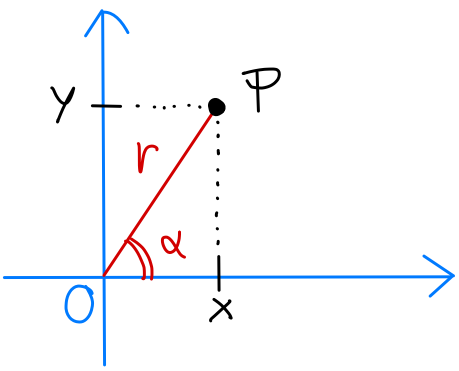

soluzione: il numero di soluzioni è
- 0 se $a \in (-\infty, 0)$
- 2 se $a \in (1, +\infty) \cup \{0\}$
- 3 se $a = 1$
- 4 se $a \in (0, 1)$

AM1 gest  Lezione 6

6/10/2020

Ripasso di trigonometria (continuazione)

## Coordinate polari




$(x,y)$ coordinate cartesiane di P

$(r,\alpha)$ coordinate polari di P

$r :=$ distanza di P dall' origine O

$\alpha :=$ angolo tra segmento $\overline{OP}$ e asse x.

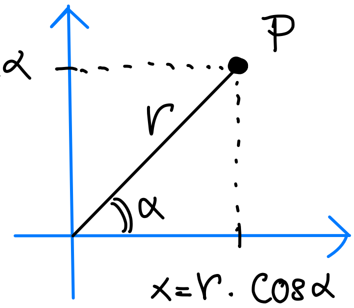
## Osservazioni

- per l'origine O, $r=0$ e $\alpha$ non è definito.
- $\alpha$ è un numero positivo o negativo.
- $\alpha$ non è univocamente determinato:
  se $\alpha$ è un angolo per P, allora anche $\alpha + 2k\pi$ con k intero è un angolo per P.
  Per avere un unico $\alpha$ si impone talvolta $0 \leq \alpha < 2\pi$ (oppure $-\pi < \alpha \leq \pi$).

## Formule di conversione

note $r$ e $\alpha$, $x$ e $y$ sono date da:

$$\begin{cases} x = r \cos\alpha \\ y = r \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

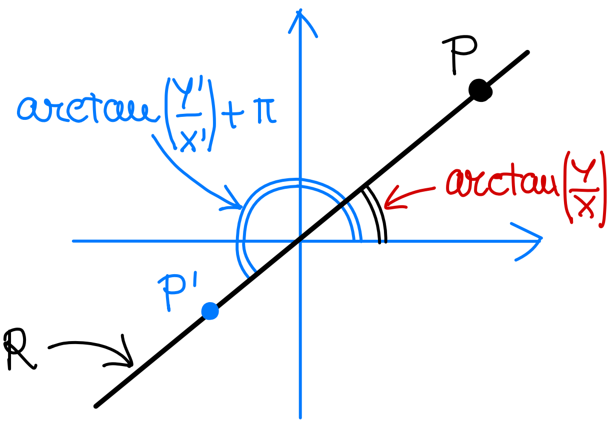



note $x$ e $y$, $r$ e $\alpha$ sono date da

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} & \Leftarrow \text{teorema di Pitagora} \\ \boxed{\tan\alpha = \dfrac{y}{x}} & \Leftarrow \dfrac{y}{x} = \dfrac{\cancel{r}\operatorname{sen}\alpha}{\cancel{r}\cos\alpha} = \tan\alpha \end{cases}$$

non basta a trovare $\alpha$!

$\alpha = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ non è la formula corretta.




Infatti per ogni $P, P'$ sulla retta $R$ vale $y/x = y'/x'$ e quindi

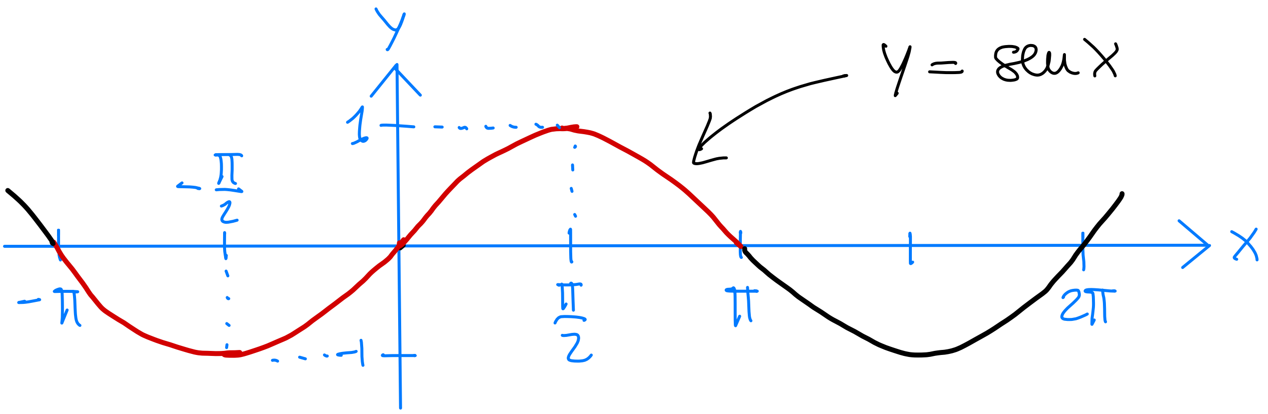
$$\arctan(y/x) = \arctan(y'/x')$$

Ma quest'angolo non va bene per tutti i punti.

Formula corretta:

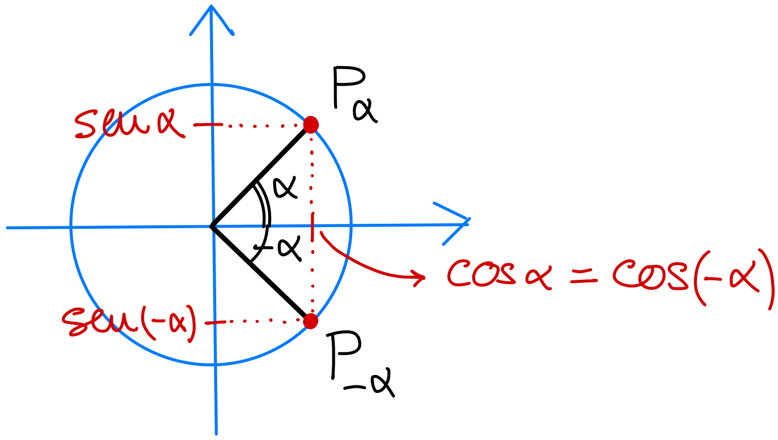
$$\alpha = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & \text{se } x>0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{se } x=0,\ y>0 \\ \frac{\pi}{2}+\pi & \text{se } x=0,\ y<0 \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right)+\pi & \text{se } x<0 \end{cases}$$

## Grafici delle funzioni $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\tan x$




Disegno la parte in rosso usando la definiz. di $\operatorname{sen} x$ (con la circonferenza trigonometrica) e la parte in nero usando il fatto che $\operatorname{sen} x$ è una funzione di periodo $2\pi$ e quindi il grafico si "ripete" sugli intervalli $[-\pi,\pi]$, $[\pi,3\pi]$, $[-3\pi,-\pi]$ etc.

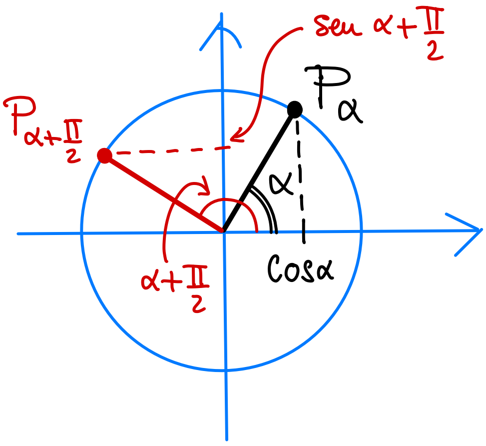
Il disegno suggerisce che $\operatorname{sen} x$ è una funzione dispari, cosa che si verifica dalla definizione:



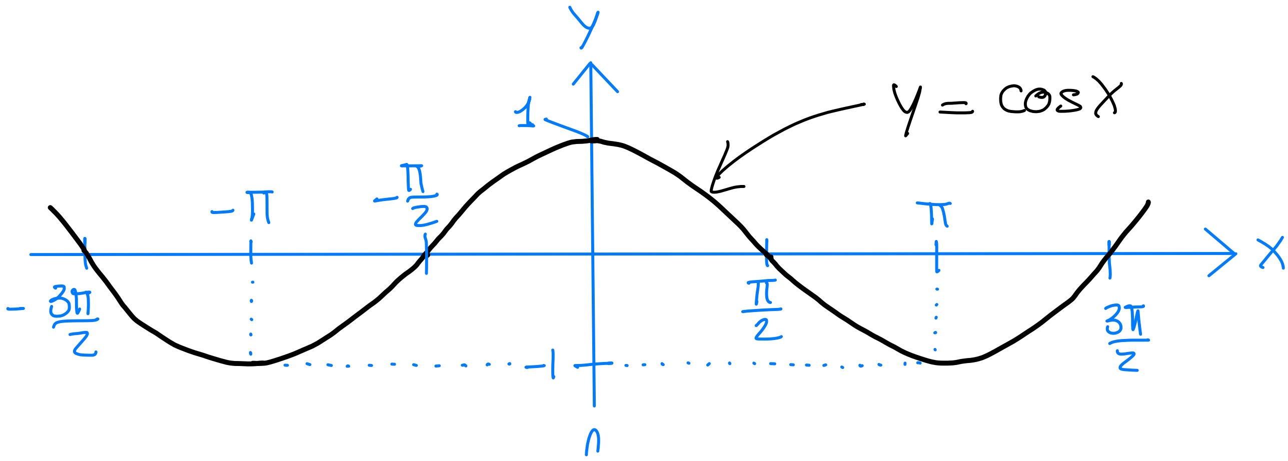

Questo mostra anche che la funzione coseno è pari: $\cos(-x) = \cos x$.

Inoltre vale $\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

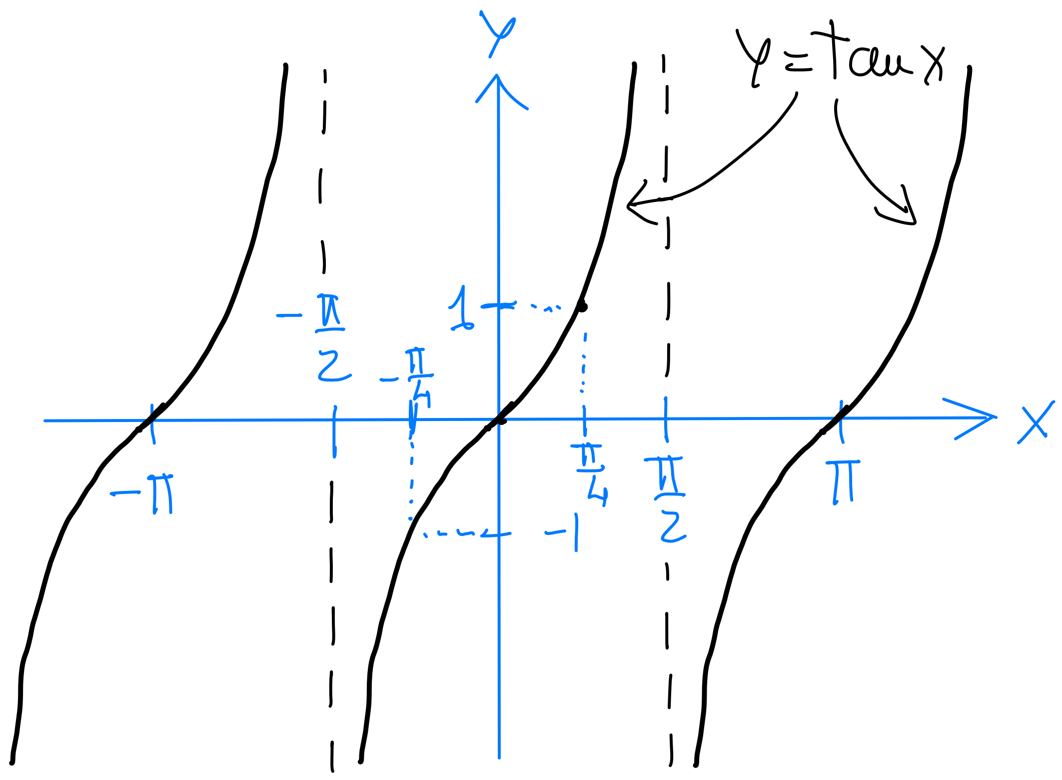
Posso verificarlo usando la formula per il seno della somma di due angoli o direttamente dalla definizione:



Quindi il grafico di $\cos x$ si ottiene traslando quello di $\operatorname{sen} x$ verso sin. di $\frac{\pi}{2}$




Infine il grafico della tangente




Ho usato che $\tan x$ ha periodo $\pi$.

# Funzioni (terminologia)

Intervalli: dati $a<b$

$$[a,b] := \{x : a \leq x \leq b\}$$
$$(a,b) := \{x : a < x < b\}$$
$$[a,b) := \ldots \qquad (a,b] := \ldots$$

$$[a,+\infty) := \{x : x \geq a\}$$
$$(-\infty, b] := \{x : x \leq b\}$$
$$(a,+\infty) := \ldots \qquad (-\infty, b) := \ldots$$

## Definizione di funzione (non precisa)

Dati due insiemi $X$ e $Y$ (di numeri o altro) una funzione $f$ da $X$ a $Y$ ($f: X \to Y$) è una "procedura" che ad ogni $\boxed{x \in X}$ associa un elemento $y \in Y$, indicato con $\boxed{f(x)}$.

input

output

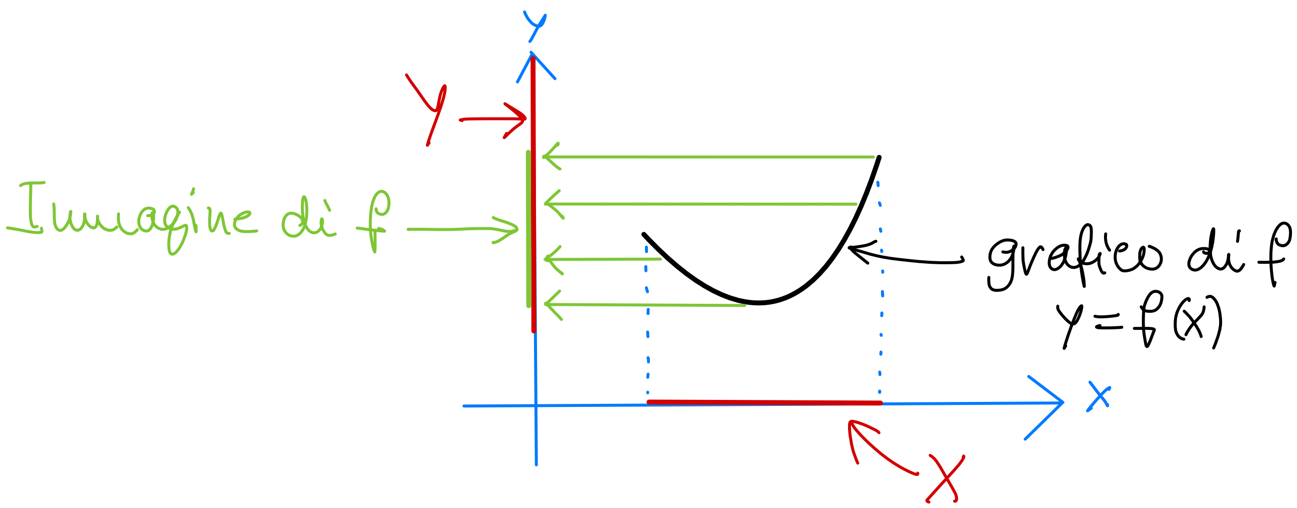
$X$ si chiama dominio di $f$;

$Y$ si chiama codominio di $f$;

$\{f(x) : x \in X\}$ si chiama immagine di $f$.

Se $X, Y$ sono contenuti in $\mathbb{R}$ il grafico di $f$ è l'insieme (curva) dei punti del piano

$$\{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$$




L'immagine si ottiene "proiettando" il grafico sull'asse delle y.

AM1 gest 20/21

lezione 7
7/10/2020

## Ancora funzioni

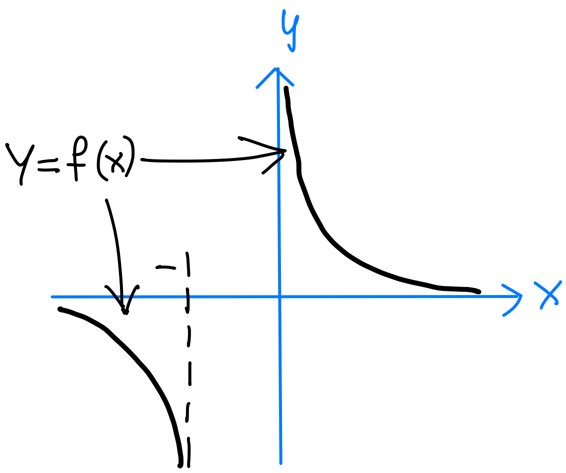
Richiamo: $X$, $Y$ insiemi, $f$ funzione da $X$ in $Y$:

- dominio di $f := X$;
- codominio di $f := Y$;
- immagine di $f := \{\text{valori di } f\} = \{f(x) : x \in X\}$.

Inoltre, se $X$ e $Y$ sono insiemi di numeri $(X, Y \subset \mathbb{R})$:

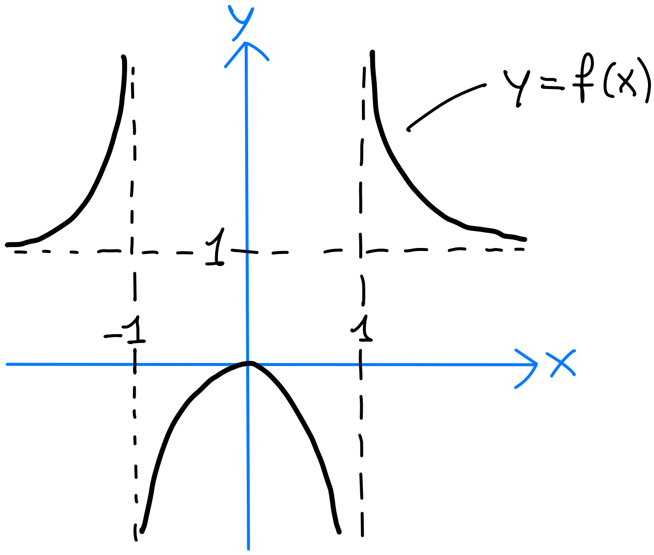
- grafico di $f = \{(x,y) : x \in X \text{ e } y = f(x)\}$

## Esempi



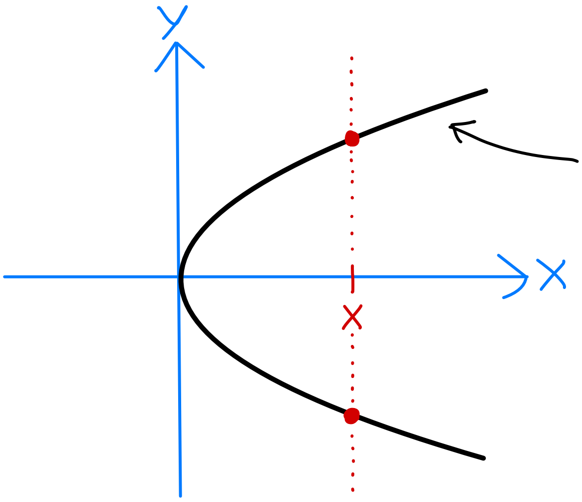

dominio $= (-\infty, -1) \cup (0, +\infty) = \{x : x < -1 \text{ opp. } x > 0\}$

immagine $= (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) = \{y : y \neq 0\}$




dominio $= \{x : x \neq \pm 1\}$

immagine $= \{ y : \ y \leq 0$ opp. $y > 1\} = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.




$x = y^2$ cioè insieme dei punti $(x,y)$ t.c. $x = y^2$

Questo NON è il grafico di una funzione $f(x)$

Infatti un grafico del tipo $y = f(x)$ interseca ogni retta verticale in al più un punto, e questo insieme non ha questa proprietà.

(Ma questo è un grafico del tipo $x = f(y)$, con $f(y) = y^2$)

## Osservazioni

- L'uso della $x$ per la variabile indip. (input) e della $y$ per la variabile dipend. (output) è puramente convenzionale, ogni tanto si usano altre lettere.

- Quasi sempre in questo corso $X$ e $Y$ sono insiemi di numeri $(X, Y \subset \mathbb{R})$ e $f(x)$ è data da una formula (per es., $f(x) = \tan(1+x^3)$).

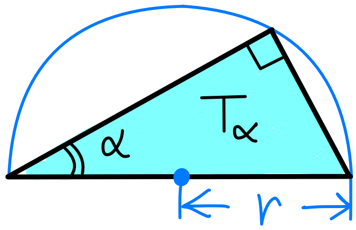
  In tal caso il dominio di $f$ è l'insieme di definizione della formula cioè l'insieme degli $x$ per cui $f(x)$ si può calcolare.

Esempi

| formula | insieme di definizione | immagine |
|---|---|---|
| $x^2 - 4$ | $\mathbb{R}$ | $[-4, +\infty)$ |
| $\dfrac{1}{x-2}$ | $\{x : x \neq 2\}$ | $\{y : y \neq 0\}$ |
| $\sqrt{1-x}$ | $(-\infty, 1]$ | $[0, +\infty)$ |
| $2$ | $\mathbb{R}$ | $\{2\}$ |

insieme degli $y$ t.c. l'eq. $f(x) = y$ ha almeno una soluzione $x$

- Considero $f(\alpha) := \text{area}(T_\alpha)$ dove $T_\alpha$ è il triangolo rettangolo in figura.




Quindi il dominio di $f$ è l'insieme degli angoli $\alpha$ per cui si può definire $T_\alpha$, cioè $\{\alpha : 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\}$.
I cateti di $T_\alpha$ sono $2r\cos\alpha$ e $2r\,\text{sen}\,\alpha$ e quindi

$$f(\alpha) = \frac{1}{2}(2r\cos\alpha)(2r\,\text{sen}\,\alpha) = r^2\,\text{sen}(2\alpha).$$

Anche se $r^2\,\text{sen}\,\alpha$ è definita per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ il dominio "naturale" di $f$ resta $(0, \frac{\pi}{2})$.

- Considero le formule $x^2-1$ e $(x-1)(x+1)$: sono diverse ma danno lo stesso risultato per ogni $x$. Per noi queste sono la stessa funzione.

- <u>Altri esempi di funzioni</u>

A) $f(x) := \begin{cases} \frac{1}{x+1} & \text{se } x < -1 \\ \sqrt{x} & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$

dominio: $(-\infty, -1) \cup [0, +\infty)$; trovate l'immagine.

B) Legge oraria di un punto P in movimento nello spazio (o nel piano).

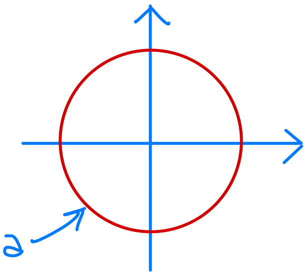
Dato t tempo, $f(t)$ è la posizione di P all' istate t, $f(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

coordinate di P al tempo t

Dominio: intervallo di tempi

Codominio: lo spazio $\mathbb{R}^3$ (o il piano $\mathbb{R}^2$)

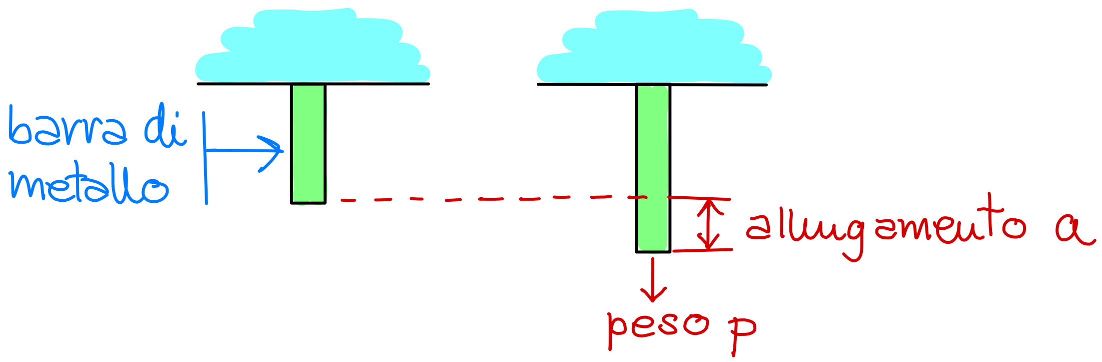
immagine: traiettoria di P.



Esempio: $f(t) = (\cos t, \sin t)$

moto circolare uniforme; traiettoria

C) Faccio delle misurazioni sperimentali:

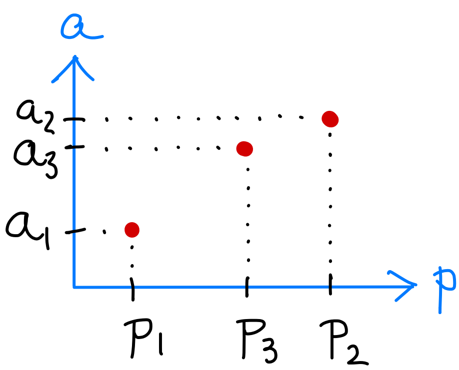



L' allungamento a dipende dal peso p: $a = a(p)$.

Se ripeto la misurazione con i pesi $p_1, p_2, p_3$ ottengo una funzione $a(p)$ con

dominio $= \{p_1, p_2, p_3\}$

immagine $= \{a_1, a_2, a_3\}$



D) $f$ funzione che ad ogni targa di automobile associa il codice fiscale del proprietario.

Qual è il dominio? E l'immagine?

E) Esistono funzioni il cui "input" sono più numeri:

$$f(\underbrace{x_1, x_2}_{X}) \, , \quad f(\underbrace{x_1, \dots, x_n}_{X})$$

Queste si chiamano funzioni di $n$ variabili, e verranno studiate nel corso di Analisi II.

## Funzioni iniettive

$f: X \to Y$ si dice iniettiva se a input diversi corrispondono sempre output diversi, cioè

$$x_1 \neq x_2 \Longrightarrow f(x_1) \neq f(x_2),$$

cioè l'equaz. $f(x) = y$ ha al più una soluz. $x$ per ogni valore del parametro $y$.

Graficamente: il grafico di $f$ interseca ogni retta orizzontale in al più un punto.

Esempi: $f(x) = e^{1-x}$ è iniettiva, infatti l'eq. $y = e^{1-x}$ ha al più la soluz. $x = 1 - \log y$;
$f(x) = x^2$ non è iniettiva (infatti $f(-2) = f(2)$).

## Funzioni surgettive

$f: X \to Y$ si dice surgettiva se l'immagine è $Y$, cioè l'equazione $y = f(x)$ ammette almeno una soluz. $x$ per ogni $y \in Y$.

Graficamente: il grafico di $f$ interseca ogni retta orizzontale ad altezza $y$ con $y \in Y$.

Esempi: $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ data da $f(x):=\log x$ è surgettiva, infatti l'eq. $y=\log x$ ammette sempre la sol. $x=e^y$.
La funzione $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ data da $f(x)=x^2$ non è sur., infatti l'eq. $x^2=-1$ non ammette soluzioni.

## Funzione inversa

Date $f:X\to Y$ e $g:Y\to X$ si dice che $g$ è l'inversa di $f$ (ed $f$ è l'inversa di $g$) se

$$g(f(x))=x \text{ per ogni } x\in X,$$
$$f(g(y))=y \text{ per ogni } y\in Y.$$

In altre parole la funzione $g$ "disfa" quello che fa $f$ e viceversa.
L'inversa di $f$ (se esiste) è una sola e si indica talvolta con $f^{-1}$ (pessima notazione, perché si confonde con il reciproco $1/f$).

L'inversa esiste se e solo se $f$ è sia iniettiva che surgettiva (cioè, è bigettiva).

In tal caso l'equazione $f(x)=y$ ha un'unica soluzione $x$ per ogni $y\in Y$, e $g(y)$ è proprio questa soluzione $x$.

## Esempi facili di inversa

A) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=ax+b$ con $a\neq 0$.

Risolvo l'equazione $y=ax+b$ e ottengo $ax=y-b$, $x=\frac{1}{a}(y-b)$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y\in\mathbb{R}$, e questo significa che $f$ è bigett. (cosa che si vede anche dal grafico);

l'inversa di $f$ è $g(y)=\frac{1}{a}(y-b)$.

B) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x):=x^3+1$.

Risolvo l'eq. $y=x^3+1$ e ottengo $x=\sqrt[3]{y-1}$;

dunque l'eq. ha un'unica soluzione per ogni $y\in\mathbb{R}$ e quindi $f$ è bigettiva (si vede anche dal grafico);

l'inversa di $f$ è $g(y):=\sqrt[3]{y-1}$.

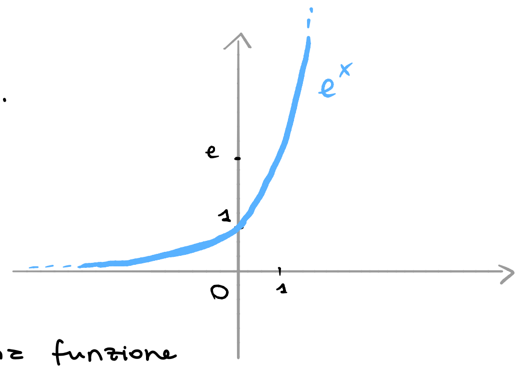
# Lezione 8

## Funzioni inverse - esempi

### ESEMPIO 1: Logaritmi

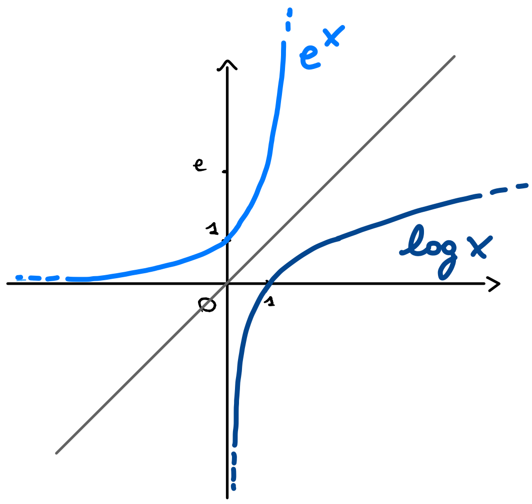
Consideriamo la funzione esponenziale con base e.

$$f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto e^x\end{cases}$$




Questa funzione è iniettiva ma non suriettiva.
Si vede facilmente che l'immagine è $(0,+\infty)$.
Se consideriamo $\tilde{f}:\begin{cases}\mathbb{R} \to (0,+\infty) \\ x \mapsto e^x\end{cases}$ abbiamo una funzione
che è sia iniettiva che suriettiva che quindi ammette inversa,
che è $g:\begin{cases}(0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \log y\end{cases}$

Infatti: $\tilde{f}(g(y)) = \tilde{f}(\log y) = e^{\log y} = y$
e $g(\tilde{f}(x)) = g(e^x) = \log(e^x) = x$.



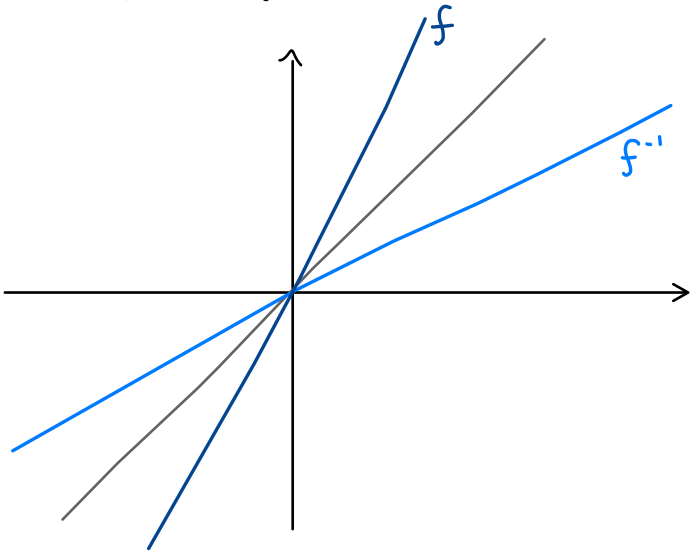

### ESEMPIO 2: rette

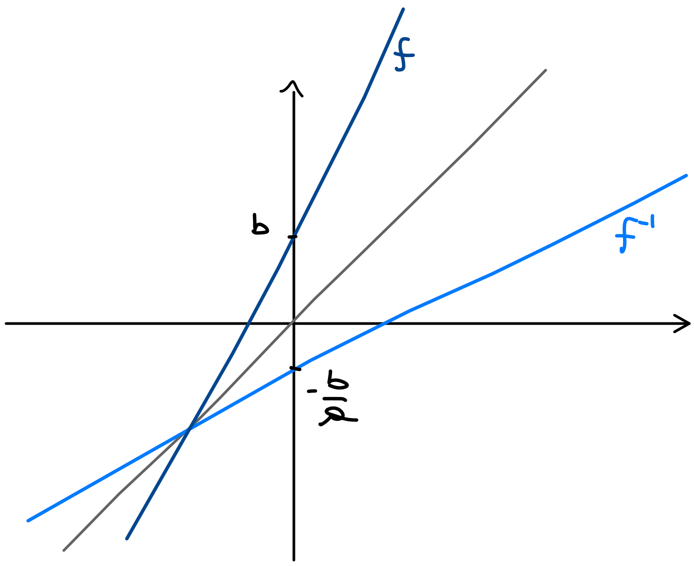
Sia $a \neq 0$, $b \in \mathbb{R}$ $\quad f:\begin{cases}\mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto ax+b\end{cases}$

$f$ è biiettiva. Sappiamo allora che esiste l'inversa $g$.
Possiamo trovare la sua formula esplicitando la $x$ in funzione della $y$ nell'equazione $y = f(x) = ax+b$

$y = ax+b \iff ax = y-b \iff x = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$.

Quindi la formula dell'inversa è $x = g(y) = \frac{1}{a}y - \frac{b}{a}$. Il dominio di $g$ è $\mathbb{R}$ e l'immagine di $g$ è $\mathbb{R}$.



# GRAFICO della funzione inversa.

Osservazione: preso un qualsiasi punto nel piano $P = (a, b)$, il punto $P' = (b, a)$, ottenuto scambiando le coordinate di $P$, è il simmetrico di $P'$ rispetto alla bisettrice del I e III quadrante

Siano $X, Y \subset \mathbb{R}$.
Ricordiamo che $g: Y \to X$ è l'inversa di $f: X \to Y$ se
$\forall x \in X$, $\forall y \in Y$

$$g(f(x)) = x \qquad e \qquad f(g(y)) = y .$$

Abbiamo che, se $g$ e' l'inversa di $f$

$$\text{grafico di } f = \{ (x,y) \in X \times Y \ : \ y = f(x) \}$$
$$= \{ (y,x) \in Y \times X : \ x = g(y) \} = \text{grafico di } g.$$

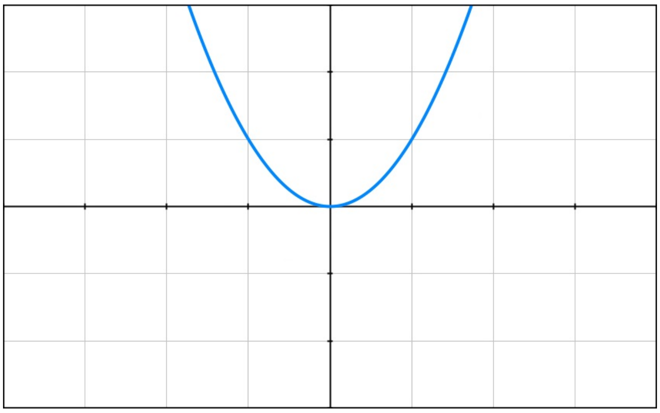
Infatti gli elementi del grafico di $f$ sono gli $y$ che soddisfano l'equazione
$y = f(x)$ con $x \in X$ (*)
mentre gli elementi del grafico di $g$ sono gli $x$ che soddisfano l'equazione
$x = g(y)$ con $y \in Y$ (**)
ma (*) e (**) sono equivalenti
se $y = f(x)$ allora $g(y) = g(f(x))$ e poiché $g$ è l'inversa di $f$ $g(y) = x$,
se $x = g(y)$ allora $f(x) = f(g(y))$ e poiché $g$ è l'inversa di $f$ $f(x) = y$.

Quindi il grafico di $f$ $(y = f(x))$ e della sua inversa $(x = g(y))$ coincidono.

Noi però non disegnamo il grafico di $x = g(y)$, bensì vorremmo disegnare il grafico di $y = g(x)$. Per farlo dobbiamo scambiare le coordinate di ogni punto. L'osservazione ci dice che stiamo facendo un'operazione di riflessione rispetto alla bisettrice del I e III quadrante.

## ESEMPIO 3: radice quadrata.

Consideriamo la funzione potenza $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$



Questa funzione non è né iniettiva, né suriettiva, quindi non ammette inversa.
In particolare notiamo che qualsiasi $y > 0$ è immagine di due $x$ diversi:
esempio: $y = 4$, $f(-2) = 4$ e $f(2) = 4$.

Abbiamo visto nel caso della funzione esponenziale come cavarcela quando non abbiamo la suriettività: al posto di considerare come codominio tutto $\mathbb{R}$, ci restringiamo all'immagine della funzione. Anche in questo caso si vede facilmente che l'immagine è $[0, +\infty)$.
Iniziamo dunque a considerare $\tilde{f}: \begin{cases} \mathbb{R} \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

Proviamo a esprimere $x$ in funzione di $y$:

$$y = f(x) = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{y}$$

Purtroppo la legge che ad ogni $y \in [0,+\infty)$ associa $\pm\sqrt{y}$ non è una funzione (dato un input ottengo due output!).
D'altra parte se scelgo arbitrariamente uno dei due output e considero le funzioni $h_1: \begin{cases} [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{cases}$ e $h_2: \begin{cases} [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ y \mapsto -\sqrt{y} \end{cases}$
nessuna delle due scelte soddisfa la proprietà di essere l'inversa di $\tilde{f}$.

$$h_1(\tilde{f}(-2)) = h_1(4) = 2$$
$$h_2(\tilde{f}(2)) = h_2(4) = -2$$

Per riuscire a scrivere l'inversa dobbiamo rende $\tilde{f}$ iniettiva.
Decidiamo di modificare il dominio restringendoci a $[0, +\infty)$.
Abbiamo quindi $\hat{f}: \begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

e la sua inversa è $g: \begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ y \mapsto \sqrt{y} \end{cases}$

**Esercizio:** trovare l'inversa di $f: \begin{cases} (-\infty, 0] \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^2 \end{cases}$

## ESEMPIO 3 bis: radici $m$-esime con $m$ pari

Come per $y = x^2$, non esiste l'inversa di $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^m \end{cases}$

Possiamo trovare l'inversa di $\hat{f}: \begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ x \mapsto x^m \end{cases}$, che è

$$g: \begin{cases} [0,+\infty) \to [0,+\infty) \\ y \mapsto \sqrt[m]{y} \end{cases}$$

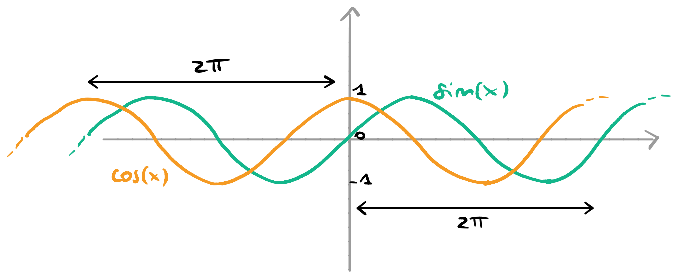
## ESEMPIO 4: radici m-esime con m dispari

Come per $y = x^3$, l'inversa di $f: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^m \end{cases}$ con $m$ dispari esiste ed è

$$g: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ y \mapsto \sqrt[m]{y} \end{cases}$$

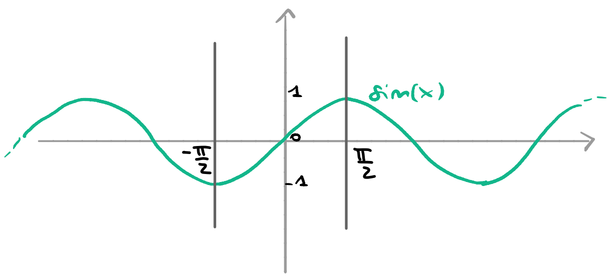
## ESEMPIO 5: inverse delle funzioni trigonometriche

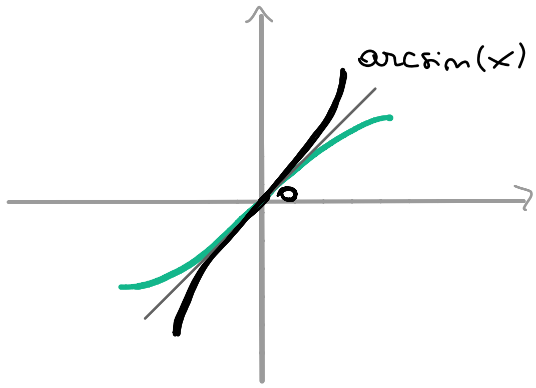
Le funzioni $s: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$ e $c: \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$ non sono biiettive.




Per quanto riguarda il seno prendiamo la sua restrizione

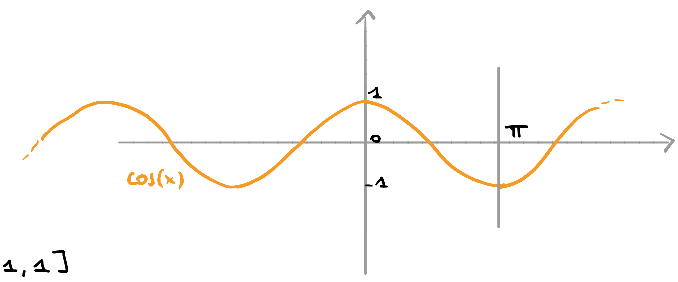
$$s^*: \begin{cases} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \sin(x) \end{cases}$$



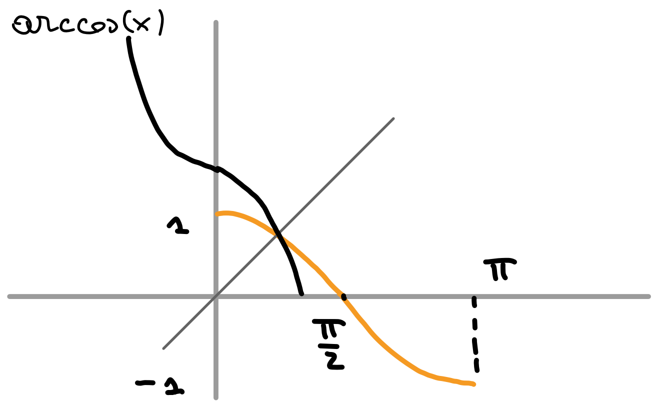




L'inversa $g: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è detta arcoseno (arcsin)

arcsin(x) è l'unico angolo in $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ il cui seno vale $x$.




Analogamente, per quanto riguarda il coseno, prendiamo la restrizione $c^*: \begin{cases} [0, \pi] \to [-1, 1] \\ x \mapsto \cos(x) \end{cases}$

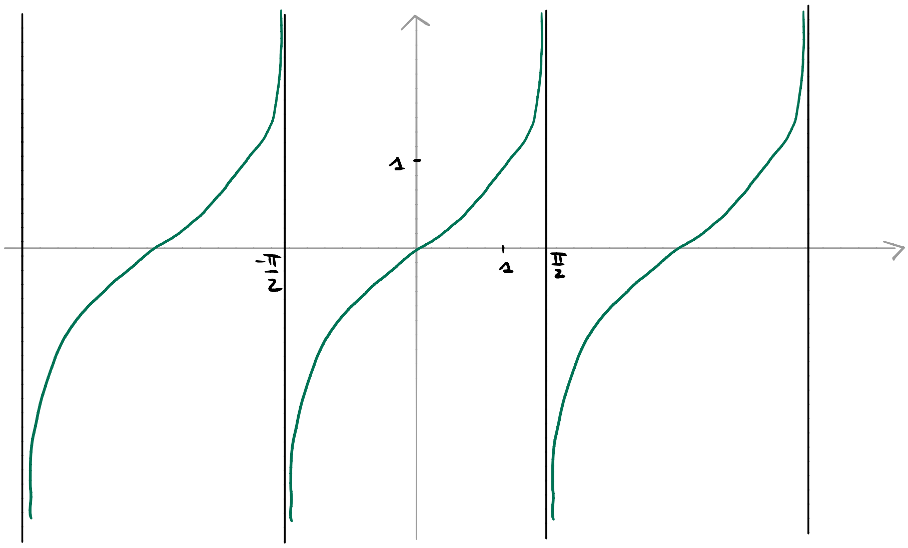



L'inversa $g: [-1, 1] \to [0, \pi]$ è detta arcocoseno (arccos)

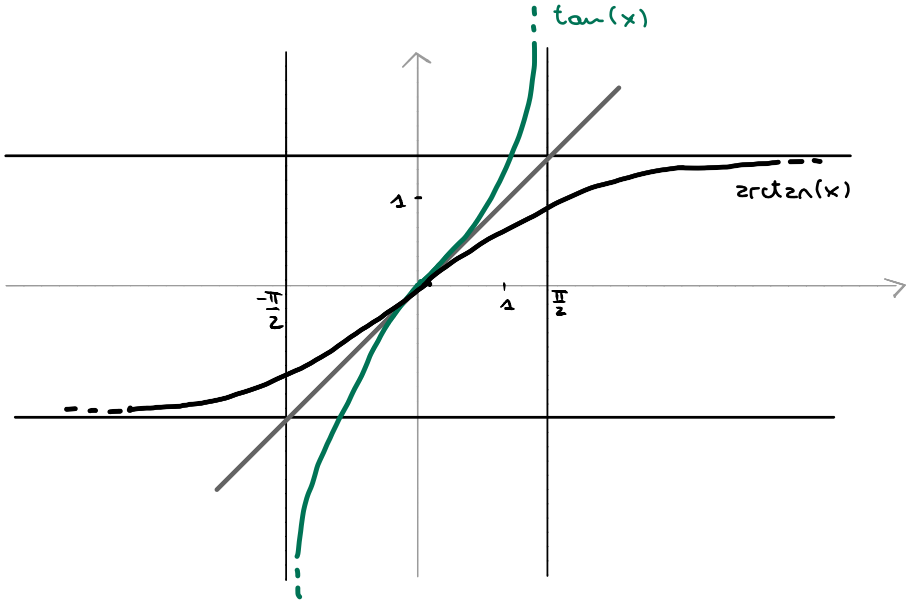
arccos(x) è l'unico angolo in $[0, \pi]$ il cui coseno vale $x$.

Infine per quanto riguarda la tangente, ci restringiamo a

$$t^*: \begin{cases} (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \tan(x) \end{cases}$$

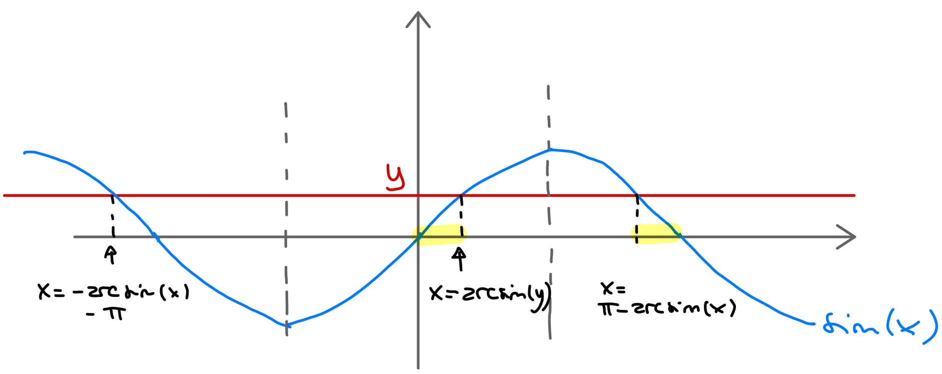



L'inversa di $t^*$ è $\arctan : \mathbb{R} \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ ed è chiamata arcotangente
$\arctan(x)$ è l'unico angolo in $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ la cui tangente vale $x$.



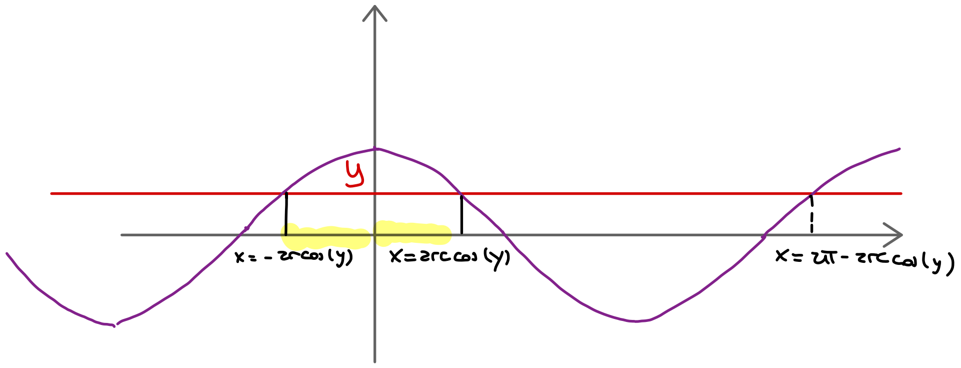

Attenzione: risoluzione di equazioni trigonometriche con le funzioni inverse.

Sia $y \in [-1, 1]$. Consideriamo l'equazione $\sin(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ è $x = \arcsin(y)$.
Però in $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni




Soluzioni: $x = \arcsin(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$
$x = \pi - \arcsin(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

Sia $y \in [-1, 1]$. Consideriamo l'equazione $\cos(x) = y$.
La soluzione compresa nell'intervallo $[0, \pi]$ è $x = \arccos(y)$.
In $\mathbb{R}$ ci sono altre infinite soluzioni




Soluzioni: $x = \arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

$x = -\arccos(y) + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

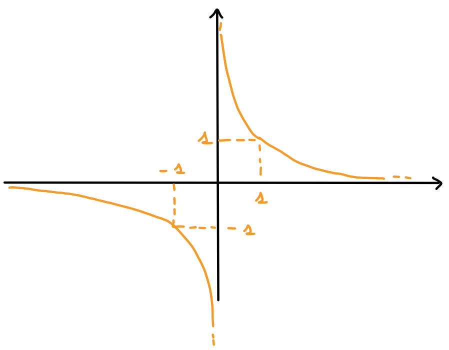
**Esercizio:** Disegnare il grafico, trovare dominio e immagine, limiti rilevanti e inversa di

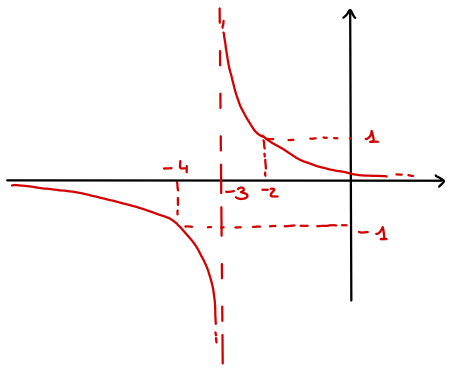
$$f(x) = \frac{x-5}{x+3}$$

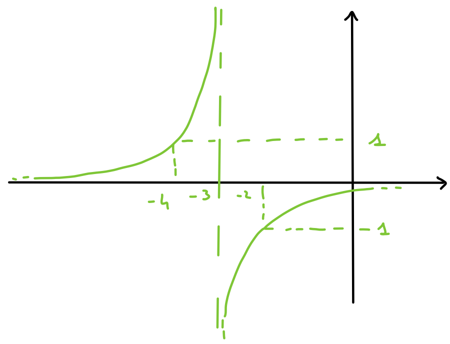
**Svolgimento:** $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty)$.

Per disegnare il grafico scrivo $f(x)$ come $\frac{x-5\pm3}{x+3} = \frac{x+3}{x+3} - \frac{8}{x+3} = 1 - \frac{8}{x+3}$

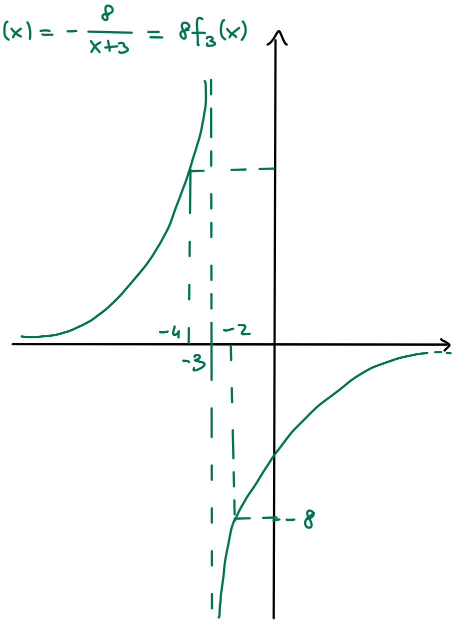
. disegno $f_1(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f_2(x) = \frac{1}{x+3} = f_1(x+3)$ $\qquad f_3(x) = -\frac{1}{x+3} = -f_2(x)$

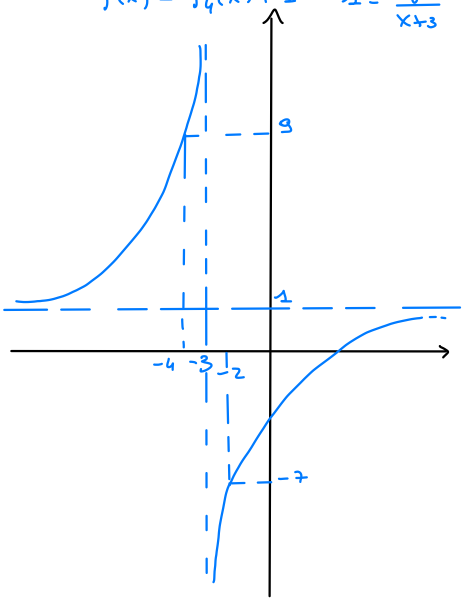



$f_4(x) = -\frac{8}{x+3} = 8f_3(x)$ $\qquad f(x) = f_4(x) + 1 = 1 - \frac{8}{x+3}$




$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -3^-} f(x) = +\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\qquad \lim_{x \to -3^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -3} f(x)$ non esiste

Calcoliamo ora l'inversa di $f : \mathrm{Dom}(f) \to (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$

$y = \frac{x-5}{x+3}$ con $x \neq -3$

$(x+3)y = x-5 \qquad xy - x = -3y - 5 \qquad x(y-1) = -3y-5 \qquad x = \frac{-3y-5}{y-1}$ con $y \neq 1$

L'inversa $g$ è:

$$g : \begin{cases} (-\infty, 1) \cup (1, +\infty) \to (-\infty, -3) \cup (-3, +\infty) \\ y \longmapsto \frac{-3y-5}{y-1} \end{cases}$$

**Esercizio:** trovare l'inversa di $y=f(x)=e^{2x}+4e^{x}$

**Svolgimento:** $Im(f)=(0,+\infty)$. Cerchiamo l'inversa di $f:\begin{cases}\mathbb{R} \to (0,+\infty)\\ x \mapsto e^{2x}+4e^{x}\end{cases}$

Chiamo $e^x=t$, quindi $e^{2x}+4e^x=t^2+4t$

$y=t^2+4t$

$t^2+4t-y=0$ $\qquad t=-2+\sqrt{4+y}$

$\qquad t=-2-\sqrt{4+y}$

Sostituisco $t$ con $e^x$: $\quad e^x=\underbrace{-2+\sqrt{4+y}}_{>0 \text{ poiché } y>0} \Rightarrow x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

$>0$ infatti $\sqrt{4+y}>0$ quando $y>0$

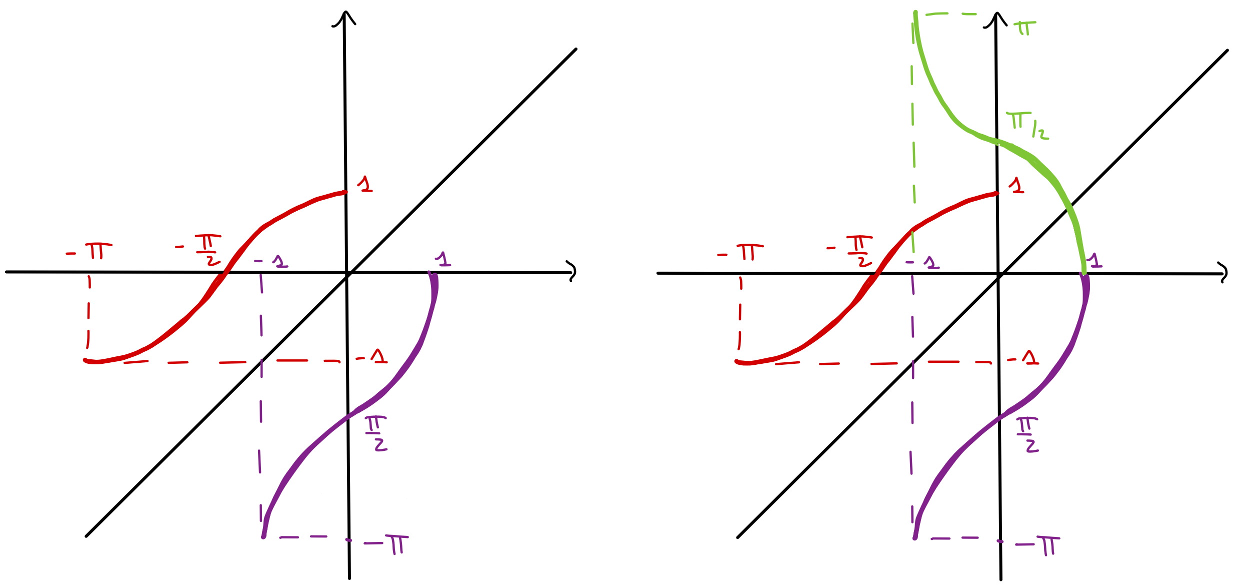
$e^x=\underbrace{-2-\sqrt{4+y}}_{<0}$ $\qquad$ nessuna soluzione

quindi $x=\log(-2+\sqrt{4+y})$

L'inversa è $g:\begin{cases}(0,+\infty)\to\mathbb{R}\\ y \mapsto \log(-2+\sqrt{4+y})\end{cases}$

**Esercizio:** Calcolare l'inversa di $f\begin{cases}[-\pi,0]\to[-1,1]\\ x\mapsto \cos(x)\end{cases}$

In rosso è rappresentato il grafico di $f$ e in viola il grafico della sua inversa (una volta scambiati i ruoli di $x$ e $y$). Chiamo $g$ l'inversa di $f$




Se lo andiamo a confrontare con il grafico dell'arcocoseno vediamo che $g(y)=-\arccos(y)$.

Potevamo risolvere l'esercizio anche nel seguente modo:

$y=\cos(x)$ con $x\in[-\pi,0]$.

Chiamo $t=-x$, quindi $t\in[0,\pi]$ $\qquad$ stiamo usando la definizione di arcocoseno

$y=\cos(x)=\cos(-t)=\cos(t)$ $\qquad \Rightarrow \quad t=\arccos(y)$

poiché il coseno è una funzione pari $\qquad \Rightarrow \quad -x=\arccos(y)$

e dunque $x=-\arccos(y)$ è l'inversa cercata.

AM1 gest 20/21

lezione 9

9/10/2020

## Limiti di funzioni

Argomento trattato velocemente.

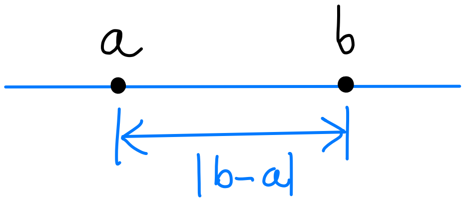
Il calcolo dei limiti viene dopo...

## Notazione

| Simbolo | significato |
|---|---|
| $\forall$ | "per ogni" |
| $\exists$ | "esiste" |
| $\nexists$ | "non esiste" |
| $\exists!$ | "esiste ed è unico" |
| $\Rightarrow$ | "implica" |

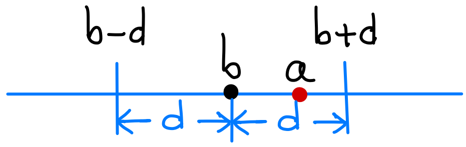
$|a-b|$ è la distanza tra due punti $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a-b| = |b-a|$$



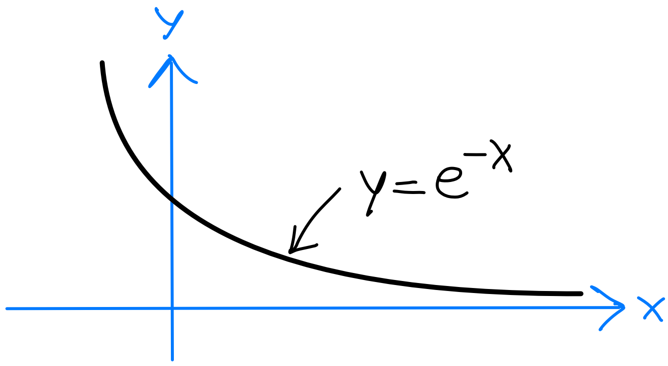
la disequazione $|a-b| \leqslant d$ equivale a:

- $-d \leqslant a-b \leqslant d$
- $b-d \leqslant a \leqslant b+d$
- $a-d \leqslant b \leqslant a+d$




## Esempio

Considero il grafico di $e^{-x}$




Cosa succede all' output $e^{-x}$ quando l' input $x$ si muove "verso $+\infty$"?

Risposta: $e^{-x}$ si muove "verso 0".

Per la precisione $e^{-x}$ si avvicina sempre di più a 0 quanto più $x$ diventa grande (ma $e^{x} \neq 0$ sempre).

Esprimo quanto osservato dicendo che "$e^{x}$ tende a 0 quando $x$ tende a $+\infty$" oppure "il limite di $e^{x}$ per $x$ che tende a $+\infty$ è 0".

Più in generale, dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $L$ numero reale, se $f(x)$ si avvicina sempre di più a $L$ quando $x$ diventa sempre più grande, dico che

"$f(x)$ tende a $L$ quando $x$ tende a $+\infty$"

oppure

"il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $+\infty$ è $L$"

e scrivo $f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} L$ oppure $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Queste espressioni a parole sono però vaghe.

Definizione precisa

Si dice che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ se:

per ogni $\varepsilon > 0$

$f(x)$ approssima $L$ con errore inferiore a $\varepsilon$

da un certo $x_\varepsilon$ in poi.

cioè per ogni $x \geq x_\varepsilon$

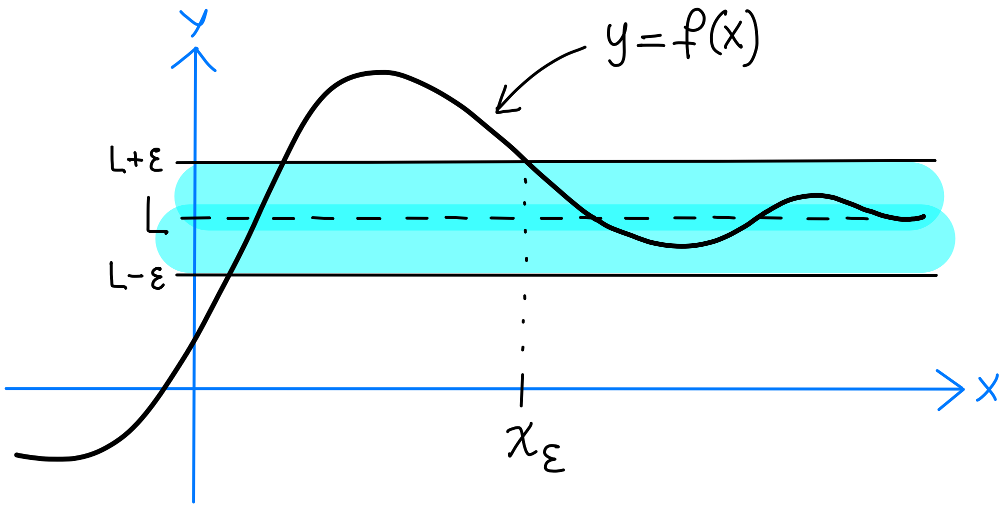
cioè $|f(x) - L| \leq \varepsilon$

$(L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$

Versione compatta:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists x_\varepsilon \text{ tale che } x \geq x_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon}$$

## Interpretazione grafica:




## Osservazioni

- Posso usare il disegno del grafico di f per dimostrare che $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ ?

  No, perché nel disegno non si vede cosa succede per x molto grande e per ε molto piccolo.
  Il grafico serve solo a farsi un'idea.

- Per le stesse ragioni non posso usare neanche un computer.

- Dimostro che $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$.

  Dato $\varepsilon > 0$ (qualunque) voglio trovare $x_\varepsilon$ tale che $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$ se $x \geq x_\varepsilon$.

  Per farlo risolvo la diseq. $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$:

  Siccome $|e^{-x} - 0| = |e^{-x}| = e^{-x}$, ho $e^{-x} \leq \varepsilon$

  cioè $-x \leq \log \varepsilon$, $x \geq -\log \varepsilon = \log(1/\varepsilon)$.

  Riassumendo $|e^{-x} - 0| \leq \varepsilon$ se $x \geq \log(1/\varepsilon)$.

  Prendo allora $x_\varepsilon := \log(1/\varepsilon)$.

- $$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^4 + 1}{e^x - 6x} = 0,$$

  ma questo lo si dimostra con tecniche che vedremo più in là.

- Per poter parlare di $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ non serve che il dominio $X$ di $f$ sia $\mathbb{R}$, basta che $X$ contenga numeri che "si avvicinano a $+\infty$", cioè

  $$\forall M \ \exists x \in X \text{ tale che } x \geq M.$$

Cosa significa che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ?

Attenzione: la definizione di prima non funziona perché $|f(x)-(+\infty)| \leq \varepsilon$ non ha senso ($+\infty$ non è un numero).

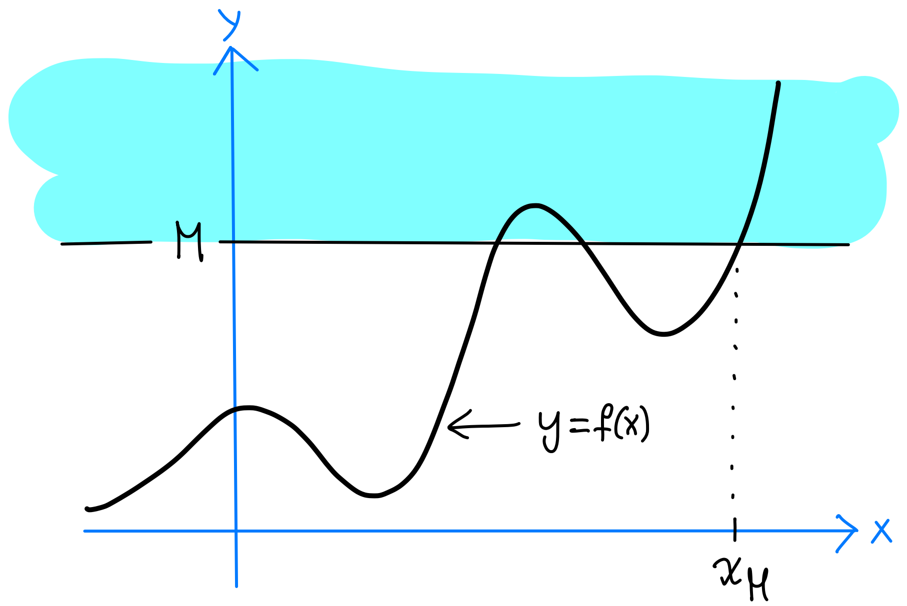
<u>Definizione</u> (di limite infinito per $x\to+\infty$)

Data $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ (oppure $f: X\to\mathbb{R}$ con $X$ t.c. ....)

si dice che $f(x)\to+\infty$ per $x\to+\infty$ se

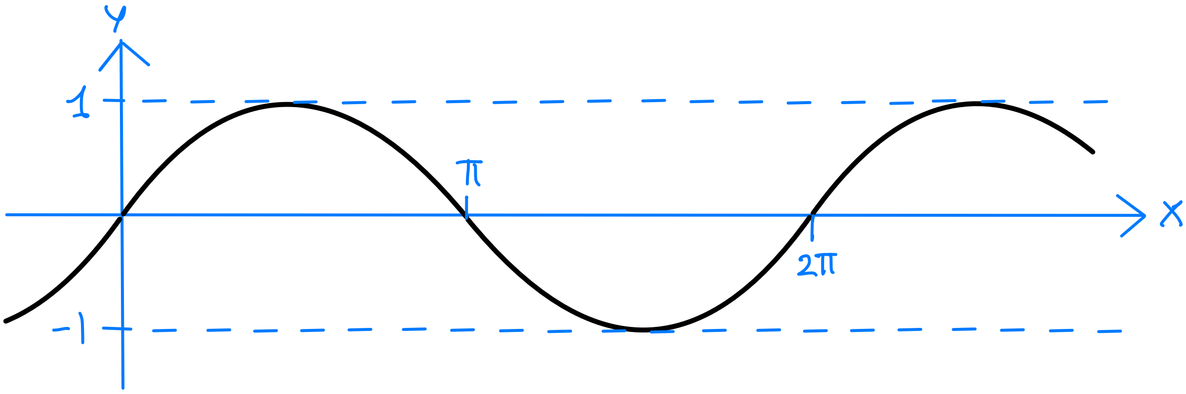
per ogni "soglia" $M$, vale $f(x)\geq M$ per $x$ da un certo punto $x_M$ in poi, cioè:

$$\boxed{\forall M \; \exists x_M \text{ tale che } x \geq x_M \Rightarrow f(x) \geq M}$$




Scrivete voi la definizione di $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

**Attenzione** non sempre il limite di $f(x)$ per $x \to +\infty$ esiste. Per esempio $\lim_{x \to +\infty} \sin x$ non esiste!




**Definizione** (di limite finito per $x \to x_0$)

Dati $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, si dice che $f(x) \to L$ per $x \to +\infty$ se:

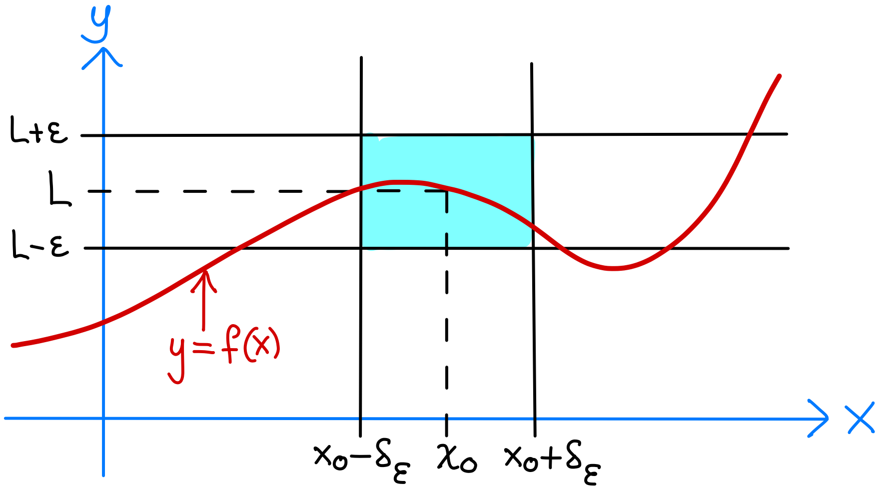
per ogni $\varepsilon > 0$

$f(x)$ approssima $L$ con errore $\leq \varepsilon$ → cioè $|f(x) - L| \leq \varepsilon$ $(L - \varepsilon \leq f(x) \leq L + \varepsilon)$

per ogni $x$ sufficientemente vicino a $x_0$ → per ogni $x$ t.c. $|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon$ per un certo $\delta_\varepsilon$

Versione compatta:

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } |x - x_0| \leq \delta_\varepsilon \ \& \ x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon.}$$




**Osservo.**

Come prima, per parlare di limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ non serve che il dominio $X$ di $f$ sia $\mathbb{R}$ ma basta che $X$ contenga punti arbitrariamente vicini a $x_0$, cioè:

$$\forall \delta > 0 \ \exists \ x \in X \text{ tale che } x \neq x_0 \text{ e } |x - x_0| \leq \delta .$$

Scrivete per esercizio le definizioni mancanti:

$$f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} -\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} -\infty,$$

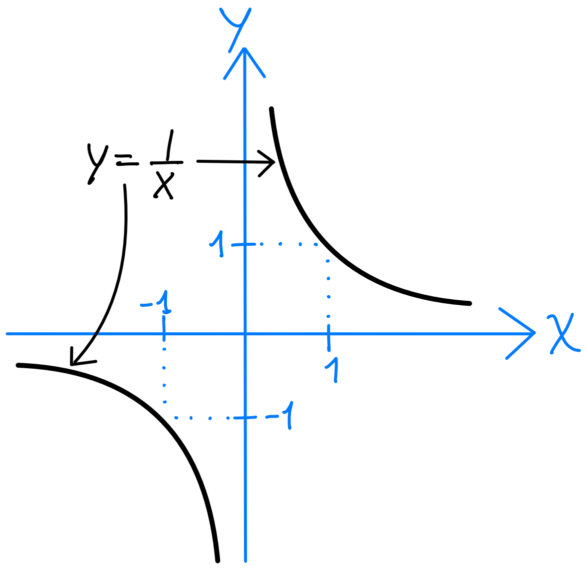
$$f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} L, \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} +\infty, \quad f(x) \xrightarrow[x \to -\infty]{} -\infty .$$

AM1 gest 20/21

Lezione 10
10/10/2020

Proseguo dall' ultimo esempio di ieri:

$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$ non esiste.




Ma se considero solo $x>0$, [$x<0$] cioè x tende a 0 "da destra", ["da sinistra"] allora $\frac{1}{x}$ tende a $+\infty$ [$-\infty$]

# Definizione di limite destro e sinistro

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $L \in \mathbb{R}$,

dico che il limite di $f(x)$ per $x$ che tende a $x_0$ da destra (da sinistra) è $L$

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \quad \text{opp.} \quad f(x) \xrightarrow[x \to x_0^+]{} L$$

$(x \to x_0^-)$ $\qquad$ $(x \to x_0^-)$

se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } x_0 < x \leq x_0 + \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - L| \leq \varepsilon \quad (x_0 - \delta_\varepsilon \leq x < x_0)}$$

Osserv.

- Per parlare di limite destro (sinistro) di $f(x)$ in $x_0$ basta che il dominio $X$ di $f$ contenga punti $x$ arbitrariam. vicini a $x_0$ e strettamente maggiori (minori) cioè

$$\forall \delta > 0 \ \exists x \in X \text{ t.c. } x_0 < x \leq x_0 + \delta \quad (x_0 - \delta \leq x < x_0)$$

Per esempio, non ha senso parlare di $\lim_{x\to 0^-} \log x$

- $\lim_{x\to x_0} f(x) = L \iff \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = L$

- se $\lim_{x\to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ (oppure uno dei due non esiste) allora $\lim_{x\to x_0} f(x)$ non esiste.

- la def. precedente vale per $L \in \mathbb{R}$ ma si può estendere a $L = \pm\infty$.
Fatelo per esercizio. E dimostrate che $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.

# Funzioni continue

## Definizione

Data $f : X \to \mathbb{R}$ (con $X \subseteq \mathbb{R}$) e $x_0 \in X$, dico che

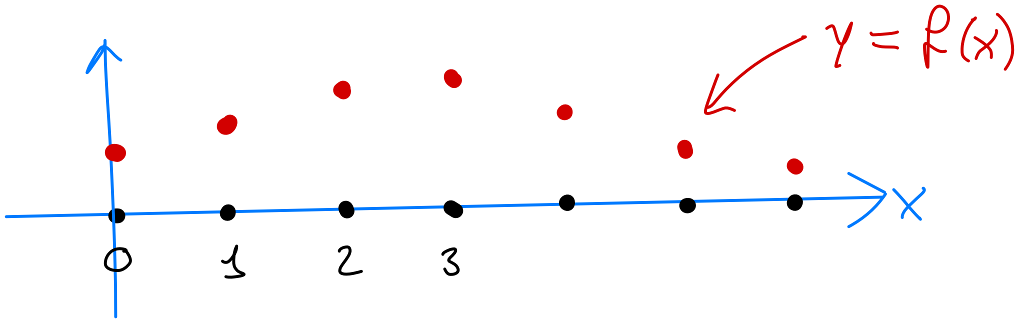
$f$ è continua in $x_0$ se

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ t.c. } \underbrace{|x - x_0| \leq \delta_\varepsilon}_{\substack{x \text{ approssima} \\ x_0 \text{ con err. } \leq \delta_\varepsilon}} \Rightarrow \underbrace{|f(x) - f(x_0)| \leq \varepsilon}_{\substack{f(x) \text{ approssima } f(x_0) \\ \text{con errore } \leq \varepsilon}}}$$

Dico che $f$ è continua se è continua in ogni $x_0 \in X$.

## Osserv.

- La continuità viene data per scontata quando si usa la calcolatrice o il computer per calcolare $f(x_0)$ se $x_0$ ha infinite cifre decimali
- Se $f$ è continua in $x_0$ allora $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
  (se si può parlare di limite)




ogni $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua

numeri naturali $= \{0, 1, 2, \ldots\}$

ma non si può parlare di $\lim_{x \to x_0} f(x)$ per alcun $x_0$ (tranne $+\infty$).

- Tutte le funzioni elementari viste finora sono continue (in tutti i punti dell'insieme di definizione). (NON LO DIMOSTRO)

  Domanda: la funzione $\frac{1}{x}$ è continua in 0?

  La domanda è mal posta perché 0 NON appartiene al dominio di $\frac{1}{x}$.

- Tutte le operazioni elementari sulle funzioni: somma $(f(x)+g(x))$, prodotto $(f(x) \cdot g(x))$, composizione $(f(g(x)))$ mandano funzioni continue in funzioni continue. (NON LO DIMOSTRO)

Quindi tutte le funzioni date da un'unica formula sono continue.

il dominio è $\mathbb{R}$

- La funzione $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{per } x \geq 0 \\ -1 & \text{per } x < 0 \end{cases}$ è discontinua (non è continua) in $0$ perché

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 = f(0)$$

ma

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -1$$

# Calcolo dei limiti (facili)

Regole "di buon senso" spiegate per esempi.

- $$\lim_{x\to-\infty}\left(\underset{\downarrow \atop 0}{e^{x}}+\underset{\downarrow \atop 0}{\frac{1}{x}}\right)=0+0=0$$

Regola: se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_2$ $(L_1, L_2\in\mathbb{R})$

allora $f_1(x)+f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L_1+L_2$

In sintesi "il limite della somma è la somma dei limiti".

- $$\lim_{x\to 0}\underset{\downarrow \atop +\infty}{\frac{1}{x^2}}+\underset{\downarrow \atop \cos(0)=1}{\cos x}=+\infty$$

Regola: Se $f_1(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ $(-\infty)$ e $f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}L$ con $L\in\mathbb{R}$

allora $f_1(x)+f_2(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}+\infty$ $(-\infty)$

Sintesi: "$+\infty+L=+\infty$" e "$-\infty+L=-\infty$"

- $\lim_{x\to+\infty} e^x + x^2 = +\infty$

$$\underset{+\infty}{\downarrow} \quad \underset{+\infty}{\downarrow}$$

Regola: "$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$"

e analogamente "$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$"

Attenzione: Se $f_1(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty$ e $f_2(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} -\infty$ allora non posso dire qual è il limite di $f_1(x)+f_2(x)$ per $x\to x_0$ senza informaz. più precise.

In sintesi: "$(+\infty)+(-\infty)$ forma indeterm."

Es. $\lim_{x\to-\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x^2}} + \underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{x}} = +\infty$ (lo vediamo dopo)

$\lim_{x\to-\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x^2}} + \underset{-\infty}{\underset{\downarrow}{x^3}} = -\infty$ " "

- $\lim_{x\to+\infty} \underset{+\infty}{\underset{\downarrow}{x}} + \underset{\text{non ha limite}}{\underset{\downarrow}{\cos x}} = +\infty \Leftarrow x+\cos x \geq x-1 \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$

• $\lim_{x \to -\infty} \underbrace{\left(3 + \frac{1}{x}\right)}_{3+0=3} \underbrace{\left(-2 + e^{x}\right)}_{-2+0=-2} \longrightarrow 3 \cdot (-2) = -6$

**Regola** Se $f_1(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_1$ e $f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_2$, $L_1, L_2 \in \mathbb{R}$

allora $f_1(x) \cdot f_2(x) \xrightarrow[x \to x_0]{} L_1 \cdot L_2$

(" il limite del prod. è il prod. dei lim. ")

• $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot \cos(x+\pi) = -\infty$

$\frac{1}{x} \to +\infty \qquad \cos(\pi) = -1$

**Regola** " $+\infty \cdot L = \begin{cases} +\infty & \text{se } L > 0 \\ -\infty & \text{se } L < 0 \end{cases}$ "

incluso $L = +\infty$

incluso $L = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} e^{x} \log x = +\infty$

$e^x \to +\infty \qquad \log x \to +\infty$

$\lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x} = \lim_{x \to 0^+} \log x \cdot \frac{1}{x} = -\infty$

$\log x \to -\infty \qquad \frac{1}{x} \to +\infty$

**Attenzione** "$+\infty \cdot 0$" e "$-\infty \cdot 0$" sono forme indeterminate.

Es $\lim\limits_{x \to 0^+} \underbrace{x}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\log x}_{\downarrow\, -\infty} = 0$ (più in là)

$$\lim_{x \to +\infty} \underbrace{(1+4^x)}_{\downarrow\, +\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0} = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{e^{-x}}_{\downarrow\, 0} + \underbrace{\left(\frac{4}{e}\right)^x}_{\downarrow\, +\infty} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to 0^+} \frac{\overset{1\, \uparrow}{\cos x}}{\underbrace{\log x}_{\downarrow\, -\infty}} = 0$$

**Regola** "$\frac{L}{\pm\infty} = 0$"

**Attenzione** "$\cancel{\frac{1}{0} = +\infty}$" Es $x \to 0$ ma $\frac{1}{x}$ non ha limite $x \to 0$

Ma vale

"$\frac{1}{0^+} = +\infty$" "$\frac{1}{0^-} = -\infty$"

$\downarrow$

il reciproco di una funzione che tende a 0 da destra (cioè è pos) tende a +

Più in generale

$$\text{“}\frac{L}{0^+} = \begin{cases} +\infty & \text{se } L>0 \quad (\text{incluso } +\infty) \\ -\infty & \text{se } L<0 \quad (\text{incluso } -\infty) \end{cases}\text{”}$$

$$\text{“}\frac{L}{0^-} = \begin{cases} -\infty & \text{se } L>0 \quad (\text{incluso } +\infty) \\ +\infty & \text{se } L<0 \quad (\text{incluso } -\infty) \end{cases}\text{”}$$

Infine

“$\frac{0}{0}$ forma indeterminata”

# Lezione 10 - seconda parte.

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} x^2-x$

**Soluzione:** $\lim_{x\to+\infty} x^2-x = +\infty$

Sappiamo che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ e la somma $\ell+\ell'$ è definita, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)+g(x) = \ell+\ell'$.

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x\to+\infty} x^2$ e $\lim_{x\to+\infty} -x$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ $\lim_{x\to+\infty} -x = -\infty$ e $+\infty-\infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x\to\infty} x^2-x = \lim_{x\to+\infty} x^2 + \lim_{x\to+\infty} -x$

Scriviamo $x^2-x = x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)$

In questo caso vediamo l'espressione come $f(x)\left[g(x)+h(x)\right]$ con $f(x)=x^2$, $g(x)=1$ e $h(x) = -\frac{1}{x}$

Sappiamo che se $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = \ell'$ e il prodotto $\ell\cdot\ell'$ è definito, allora $\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x) = \ell\cdot\ell'$.

Vediamo se possiamo ora applicare le regole di somma e prodotto.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$

$1+0=1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 1+0=1.$

$+\infty\cdot 1$ è definito $\Rightarrow$ $\lim_{x\to+\infty} x^2\left(1-\frac{1}{x}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^2\right)\left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}\right) = +\infty.$

**Osservazione:** in questo caso avrei potuto anche scrivere

$$x^2-x = x(x-1) \quad \text{e}$$

$\lim_{x\to+\infty} x(x-1) = \left(\lim_{x\to+\infty} x\right)\left[\left(\lim_{x\to+\infty} x\right)+\left(\lim_{x\to+\infty} -1\right)\right] = +\infty$ infatti

$\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty} -1 = -1$, la somma $+\infty-1$ è definita e vale $+\infty$, il prodotto $+\infty\cdot+\infty$ è definito e vale $+\infty$.

Ci sono casi in cui raccogliere il termine di grado massimo funziona, ma raccogliere il termine di grado minimo no.
Esempio:

$$\lim_{x\to+\infty} x^3-x^2+x$$

$x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} 1 = 1 \quad \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 0$

$1+0+0=1 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} 1 + \lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} + \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x^2} = 1$

$+\infty\cdot 1$ è definito $\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} x^3\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = \left(\lim_{x\to+\infty} x^3\right)\left(\lim_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right) = +\infty$

$x(x^2-x+1)$ $\quad \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$

$\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty \quad \lim_{x\to+\infty} -x = -\infty \quad \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$

ma la somma $+\infty-\infty+1$ non è definita.

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2}$

**Soluzione:**

Come primo tentativo calcolo $\lim_{x\to-\infty} x^3$ e $\lim_{x\to-\infty} x^2$ e provo a vedere se in questo caso la somma dei limiti è definita.

$\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty \quad \lim_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ e $-\infty+\infty$ è una forma indeterminata.

Quindi non vale che $\lim_{x\to-\infty} x^3+x^2 = \lim_{x\to-\infty} x^3 + \lim_{x\to-\infty} x^2$.

Scrivo $x^3+x^2 = x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)$

Vale $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$, $\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1$ e $\lim_{x\to-\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}\right) = -\infty\cdot 1 = -\infty$.

Possiamo concludere $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3+x^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 0$.

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-x}{x^3+x^2}$

**Soluzione:** Negli esercizi precedenti abbiamo visto che

$\lim_{x\to+\infty} x^2-x = +\infty$. Inoltre, visto che $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$. Abbiamo $\lim_{x\to+\infty} x^3+x^2 = +\infty$.

Però il quoziente $\frac{+\infty}{+\infty}$ è una forma indeterminata.

In questo caso possiamo scrivere $\dfrac{x^2-x}{x^3+x^2} = \dfrac{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}{x^3\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \dfrac{1}{x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Vale: $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{1}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

Il prodotto $0\cdot1\cdot1$ è ben definito e vale zero.

Dunque $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2-x}{x^3+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\cdot\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\cdot\left(\dfrac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$

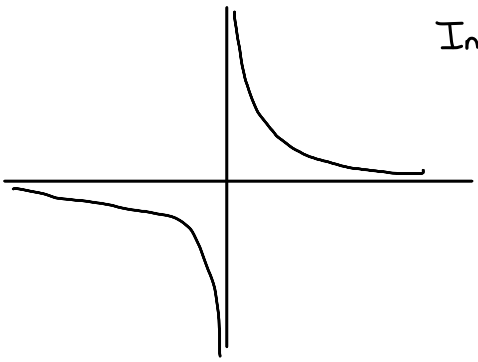
$$= \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\right)\cdot\left(\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)\left(\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)\right) = 0\cdot1\cdot1 = 0.$$

**Esercizio:** Calcolare $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \dfrac{1}{x}$

**Soluzione:** $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x + \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = +\infty + 0 = +\infty$

**Esercizio:** Calcolare $\lim\limits_{x\to0} e^x + \dfrac{1}{x}$

**Soluzione:** Il limite NON ESISTE.



Infatti $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{x}$ non esiste.

Se però l'esercizio avesse chiesto di calcolare $\lim\limits_{x\to0^+} e^x + \dfrac{1}{x}$ oppure $\lim\limits_{x\to0^-} e^x + \dfrac{1}{x}$

avremmo avuto:

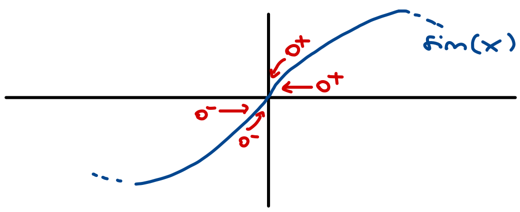
$\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$ e

$$\lim_{x\to0^+} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^+} e^x + \lim_{x\to0^+} \frac{1}{x} = 1 + (+\infty) = +\infty$$

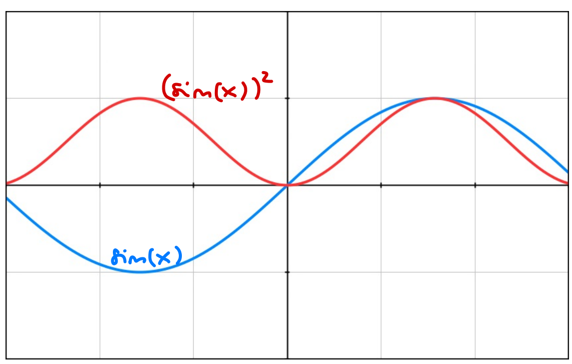
$$\lim_{x\to0^-} e^x + \frac{1}{x} = \lim_{x\to0^-} e^x + \lim_{x\to0^-} \frac{1}{x} = 1 + (-\infty) = -\infty$$

**Esercizio:** Calcolare $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{\sin(x)}$

**Soluzione:** Il limite NON ESISTE




**Esercizio:** Calcolare $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{1}{(\sin(x))^2}$




**Soluzione:**

$$\lim_{x\to0} \frac{1}{(\sin(x))^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} (2+\cos(x))\,x$

**Soluzione:** Sappiamo che $\lim_{x\to+\infty} \cos(x)$ non esiste, ma

$$-1 \le \cos(x) \le 1$$
$$1 \le \cos(x)+2 \le 3$$

quindi $(2+\cos(x))\,x \geq x$

Inoltre $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, quindi $\lim_{x\to+\infty} (2+\cos(x))\,x = +\infty$.

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x}$

**Soluzione:** In questo caso $-1 \le \sin(x) \le 1$

$$\Rightarrow \quad -\frac{1}{x} \le \frac{\sin(x)}{x} \le \frac{1}{x}.$$

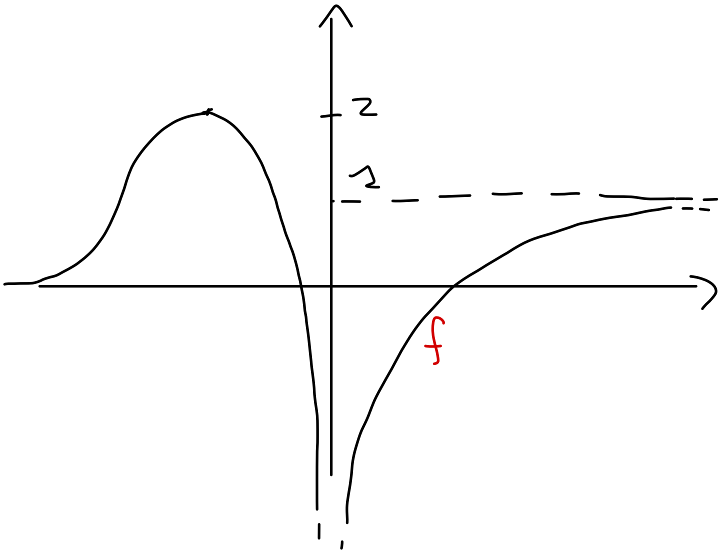
Vale $\lim_{x\to+\infty} -\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, quindi $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$

**Esercizio:** Calcolare $\lim_{x\to+\infty} e^x(2+\sin(x))$

**Soluzione:**

$$-1 \le \sin(x) \le 1$$
$$1 \le 2+\sin(x) \le 3$$
$$\underset{\downarrow\,+\infty}{e^x} \le e^x(2+\sin(x)) \le \underset{\downarrow\,x\to+\infty}{3e^x}$$
$$+\infty \qquad\qquad\qquad +\infty$$

quindi $\lim_{x\to+\infty} e^x(2+\sin(x)) = +\infty$.




Esercizio:

Qual è:

i) il dominio,

ii) l'immagine

iii) i limiti rilevanti

della funzione $f$ il cui grafico è rappresentato nella figura.

Svolgimento:

i) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

ii) $\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 2]$.

iii) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$

AM1gest 20/21

Lezione 11

13/10/2020

## Limiti "facili" (conclusione)

Per il calcolo dei limiti valgono tutte le regole "intuitive" che uno si aspetta.

Ma attenzione alle forme indeterminate:

"$(+\infty)+(-\infty)$" ("$+\infty-\infty$")

"$(\pm\infty)\cdot 0$"

"$\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$" ; "$\frac{0}{0}$" ; "$\frac{1}{0}$"

ma "$\frac{1}{0^+}=+\infty$" ; "$\frac{1}{0^-}=-\infty$" ; "$+\infty+\infty=+\infty$"

"$\frac{1}{\pm\infty}=0$" "$(\pm\infty)\cdot(\pm\infty)=\pm\infty$"

## Formula di cambio di variabile

Se $f(x)\xrightarrow[x\to x_0]{} y_0$ allora $\lim\limits_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim\limits_{y\to y_0} g(y)$

cambio di variabile $y=f(x)$

$$\lim_{x\to-\infty}\cos(e^x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to 0}\cos y = \cos(0) = 1$$

cambio var.
$y = e^x$
osservo che
se $x\to-\infty$
allora $y\to 0$

$$\lim_{x\to 0^+}\arctan(\log x) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to-\infty}\arctan y = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \log x$
se $x\to 0^+$
allora $y\to-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\log(\log(\log x)) \underset{\uparrow}{=} \lim_{y\to+\infty}\log(\log y) \underset{\uparrow}{=} \lim_{z\to+\infty}\log z = +\infty$$

$y = \log x$ $\qquad$ $z = \log y$

Curiosità: se calcolate $\log(\log(\log x))$ con la calcolatrice ottenete sempre numeri $< 2$.

Attenzione Può succedere che $\lim_{y\to y_0} g(y)$ NON esiste mentre esiste $\lim_{x\to x_0} g(f(x))$.

Va bene applicare la formula se $\lim_{y\to y_0} g(y)$ esiste.

Esempio

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x} \underset{\underset{y=-x}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty$$

ma

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} \underset{\underset{y=e^x}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to 0} \frac{1}{y} \quad \text{non esiste!}$$

In effetti basta stare più attenti:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{e^x} \underset{\underset{y=e^x}{\uparrow}}{=} \lim_{y\to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty.$$

e osservo che
se $x \to -\infty$,
allora $y = e^x \to 0^+$

**Esercizio:** Dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e data $f: \begin{cases} 1 - x^2 & x \leq 0 \\ \lambda x + 1 & x > 0 \end{cases}$ $\quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

dire per quali $\lambda$ 1) la funzione è continua

2) la funzione è invertibile. Per questi valori scrivere l'inverse.

**Svolgimento:** 1) la funzione è definita a tratti e sia per $x<0$ che per $x>0$ è definita tramite una formula, sia per $x<0$ che per $x>0$ è una funzione elementare e sappiamo che è continua. Resta da vedere cosa succede in $x=0$.

Affinchè sia continua anche in zero serve che

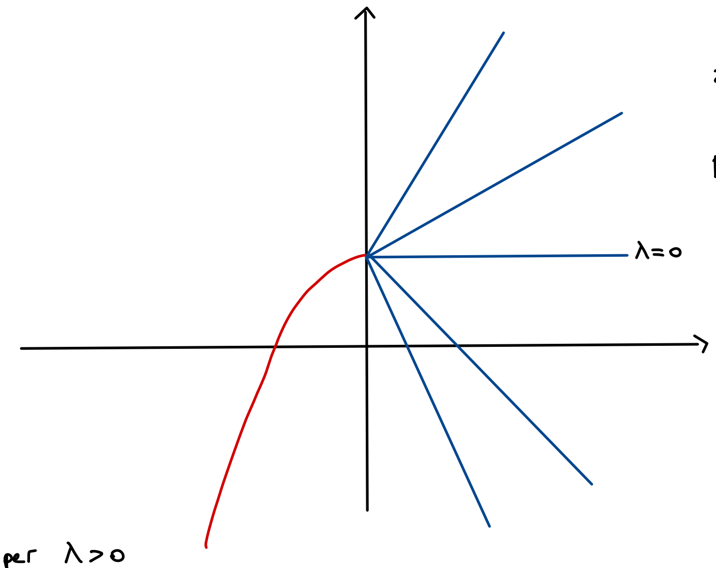
$$f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x)$$

Abbiamo $f(0) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$ e anche $\lim_{x \to 0^+} \lambda x + 1 = 0$.

Quindi $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la funzione è continua.

2) Affinchè sia invertibile vogliamo che la funzione sia biiettiva.

È facile disegnare il grafico di $f$:




al variare di $\lambda$
$\lambda x + 1$ sono rette con pendenze diverse, tutte passanti per $(0, 1)$.

Se $\lambda > 0$ $f$ è biiettiva.

Solo per $\lambda > 0$

calcoliamo l'inversa: per $x \leq 0$ abbiamo che $y = 1 - x^2$, dunque $x^2 = 1 - y$

$\Rightarrow$ se $y < 1$ allora $1 - y > 0$, quindi posso fare la radice

$\Rightarrow$ $x = -\sqrt{1-y}$ con $y \leq 1$.

poichè $x \leq 0$

Per $x > 0$ si ha $y = \lambda x + 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{\lambda}$ e $y > 1$ poichè $x > 0$.

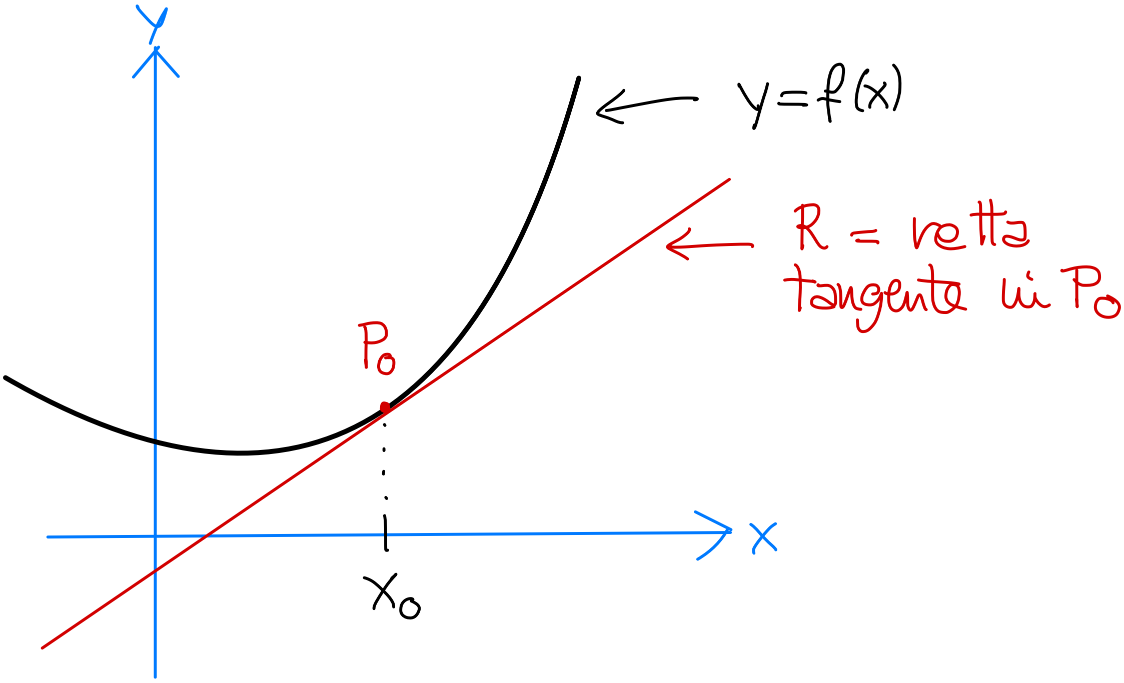
Dunque $$g(y) = \begin{cases} -\sqrt{1-y} & \text{se } y \leq 1 \\ \frac{y-1}{\lambda} & \text{se } y > 1 \end{cases}$$

# Derivate

## Definizione e motivazioni

### 1. Motivazione geometrica

Problema: trovare l'equazione della retta tangente al grafico $y = f(x)$ nel punto $P_0$ di ascissa $x_0$




Siccome $P_0 = (x_0, f(x_0))$, le rette passanti per $P_0$ hanno equazione

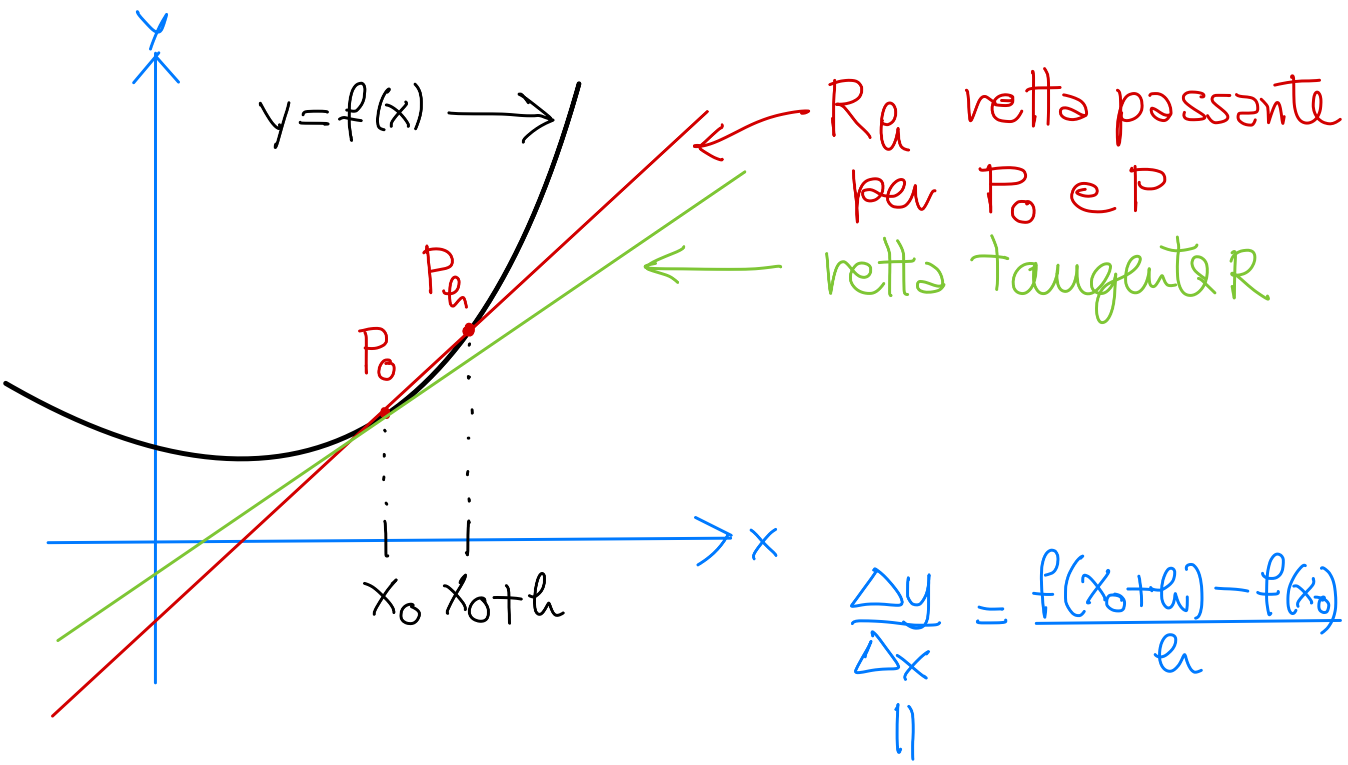
$$y = m(x - x_0) + f(x_0)$$

coefficiente angolare

Resta da trovare il valore di $m$.

Prendo $h > 0$ piccolo e considero la retta $R_h$ che passa per $P_0$ e $P_h$

punto del grafico di ascissa $x_0+h$, cioè $(x_0+h, f(x_0+h))$




$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

$$\|$$

Idea: il coeff. angolare $m_h$ di $R_h$ tende a $m$ quando $h \to 0$ cioè

$$m = \lim_{h\to 0} m_h = \lim_{h\to 0} \underbrace{\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}_{\text{rapporto incrementale}}$$

## 2. Definizione di derivata

Data $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$, la derivata di $f$ in $x$ è il limite (se esiste)

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Notazioni alternative: $\dot{f}(x)$, $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$

la usiamo

si usa in fisica

Se $f: X \to \mathbb{R}$ (con $X \subseteq \mathbb{R}$) e $x \in X$, per parlare di derivata di $f$ in $x$ serve che esistono $h$ arbitrariamente piccoli t.c. $x+h \in X$.

Se $f'(x)$ esiste e appartiene a $\mathbb{R}$ dico che $f$ è <u>derivabile in $x$</u>.

Se la derivata esiste in tutti i punti del dominio di $f$ dico che $f$ è <u>derivabile</u> (su $X$)

## Osservaz.

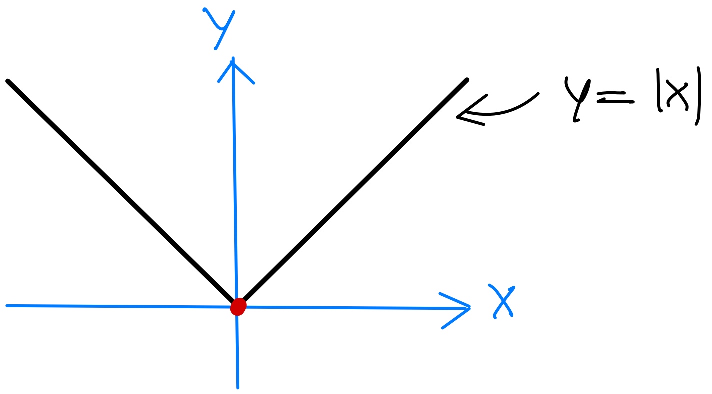
- Non sempre la derivata esiste.

Es.: se $f(x) = |x|$ allora la derivata in $0$ non esiste.

$$\frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \frac{|h|}{h} = \begin{cases} 1 & \text{se } h>0 \\ -1 & \text{se } h<0 \end{cases}$$

quindi $\lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h}$ non esiste.

In questo caso però esistono i limiti destri e sinistri, chiamati derivata destra e sinistra.

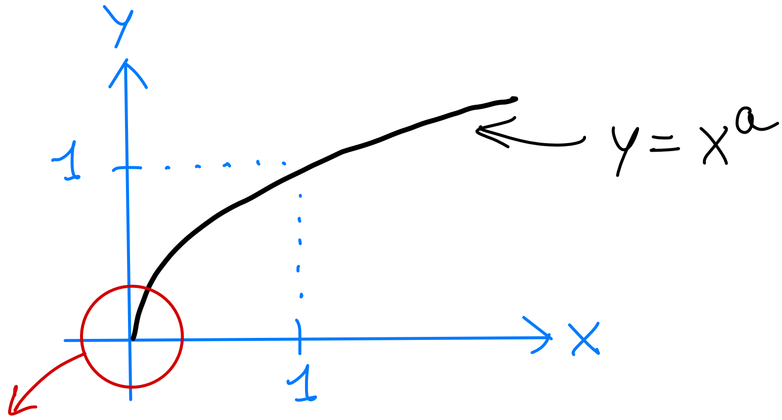



- La derivata può essere $+\infty$ (o $-\infty$).

Es.: se $f(x) := x^a$ con $0<a<1$, allora

$$f'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{h^a}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{h^{1-a}} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$




"il grafico ha pendenza $+\infty$ in 0"

- Se $f$ è derivabile in $x$ allora è continua in $x$ (non lo dimostro).

- Calcolo la derivata di $f(x) = x^2$ a partire dalla definizione:

$$
\begin{aligned}
(x^2)' &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{x^2} + h^2 + 2hx - \cancel{x^2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} (h + 2x) = 2x.
\end{aligned}
$$

Non è così che si calcolano le derivate!

## Altre interpretazioni della derivata

- Velocità (scalare)

Considero P punto in movimento nello spazio. Indico con $d(t)$ la distanza percorsa da P a partire dall'istante iniziale.

velocità media nell'intervallo di tempo $[t_0, t_1]$ è

$$v_m = \frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{d(t_1)-d(t_0)}{t_1 - t_0}$$

velocità all'istante $t$

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left( v \text{ media in } [t, t+\Delta t] \right)$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{d(t+\Delta t) - d(t)}{\Delta t} = d'(t).$$

Cioè

velocità (scalare) = derivata della distanza percorsa.

- <u>Velocità (vettore)</u>

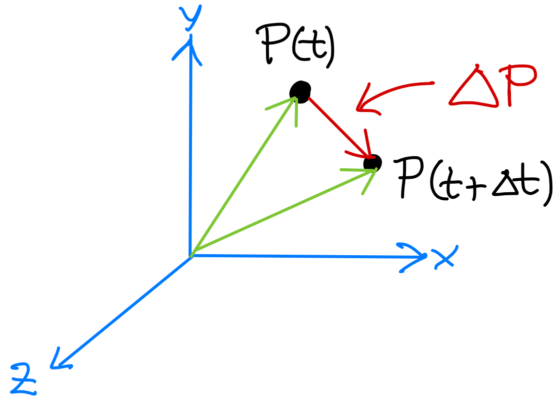
P come prima. La posizione al tempo t

è $P(t) = (x(t), y(t), z(t)) \longleftarrow$ vettore in $\mathbb{R}^3$

Spostamento tra l'istante t e l'istante $t+\Delta t$

$$\Delta P = P(t+\Delta t) - P(t) \longleftarrow \text{vettore in } \mathbb{R}^3$$

$$= (x(t+\Delta t)-x(t),\ y(t+\Delta t)-y(t),\ z(t+\Delta t)-z(t))$$




Velocità (istantanea) al tempo t

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t}$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t+\Delta t) - P(t)}{\Delta t} = P'(t)$$

$$= (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

AM1 gest 20/21 — Lezione 12, 14/10/2020

## Calcolo delle derivate

Le derivate si calcolano utilizzando
- l'elenco delle derivate delle funzioni elementari
- un insieme di regole (usate per combinare le derivate delle funzioni elementari e ottenere quelle di funzioni più complesse).

Oggi do l'elenco e le regole, spiegando come usarle.
Le dimostrazioni verranno date nella prox. lezione.

### Tavola delle derivate elementari ($a, b$ sono numeri)

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $a$ | $0$ |
| $ax+b$ | $a$ |
| $x^a$ $a \neq 0$ | $ax^{a-1}$ |
| $e^x$ | $e^x$ |
| $a^x$ $a>0$ | $\log a \cdot a^x$ |
| $\log x$ | $\frac{1}{x}$ |

| $f(x)$ | $f'(x)$ |
|---|---|
| $\operatorname{sen} x$ | $\cos x$ |
| $\cos x$ | $-\operatorname{sen} x$ |
| $\tan x$ | $1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ |
| $\arcsin x$ | $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arccos x$ | $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ |
| $\arctan x$ | $\frac{1}{1+x^2}$ |

Ogni formula vale in tutto l'insieme di definizione di $f$ (e in particolare $f$ è derivabile in tutto il dominio) con le seguenti eccezioni:

- per $0<a<1$, $x^a$ è definita su $[0,+\infty)$, continua ovunque, e la derivata in $0$ è $+\infty$, mentre $ax^{a-1}$ non è definita in $0$.
- $\arcsin x$ è definita su $[-1,1]$, continua ovunque, e la derivata in $\pm 1$ è $+\infty$, mentre $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ non è definita in $\pm 1$.
  Un discorso analogo vale per $\arccos x$.

## Regole (f, g sono funzioni, a, b sono numeri)

1. Derivata della somma: $(f+g)' = f' + g'$

   cioè $(f(x)+g(x))' = f'(x)+g'(x)$ ; non scrivo la var. $x$ per semplificare la formula

   Caso particolare: $(f+a)' = f'$

   Esempio:

   $$(e^x + x^2)' = (e^x)' + (x^2)' = e^x + 2x^{2-1} = e^x + 2x$$

1 bis. Derivata della differenza: $(f-g)' = f' - g'$

2. Derivata del prodotto: $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

Caso particolare: $(af)' = af'$

Esempi

$$(x^2 \cdot \log x)' = (x^2)' \cdot \log x + x^2 \cdot (\log x)'$$

$$= 2x^{2-1} \log x + x^2 \frac{1}{x} = x(2\log x + 1)$$

$$\left(2\sqrt{x} - \frac{3}{x}\right)' = \left(2 \cdot x^{1/2} - 3 \cdot x^{-1}\right)'$$

$$= 2\left(x^{1/2}\right)' - 3\left(x^{-1}\right)'$$

$$= 2 \cdot \frac{1}{2} x^{-1/2} - 3 \cdot (-1)\, x^{-2} = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{3}{x^2}$$

3. Derivata del rapporto: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

Caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$

Esempio:

$$\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{(x^2+\cancel{1})' \cdot (x^2-1) - (x^2+1) \cdot (x^2-\cancel{1})'}{(x^2-1)^2}$$

$$= \frac{2x\,(x^2-1) - (x^2+1)\,2x}{(x-1)^2} = \frac{-4x}{(x-1)^2}$$

4. Derivata della funzione composta:

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Caso particolare: $(f(ax+b))' = af'(ax+b)$

Nell' uso introduco la variabile $y = g(x)$ e la formula diventa

$$[f(\underbrace{g(x)}_{y})]' = f'(y) \cdot g'(x)$$

derivata risp. alla variabile y

e sostituisco a $y$ il valore $g(x)$ in un passaggio successivo.

Esempi

$$(\underbrace{e^{x^2+1}})' = \underbrace{(e^y)'}_{\text{derivata risp. alla variab. } y} \cdot (x^2+\cancel{1})' = e^y \cdot 2x = e^{x^2+1} \cdot 2x.$$

$f(y) = e^y$
$g(x) = x^2+1$

derivata risp. alla variab. y

$$(\underbrace{\sqrt{1-2x}})' = (y^{\frac{1}{2}})' (1-2x)' = \frac{1}{2} y^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2)$$

$f(y) = \sqrt{y} = y^{\frac{1}{2}}$
$g(x) = 1-2x$

$$= -\frac{1}{\sqrt{y}} = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

# Esercizi

1. $$\Big(e^{\overbrace{\sin x}^{y}}\Big)' = (e^y)'(\sin x)' = e^y \cdot \cos x = e^{\sin x}\cos x$$

funzione composta
$f(y)=e^y$; $g(x)=\sin x$

funzione composta
$f(y)=y^{1/2}$, $g(x)=1-x^2$

2. $$x\sqrt{1-x^2} = (x)'\cdot\sqrt{1-x^2} + x\cdot\Big(\overbrace{(\underbrace{1-x^2}_{y})^{\frac{1}{2}}}\Big)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x\cdot\left(y^{\frac{1}{2}}\right)'\cdot(\cancel{1}-x^2)'$$

$$= \sqrt{1-x^2} + x\cdot\frac{1}{2}y^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x)$$

$$= \sqrt{1-x^2} - x^2y^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

3. $$\Big(\underbrace{\log(\overbrace{\log(\log x)}^{y})}\Big)' = (\log y)'\cdot\Big(\underbrace{\log(\overbrace{\log x}^{z})}\Big)'$$

funzione comp.
$f(y)=\log y$
$g(x)=\log(\log x)$

funzione comp.
$f(z)=\log x$, $g(x)=\log x$

$$= \frac{1}{y}\cdot(\log z)'\cdot(\log x)'$$

$$= \frac{1}{y}\cdot\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\cdot\log x\cdot\log(\log x)}$$

4. $$\Big(\arctan\big(\underbrace{\tfrac{1}{x}}_{y}\big)\Big)' = (\arctan y)' \cdot \Big(\overbrace{\tfrac{1}{x}}^{x^{-1}}\Big)'$$

$$= \frac{1}{1+y^2} \cdot \left((-1)\cdot x^{-2}\right)$$

$$= \frac{-1}{(1+y^2)\,x^2} = \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)x^2} = -\frac{1}{1+x^2}$$

5. $$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]'$$ prima semplificare!!

$$\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right) = \log\left(\left(\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}\right)^{\frac{1}{4}}\right) = \log\left(\frac{(x+1)^{3/4}}{(x-1)^{3/2}}\right)$$

$$= \log\left((x+1)^{\frac{3}{4}}\right) - \log\left((x-1)^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)$$

$$\left[\log\left(\sqrt[4]{\frac{(x+1)^3}{(x-1)^6}}\right)\right]' = \left[\frac{3}{4}\log(x+1) - \frac{3}{2}\log(x-1)\right]'$$

$$= \frac{3}{4}\left(\log(x+1)\right)' - \frac{3}{2}\left(\log(x-1)\right)'$$

$$= \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{x+1} - \frac{3}{2}\,\frac{1}{x-1} = -\,\frac{3x+9}{4(x^2-1)}$$

6. $(x^x)' = \Big(\exp(\overbrace{x\log x}^{y})\Big)' = (e^y)'(x\log x)'$

$a^b = e^{b\log a}$
$= \exp(b\log a)$

$= e^y\left((x)'\cdot\log x + x(\log x)'\right)$

$= e^{x\log x}(\log x + 1)$

$= x^x(\log x + 1)$

Torno agli esercizi sui limiti.

7. "$0^{+\infty}$" è una forma indeterminata o no?

Traduzione: date $f(x)$ e $g(x)$ tali che

$$f(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} 0^+ \quad e \quad g(x) \xrightarrow[x\to x_0]{} +\infty,$$

posso dire qual è il limite di $f(x)^{g(x)}$ (per $x\to x_0$) senza bisogno di altre info?

Per rispondere scrivo $f(x)^{g(x)}$ come potenza in base $e$:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\Big(\underbrace{\overset{\overset{+\infty}{\uparrow}}{g(x)} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{\overset{-\infty}{\uparrow}}}_{\underset{-\infty}{\downarrow}}\Big) \longrightarrow \text{“}e^{-\infty}\text{”} = 0$$

Dunque "$0^{+\infty} = 0$" (non è una forma indet.)

Allo stesso modo si ottiene "$0^{-\infty} = +\infty$".

8. Far vedere che "$1^{+\infty}$" è una forma indet.

Procedo come prima:

$$\underbrace{f(x)}_{\underset{1}{\downarrow}}{}^{\overbrace{g(x)}^{\overset{+\infty}{\uparrow}}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{\overset{+\infty}{\uparrow}} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{\overset{\log 1 = 0}{\uparrow}}\Big)$$

e "$+\infty \cdot 0$" è una forma indeterminata

Nota: anche $1^{-\infty}$ è una forma indet.

9. "$0^0$" è una forma indeterminata.

$$\underbrace{f(x)}_{\downarrow\, 0^+}{}^{\overbrace{g(x)}^{0}} = \exp\Big(\overbrace{g(x)}^{0} \cdot \overbrace{\log(f(x))}^{-\infty}\Big)$$

e "$0 \cdot (-\infty)$" è una forma indeterminata

10. Dire se le seguenti sono forme indet. oppure no:

"$+\infty^{+\infty}$" ; "$+\infty^{-\infty}$" ; "$+\infty^{0}$" ; "$2^{+\infty}$"

# Lezione 13

Esercizio: calcolare la derivata di:

a) $\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)$

b) $\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)$

c) $\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}$

d) $\arctan(x^2)$

e) $\frac{x^4-1}{x^4+1}$

a) $\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right) = \log\left(\frac{x^{2x}}{2^x \cdot x^x}\right) = \log\left(\frac{x^x}{2^x}\right) = \log(x^x) - \log(2^x) = x\log x - x\log 2 = x(\log x - \log 2)$

quindi $\left(\log\left(\frac{x^{2x}}{(2x)^x}\right)\right)' = \left(x(\log x - \log 2)\right)' = \log x - \log 2 + 1 = \log\left(\frac{x}{2}\right) + 1$

$x = f \quad (\log x - \log 2) = g \quad (fg)' = f'g + g'f$

b) $\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right) = \log(5x^6) - \log(3^x) = \log 5 + \log(x^6) - x\log 3 = \log 5 + 6\log x - \log 3 \cdot x$

quindi $\left(\log\left(\frac{5x^6}{3^x}\right)\right)' = \left(\log 5 + 6\log x - \log 3 \cdot x\right)' = 0 + \frac{6}{x} - \log 3 = \frac{6}{x} - \log 3$

c) $\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}} = \frac{(3^2)^{(x-3)}}{3^{x-1}} = \frac{3^{2x-6}}{3^{x-1}} = 3^{2x-6-x+1} = 3^{x-5}$

quindi $\left(\frac{9^{x-3}}{3^{x-1}}\right)' = (3^{x-5})' = 3^{x-5}\cdot\log 3 = \frac{\log 3}{3^5}\cdot 3^x$

d) $(\arctan(x^2))' = \frac{1}{1+(x^2)^2}\cdot 2x = \frac{2x}{1+x^4}$

$\arctan(x^2) = f(g(x))$

$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

e) $\left(\frac{x^4-1}{x^4+1}\right)' = \frac{4x^3(x^4+1) - 4x^3(x^4-1)}{(x^4+1)^2} = \frac{4x^7+4x^3-4x^7+4x^3}{(x^4+1)^2} = \frac{8x^3}{(x^4+1)^2}$

$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

# AM1 gest 2021 — Lezione 14

16/10/2020

Dimostrazioni delle regole di derivazione e delle derivate delle funzioni elementari

E' importante farle nell'ordine giusto!

**Regola 1** $\quad (f+g)' = f' + g'$

Versione precisa: date $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabili in un punto $x \in X$, allora $f+g$ è derivabile in $x$ e

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

(Per le prossime regole NON enuncerò la versione precisa.)

**Dim.**

Parto dal rapporto incrementale di $f+g$:

$$\frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x)+g(x))}{h} =$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ f'(x)}} + \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\substack{\downarrow\, h\to 0 \\ g'(x)}} \xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)+g'(x)$$

$\square$

**Regola 2** $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

**Dim.**

Parto dal rapporto incrementale di $f \cdot g$:

$$\frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h) + f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \frac{f(x+h)\,g(x+h) - f(x)\,g(x+h)}{h} + \frac{f(x)\,g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h}$$

$$= \underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop f'(x)} \underbrace{g(x+h)}_{\downarrow h\to 0 \atop g(x)} + f(x) \underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop g'(x)}$$

$$\xrightarrow[h\to 0]{} f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x) \qquad \square$$

**Regola 4** $[f(g(x))]' = f'(y) \cdot g'(x)$ con $y = g(x)$.

**Dim.**

Parto dal rapporto incrementale di $f(g(x))$:

$$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} =$$

Sostituzione:
$y := g(x)$
$k := g(x+h) - g(x)$
allora:
$y + k = g(x+h)$
$k \to 0$ per $h \to 0$

$$= \underbrace{\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)}}_{= \frac{f(y+k) - f(y)}{k} \xrightarrow{k \to 0} f'(y)} \cdot \underbrace{\frac{g(x+h) - g(x)}{h}}_{\xrightarrow{h \to 0} g'(x)} \xrightarrow[h \to 0]{} f'(y) \cdot g'(x)$$

Questa dimostrazione non è del tutto corretta perché si divide per $g(x+h) - g(x)$, che potrebbe essere 0. $\square$

## Regola 5 (Derivata dell'inversa)

Se $g$ è l'inversa di $f$ allora

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad \text{dove } x = g(y) \text{ cioè } y = f(x).$$

In questo enunciato conviene usare lettere diverse per le variabili di $f$ e $g$.

**Dim.**

Per definizione di inversa ho che $x = g(f(x))$ per ogni $x$.
Derivando questa identità ottengo:

$$1 = \Big(g(\overbrace{f(x)}^{y})\Big)' \underset{\text{Reg. 4}}{=} g'(y) \cdot f'(x) \,.$$

$\square$

$\underline{(ax+b)' = a}$

Dim. Calcolo il rapporto incrementale:

$$\frac{(a(x+h)+b)-(ax+b)}{h} = \frac{\cancel{ax}+ah+\cancel{b}-\cancel{ax}-\cancel{b}}{h} = a$$

e anche il limite per $h \to 0$ è $a$. $\square$

$\underline{(e^x)' = e^x}$

Problema: non ho mai definito il numero "e".
Darò la definizione più in là nel corso.
Uso qui la seguente proprietà caratterizzante:

$$\lim_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1 .$$

Dim. Scrivo il rapporto increm. di $e^x$:

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = \frac{e^x \cdot e^h - e^x}{h} = e^x \underbrace{\frac{e^h-1}{h}}_{\xrightarrow{h\to 0} 1} \xrightarrow[h\to 0]{} e^x .$$

$\square$

$$(a^x)' = \log a \cdot a^x$$

Dim.

Scrivo $a^x = e^{x \cdot \log a}$. Quindi

$$(a^x)' = (e^{\overbrace{x \cdot \log a}^{y}})' \overset{\text{Reg. 4}}{=} (e^y)' \cdot (x \cdot \log a)'$$
$$= e^y \cdot \log a$$
$$= e^{x \cdot \log a} \cdot \log a = \log a \cdot a^x$$

$\square$

$$(\log x)' = \frac{1}{x}$$

Dim.

Ricordo che $\log y$ è l'inversa di $e^x$.

Come al solito, uso $y$ come variabile dell'inversa

Quindi

$$(\log y)' \overset{\text{Reg. 5}}{=} \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

$x = \log y$
cioè $y = e^x$

Quindi $(\log y)' = \frac{1}{y}$.

$\square$

$(x^a)' = a x^{a-1}$

Dim. (solo per $x>0$)

Scrivo $x^a = e^{a\cdot \log x}$ e quindi

$$(x^a)' = \big(e^{\overbrace{a\cdot\log x}^{y}}\big)' \overset{\text{Reg. 4}}{=} (e^y)'\cdot(a\cdot\log x)'$$

$$= e^y \cdot a\cdot(\log x)'$$

$$= e^{a\cdot\log x}\cdot a\cdot\frac{1}{x}$$

$$= x^a\cdot a\cdot\frac{1}{x} = a x^{a-1} \qquad \square$$

Regola 3, caso particolare: $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$.

Dim.

$$\Big(\frac{1}{\underbrace{g(x)}_{y}}\Big)' \overset{\text{Reg. 4}}{=} \left(\frac{1}{y}\right)'\cdot g'(x) = (y^{-1})'\cdot g'(x)$$

$$= (-y^{-2})\cdot g'(x)$$

$$= -\frac{g'(x)}{y^2} = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}. \qquad \square$$

Regola 3, caso generale: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

Dim.

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \left(f\cdot\frac{1}{g}\right)' \overset{\text{Reg. 2}}{=} f'\cdot\frac{1}{g} + f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)'$$

$$\underset{\text{Reg. 3 caso partic.}}{=} \frac{f'}{g} + f\cdot\left(-\frac{g'}{g^2}\right) = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

$\square$

$(\operatorname{sen} x)' = \cos x$

Dim. Si parte dal rapporto incrementale:

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h\cdot\cos x + \operatorname{sen} x\cdot\cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

$$= \frac{\operatorname{sen} h\cdot\cos x}{h} + \frac{\operatorname{sen} x\cdot\cos h - \operatorname{sen} x}{h}$$

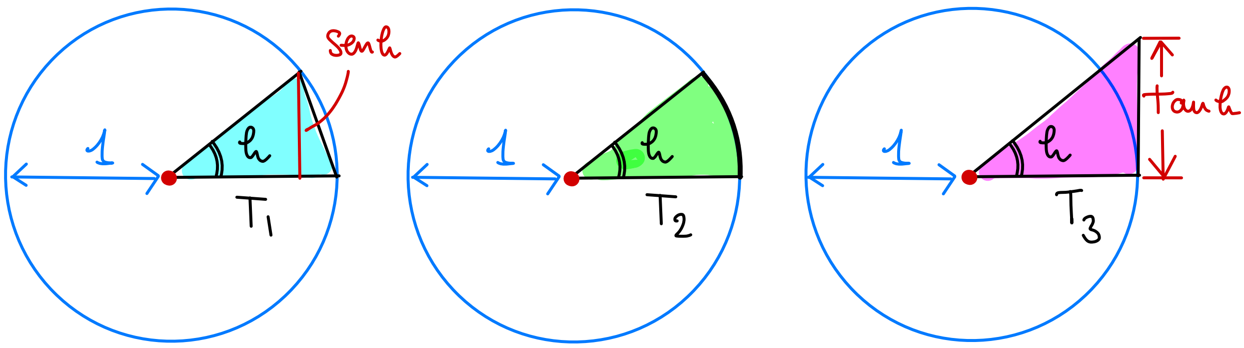
$$= \cos x\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop 1} - \operatorname{sen} x\cdot\underbrace{\frac{1-\cos h}{h}}_{\downarrow h\to 0 \atop 0} \xrightarrow[h\to 0]{} \cos x$$

Resta da dimostrare che:

(1) $\lim_{h\to 0}\frac{\operatorname{sen} h}{h} = 1$;  (2) $\lim_{h\to 0}\frac{1-\cos h}{h} = 0$.

forma indet. $\frac{0}{0}$  forma indet. $\frac{0}{0}$

Dimostro (1). Considero le seguenti figure piane:




Se sovrappongo le tre circonferenze, $T_1$, $T_2$ e $T_3$ sono contenute una nell'altra ($T_1 \subset T_2 \subset T_3$) e quindi

$$\begin{array}{ccccc} \text{area}(T_1) & \leq & \text{area}(T_2) & \leq & \text{area}(T_3) \\ \| & & \| & & \| \\ \frac{1}{2}\operatorname{sen} h & & \frac{1}{2} h & & \frac{1}{2}\tan h = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} h}{\cos h} \end{array}$$

formula per l'area del settore circol.

cioè

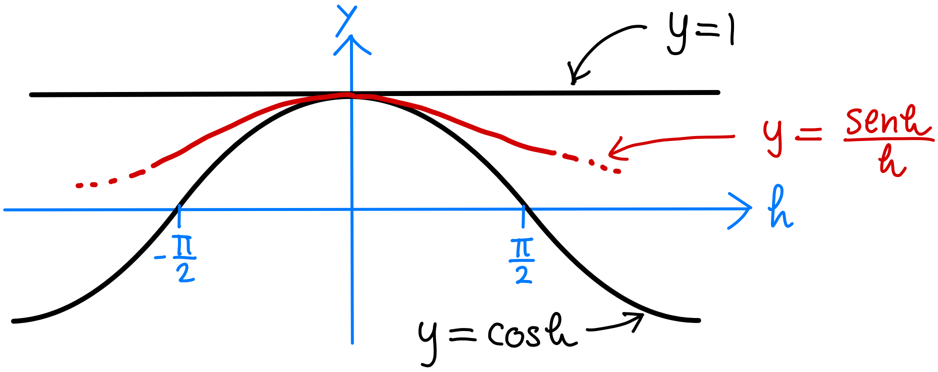
$$\operatorname{sen} h \leq h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{\cos h}$$

$$\cos h \leq \frac{\operatorname{sen} h}{h} \leq 1$$

Siccome $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ è compreso tra $\cos h$ e $1$, e $\cos h \xrightarrow[h \to 0]{} \cos(0) = 1$ ($\cos h$ è una funz. continua) ne deduco che

$$\frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1 \ .$$

Un altro modi di interpretare l'ultimo passaggio è questo: il grafico di $\frac{\operatorname{sen} h}{h}$ (funzione della var. $h$) è compreso tra quello di $\cos h$ e quello di $1$:




Siccome i grafici di $1$ e $\cos h$ si toccano per $h=0$ (perché $\cos 0 = 1$) necess. $\frac{\operatorname{sen} h}{h} \xrightarrow[h \to 0]{} 1$.

Dimostro (2):

$$\frac{1-\cos h}{h} = \frac{(1-\cos h)(1+\cos h)}{h\,(1+\cos h)}$$

$$= \frac{1-\cos^2 h}{h(1+\cos h)} = \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{\substack{\downarrow h\to 0 \\ 1}} \cdot \underbrace{\frac{\operatorname{sen} h}{1+\cos h}}_{\substack{\downarrow h \to 0 \\ \frac{\operatorname{sen}(0)}{1+\cos(0)} = 0}} \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

$1-\cos^2 h = \operatorname{sen}^2 h$

$\square$

Lezione 15- prima parte

# Derivata del coseno

$$(\cos(x))' = -\sin(x)$$

Osservo che:

- $\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$
- $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = f(g(x))$ con $g(x) = x + \frac{\pi}{2}$, $f(y) = \sin(y)$

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$(\cos(x))' = \left(\sin\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)'\right) = \cos\left(x+\tfrac{\pi}{2}\right)\cdot 1 = \cos(x)\underbrace{\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=0} - \sin(x)\underbrace{\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right)}_{=1} = -\sin(x)$$

# Derivata della tangente

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(\tan(x))' = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) - \sin(x)\cdot(-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

# Derivata dell'arcotangente.

Per derivare l'arcotangente utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.
Se $g(y)$ è l'inversa di $f(x)$ abbiamo $g'(y) = \frac{1}{f'(x)}$ con $x = g(y)$.

Dunque $$(\arctan(y))' = \frac{1}{(\tan(x))'} = \frac{1}{1+\tan^2(x)} = \frac{1}{1+(\tan(\arctan(y)))^2} = \frac{1}{1+y^2}$$

# Derivata dell'arcocoseno

Ricordiamo che l'arcocoseno è definito in $[-1,1]$, ma è derivabile in $(-1,1)$.

Anche in questo caso utilizziamo la formula della derivata della funzione inversa.

$$(\arccos(y))' = \frac{1}{(\cos(x))'} = \frac{1}{-\sin(x)} = \frac{1}{-\sqrt{1-\cos^2(x)}} = \frac{1}{-\sqrt{1-(\cos(\arccos(y)))^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

se $y \in (-1,1)$, allora $x \in (0,\pi)$, dunque $\sin(x) > 0$

$\Rightarrow \sin(x) = +\sqrt{1-\cos^2(x)}$

# Derivata dell'arcoseno

Anche l'arcoseno è derivabile in $(-1,1)$.
Similmente abbiamo

$$(\arcsin(y))' = \frac{1}{(\sin(x))'} = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

$y \in (-1,1)$, allora $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, dunque $\cos(x) \geq 0$

$\Rightarrow \cos(x) = \sqrt{1-\sin^2(x)}$

Esercizio: trovare l'equazione della retta tangente in $x=2$ a $f(x)=\frac{x+2}{x^2-1}-\log(2x-3)$.

Svolgimento:

1) la retta tangente passa per $P=(2,f(2))=(2,\frac{4}{3})$.

2) il coefficiente angolare della retta tangente è $m=f'(2)$.

$$f'(x)=\frac{x^2-1-(x+2)(2x)}{(x^2-1)^2}-\frac{2}{2x-3}$$

$$f'(2)=-\frac{31}{9}$$

$$y=mx+q \quad \text{con} \quad m=-\frac{31}{9}$$

Trovo $q$ imponendo il passaggio per $P$:

$$\frac{4}{3}=-\frac{31}{9}\cdot 2+q \Rightarrow q=\frac{74}{9}$$

La retta è $\quad 9y=-31x+74$

Esercizio: Sia $f(x)=\begin{cases} e^{x+a} & x\geq 0 \\ x+b & x<0 \end{cases}$

i) Per quali $a,b\in\mathbb{R}$ la funzione è continua?

ii) Per quali $a,b\in\mathbb{R}$ la funzione è derivabile?

Svolgimento: La funzione è definita a tratti.

i) Per $x<0$ e $x>0$ la funzione è continua, dobbiamo vedere cosa succede in zero.
Affinchè sia continua anche in zero serve che

$$f(0)=\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)$$

$$f(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=e^a \qquad\qquad \lim_{x\to 0^-}f(x)=b$$

quindi vogliamo che $b=e^a$.
Preso un qualsiasi $a\in\mathbb{R}$, se $b=e^a$ allora la funzione è continua.

ii) Se la funzione non fosse continua, allora non è neanche derivabile, quindi almeno dobbiamo avere che se prendiamo $a$ qualsiasi in $\mathbb{R}$, allora $b=e^a$.
Vediamo se servono ulteriori condizioni
Per $x<0$ e $x>0$ la funzione è derivabile e la derivata vale

$$f'(x)=\begin{cases} e^{x+a} & x>0 \\ 1 & x<0 \end{cases}$$

Affinchè sia derivabile anche in zero serve che

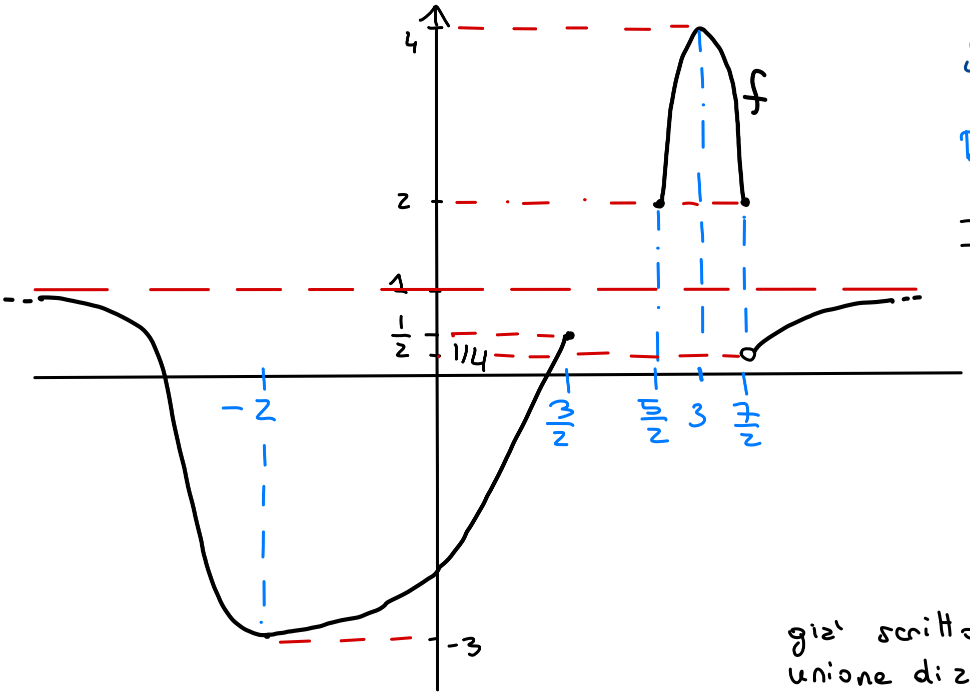
$$\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\ell \quad \text{con } \ell\neq\pm\infty.$$

$$\lim_{x\to 0^+}e^{x+a}=e^a \qquad e \qquad \lim_{x\to 0^-}1=1$$

quindi $e^a=1 \Rightarrow a=0$
e $b=e^0=1$.

# Lezione 20

**Esercizio:** Dato il grafico della funzione $f$ trovare
i) massimi e minimi ASSOLUTI
ii) massimi e minimi LOCALI
iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A = [-1, 2]$.




**Soluzione:**

$Dom(f) = (-\infty, \frac{3}{2}] \cup [\frac{5}{2}, +\infty)$

$Im(f) = [-3, 1) \cup [2, 4]$.

i) Trovare il massimo e minimo della funzione $f$ significa trovare massimo e minimo (se esistono) dell'insieme $Im(f)$.
Visto che abbiamo già scritto $Im(f)$ sotto forma di unione di 2 intervalli, è facile vedere che

$\inf(Im(f)) = -3$, inoltre $-3$ appartiene all'insieme quindi il minimo assoluto di $f$ è $-3$ e il punto di minimo è $x = -2$.
Inoltre $\sup(Im(f)) = 4$, $4$ appartiene ad $Im(f)$ quindi il massimo assoluto di $f$ è $4$ e il punto di massimo è $x = 3$.

ii) I massimi/minimi assoluti sono anche massimi e minimi locali.
Vediamo se ce ne sono altri.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:
A) punti a tangente orizzontale
B) una volta scritto il $Dom(f)$ sottoforma di intervalli, estremi di questi intervalli
C) punti interni al $Dom(f)$, ma punti di non derivabilità.

A) I punti del grafico $(-2, -3)$ e $(3, 4)$ sono gli unici con tangente orizzontali. Non ce ne sono altri.
B) Il punto $x = \frac{3}{2}$ è un punto di massimo locale.
Esiste infatti un intervallo $I$ del quale $x = \frac{3}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap Dom(f)$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Basta prendere $I := [\frac{3}{2} - \varepsilon, \frac{3}{2} + \varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [1, 2]$, $I \cap Dom(f) = [1, \frac{3}{2}]$ e $\forall x \in [1, \frac{3}{2}]$ vale $f(x) \leq f(\frac{3}{2})$.
Il massimo locale è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto $x = \frac{5}{2}$ è un punto di minimo locale.
Esiste infatti un intervallo $I$ del quale $x = \frac{5}{2}$ è un punto interno tale che $\forall x \in I \cap Dom(f)$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.

Basta prendere $I := [\frac{5}{2}-\varepsilon, \frac{5}{2}+\varepsilon]$ con $\varepsilon > 0$ sufficientemente piccolo.
Scelgo ad esempio $\varepsilon = \frac{1}{2}$.
Abbiamo $I = [2, 3]$, $I \cap Dom(f) = [\frac{5}{2}, 3]$ e $\forall x \in [\frac{5}{2}, 3]$ vale $f(x) \geq f(\frac{5}{2})$.
Il minimo locale è $f(\frac{5}{2}) = 2$.

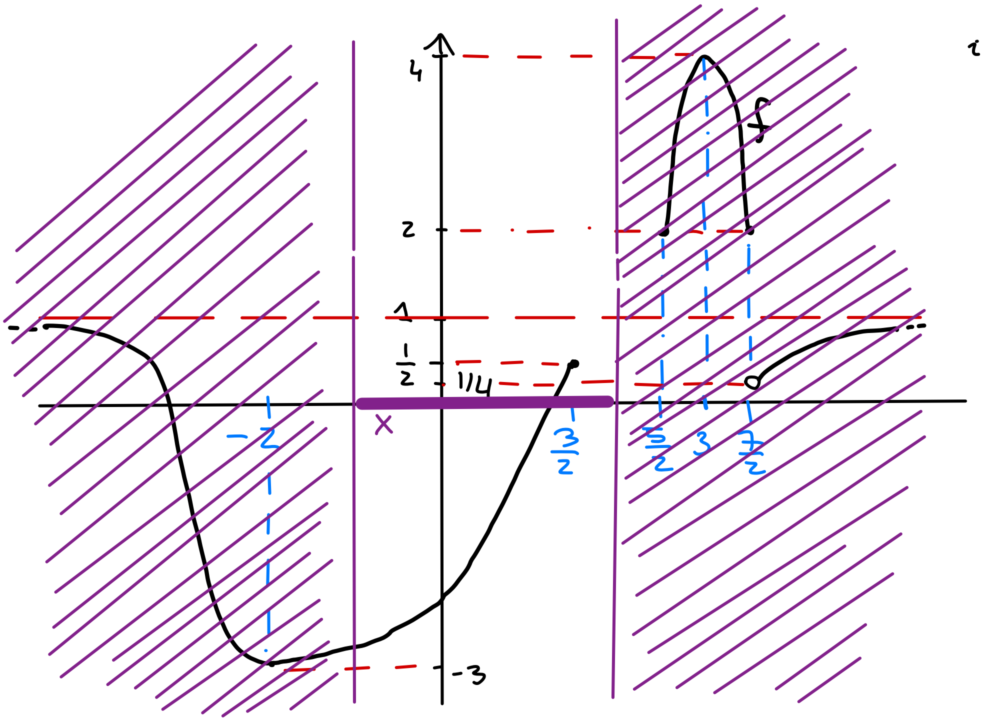
c) L'unico punto di $Dom(f)$ che è un punto di non derivabilità è $x = \frac{7}{2}$
visto che in $x = \frac{7}{2}$ la funzione non è neanche continua.
$x = \frac{7}{2}$ non è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.

Infatti non è possibile trovare nessun intervallo $I$ che abbia $\frac{7}{2}$ come punto interno tale per cui tutti gli $x \in I \cap Dom(f)$ verifichino la proprietà
* $f(x) \geq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di minimo locale)

oppure
* $f(x) \leq f(\frac{7}{2})$ (necessaria affinché $x = \frac{7}{2}$ sia punto di massimo locale)

Gli intervalli per i quali $x = \frac{7}{2}$ è un punto interno sono del tipo
$[\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b]$ con $a, b > 0$.
Abbiamo che per $a$ sufficientemente piccolo (ad esempio $0 < a < 1$)
$[\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b] \cap Dom(f) = [\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2} + b]$.
Per quanto possa io scegliere $a, b$ piccoli abbiamo sempre
* $f(\frac{7}{2}) = 2$
* $\forall x \in [\frac{7}{2} - a, \frac{7}{2})$ vale $f(x) > 2$
* $\forall x \in (\frac{7}{2}, \frac{7}{2} + b]$ vale $f(x) < 2$, in particolare $\frac{1}{4} < f(x) < 1$.

Dunque
$x = \frac{7}{2}$ non è né un punto di massimo, né un punto di minimo locale.




iii) Ora ci interessa solo $f_{|[-1,2]}$
quindi ci chiediamo quali sono i massimi e minimi relativamente all'intervallo $[-1, 2]$.
Notiamo che
$Dom(f) \cap [-1, 2] = [-1, \frac{3}{2}]$.
Stiamo quindi considerando una funzione continua in un intervallo chiuso, limitato e non vuoto.
Il teorema di Weierstraß ci garantisce che massimo e minimo esistono.
Il minimo è $f(-1)$
ed il massimo è $f(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}$.
Il punto di minimo è $x = -1$ e il punto di massimo è $x = \frac{3}{2}$.
Notiamo inoltre che non ci sono ulteriori massimi e minimi locali.

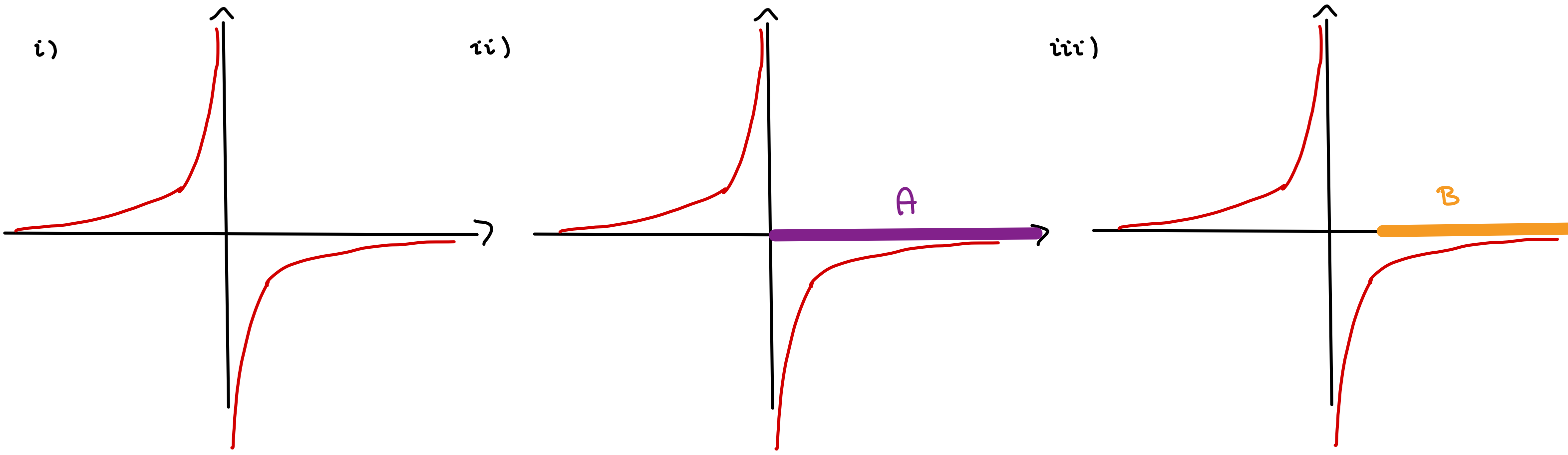
**Esercizio:** Dato il grafico della funzione $f(x) = -\frac{1}{x}$ trovare

i) massimi e minimi ASSOLUTI, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

ii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $A = [0, +\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

iii) massimi e minimi ASSOLUTI relativi all'insieme $B = [1, +\infty)$, nel caso non esistano specificare estremo superiore e inferiore.

**Soluzione:**




i) $\mathrm{Dom}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\mathrm{Im}(f) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

$\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ e non esiste massimo assoluto,

$\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ e non esiste minimo assoluto.

ii) Guardiamo ora $f_{|A}$

$\mathrm{Dom}(f_{|A}) = \mathrm{Dom}(f) \cap A = ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cap [0, +\infty) = (0, +\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|A}) = (-\infty, 0)$

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|A})) = 0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x \in \mathrm{Dom}(f_{|A})$ tale che $f(x) = 0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|A})) = -\infty$ e non esiste minimo assoluto.

iii) Guardiamo ora $f_{|B}$

$\mathrm{Dom}(f_{|B}) = \mathrm{Dom}(f) \cap B = ((-\infty, 0) \cup (0, +\infty)) \cap [1, +\infty) = [1, +\infty)$.

$\mathrm{Im}(f_{|B}) = [-1, 0)$. Come prima

$\sup(\mathrm{Im}(f_{|B})) = 0$, sebbene zero sia un valore finito, non c'è nessun $x \in \mathrm{Dom}(f_{|B})$ tale che $f(x) = 0$, quindi zero non è un massimo assoluto. Non esiste il massimo.

$\inf(\mathrm{Im}(f_{|B})) = -1$, inoltre $f(1) = -1$, quindi $-1$ è il minimo assoluto di $f_{|B}$ e $1$ è il punto di minimo assoluto.

Esercizio: trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = e^{(x^3-3x)}$$

relativamente all'intervallo $-2 \leq x \leq 3$.

Soluzione: Osservo che $f_{|A}$ con $A=[-2,3]$ è una funzione continua definita su un intervallo chiuso, limitato e non vuoto, per il teorema di Weierstraß massimo e minimo esistono sicuramente. La funzione è anche derivabile in $[-2,3]$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min:

A) estremi dell'intervallo $[-2,3]$

B) punti a derivata nulla

A) $f(-2) = e^{(-8+6)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2$

$f(3) = e^{(27-9)} = e^{18}$

B) $f'(x) = e^{(x^3-3x)} \cdot (3x^2-3) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)}$

$0 = f'(x) = 3(x^2-1)e^{(x^3-3x)} \iff x = \pm 1$

$f(-1) = e^{(-1+3)} = e^2$

$f(1) = e^{(1-3)} = e^{-2} = \left(\frac{1}{e}\right)^2.$

Confronto tutti i valori trovati ($f(-2)=e^{-2}$, $f(3)=e^{18}$, $f(-1)=e^2$, $f(1)=e^{-2}$). Abbiamo

$$e^{-2} < e^2 < e^{18}.$$

Quindi

$e^{-2}$ è il minimo assoluto di $f$ in $[-2,3]$ e
$x=-2$, $x=1$ sono punti di minimo.

$e^{18}$ è il massimo assoluto di $f$ in $[-2,3]$ e
$x=3$ è il punto di massimo.

**Esercizio:** trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = x^3 e^{2x}$$

relativamente all'intervallo $x \leq -1$.

**Soluzione:** In questo caso $(-\infty, -1]$ non è limitato, massimo e minimo potrebbero non esistere.
Per studiare il comportamento della $f$ agli estremi dell'intervallo dobbiamo ricorrere ai limiti:

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 e^{2x} = 0$$

$$f(-1) = -e^{-2} \simeq -0{,}13$$

Andiamo ora a vedere i punti con derivata nulla:

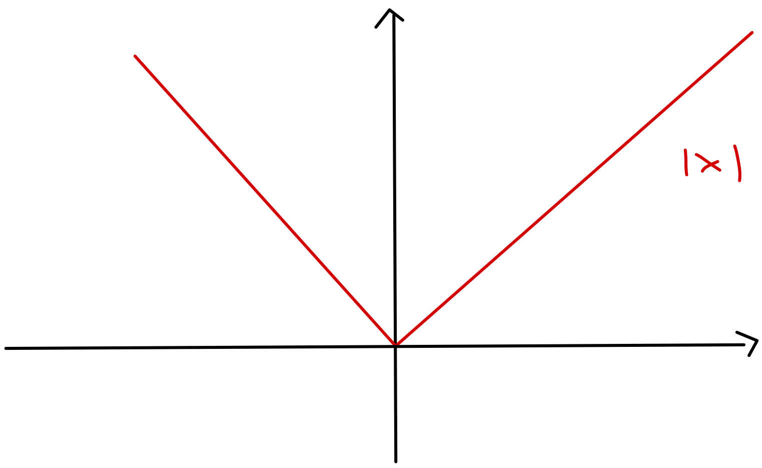
$$0 = f'(x) = 3x^2 e^{2x} + 2x^3 e^{2x} = x^2 e^{2x}(3+2x) \iff x=0,\ x=-\frac{3}{2}$$

$$f\left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{27}{8}e^{-3} \simeq -0{,}17$$

Possiamo concludere che il minimo assoluto di $f$ ristretta a $(-\infty, -1]$ è $-\frac{27}{8}e^{-3}$ e il punto di minimo assoluto è $-\frac{3}{2}$

Il massimo assoluto non esiste e $\sup\left(\operatorname{Im}\left(f_{|(-\infty,-1]}\right)\right) = 0$

**Esempio:** Consideriamo $f(x) = |x|$




Il minimo della funzione è zero e il punto di minimo è zero.
Il massimo non esiste.
Questa funzione è definita su tutto $\mathbb{R}$, ma è derivabile in $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.
La sua derivata è $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x>0 \\ -1 & \text{se } x<0 \end{cases}$.

La derivata non si annulla mai.
Per trovare quindi i punti di massimo o minimo non basta cercare tra i punti in cui si annulla la derivata.

**Esercizio:** trovare massimo e minimo assoluto (se esistono) di

$$f(x) = |x^2-1|.$$

**Svolgimento:** $Dom(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) \subseteq [0,+\infty)$.
Possiamo scrivere la funzione come $f(x) = \begin{cases} x^2-1 & \text{se } x \le -1 \\ 1-x^2 & \text{se } -1<x<1 \\ x^2-1 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

La funzione è derivabile in $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ e la sua derivata vale $f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x<-1 \\ -2x & \text{se } -1<x<1 \\ 2x & \text{se } x>1. \end{cases}$

La non derivabilità in $x=\pm 1$ si vede dal fatto che
$\lim_{x\to -1^-} 2x = -2$, $\lim_{x\to -1^+} -2x = 2$, $\lim_{x\to 1^-} -2x = -2$, $\lim_{x\to 1^+} 2x = 2$.

ELENCO dei "SOSPETTI" punti di max/min locale:

A) punti a derivata nulla
B) punti di non derivabilità.

Abbiamo $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = +\infty \Rightarrow \sup(Im(f)) = +\infty$ e il massimo non esiste.

A) $f'(x) = 0 \iff x = 0$
$f(0) = 1$

B) $f(-1) = 0$
$f(1) = 0$

$\Rightarrow$ Il minimo è 0 e i punti di minimo sono $x = \pm 1$.

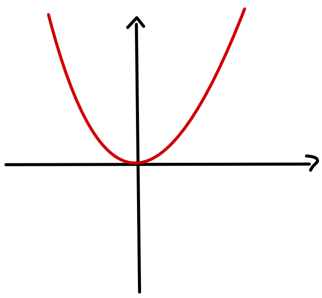
Inoltre $x=0$ è un punto di massimo locale.

ESERCIZIO "TIPICO": trovare massimi/minimi assoluti di $f$ (dove $f$ è definita nel suo dominio "naturale") oppure trovare massimi/minimi assoluti di $f$ relativamente all'insieme $X$ (stiamo dunque considerando $f_{|X}$ definita in $Dom(f) \cap X$).

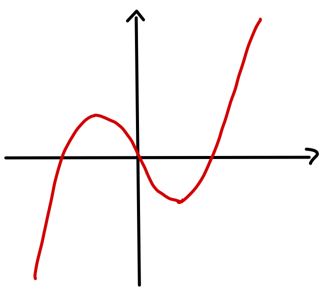
Osservazioni: consideriamo $f: X \to \mathbb{R}$ con $X$ un intervallo / unione finita di intervalli. Sappiamo che se $x_0$ è un punto di massimo o minimo locale interno all'intervallo $X$ (o a uno degli intervalli) e se $x_0$ è un punto in cui $f$ è derivabile, allora $f'(x_0) = 0$.

Il viceversa non è necessariamente vero. Ciò significa che se $x_0$ è un punto interno ad $X$ dove $f$ è derivabile e $f'(x_0) = 0$ allora abbiamo varie possibilità:

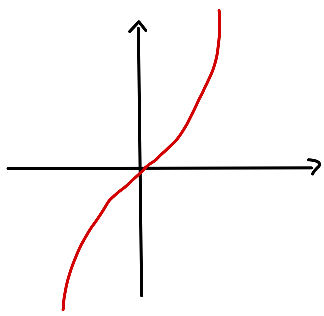
- $x_0$ può essere un massimo/minimo assoluto
- $x_0$ può essere un massimo/minimo locale
- $x_0$ può anche non essere né un massimo/minimo assoluto né un massimo/minimo locale



$f(x) = x^2$
$f'(0) = 0$ e 0 è punto di minimo assoluto.



$f(x) = x^3 - 3x$
$f'(1) = 0$ e 1 è punto di minimo locale



$f(x) = x^3$
$f'(0)$ e 0 non è né min/max. assoluto né min/max locale

Inoltre ci sono punti in cui $f$ non è derivabile che possono essere punti di massimo/minimo per $f$, ad esempio $x=0$ per $f(x) = |x|$.

E infine dobbiamo considerare gli estremi di $Dom(f)$ / $Dom(f) \cap X$.

Tenendo tutte queste cose a mente, abbiamo la seguente
STRATEGIA PER RISOLVERE L'ESERCIZIO TIPICO:

. ELENCO dei SOSPETTI punti di massimo e minimo assoluto:

A) estremi di Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X
B) punti in cui la funzione non è derivabile
C) punti in cui la derivata si annulla

A) Scrivo Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X come unione finita di intervalli, che possono essere chiusi/aperti e limitati/illimitati. Guardo tutti gli estremi.

- Se un estremo è $-\infty$ oppure $+\infty$:
  calcolo $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell_1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \ell_2$

- Se un estremo è un numero finito $a_1 \dots a_m$ ma non appartiene a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X calcolo il limite pertinente (per $x\to a^+$ oppure $x\to a^-$ a seconda che $a$ sia estremo sinistro o destro)

$$\lim_{x\to a_1^+} f(x) = \ell_3 \quad \dots \quad \lim_{x\to a_m^-} f(x) = \ell_n$$

ATTENZIONE: se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_n$ è $+\infty$ allora $\sup(\mathrm{Im}(f)) = +\infty$ $(\sup(\mathrm{Im}(f_{|X})) = +\infty)$ e il massimo assoluto non esiste.
Se uno di questi limiti $\ell_1, \ell_2, \ell_3 \dots \ell_n$ è $-\infty$ allora $\inf(\mathrm{Im}(f)) = -\infty$ $(\inf(\mathrm{Im}(f_{|X})) = -\infty)$ e il minimo assoluto non esiste.

- Calcolo la funzione in tutti gli estremi $b_1 \dots b_m$ che appartengono a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X.

$$f(b_1) \dots f(b_m).$$

B) Se ci sono dei punti $c_1 \dots c_k$ interni a Dom(f) / Dom(f) $\cap$ X in cui $f$ non è derivabile calcolo

$$f(c_1) \dots f(c_k).$$

C) Calcolo la derivata prima di $f$. Cerco tutti i punti $x_1 \dots x_i$ in cui si annulla la derivata prima. Calcolo

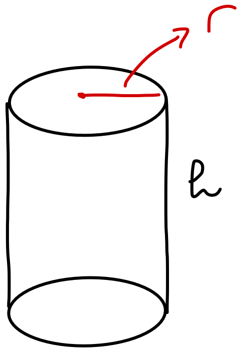
$$f(x_1) \dots f(x_i).$$

* Confronto tutti i valori che ho ottenuto: $\ell_1, \dots, \ell_n, f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$.

Se il minore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il minimo assoluto.
Se il minore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_n$, allora quello è l'inf e il minimo non esiste.
Se il maggiore è uno tra $f(b_1), \dots, f(b_m), f(c_1) \dots f(c_k), f(x_1) \dots f(x_i)$, allora quello è il massimo assoluto.
Se il maggiore è uno tra quelli ottenuti come limite $\ell_1 \dots \ell_n$, allora quello è il sup e il massimo non esiste.

**Esercizio:** trovare le dimensioni del cilindro di area minima con volume 1.

**Svolgimento:**




$$\text{Volume} = \pi r^2 \cdot h = 1$$

$$\Rightarrow h = \frac{1}{\pi r^2}$$

$$\text{Area} = 2 \cdot \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + \frac{2}{r}$$

$$\text{Area} = f(r) = 2\pi r^2 + \frac{2}{r} \quad \text{con} \quad r \in (0, +\infty).$$

Cerco il minimo assoluto:

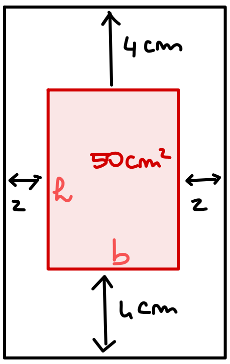
$$\lim_{r \to 0^+} f(r) = +\infty, \quad \lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$$

$$f'(r) = 4\pi r - \frac{2}{r^2} \qquad f'(r) = 0 \iff \frac{4\pi r^3 - 2}{r^2} = 0 \iff r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

$$f\left(\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = \frac{2\pi}{\sqrt[3]{4\pi^2}} + \frac{2}{\sqrt[3]{2\pi}} \quad \leftarrow \text{minimo}$$

Il cilindro di area minima ha raggio $= \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$ e altezza $= \frac{\sqrt[3]{4\pi^2}}{\pi}$.

**Esercizio:** Un foglio di carta deve contenere un'area di stampa di $50\ cm^2$, margine superiore e inferiore di 4 cm e margini laterali di 2 cm. Trovare le dimensioni del foglio di area minima.




$$\text{Area di stampa} = b \cdot h = 50\ cm^2$$

$$\Rightarrow b = \frac{50}{h}$$

$$\text{Area} = (h+8)(b+4) = (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right), \quad h \in (0, +\infty).$$

$$\lim_{h \to 0^+} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$$

$$\lim_{h \to +\infty} (h+8)\left(\frac{50}{h} + 4\right) = +\infty$$

$$\text{Area}'(h) = \left(\frac{50}{h} + 4\right) + (h+8)\left(-\frac{50}{h^2}\right) = -\frac{50 \cdot 8}{h^2} + 4$$

$$0 = \text{Area}'(h) \iff h = \pm 10$$

$$\text{Area}(10) = 18 \cdot 9 \quad \leftarrow \text{minimo.}$$

$h = 18$, $b = 9$.

Lezione 23

Sia $m \in \mathbb{N}$, con il simbolo $m!$ indichiamo il prodotto di $m$ fattori

$$m! := m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

$m!$ si legge "m FATTORIALE".

## Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $e^x$

Fissato $d \in \mathbb{N}$, per applicare il teorema dello sviluppo di Taylor serve che la funzione $f(x) = e^x$ sia derivabile $d$ (oppure $d+1$) volte almeno in un certo intervallo $I \subset \mathbb{R}$ che contenga zero. Questa proprietà è vera, qualsiasi sia $d \in \mathbb{N}$,
infatti $\forall m \in \mathbb{N}$, $f^{(m)}(x) = e^x$.
Inoltre $f^{(m)}(0) = 1$ dunque

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1})$$
$$= \sum_{m=0}^{d} \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1}).$$

Da questo sviluppo ritroviamo che $e^x - 1 \sim x$. Infatti $e^x - 1 = x + \Theta(x^2)$ e quindi la parte principale di $e^x - 1$ è $x$.

## Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\cos(x)$.

Anche il coseno può essere derivato in tutto $\mathbb{R}$ quante volte vogliamo.
In particolare

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) & f(0) &= 1 \\ f'(x) &= -\sin(x) & f'(0) &= 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) & f''(0) &= -1 \\ f'''(x) &= \sin(x) & f'''(0) &= 0 \\ f^{IV}(x) &= \cos(x) & & \\ &\vdots & & \end{aligned}$$

Quindi $\cos(x) = 1 + f'(0) \cdot x + \frac{f''(0) \cdot x^2}{2} + \frac{f'''(0) x^3}{3!} + \frac{f^{IV}(0) x^4}{4!} + \frac{f^{V}(0) x^5}{5!} + \ldots + \frac{f^{(d)}(0) x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1})$,

lo sviluppo all'ordine d con d PARI è:

$$\cos(x) = \underline{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}} + \Theta(x^{d+1}),$$

Se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è dispari) otteniamo

$$\cos(x) = \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!}}_{\text{stesso polinomio di prima ma resto } \Theta(x^{d+2})} + \Theta(x^{d+2}).$$

informazione più accurata!

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine d del coseno è

con d pari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+2}),$

con d dispari $\quad \cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \pm \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \Theta(x^{d+1}).$

## Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\sin(x)$

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(x) & f(0) &= 0 \\ f'(x) &= \cos(x) & f(1) &= 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) & f''(0) &= 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) & f'''(0) &= -1 \\ f^{IV}(x) &= \sin(x) & f^{IV}(0) &= 0 \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

Nel caso del seno $f^m(0)=0$ quando $m$ è pari

Quin $\sin(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \cancel{\frac{f''(0)\cdot x^2}{2}} + \frac{f'''(0)x}{3!} + \cancel{\frac{f^{IV}(0)x^4}{4!}} + \frac{f^{V}(0)x^5}{5!} + \dots + \frac{f^{(d)}(0)x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1})$,

se $d$ è dispari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+1})$,

se ora facciamo lo sviluppo di ordine $d+1$ (che quindi è pari) otteniamo

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+2}).$$

Quindi alla fine lo sviluppo di ordine $d$ del seno è

con $d$ dispari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^d}{d!} + \Theta(x^{d+2})$,

con $d$ pari $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \dots \pm \frac{x^{d-1}}{(d-1)!} + \Theta(x^{d+1})$.

Anche in questo caso abbiamo $\sin(x) = x + \Theta(x^2)$, quindi riotteniamo $\sin(x) \sim x$.

**Osservazione:** Consideriamo una funzione $f$ derivabile almeno $d$ volte in $I \subset \mathbb{R}$ e supponiamo che zero sia un punto interno ad $I$. Consideriamo il suo sviluppo di Taylor di ordine $d$ <u>in zero</u>.
SE $f$ E' PARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine PARI.
SE $f$ E' DISPARI nel polinomio di Taylor appaiono solo termini di ordine DISPARI.

**Dimostrazione:**
la derivata di una funzione pari è una funzione dispari

$$f(x) = f(-x) \Rightarrow f'(x) = -f'(-x)$$

la derivata di una funzione dispari è una funzione pari

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow -f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

Inoltre se $f$ è dispari $f(0)=0$ infatti $f(x) = -f(-x) \Rightarrow f(0) = -f(0) \Rightarrow 2f(0) = 0$
$\Rightarrow f(0) = 0$.

Se $f$ è pari, allora $f^{(m)}(x)$ con $m$ dispari è una fz. dispari e $f^m(0)=0$
$f^{(m)}(x)$ con $m$ pari è una fz. pari

Se $f$ è dispari, allora $f^{(m)}$ con $m$ dispari è pari
$f^{(m)}$ con $m$ pari è dispari e $f^m(0)=0$

## Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $\log(x+1)$

$$f(x) = \log(1+x) \qquad f(0) = 0$$
$$f'(x) = (1+x)^{-1} \qquad f'(0) = 1 \qquad \frac{f''(0)}{2!} = -\frac{1}{2}$$
$$f''(x) = -(1+x)^{-2} \qquad f''(0) = -1$$
$$f'''(x) = +2(1+x)^{-3} \qquad f'''(0) = +2 \qquad \frac{f'''(0)}{3!} = +\frac{2}{2\cdot 3} = +\frac{1}{3}$$
$$f^{IV}(x) = -2\cdot 3(1+x)^{-4} \qquad f^{IV}(0) = -2\cdot 3 \qquad \frac{f^{IV}(0)}{4!} = -\frac{2\cdot 3}{2\cdot 3\cdot 4} = -\frac{1}{4}$$
$$\vdots$$
$$f^{(m)}(x) = \pm (m-1)!\,(1+x)^{-m} \qquad \frac{f^{m}(0)}{m!} = \pm\frac{(m-1)!}{m!} = \pm\frac{1}{m}$$

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \pm \frac{x^d}{d} + \mathcal{O}(x^{d+1}).$$

In particolare abbiamo che la parte principale di $\log(1+x)$ è $x$.

Osservazione: $\log(x+1)$ non è definita su tutto $\mathbb{R}$, però basta che $\log(1+x)$ sia definita e derivabile d volte in un intervallo che contiene zero, ad esempio $I = [-1/2, 1/2]$.

## Sviluppo di Taylor in zero di ordine d di $(1+x)^{a}$ con $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)^{a} \qquad f(0) = 1$$
$$f'(x) = a(1+x)^{a-1} \qquad f'(0) = a$$
$$f''(x) = a(a-1)(1+x)^{a-2} \qquad f''(0) = a(a-1)$$
$$f'''(x) = a(a-1)(a-2)(1+x)^{a-3} \qquad f'''(0) = a(a-1)(a-2)$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$
$$f^{(m)}(x) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)(1+x)^{a-m} \qquad f^{(m)}(0) = a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)$$

$$(1+x)^{a} = 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2}x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}x^3 + \dots + \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-d+1)}{d!}x^d + \mathcal{O}(x^{d+1}).$$

In particolare per $a = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \pm x^d + \mathcal{O}(x^{d+1})$$

Noto che se $b \leq a \leq b+1$ con $b \in \mathbb{N}$, allora la funzione è derivabile su tutto $\mathbb{R}$ b volte, invece le derivate dalla $(b+1)$-esima in poi non sono definite per $x = -1$. Se $a$ è negativo la funzione e tutte le sue derivate non sono definite per $x = -1$. Per fare lo sviluppo di Taylor in zero questo non è un problema. Basta prendere $I \subset (-1, 1)$.

Se introduciamo il simbolo $\binom{a}{m} := \frac{a(a-1)(a-2)\cdots(a-m+1)}{m!}$ e $\binom{a}{0} := 1$

coefficiente binomiale generalizzato

allora possiamo scrivere:

$$(1+x)^{a} = \sum_{m=0}^{a} \binom{a}{0} x^m$$

# FORMULA del BINOMIO di NEWTON

Siano $x, y \in \mathbb{R}$, $d \in \mathbb{N}$. Vale

$$(x+y)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

dove per $m \le d$, $m, d \in \mathbb{N}$ $\quad \binom{d}{m} := \dfrac{d!}{m!\,(d-m)!}$ $\quad$ e $\quad \binom{d}{0} = 1$.

## Alcune proprietà del COEFFICIENTE BINOMIALE

$$\binom{d}{d} = 1$$

$$\binom{d}{1} = \frac{d!}{1!\,(d-1)!} = d$$

$$\binom{d}{m} = \binom{d}{d-m} \quad \text{infatti} \quad \binom{d}{d-m} = \frac{d!}{(d-m)!\,(d-(d-m))!} = \frac{d!}{(d-m)!\,m!} = \binom{d}{d-m}$$

**Osservazione:** lo sviluppo di Taylor di ordine $d$ (o più) di un polinomio di grado $d$ coincide con il polinomio stesso, in particolare non c'è resto.

**Dimostrazione:** consideriamo un qualsiasi polinomio di grado $d$:

$$q(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_d x^d \qquad \text{con } q_1, \dots, q_d \in \mathbb{R}$$

Scriviamo il suo sviluppo di Taylor come polinomio di Taylor di ordine $d$ e resto di Lagrange:

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}$$

$$q'(x) = q_1 + 2q_2 x + 3q_3 x^2 + 4q_4 x^3 + \dots + d\, q_d\, x^{d-1}$$

$$q''(x) = 2q_2 + 3\cdot 2\, q_3 x + 4\cdot 3\, q_4 x^2 + \dots + d\cdot(d-1)\, x^{d-2}$$

$$q'''(x) = 3\cdot 2\, q_3 + 4\cdot 3\cdot 2\, q_4 x + \dots + d(d-1)(d-2)\, x^{d-3}$$

$$\vdots$$

$m<d \qquad q^{(m)}(x) = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots 3\cdot 2\, q_m + (m+1)m\cdot(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\, q_{m+1} x + \dots + d(d-1)(d-2)\cdot\ldots(d-m+1)\, x^{d-m}$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(x) = d\cdot(d-1)(d-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\, q_d$$

$$q^{(d+1)}(x) \equiv 0.$$

Calcoliamo ora le derivate in zero

$$q(0) = q_0$$

$$q'(0) = q_1$$

$$q''(0) = 2q_2$$

$$q'''(0) = 3\cdot 2\, q_3 = 3!\, q_3$$

$$\vdots$$

$$q^{(m)}(0) = m\cdot(m-1)\cdot(m-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\, q_m = m!\, q_m$$

$$\vdots$$

$$q^{(d)}(0) = d(d-1)(d-2)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\, q_d = d!\, q_d$$

$$\frac{q''(0)}{2!} = q_2 \qquad \frac{q'''(0)}{3!} = \frac{3!\, q_3}{3!} = q_3$$

$$\frac{q^{(m)}(0)}{m!} = \frac{m!\, q_m}{m!} = q_m \qquad \frac{q^{(d)}(0)}{d!} = \frac{d!\, q_d}{d!} = q_d$$

Inoltre, visto che $q^{(d+1)}(x) \equiv 0$, allora il resto di Lagrange è zero, quindi

$$P_d(x) + R_d(x) = \sum_{m=0}^{d} \frac{q^{(m)}(0)}{m!} x^m + \overbrace{\cancel{\frac{q^{(m+1)}(\tilde{x})}{(m+1)!} x^{m+1}}}^{=0}$$

$$= \sum_{m=0}^{d} q_m x^m = q(x).$$

## Dimostrazione della FORMULA del BINOMIO di NEWTON

Possiamo supporre $y \neq 0$, altrimenti se $y=0$ allora $(x+y)^d = x^d$ e non c'è niente da calcolare.

$$(x+y)^d = \left[y\left(\frac{x}{y}+1\right)\right]^d = y^d \left(\frac{x}{y}+1\right)^d$$

Chiamo $\frac{x}{y} = t$, $(t+1)^d$ è un polinomio di grado $d$ e coincide con il suo polinomio di Taylor di ordine.

$$(t+1)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m$$

quindi $\left(\frac{x}{y}+1\right)^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \left(\frac{x}{y}\right)^m$ e

$$(x+y)^d = y^d \left(\frac{x}{y}+1\right)^d = y^d \left(\sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m}\right) = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} \frac{x^m}{y^m} \cdot y^d = \sum_{m=0}^{d} \binom{d}{m} x^m y^{d-m}$$

**Es 1** Trovare la parte principale di

1) $e^x - 1 - 2x$ per $x \to 0$
2) $e^{2x} - 1 - 2x$ per $x \to 0$
3) $e^x - \cos(x)$ per $x \to 0$
4) $e^{x^2} - \cos(2x)$ per $x \to 0$

**Es 2** Ordinare le funzioni

$$-\log x \, , \quad x^2 \, , \quad 3 \, , \quad x^2 + x^{-2}$$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to 0^+$

**Es 3** Ordinare le funzioni

$$x^2 \log x \, , \quad \frac{x^4}{x^2+2} \, , \quad \log(x + \sin(x)) \, , \quad \frac{2^x}{3^x + 1}$$

rispetto alla relazione $\ll$ per $x \to +\infty$

**Es 4** Calcolare $\displaystyle \lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1 + x^3)}$

## Svolgimento:

**Es 1**

1) Lo sviluppo di Taylor al primo ordine di $e^x$ è

$$e^x = 1 + x + O(x^2)$$

dunque

$$\begin{aligned} e^x - 1 - 2x &= 1 + x + O(x^2) - 1 - 2x \\ &= -x + O(x^2) \\ &= -x + o(x) \end{aligned}$$

quindi $\quad e^x - 1 - 2x \sim -x$

e $-x$ è la parte principale per $x \to 0$ di $e^x - 1 - 2x$.

2) Scriviamo lo sviluppo di Taylor al primo ordine di $e^t$:

$$e^t = 1 + t + o(t^2).$$

Grazie alla sostituzione $t = 2x$ otteniamo

$$e^{2x} = 1 + 2x + o(x^2)$$

$\hookrightarrow o(2x^2) = o(x^2)$

quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + o(x^2) - 1 - 2x$$
$$= o(x^2)$$

$o(x^2)$ è una classe di funzioni, non descrive una sola funzione.

Non abbiamo trovato la parte principale.

Per trovarla dobbiamo considerare lo sviluppo di Taylor di $e^t$ ad un ordine successivo:

$$e^t = 1 + t + \frac{t^2}{2} + o(t^3).$$

Sostituiamo nuovamente $t = 2x$

$$e^{2x} = 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + o(x^3)$$
$$= 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3).$$

Quindi

$$e^{2x} - 1 - 2x = 1 + 2x + 2x^2 + o(x^3) - 1 - 2x$$
$$= 2x^2 + o(x^3)$$

e la parte principale di $e^{2x} - 1 - 2x$ è $2x^2$.

3) $$\left.\begin{aligned} e^x &= 1 + x + O(x^2) \\ \cos(x) &= 1 + O(x^2) \end{aligned}\right\}$$ Sviluppo di Taylor al primo ordine

$$e^x - \cos(x) = 1 + x + O(x^2) - 1 + O(x^2)$$
$$= x + O(x^2)$$

4) Proviamo a procedere come nel caso precedente:

$$e^t = 1 + t + O(t^2)$$
$$\cos(y) = 1 + O(y^2)$$

Sostituisco $t = x^2$ e $y = 2x$

$$e^{x^2} = 1 + x^2 + O(x^4)$$
$$\cos(2x) = 1 + O(x^2)$$

$$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + O(x^4) - 1 + O(x^2)$$
$$= x^2 + O(x^2) + O(x^4)$$

ATTENZIONE:

le funzioni $f$ che sono $O(x^2)$ sono "comparabili" con $x^2$, quindi potrebbero anche essere del tipo $a x^2$

In tal caso la parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ sarebbe $(1+a)x^2$ se $a$ fosse diverso da $-1$.

Ci servono maggiori informazioni per concludere l'esercizio.

$$\cos(y) = 1 - \frac{y^2}{2} + O(y^4)$$
$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + O(x^4)$$

Quindi $$e^{x^2} - \cos(2x) = 1 + x^2 + \theta(x^4)$$
$$-1 + 2x^2 + \theta(x^4)$$
$$= 3x^2 + \theta(x^4)$$

La parte principale di $e^{x^2} - \cos(2x)$ e' $3x^2$.

Es 2: Prima di tutto osservo che

per $x \to 0^+$ $\quad x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$

Sappiamo che per $x \to 0^+$
$$x^a \ll x^b \quad \text{se} \quad a > b$$

quindi
$$x^2 \ll 3 \ll x^2 + x^{-2} \sim x^{-2}$$

Ci resta da capire cosa fare con $-\log(x)$. Usiamo la definizione di $\ll$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{3}{-\log(x)} = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 \ll -\log x$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x^{-2}}{-\log(x)} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{-\log(x)}{x^{-2}} = 0$$

$$\Rightarrow \quad -\log x \ll x^{-2}$$

Quindi
$$x^2 \ll 3 \ll -\log x \ll x^2 + x^{-2}$$

Es 3 Noto che per $x \to +\infty$

$$\frac{x^4}{x^2+2} \sim \frac{x^4}{x^2} = x^2$$

$$x+\sin(x) \sim x \quad e \quad \log(x+\sin(x)) \sim \log(x)$$

$$\frac{2^x}{3^x+1} \sim \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Quindi possiamo ridurci ad ordinare

$$x^2 \log x \,, \quad x^2 \,, \quad \log(x) \,, \quad \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

Sappiamo che per $x \to +\infty$

$$\log(x) \ll x^a \quad \text{con } a>0$$

Visto che $\frac{2}{3} < 1$ abbiamo $\left(\frac{2}{3}\right)^x \ll \log x \ll x^2$

Resta da capire dove collocare $x^2 \log x$

Visto che $\lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2 \log x} = 0$

abbiamo $x^2 \ll \log x \cdot x^2$.

Es 4 $\sin(t) = t + o(t^3)$

$$\log(1+y) = y + o(y^2)$$

Dunque

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3)}{\log(1+x^3)} = \lim_{x \to 0} \frac{3x^3 + o(x^9)}{x^3 + o(x^6)} = 3$$

# Lezione 28

**Esercizio:** Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$$

**Svolgimento:** La p.p. di $\sin(x)$ è $x$. Sommando le parti principali abbiamo una cancellazione. Servono informazioni più precise

**I° modo:**

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)} = \frac{\sin(x) - x}{x \sin(x)} \sim \frac{-\frac{x^3}{6}}{x^2} = -\frac{x}{6}$$

la p.p. di $\sin(x) - x$ è $-\frac{x^3}{6}$

la p.p. di $x \sin(x)$ è $x^2$

**II° modo**

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)$$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$(1+y)^{-1} = 1 - y + \Theta(y^2)$$

$$y = -\frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)$$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right) = 1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4) + \Theta\left(\left(-\frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)$$

$\Longrightarrow$

$$(\sin(x))^{-1} = \left(x - \frac{x^3}{6!} + \Theta(x^5)\right)^{-1} = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right)\right]^{-1}$$

$$= x^{-1}\left[1 + \frac{x^2}{6} + \Theta(x^4)\right] = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \Theta(x^3)$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{x} - (\sin(x))^{-1} = -\frac{x}{6} + \Theta(x^3) = -\frac{x}{6} + o(x)$$

$\Longrightarrow$ la p.p. di $\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin(x)}$ è $-\frac{x}{6}$

Esercizio: Trovare la parte principale per $x \to 0$ di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$.

Svolgimento:

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + o(t^5)$$

Sostituzione $t = x^3$

$$\Rightarrow \sin(x^3) = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15})$$

$$(\sin(x))^3 = \left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^5)\right)^3 = \left[x\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)\right]^3$$

$$= x^3\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3$$

$$(1+y)^3 = 1 + 3y + o(y^2)$$

Sostituzione: $y = -\frac{x^2}{6} + o(x^4)$

$$\left(1 - \frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^3 = 1 + 3\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right) + o\left(\left(-\frac{x^2}{6} + o(x^4)\right)^2\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4) + o(x^4) + o\left(-\frac{x^2}{6}o(x^4)\right)$$

$$+ o(o(x^8))$$

$$= 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)$$

Quindi $(\sin(x))^3 = x^3\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^4)\right)$

$$= x^3 - \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$\Rightarrow$

$$\sin(x^3) - (\sin(x))^3 = x^3 - \frac{x^9}{6} + o(x^{15}) - x^3 + \frac{1}{2}x^5 + o(x^7)$$

$$= \frac{1}{2}x^5 + o(x^7) = \frac{1}{2}x^5 + o(x^5)$$

$\Rightarrow$ La parte principale di $\sin(x^3) - (\sin(x))^3$ e' $\frac{1}{2}x^5$

**Esercizio:** Si consideri la funzione

$$f(x) := \frac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{\exp(x^2)}$$

a) Trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x)$.

b) $\forall\, a \in \mathbb{R}$ trovare la parte principale per $x \to 0^+$ di $f(x) + ax$.

**Svolgimento:** a)

**I° modo**

$$1-\cos(2x) \sim 2x^2$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} \sim \sqrt{2}\,x$$

$$\exp(x^2) \sim 1$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(1-\cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} \sim \frac{\sqrt{2}\,x}{1} = \sqrt{2}\,x$$

**II° modo**

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^4)$$

$$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + o(x^4)$$

$$1-\cos(2x) = 2x^2 + o(x^4)$$

$$\begin{aligned}(1-\cos(2x))^{1/2} &= (2x^2 + o(x^4))^{1/2} \\ &= [2x^2(1+o(x^2))]^{1/2} \\ &= \sqrt{2}\,x\,(1+o(x^2))^{1/2}\end{aligned}$$

$$(1+y)^{1/2} = 1 + o(y)$$

$$y = o(x^2)$$

$$(1+o(x^2))^{1/2} = 1 + o(x^2)$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad (1-\cos(2x))^{1/2} &= \sqrt{2}\,x\,(1+o(x^2)) \\ &= \sqrt{2}\,x + o(x^3)\end{aligned}$$

$\exp(t) = 1 + \theta(t)$

$\exp(x^2) = 1 + \theta(x^2)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + \theta(x^2))^{-1} = 1 + \theta(x^2)$

$(1+y)^{-1} = 1 + \theta(y) \qquad y = \theta(x^2)$

$(1 - \cos(2x))^{1/2} (\exp(x^2))^{-1}$

$= (\sqrt{2}x + \theta(x^3))(1 + \theta(x^2))$

$= \sqrt{2}x + \theta(x^3) + \theta(x^3) + \theta(x^5)$

$= \sqrt{2}x + \theta(x^3) = \sqrt{2}x + o(x)$

$\Rightarrow$ p.p è $\sqrt{2}x$

b) se $a \neq -\sqrt{2}$ allora p.p. è $(\sqrt{2} + a)x$

se $a = -\sqrt{2}$

I° modo $\quad \cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \theta(t^6)$

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)$

$1 - \cos(2x) = 2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)$

$(1 - \cos(2x))^{1/2} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2}$

$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^6)\right)\right]^{1/2}$

$= \sqrt{2}x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^4)\right)^{1/2}$

$= \sqrt{2}x \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \theta(x^4)\right]$

$= \sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \theta(x^5)$

$(1+y)^{1/2}$

$= 1 + \frac{1}{2}y + \theta(y^2)$

$y = -\frac{1}{3}x^2 + \theta(x^4)$

$\exp(t) = 1 + t + \theta(t^2)$

$\exp(x^2) = 1 + x^2 + \theta(x^4)$

$(\exp(x^2))^{-1} = (1 + x^2 + \theta(x^4))^{-1}$

$(1+y)^{-1} = 1 - y + \theta(y)$

$$y = x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\left(1 + x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)^{-1} = 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}\left(x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$= 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4) + \mathcal{O}(x^4)$$

$$= 1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)$$

$$\left(1 - \cos(2x)\right)^{1/2} \left(\exp(x^2)\right)^{-1}$$

$$= \left(\sqrt{2}x - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + \mathcal{O}(x^5)\right)\left(1 - x^2 + \mathcal{O}(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}x - \sqrt{2}x^3 + \mathcal{O}(x^5) - \frac{1}{3\sqrt{2}} x^3 + \frac{1}{3\sqrt{2}} x^5 + \mathcal{O}(x^7)$$

$$+ \mathcal{O}(x^5) + \mathcal{O}(x^7) + \mathcal{O}(x^9)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\left(1 - \cos(2x)\right)^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = -\left(\sqrt{2} + \frac{1}{3\sqrt{2}}\right)x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

$$= -\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3 + \mathcal{O}(x^5)$$

La parte principale è $-\frac{7\sqrt{2}}{6} x^3$

## II° modo

$$\frac{\left(1 - \cos(2x)\right)^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}x = \frac{\left(1 - \cos(2x)\right)^{1/2} - \sqrt{2}x \exp(x^2)}{\exp(x^2)}$$

p.p. di $\exp(x^2)$ è $1$

Andiamo ora a calcolare la parte principale di $\left(1 - \cos(2x)\right)^{1/2} - \sqrt{2}x \exp(x^2)$

Abbiamo

$$\cos(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{4!} + \mathcal{O}(t^6)$$

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}y + \mathcal{O}(y^2)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} = \left(1 - 1 + \frac{1}{2}(2x)^2 \quad \frac{1}{4!}(2x)^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2}$$

$$= \left(2x^2 - \frac{2}{3}x^4 + \theta(x^6)\right)^{1/2} = \left[2x^2\left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^6)\right)\right]^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x \cdot \left(1 - \frac{1}{3}x^2 + \theta(x^4)\right)^{1/2}$$

$$= \sqrt{2}\,x \left[1 - \frac{1}{6}x^2 + \theta(x^4)\right]$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \theta(x^5)$$

$$(1-\cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}\,x\exp(x^2)$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \theta(x^5) - \sqrt{2}\,x\left(1 + x^2 + \theta(x^4)\right)$$

$$= \sqrt{2}\,x - \frac{1}{3\sqrt{2}}x^3 + \theta(x^5) - \sqrt{2}\,x - \sqrt{2}\,x^3 + \theta(x^5)$$

$$= \left(-\frac{1}{3\sqrt{2}} - \sqrt{2}\right)x^3 + \theta(x^5) \quad \sim -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

Quindi

$$\frac{(1-\cos(2x))^{1/2}}{\exp(x^2)} - \sqrt{2}\,x$$

$$= \frac{(1-\cos(2x))^{1/2} - \sqrt{2}\,x\exp(x^2)}{\exp(x^2)} \sim \frac{-\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3}{1} = -\frac{7\sqrt{2}}{6}x^3$$

# Lezione 31

**Esercizio:** a) Disegnare il grafico di $f(x) = \log(\log(x))$.
b) Per quali $a > 0$ è verificata $\forall x > 1$ la dis.

$$\log(\log(x)) \leq a\sqrt{\log(x)} \qquad (*)$$

**Svolgimento:** a) Cerco l'insieme di definizione di

$$f(x) = \log(\log(x))$$

- $x > 0$
- $\log(x) > 0 \implies x > 1$

$\mathrm{Dom}(f) = (1, +\infty)$.

- $\lim_{x \to 1^+} \log(\log(x)) = -\infty$
- $\lim_{x \to +\infty} \log(\log(x)) = +\infty$
- studio del segno di $f(x)$:

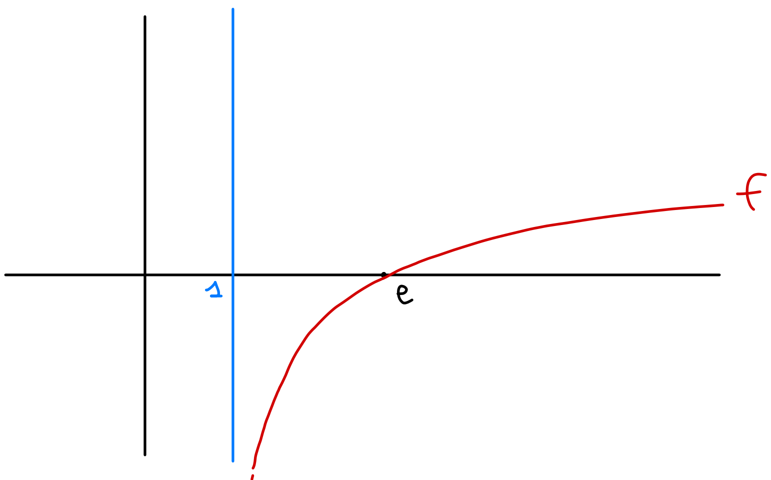
$$\log(\log(x)) \geq 0 \implies x \geq e.$$

- $f'(x) = \dfrac{1}{\log(x)} \cdot \dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{x\log(x)}$
- Studio della monotonia di $f$

$f'(x) \geq 0$ nel dominio di $f$

$\dfrac{1}{x\log(x)} \geq 0 \qquad \forall x \in \mathrm{Dom}(f)$ è sempre vero

$\implies f$ è crescente nel suo dominio.



b) I° modo:

Osservo che se $x>1$, allora $\log(x)>0$, quindi $\sqrt{\log(x)}$ è ben definito ed è strettamente positivo. Posso dividere (*) per $\sqrt{\log(x)}$ ed ottenere la disuguaglianza equivalente

(**) $$\frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} \leq a \qquad \forall x>1.$$

Dunque cerco il massimo di $g(x) = \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}}$ in $(1,+\infty)$, lo chiamo Max.

Se $a \geq$ Max allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

$$\mathrm{Dom}(g) = (1,+\infty)$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = -\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\log(\log(x))}{\sqrt{\log(x)}} = 0$$

$$g'(x) = \frac{1}{2x\,(\log(x))^{3/2}}\left[2 - \log(\log(x))\right]$$

$$g'(x) = 0 \qquad x = \exp(e^2)$$

$$g(\exp(e^2)) = \frac{2}{e}$$

$$-\infty < 0 < \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow$ Max $= \frac{2}{e}$

$\Rightarrow$ Se $a \geq \frac{2}{e}$ allora (**) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geq \frac{2}{e}$.

II° modo:

Scrivo (*) come

(***) $\log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} \leq 0$

Chiamo $h_a(x) = \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)}$.

Cerco il massimo di $h_a(x)$ e lo chiamo $Max(a)$.

Impongo $Max(a) \leq 0$.

$$Dom(h_a) = (1, +\infty) \quad \forall a>0$$

$$\lim_{x\to 1^+} h_a(x) = \lim_{x\to 1^+} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log(\log(x)) - a\sqrt{\log(x)} = -\infty$$

$$h_a'(x) = \frac{1}{x\log(x)} - \frac{a}{2x\sqrt{\log(x)}} = \frac{2 - a\sqrt{\log(x)}}{2x\log(x)}$$

$$h_a'(x) = 0 \qquad x = e^{4/a^2}$$

$$h_a(e^{4/a^2}) = \log 4 - 2 - 2\log a = Max(a)$$

$$Max(a) \leq 0 \qquad \log 4 - 2 - 2\log a \leq 0$$

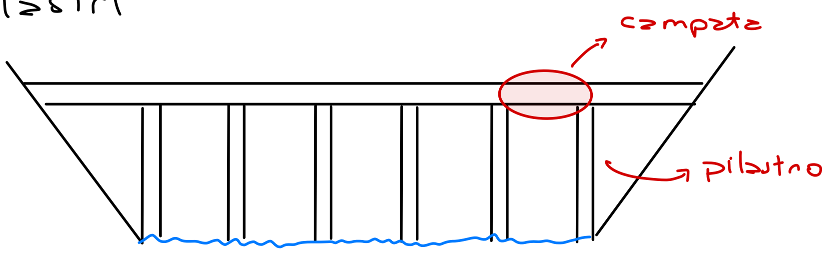
$$\log a \geq \log 2 - 1$$

$$a \geq e^{\log 2} \cdot e^{-1} = \frac{2}{e}$$

$\Rightarrow$ Se $a \geq \frac{2}{e}$ allora (***) è verificata, e quindi (*) è verificata.

La disuguaglianza è vera se $a \geq \frac{2}{e}$.

Esercizio: Si decide di costruire un ponte attraverso un fiume di lunghezza 15 formato da $m$ campate di lunghezza uguale e da $(m-1)$ pilastri




Sapendo che il costo di un pilastro è 3 e che il costo di una campata di lunghezza $\ell$ è $(\ell^2+1)$, come conviene prendere $m$?

Attenzione: $m$ deve essere un numero intero positivo!

Svolgimento: Scriviamo la funzione che descrive il costo del ponte al variare di $m$.

$$f(m) = (\text{numero di pilastri}) \cdot (\text{costo unitario pilastro})$$
$$+ (\text{numero di campate}) \cdot (\text{costo unitario campata})$$

numero di pilastri $= m-1$

costo unitario pilastro $= 3$

numero di campate $= m$

costo unitario campata $= ?$

Il costo di una campata di lunghezza $\ell$ è $(\ell^2+1)$

Visto che le campate sono $m$ e sono tutte lunghe uguali e che la lunghezza del ponte è 15, la lunghezza di una campata è $\frac{15}{m}$

e il suo costo $\frac{225}{m^2}+1$

$$f(m) = 3(m-1) + m\left(\frac{225}{m^2} + 1\right) = 4m + \frac{225}{m} - 3$$

$f(m)$ è definita per tutti gli $m \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ la estendo a tutti gli $x > 0$

$$f(x) = 4x + \frac{225}{x} - 3 \quad , \quad dom(f) = (0, +\infty).$$

$$\lim_{x \to +\infty} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} 4x + \frac{225}{x} - 3 = +\infty$$

$$f'(x) = 4 - \frac{225}{x^2}$$

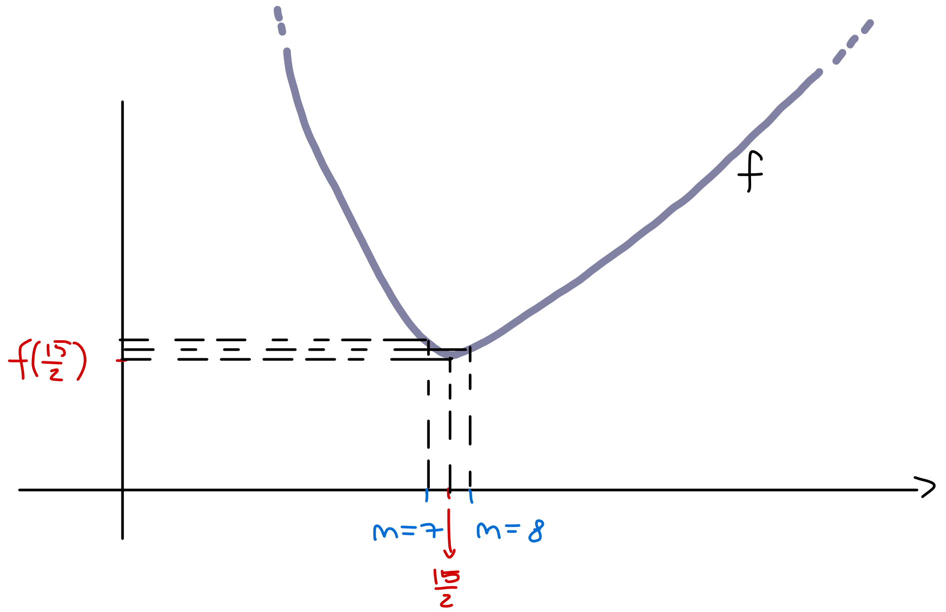
$$f'(x) \geq 0 \qquad 4 - \frac{225}{x^2} \geq 0 \qquad \frac{4x^2 - 225}{x^2} \geq 0$$

$$x \leq -\frac{15}{2} \ \cup \ x \geq \frac{15}{2}$$

| | | $-\frac{15}{2}$ | | $0$ | | $\frac{15}{2}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ |
| $f$ | | | | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

$x = \frac{15}{2}$ punto di minimo

$f\left(\frac{15}{2}\right) = 57$ minimo assoluto




Ricordiamo però che cerchiamo la soluzione tra gli $m \in \mathbb{N}$, dunque $x = \frac{15}{2}$ non può essere la soluzione cercata.

Visto che la funzione $f$ è decrescente in $(0, \frac{15}{2})$ abbiamo $f(n) > f(7)$ per $n \in \mathbb{N}, n < 7$.
Inoltre la funzione è crescente in $(\frac{15}{2}, +\infty)$, quindi $f(8) < f(n)$ per $n \in \mathbb{N}, n > 8$.
I candidati punti di minimo tra gli interi sono dunque 7 e 8. Andiamo a calcolare $f(7)$ e $f(8)$.

$f(7) \simeq 57{,}14$

$f(8) \simeq 57{,}12$

dunque $f(8) < f(7)$, $f(8)$ è il minimo e $n = 8$ è il punto di minimo

$\Rightarrow$ per costruire il ponte con il minor costo possibile bisogna fare 8 campate.

Calcolo degli integrali / delle primitive.

Sia $I \subset \mathbb{R}$ un intervallo.

Ricordiamo che $F: I \to \mathbb{R}$ è una primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$ se $\forall x \in I$ $F$ è derivabile e $F'(x) = f(x)$.

Inoltre se $F, G: I \to \mathbb{R}$ sono primitive di $f$, allora $F - G = c$ con $c \in \mathbb{R}$.

Per comodità introduciamo la seguente notazione:

indichiamo con $\int f(x)dx$ una generica primitiva di $f: I \to \mathbb{R}$.

Notiamo che $\int f(x)\,dx$ è una funzione, non è un integrale (che invece è un numero).

Elenco di primitive elementari Sia $a, c \in \mathbb{R}$:

$$\int a \, dx = ax + c \qquad (\text{infatti } (ax+c)' = a)$$

$a \neq -1$

$$\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + c \qquad \left(\text{infatti } \left(\frac{x^{a+1}}{a+1}\right)' = x^a\right)$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log|x| + c$$

con questa scrittura si intende che sulla semiretta $x > 0$ si ha $\int \frac{1}{x}\,dx = \log(x) + c$ e sulla semiretta $x < 0$ si ha $\int \frac{1}{x}\,dx = \log(-x) + c$

Infatti se considero $f: \begin{cases} (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (0, +\infty) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(x) \end{cases}$ ho che

$$\forall x \in (0, +\infty) \quad F'(x) = \frac{1}{x} = f(x).$$

Inoltre se considero $f: \begin{cases} (-\infty, 0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{x} \end{cases}$ e $F: \begin{cases} (-\infty, 0) \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \log(-x) \end{cases}$ ho che

$\hookrightarrow -x > 0 \Rightarrow \log(-x)$ ben definito

$$\forall x \in (-\infty, 0) \quad F'(x) = \frac{1}{-x} \cdot -1 = \frac{1}{x} = f(x).$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$a > 0, \ a \neq 1$

$$\int a^x \, dx = \frac{a^x}{\log a} + c$$

$$\int \log(x)\,dx = x\log(x) - x + c$$

$$\int \sin(x)\,dx = -\cos(x) + c$$

$$\int \cos(x)\,dx = \sin(x) + c$$

$$\int \tan(x)\,dx = -\log(|\cos(x)|) + c$$

(si intende che se $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(\cos(x)) + c$ e se $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{3}{2}\pi + 2k\pi\right)$ con $k \in \mathbb{Z}$ allora $\int \tan(x) = -\log(-\cos(x)) + c$ )

$$\int \frac{1}{\cos^2(x)} = \tan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\,dx = \arctan(x) + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx = \arcsin(x) + c$$

# Regole per il calcolo degli integrali / delle primitive.

## I) Somma di due funzioni

Siano $f, g : I \to \mathbb{R}$ funzioni continue e $I$ un intervallo, allora

$$\int (f+g)(x) \, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx .$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funzioni continue, allora

$$\int_a^b (f+g)(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx .$$

Dimostrazione: Con la notazione $\int f(x)\,dx$ e $\int g(x)\,dx$ intendiamo due primitive di $f$ e $g$, che possiamo chiamare $F, G$ (con la proprietà che $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$ e $G'(x) = g(x)$). Il teorema dice che una primitiva di $(f+g)$ è data da $F+G$.

Verifichiamolo:

$$(F+G)'(x) \underset{\substack{\text{derivata della}\\ \text{somma è la}\\ \text{somma delle derivate}}}{=} F'(x) + G'(x) \overset{\substack{\text{definizione di}\\ \text{primitive}}}{=} f(x) + g(x) = (f+g)(x) \qquad \forall x \in I.$$

Prendendo $I = [a,b]$ abbiamo

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g)(x)\,dx &\overset{TFCI}{=} (F+G)(b) - (F+G)(a) = F(b) + G(b) - F(A) + G(A) \\ &= F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &\underset{TFCI}{=} \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx .\end{aligned}$$

Esempio:

$$\int x + e^x \, dx = \int x\, dx + \int e^x\, dx = \frac{x^2}{2} + e^x + c$$

$$\int_0^\pi 2 + \sin(x)\, dx = \int_0^\pi 2\, dx + \int_0^\pi \sin(x)\, dx = 2x\Big|_0^\pi + (-\cos(x))\Big|_0^\pi = 2\pi + 1 + 1 = 2\pi + 2$$

$$= 2\pi$$

## II) Prodotto di una funzione per una costante

Sia $\lambda \in \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$

$$\int \lambda f(x)\, dx = \lambda \int f(x)\, dx .$$

Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda \int_a^b f(x)\, dx .$$

Dimostrazione:

Sia $F : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di $f$. Allora $\forall x \in I$ $F'(x) = f(x)$

Mostriamo che $\lambda F$ è una primitiva di $\lambda f$:

$(\lambda F)' = \lambda F' = \lambda \cdot f$

$$\int_a^b \lambda f(x)\, dx = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda ( F(b) - F(a)) = \lambda \int_a^b f(x)\, dx$$

Esempio:

$$\int 2\cos(x)\, dx = 2 \int \cos(x)\, dx = 2\sin(x) + c$$

$$\int_1^2 \frac{3}{x}\, dx = 3 \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx = 3 \log(x)\Big|_1^2 = 3 \log(2)$$

Possiamo riassumere le regole I) e II) in un'unica regola:
$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ , $n, m \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b n f(x) + m g(x)\, dx = n \int_a^b f(x)\, dx + m \int_a^b g(x)\, dx .$$

Esempio: $\int_0^1 2x^2 - 3x \, dx = 2\int_0^1 x^2 dx - 3\int_0^1 x\, dx = 2\frac{x^3}{3}\Big|_0^1 - 3\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{-5}{6}$

III) Regola di integrazione per parti

Siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f$ continua, $g$ derivabile, e sia $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di $f$.
Allora

$$\int f(x) \cdot g(x)\, dx = F(x)\, g(x) - \int F(x) \cdot g'(x)\, dx$$

e

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = F(b) g(b) - F(a) g(a) - \int F(x) g'(x)\, dx$$

Dimostrazione: Possiamo riscrivere la prima formula come

$$\int f(x) g(x) + F(x) g'(x)\, dx = F(x) g(x) .$$

Questa scrittura dice che $Fg$ è una primitiva di $fg + Fg'$.
Verifichiamolo:

$$(Fg)'(x) = F'(x) g(x) + F(x) g'(x) = f(x) g(x) + F(x) g'(x).$$

Abbiamo $\int_a^b f(x) g(x) + F(x) g'(x) = F(x) g(x) \Big|_a^b$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x) g(x) = F(x) g(x)\Big|_a^b - \int_a^b F(x) g'(x) .$$

Esempio: $\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c$

$\int x e^x dx = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x \, dx = \dots ?$ non utile

$\int \log x \, dx = \int \log x \cdot 1 \, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = x \log x - x + c$

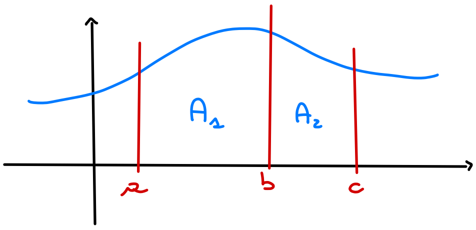
$\int_0^\pi x \sin(x)\, dx = -x\cos(x)\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)\, dx = \pi + \sin(x)\Big|_0^\pi = \pi$

PROPRIETÀ:

Ricordiamo che $\int_a^a f(x)\,dx = 0$ e $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

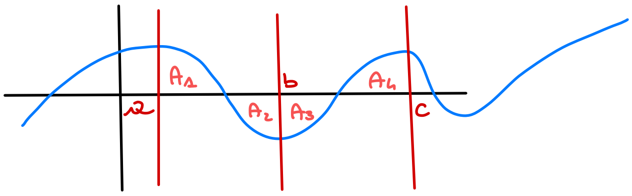
Supponiamo $a<b<c$, $f \geq 0$, allora




$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

$$= \text{Area}(A_1) + \text{Area}(A_2) = \text{Area}(A_1 \cup A_2) = \int_a^c f(x)\,dx$$

Se $a<b<c$ e $f$ ha segno qualsiasi




$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$
$$= \text{Area}(A_1) - \text{Area}(A_2) - \text{Area}(A_3) + \text{Area}(A_4) = \text{Area}(A_1 \cup A_4) - \text{Area}(A_2 \cup A_3)$$
$$= \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se $c<b<a$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$$

Se $b<a<c$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx - \int_c^b f(x)\,dx = -\int_c^a f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

e così via ....

Es. $\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(x)\sin(x)\,dx = -\sin(x)\cos(x)\Big|_0^\pi - \int_0^\pi -\cos^2(x)\,dx$

$= \int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\,dx = x\Big|_0^\pi - \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \pi \Rightarrow \int_0^\pi \sin^2(x)\,dx = \frac{\pi}{2}$

$\int_0^\pi \cos^2(x)\,dx = \int_0^\pi 1 - \sin^2(x)\,dx\,dx = x\Big|_0^\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

Es: $\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) - \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \sin(x) - \left[ -e^x \cos(x) - \int -e^x \cos(x)\,dx \right]$

$= e^x \sin(x) + e^x \cos(x) - \int e^x \cos(x)\,dx$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

$\int e^x \cos(x) = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)$

$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \sin(x) + e^x \cos(x)$

# Lezione 38

**Esercizio:** Trovare la primitiva di $\int (1-4x)^a \, dx$ con $a \neq -1$.

**Svolgimento:** Sostituisco $t = 1-4x \Rightarrow dt = -4dx$

$$\Rightarrow \int (1-4x)^a \, dx = -\frac{1}{4}\int t^a \, dt = -\frac{1}{4(a+1)} t^{a+1} + c = -\frac{(1-4x)^{a+1}}{4(a+1)} + c$$

risostituisco $t = 1-4x$

**Esercizio:** Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1+2t^2} \, dt$

**Svolgimento:**

$$\int_0^1 \sqrt{1+2t^2}\, dt = \int_1^3 \sqrt{x} \cdot \frac{1}{4} dx = \frac{1}{4}\int_1^3 x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{4}\left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_1^3 = \frac{1}{6}\left(3^{3/2} - 1\right).$$

sostituisco $x = 1+2t^2$, $dx = 4t\,dt$

se $t=0$, allora $x=1$

se $t=1$, allora $x=3$

**Esercizio:** Trovare la primitiva di $\int x^a \cdot \log(x) \, dx$ con $a \neq -1$.

**Svolgimento:**

$$\int x^a \log x \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \int \frac{x^{a+1}}{a+1} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$= \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{1}{a+1}\int x^a \, dx = \frac{x^{a+1}}{a+1}\log x - \frac{x^{a+1}}{(a+1)^2} + c$$

Esercizio : Trovare la primitiva di $\frac{1}{ax^2+bx+c}$ al variare di $a, b, c$.

Svolgimento: Dividiamo l'esercizio in 3 casi:
consideriamo $ax^2+bx+c$ e $\Delta = b^2-4ac$.

CASO 1: $\Delta > 0$

CASO 2: $\Delta = 0$

CASO 3: $\Delta < 0$

CASO 1: Abbiamo due soluzioni $x_{1,2} = \frac{b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$. Possiamo riscrivere $ax^2+bx+c$ come $a(x-x_1)(x-x_2)$. Inoltre

$$\frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{a(x-x_1)(x-x_2)}$$

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2} = \frac{Ax - Ax_2 + Bx - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)}$$

Cerco $A, B$ affinché $\frac{(A+B)x - Ax_2 - Bx_1}{(x-x_1)(x-x_2)} = \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}$

$$\begin{cases} A+B = 0 \\ -Ax_2 - Bx_1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A = -B \\ B(x_2-x_1) = 1 \end{cases} \qquad B = \frac{1}{x_2-x_1} = \frac{1}{\left(\frac{b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right) - \left(\frac{b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)} = \frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

$$A = -\frac{a}{\sqrt{\Delta}}$$

Dunque $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{(x-x_1)(x-x_2)}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_2)}\,dx$

Chiamo $x - x_1 = t$

$\Rightarrow dx = dt$

$\Rightarrow \int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + c = \log|x-x_1| + c$

quindi $-\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_1)}\,dx + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\int \frac{1}{(x-x_2)}\,dx = -\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_1| + \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\log|x-x_2| + c$

$$= \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \log \frac{|x-x_2|}{|x-x_1|} + c$$

CASO 2: $\Delta = 0$, dunque la soluzione di $ax^2+bx+c=0$ è $x_0 = -\frac{b}{2a}$
quindi $(ax^2+bx+c) = a(x-x_0)^2 = \frac{(2ax+b)^2}{4a}$.

Abbiamo $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = 4a\int \frac{1}{(2ax+b)^2}\,dx = 2\int \frac{1}{t^2}\,dt = 2\left(-\frac{1}{t} + c\right)$

chiamo $2ax-b = t$

$\Rightarrow dx = \frac{dt}{2a}$

$$= -\frac{2}{t} + c$$

$$= -\frac{1}{ax+\frac{b}{2}} + c$$

3) $ax^2+bx+c = ax^2+bx \pm \frac{b^2}{4a} + c = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(c-\frac{b^2}{4a}\right)\left[\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)} + 1\right]$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}\int \frac{1}{\frac{\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}+1}\,dx = \frac{1}{\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)}\int\left(\frac{1}{t^2+1}\right)\left(\frac{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}{\sqrt{a}}\right)dt$$

$$t = \frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)$$

$$dt = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\,dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}}\int\frac{1}{t^2+1}\,dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}}\arctan(t) + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}\left(c-\frac{b^2}{4a}\right)^{1/2}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{c-\frac{b^2}{4a}}}\left(\sqrt{a}x+\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)\right) + c$$

**Esercizio** Trovare la primitiva di $\frac{dx+e}{ax^2+bx+c}$ con $a,b,c,d,e$ dati, $a\neq 0$, $d\neq 0$.

**Svolgimento**: $(ax^2+bx+c)' = 2ax+b$

$$dx+e = \frac{d}{2a}\left(\frac{2a}{d}(dx+e)\right) = \frac{d}{2a}\left[2ax+\frac{2ae}{d}\right] = \frac{d}{2a}\left[2ax+b-b+\frac{2ae}{d}\right]$$

$$= \frac{d}{2a}\left[2ax+b\right] - \frac{bd}{2a} + e$$

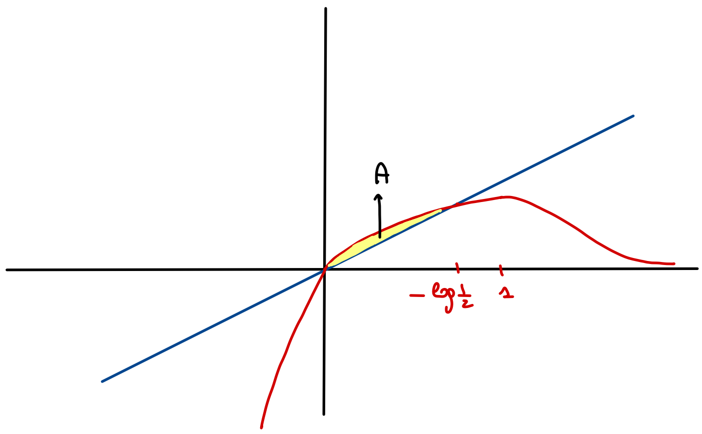
Quindi

$$\int\frac{dx+e}{ax^2+bx+c} = \frac{d}{2a}\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx + \underbrace{\left(e-\frac{bd}{2a}\right)\int\frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx}_{\text{questa parte si tratta come nell'esercizio precedente}}$$

. Se chiamiamo $f(x) = ax^2+bx+c$

$$\int\frac{2ax+b}{ax^2+bx+c}\,dx = \int\frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int f'(x)\cdot(f(x))^{-1}\,dx = \log|f(x)| + c = \log|ax^2+bx+c| + c$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \frac{x}{2} \le y \le xe^{-x}\} = A$ dopo averlo disegnato.




$f(x) = xe^{-x}$

$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \qquad \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{-x}}{\frac{1}{x}} = 0$

$f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = e^{-x}(1-x)$

$f'(x) \geq 0 \qquad 1-x \geq 0 \qquad x \leq 1$

$f(1) = \frac{1}{e}$

$\frac{x}{2} = xe^{-x} \qquad x=0$

$\frac{1}{2} = e^{-x} \Rightarrow \log\frac{1}{2} = -x \Rightarrow x = -\log\frac{1}{2} = \log 2$

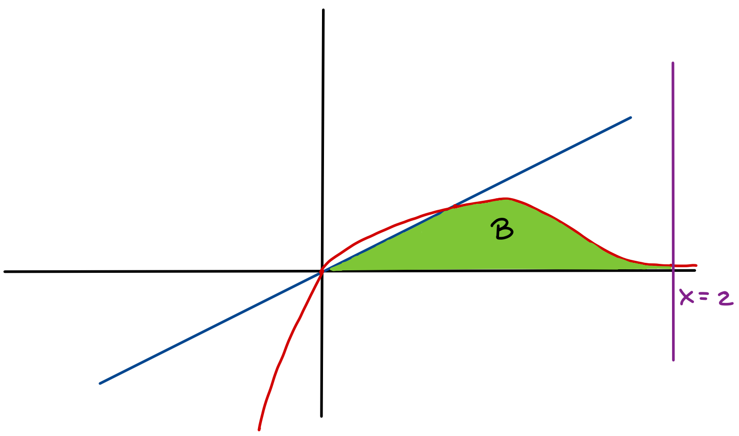
$$\text{Area}(A) = \int_0^{\log 2} xe^{-x} - \frac{x}{2}\, dx$$

$$= \left[-xe^{-x}\right]_0^{\log 2} + \int_0^{\log 2} -e^{-x}\, dx - \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\log 2}$$

$$= -\log 2\, e^{-\log 2} + \left[-e^{-x}\right]_0^{\log 2} - \frac{(\log 2)^2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4}(\log 2)^2$$

Esercizio: Calcolare l'area dell'insieme $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ y\geq 0 \text{ e } y \leq \frac{x}{2} \text{ e } y \leq xe^{-x} \text{ e } x \leq 2\} = B$




$$\text{Area}(B) = \int_0^{\log 2} \frac{x}{2}\, dx + \int_{\log 2}^{2} xe^{-x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{4}\right]_0^{\log 2} + \left[-xe^{-x}\right]_{\log 2}^{2} + \left[-e^{-x}\right]_{\log 2}^{2}$$

$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 - 2e^{-2} + \frac{1}{2}\log 2 - e^{-2} + \frac{1}{2}$$

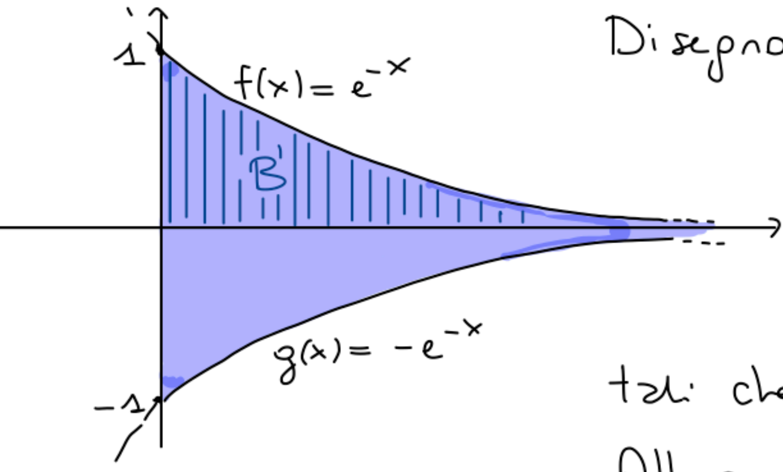
$$= \frac{1}{4}(\log 2)^2 + \log\sqrt{2} - 3e^{-2} + \frac{1}{2}$$

# Lezione 42

**Esercizio:** Sia $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ |y| \leq e^{-x}\}$

Calcolare l'area di B.

**Svolgimento:** $|y| \leq e^{-x} \iff -e^{-x} \leq y \leq e^{-x}$




Disegno $f(x) = e^{-x}$ e $g(x) = -e^{-x}$

L'insieme B è colorato in figura.

Chiamo $B' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tali che $x \geq 0,\ 0 \leq y \leq e^{-x}\}$

Allora $\text{Area}(B) = 2\,\text{Area}(B')$

$$\text{Area}(B') = \int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_0^c e^{-x}\,dx = \lim_{c \to +\infty} \left( \left[ -e^{-x} \right]_0^c \right)$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left( -e^{-c} + 1 \right) = 1$$

$$\text{Area}(B) = 2 \cdot \text{Area}(B') = 2 \cdot 1 = 2$$

**Esercizio:** Disegnare la funzione $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$ e l'insieme $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ \frac{1}{x^2} \leq y \leq f(x)\}$

Calcolare Area(A).

**Svolgimento.** Consideriamo $f(x) = \frac{\log x}{x^2}$

$\text{Dom}(f) = (0, +\infty)$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log x}{x^2} = 0^+ \qquad \lim_{x \to 0^+} \frac{\log x}{x^2} = -\infty$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \log x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x - 2x\log x}{x^4}$$

$f'(x) \geq 0 \qquad \dfrac{x - 2x\log(x)}{x^4} \geq 0$

$x(1 - 2\log(x)) \geq 0$

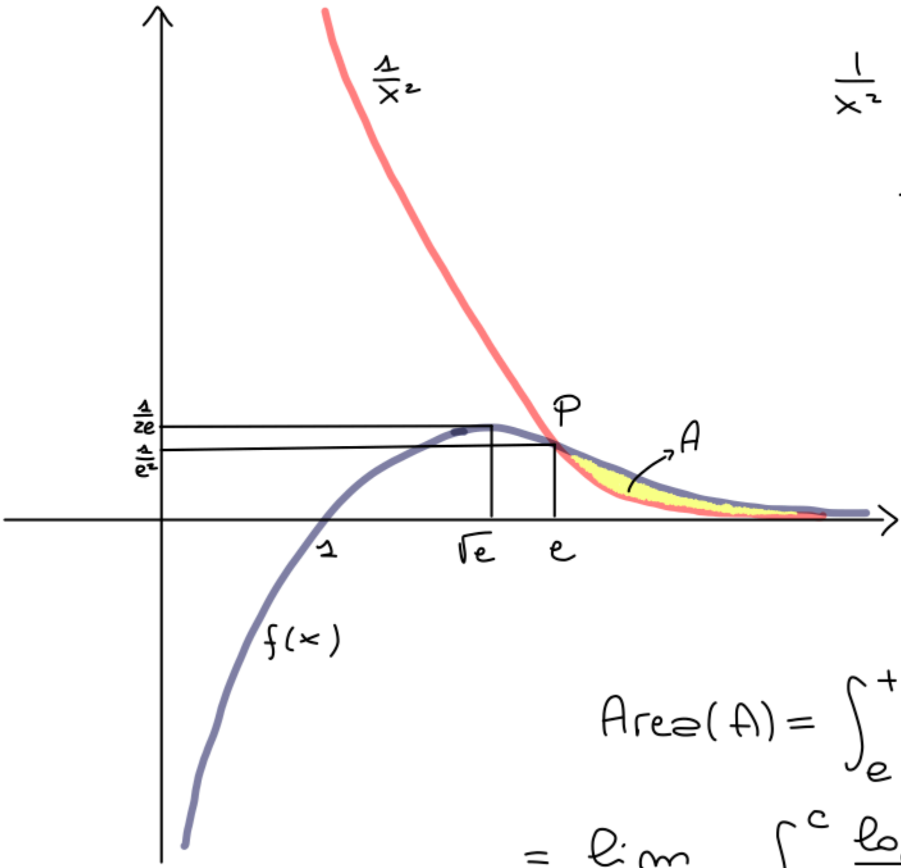
$x > 0$ nel $\mathrm{Dom}(f)$

$1 - 2\log(x) \geq 0$

$x \leq e^{1/2} = \sqrt{e}$

| $0$ | | $\sqrt{e}$ | |
|---|---|---|---|
| | $+$ | | $-$ |
| | $\nearrow$ | | $\searrow$ |

$$f(\sqrt{e}) = \frac{\log\sqrt{e}}{(\sqrt{e})^2} = \frac{1}{2e} \simeq 0{,}18$$




Intersezione tra $\frac{1}{x^2}$ e $f(x)$

$$\frac{1}{x^2} = \frac{\log(x)}{x^2}$$

$\Rightarrow x = e$

$P(e\,;\,\frac{1}{e^2})$

$$\frac{1}{x^2} \leq \frac{\log(x)}{x^2}$$

$\Rightarrow x \geq e$

$$\mathrm{Area}(A) = \int_e^{+\infty} \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_e^c \frac{\log(x)}{x^2} - \frac{1}{x^2}\,dx$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \int_e^c \underbrace{\log(x)}_{g} \cdot \underbrace{x^{-2}}_{f}\,dx - \frac{1}{x^2}\,dx$$

integro per parti
↓

$$= \lim_{c \to +\infty} \left( \left[\log(x) \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)\right]_e^c - \cancel{\int \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) dx} \quad \cancel{- \int \frac{1}{x^2}\,dx} \right)$$

$$= \lim_{c \to +\infty} \left[-\frac{\log(x)}{x}\right]_e^c = \lim_{c \to +\infty} \left( \frac{-\log(c)}{c} + \frac{1}{e} \right)$$

$$= \frac{1}{e} \Rightarrow \mathrm{Area}(A) = \frac{1}{e}$$

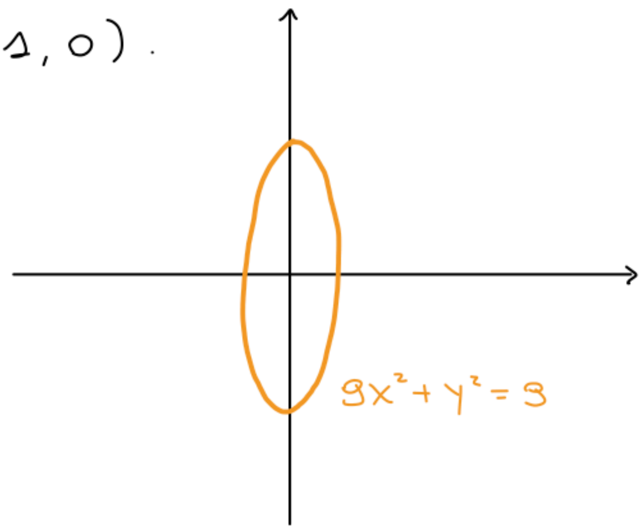
**Esercizio:** Disegnare l'insieme $E$ dei punti $(x,y)$ tali che $9x^2+y^2 \le 9$.

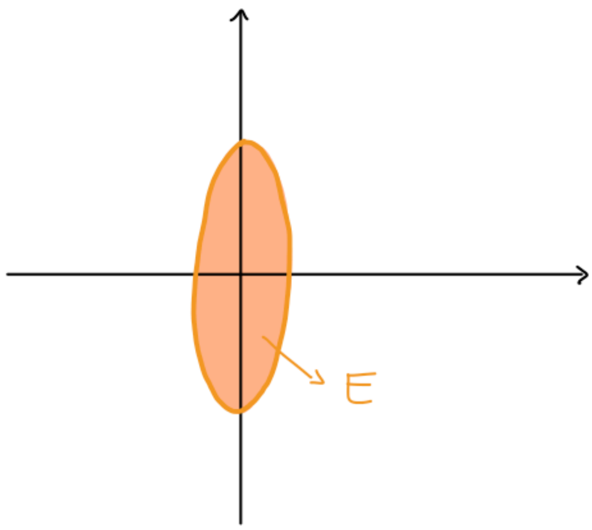
- Calcolare il volume del solido ottenuto facendo ruotare $E$ (1) attorno all'asse $x$
(2) attorno all'asse $y$.

**Svolgimento:** Come prima cosa disegniamo $E$.

Parto dal disegnare la curva $9x^2+y^2=9$

**I° modo:** La curva $9x^2+y^2=9$ è una ellisse di centro $(0,0)$, con assi paralleli agli assi cartesiani e vertici $V_{1,2}=(0,\pm 3)$ $V_{3,4}(\pm 1, 0)$.



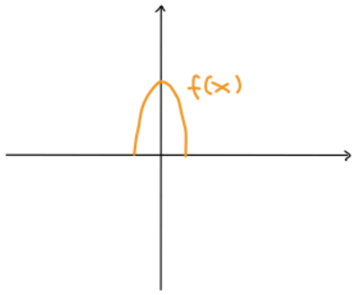

**II° modo:**

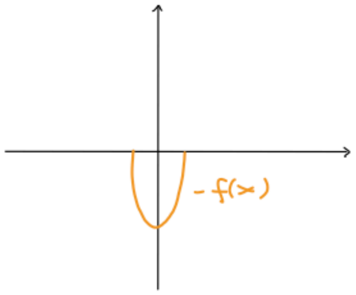
$$9x^2+y^2=9 \iff y^2 = 9-9x^2$$

$$\iff y = \pm 3\sqrt{1-x^2}$$

Chiamo $f(x)=3\sqrt{1-x^2}$, allora possiamo descrivere equivalentemente $E$ come

$$E = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -f(x) \le y \le f(x)\}$$



(1) Chiamo A il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse x.

$$\text{Volume}(A) = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} \left(3\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} 9 - 9x^2 \, dx = 2\pi \int_{0}^{1} 9 - 9x^2 \, dx$$

$$= 2\pi \left[ 9x - 3x^3 \right]_0^1 = 12\pi.$$

(2) Chiamo B il solido ottenuto facendo ruotare E attorno all'asse y.

$$9x^2 + y^2 = 9 \iff x^2 = 1 - \frac{1}{9}y^2$$

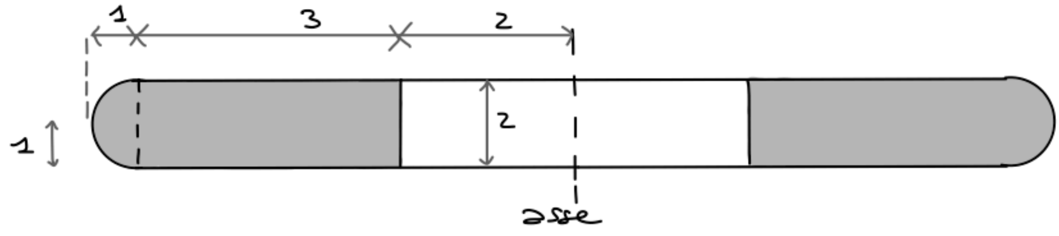
$$\iff x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}y^2}$$

Chiamo $g(y) = \sqrt{1 - \frac{1}{9}y^2}$

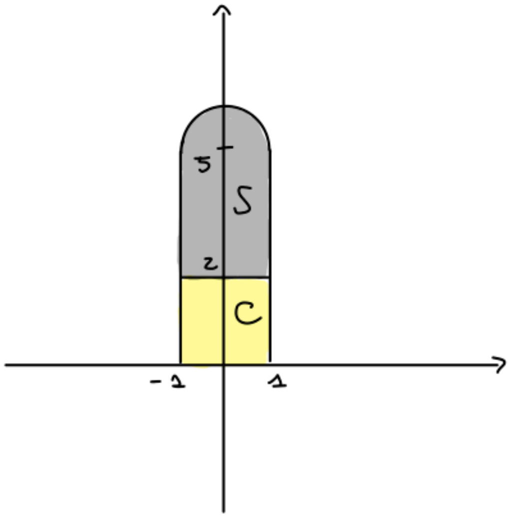
$$\text{Volume}(B) = \pi \int_{-3}^{3} (g(y))^2 \, dy = \pi \int_{-3}^{3} 1 - \frac{1}{9}y^2 \, dy$$

$$= 2\pi \int_0^3 1 - \frac{1}{9}y^2 \, dy = 2\pi \left[ y - \frac{1}{27}y^3 \right]_0^3 = 4\pi$$

**Esercizio:** Consideriamo una ruota, bucata in corrispondenza dell'asse, la cui sessione S è rappresentata in grigio nella figura:




Calcolare il volume della ruota.




Facciamo coincidere l'asse della ruota con l'asse delle x come nella figura. Chiamiamo C il quadrato giallo e S la parte in grigio.

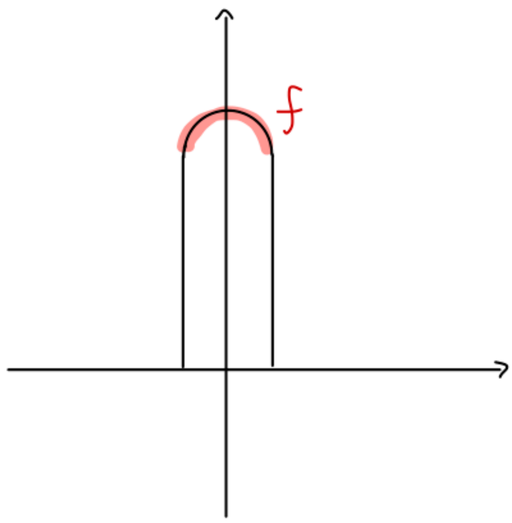
Il volume della ruota è dato da

Volume (ruota) $= v_p - v_c$

dove $v_p$ è il volume della ruota piena ottenuta facendo ruotare attorno all'asse x la figura piena $S \cup C$ e $v_c$ è il volume del cilindro ottenuto facendo ruotare attorno all'asse x il quadrato giallo.

Il cilindro ha raggio di base $r=2$ e altezza $h=2$

$v_c = 2\pi r \cdot h = 2\pi \cdot 2 \cdot 2 = 8\pi$




Abbiamo

$$v_p = \pi \int_{-1}^{1} (f(x))^2 \, dx$$

dove il grafico di f è colorato di rosso nella figura.

Il grafico di f è un pezzo di una curva: la metà superiore della circonferenza di centro $(0,5)$ e raggio $1$.

Questo pezzo di curva può essere parametrizzato da $f(x) = 5 + \sqrt{1-x^2}$.

Infatti la circonferenza di centro $(0,5)$ e raggio 1 ha equazione $x^2+(y-5)^2=1$.

Esprimiamo y in funzione di x:

$$(y-5)^2 = 1-x^2$$

$$y-5 = \pm\sqrt{1-x^2}$$

$$y = 5 \pm \sqrt{1-x^2}$$

Abbiamo $f(x) = 5+\sqrt{1-x^2}$ ( e $y = 5-\sqrt{1-x^2}$ è l'altra metà della circonferenza).

Quindi

$$V_p = \pi\int_{-1}^{1} \left(5+\sqrt{1-x^2}\right)^2 dx$$

$$= \pi\int_{-1}^{1} 25+1-x^2+10\sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= 2\pi\int_0^1 26 - 2\pi\int_0^1 x^2 + 20\pi\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$= 2\pi\left[26x\right]_0^1 - 2\pi\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)\, dt$$

cambio di variabile $x = \sin(t)$
$dx = \cos(t)\, dt$

$$= 52\pi - \frac{2}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot\cos(t)\, dt$$

$$= \frac{154}{3}\pi + 20\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cdot\cos(t)\, dt$$

Svolgiamo separatamente

$$\int_0^{\pi/2} \underbrace{\cos(t)}_{f}\,\underbrace{\cos(t)}_{g}\, dt \underset{\text{per parti}}{=} \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin(t))^2\, dt$$

$$= \left[\sin(t)\cos(t)\right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\, dt - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(t))^2\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(t)\cos(t)\, dt = \frac{1}{2}\left[\sin(t)\cos(t)+t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{4}$$

Dunque

$$v_p = \frac{154}{3}\pi + 20\pi \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2$$

Concludendo

$$\text{Volume (ruota)} = v_p - v_c = \frac{154}{3}\pi + 5\pi^2 - 8\pi$$

$$= \frac{130}{3}\pi + 5\pi^2$$

# Lezione 44 - seconda parte.

**Esercizio:** Un punto $P$ si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\sin(e^{3t}), -\cos(e^{3t}))$.
Calcolare la velocità di $P$ e la distanza percorsa tra l'istante $t=0$ e $t=1$.

**Svolgimento.** In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{v}(t) = (x'(t), y'(t))$.

Visto che

$$(\sin(e^{3t}))' = 3e^{3t}\cos(e^{3t}), \quad (-\cos(e^{3t}))' = 3e^{3t}\sin(e^{3t})$$

abbiamo $\vec{v}(t) = (3e^{3t}\cos(e^{3t}), 3e^{3t}\sin(e^{3t}))$.

Per calcolare la distanza percorsa dobbiamo calcolare $|\vec{v}(t)| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$

si ha

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(3e^{3t}\cos(e^{3t}))^2 + (3e^{3t}\sin(e^{3t}))^2}$$
$$= \sqrt{9e^{6t}\cos^2(e^{3t}) + 9e^{6t}\sin^2(e^{3t})}$$
$$= \sqrt{9e^{6t}(\underbrace{\cos^2(e^{3t}) + \sin^2(e^{3t})}_{=1})}$$
$$= 3e^{3t}$$

La distanza percorsa tra $t=0$ e $t=1$ è data da

$$\int_0^1 |\vec{v}(t)|\,dt = \int_0^1 3e^{3t}\,dt = \left[e^{3t}\right]_0^1 = e^3 - 1$$

**Esercizio:** Un punto $P$ si muove nel piano con legge oraria $P(t) = (\cos(t); 2t^3 - 3\pi t^2)$.
Trovare tutti i tempi $t$ in cui l'accelerazione di $P$ è nulla

Svolgimento. In generale, se un punto si muove con legge oraria $P(t) = (x(t), y(t))$, allora $\vec{a}(t) = (x''(t), y''(t))$

Per trovare i tempi in cui l'accelerazione è nulla devo imporre $\vec{a}(t) = (0, 0)$. Dunque devo risolvere
$$\boxed{\begin{cases} x''(t) = 0 \\ y''(t) = 0 \end{cases}}$$

$x(t) = \cos(t)$, $x'(t) = -\sin(t)$, $x''(t) = -\cos(t)$;

$y(t) = 2t^3 - 3\pi t^2$, $y'(t) = 6t^2 - 6\pi t$, $y''(t) = 12t - 6\pi$

$$\begin{cases} -\cos(t) = 0 \\ 12t - 6\pi = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} t = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \\ t = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

L'unico istante in cui l'accelerazione è nulla è $t = \frac{\pi}{2}$.

Esercizio: Un punto $P$ si muove nel piano con legge oraria $P(t) = \left(2t^2 - \frac{5}{4}, t^3 - t\right)$.

a) Calcolare la minima distanza di $P$ dall'origine.

b) Disegnare la traiettoria di $P$.

Svolgimento:

a) Scrivo la funzione che descrive come varia la distanza di $P(t)$ dall'origine al variare di $t$:

$$f(t) = d(P(t); O) = |P(t)|$$
$$= \sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 - t)^2}$$

$\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R}$

Cerco $\min(f)$.

$$\lim_{t \to \mp\infty} \sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 - t)^2} = +\infty$$

$$f'(t) = \frac{2\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)(4t) + 2(t^3 - t)\cdot(3t^2 - 1)}{2\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$= \frac{8t^3 - 5t + 3t^5 - 3t^3 - t^3 + t}{\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$= \frac{3t^5 + 4t^3 - 4t}{\sqrt{\left(2t^2 - \frac{5}{4}\right)^2 + (t^3 + t)^2}}$$

$$f'(t) = 0 \iff t(3t^4 + 4t^2 - 4) = 0$$

$x = t^2 \qquad 3x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 4}{3} \begin{cases} = \frac{2}{3} \\ = -2 \end{cases}$$

$t = 0, \quad t = \pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

$f(0) = \frac{25}{16} \qquad f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\left(\frac{4}{3} - \frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}$

$$= \sqrt{\frac{1}{144} + \frac{2}{27}} = \frac{\cancel{3}\sqrt{35}}{\cancel{3}\cdot 12 \cdot \sqrt{3}} \simeq 0{,}28$$

$$\frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}} < \frac{25}{16} < +\infty$$

minimo.

La distanza minima è $f\left(\pm\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \frac{\sqrt{35}}{12\sqrt{3}}$

b) $P(t) = (x(t), y(t)) = \left(2t^2 - \frac{5}{4}, t^3 - t\right)$.

Dunque $x = 2t^2 - \frac{5}{4}$

$2t^2 = x + \frac{5}{4}$

$$t^2 = \frac{x}{2} + \frac{5}{8} = \frac{4x+5}{8}$$

$$\Rightarrow \quad t = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}} \qquad \text{con} \qquad x \geq -\frac{5}{4}$$

$$y = t^3 - t = t(t^2-1) = \pm\sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

Per disegnare la traiettoria dobbiamo disegnare

$$f(x) = \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right)$$

e $\quad g(x) = -f(x)$.

Inizio disegnando $f(x)$.

* $\mathrm{Dom}(f) = \left[-\frac{5}{4}, +\infty\right)$
* $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{4x+5}{8}}\left(\frac{4x-3}{8}\right) = +\infty$

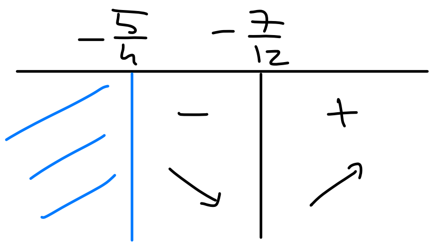
  $f\left(-\frac{5}{4}\right) = 0$

* segno : $f(x) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq \frac{3}{4}$

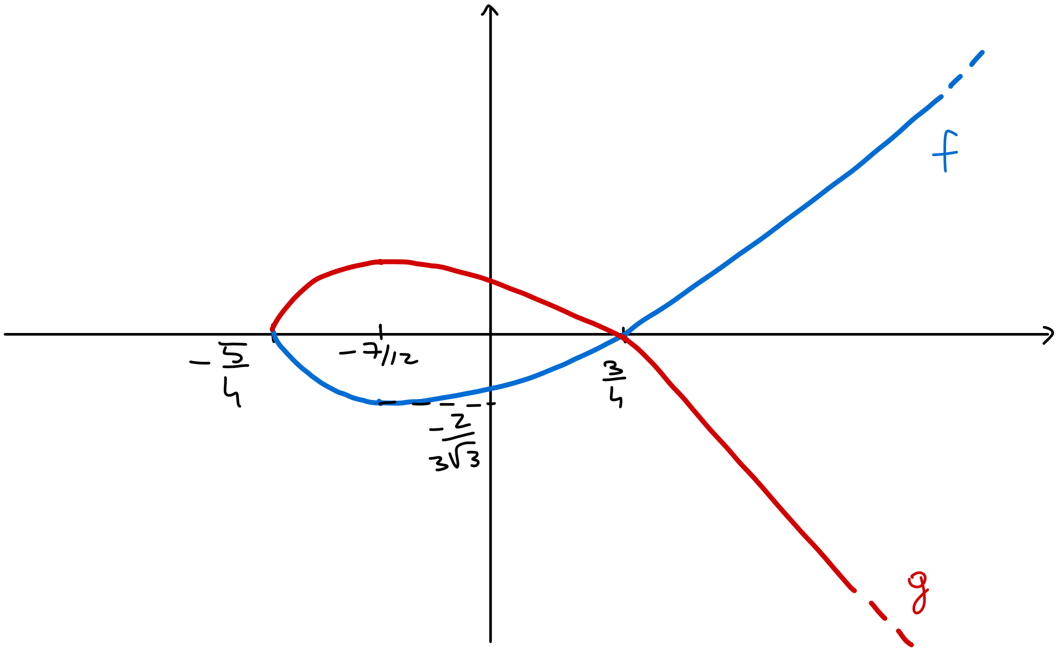
* $$f'(x) = \frac{1}{16\sqrt{2}}\left[\frac{2(4x-3)}{\sqrt{4x+5}} + 4\sqrt{4x+5}\right]$$

$$= \frac{8x-6+16x+20}{16\sqrt{2}\,\sqrt{4x+5}} = \frac{24x+14}{16\sqrt{2}\,\sqrt{4x+5}} = \frac{12x+7}{8\sqrt{2}\,\sqrt{4x+5}}$$

$f'(x) \geq 0 \qquad x \geq -\frac{7}{12}$




$$f\left(-\frac{7}{12}\right) = \frac{-\frac{2\cancel{\sqrt{2}}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\cancel{16}}{3}}{\cancel{16}\cancel{\sqrt{2}}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$$



f
g
$-\frac{5}{4}$
$-7/12$
$\frac{3}{4}$
$-\frac{2}{3\sqrt{3}}$

# Lezione 49

**Definizione:** Una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ si dice ASSOLUTAMENTE CONVERGENTE se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è convergente.

## CRITERIO della CONVERGENZA ASSOLUTA

Se una serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ è assolutamente convergente, allora è convergente.

**Dimostrazione:**

Per ipotesi $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

$\forall n \in \mathbb{N}$ abbiamo $|a_n| + a_n \leq 2|a_n|$.

Dunque per il criterio del confronto

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n) \leq \sum_{n=0}^{\infty} 2|a_n| = 2 \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < +\infty.$$

Inoltre $\forall n \in \mathbb{N}$ possiamo scrivere

$$a_n = |a_n| + a_n - |a_n|.$$

Si ha

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n - |a_n|)$$

questo = è lecito perché entrambe le serie convergono ←

$$= \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} (|a_n| + a_n)}_{< +\infty} - \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

**Osservazione:** Non è vero che se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| = +\infty$ allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = +\infty$ (o, equivalentemente, non è detto che se $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge ad un numero finito, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge ad un numero finito).

Esempio: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge, ma $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Esempio: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^a}$ con $a > 1$ è assolutamente convergente, quindi convergente.

Esercizio: Studiare il carattere della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n)}{n^2}.$$

Svolgimento: Vale $\frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$.

Dunque per il teorema del confronto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin(n)|}{n^2} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < +\infty.$$

Quindi la serie converge assolutamente, e per il criterio della convergenza assoluta, converge.

## CRITERIO della RADICE.

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0 \leq L < 1$.

Per ipotesi esiste $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

Allora $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall \tilde{n} \geq n$ $\sqrt[n]{a_n} \leq L + \varepsilon$. $\quad (*)$

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$, così $\ell \in (0, 1)$.

Elevando (*) alla $n$ e con la nostra scelta di $\varepsilon$ abbiamo che

$\forall n \geq \tilde{n} \qquad a_n \leq \ell^n$ con $0 < \ell < 1$.

Per il criterio del confronto

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} \ell^n < +\infty .$$

serie geometrica con $0 < \ell < 1$

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$

Il termine $n$-esimo della serie non può convergere a zero.

Infatti supponiamo per assurdo che $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

Allora esisterebbe $\bar{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$\forall n \geq \bar{n} \qquad a_n < 1$. E dunque $\forall n \geq \bar{n}$ $\sqrt[n]{a_n} < 1$. Ma ciò non può essere perché $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$.

Visto che il termine $n$-esimo della serie non converge a zero, la serie non può convergere ad un numero finito. Essendo una serie a termini positivi, l'unico comportamento che può assumere è divergere a $+\infty$.

Osservazione: Se $L > 1$ allora è possibile dimostrare che $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Infatti visto che $\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = L > 1$ allora possiamo prendere $\ell \in (1, L)$ tale che $\forall\, n \geq \tilde{n}$ $\sqrt[n]{a_n} \geq \ell$ e dunque $a_n \geq \ell^n$. Visto che $\ell > 1$ abbiamo che $\lim_{n\to\infty} \ell^n = +\infty$ e dunque $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

Corollario:

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} =: L.$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

Dimostrazione.

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ è una serie a termini positivi. Il criterio della radice ci dice che se $L < 1$, allora $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente e, per il criterio della convergenza assoluta, converge.

Se invece $L > 1$, allora $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ diverge.

Se $\lim_{n \to +\infty} |a_n| = +\infty$ allora il limite $\lim_{n \to +\infty} a_n$ non può convergere a zero, dunque la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non converge.

Osservazione: Se $L = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie.

Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^2} = \lim_{n \to +\infty} n^{\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$

e $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n^{-2}} = \lim_{n \to +\infty} n^{-\frac{2}{n}}$

$$= \lim_{n \to +\infty} \exp\left(-\frac{2}{n} \log n\right) = 1$$

ma la prima serie diverge e la seconda converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della radice il comportamento della serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\log n)^{n/2}}$$

Calcolo $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{(\log n)^{n/2}}\right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{(\log n)^{1/2}} = 0$

$\Rightarrow$ la serie converge.

Esercizio: Si studi con il criterio della radice il comportamento della serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} c^n n^a$$
al variare di $c>0$ e $a \in \mathbb{R}$.

Calcolo $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c^n n^a} = \lim_{n\to+\infty} c\, n^{\frac{a}{n}}$

$= \lim_{n\to+\infty} c \exp\left(\frac{a}{n}\log n\right) = c$

Se $c>1$, allora la serie diverge, se $c<1$ allora la serie converge.

4 Se $c=1$ abbiamo la serie armonica generalizzata che converge se $-a>1$ $(a<-1)$ e diverge se $-a \leq 1$ $(a \geq -1)$

CRITERIO DEL RAPPORTO

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie a termini positivi.

Supponiamo che esista il limite
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} =: L.$$
Se $L<1$, allora la serie converge.

Se $L>1$, allora la serie diverge (positivamente).

Dimostrazione:

CASO $0 \leq L < 1$:

Per ipotesi $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$.

Allora $\forall \varepsilon>0$ $\exists\, \tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall n \geq \tilde{n}$
$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq L+\varepsilon.$$

Prendo $0 < \varepsilon < 1 - L$ e chiamo $\ell := L + \varepsilon$,

così $\ell \in (0,1)$.

Dunque $\forall\, m \geq \tilde{m}$ $\quad a_{m+1} < \ell\, a_m$ con $\ell \in (0,1)$.

Quindi
$$a_{\tilde{m}+1} \leq \ell\, a_{\tilde{m}}$$
$$a_{\tilde{m}+2} \leq \ell\, a_{\tilde{m}+1} \leq \ell \cdot \ell \cdot a_{\tilde{m}} = \ell^2 a_{\tilde{m}}$$
$$a_{\tilde{m}+3} \leq \ell\, a_{\tilde{m}+2} \leq \ell^3 a_{\tilde{m}}$$
$$\vdots$$
$$a_m \leq \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}}$$

Si ha $\lim\limits_{m \to +\infty} \underbrace{\ell^{m-\tilde{m}}}_{\ell \in (0,1)} a_{\tilde{m}} = 0$ e quindi

$\lim\limits_{m \to \infty} a_m = 0$.

Inoltre $\sum\limits_{m=\tilde{m}}^{\infty} a_m \leq \sum\limits_{m=\tilde{m}}^{\infty} \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}} < +\infty$. *

Poiché il comportamento di una serie non dipende dai suoi primi addendi abbiamo che la serie converge ad un numero finito.

CASO $L > 1$:

Per ipotesi $\lim\limits_{m \to +\infty} \dfrac{a_{m+1}}{a_m} = L$.

Allora $\forall\, \varepsilon > 0$ $\exists\, \tilde{m} \in \mathbb{N}$ tale che $\forall\, m \geq \tilde{m}$
$$\frac{a_{m+1}}{a_m} \geq L - \varepsilon .$$

Prendo $\varepsilon < L - 1$ e chiamo $\ell = L - \varepsilon$.

$\forall\, m \geq \tilde{m}$ $\qquad \dfrac{a_{m+1}}{a_m} \geq \ell$.

Come prima, possiamo ottenere che
$$a_m \geq \ell^{m-\tilde{m}}\, a_{\tilde{m}} \qquad \text{con } \ell > 1$$

si ha $\lim_{n\to\infty} e^{n-\tilde{n}} a_{\tilde{n}} = +\infty$ quindi $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ e la serie diverge

**Corollario:**

Sia $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ una serie e supponiamo che esista il limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| =: L .$$

Se $L < 1$, allora la serie converge.

Se $L > 1$, allora la serie non converge ad un numero finito.

**Osservazione:** Se $L = 1$ non possiamo dire nulla sul comportamento della serie.

Consideriamo ad esempio $\sum_{n=0}^{\infty} n^2$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Allora $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

e $\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2} = 1$

ma la prima serie diverge e la seconda converge.

**Esercizio:** Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^4}{2^n}$$

Calcolo $\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^4}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^4}$

$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{n^4}{n^4} = \frac{1}{2} .$

La serie converge.

**Esercizio:** Si studi con il criterio del rapporto il comportamento della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}.$$

Calcolo $\lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}$

$= \lim_{n \to +\infty} n+1 \cdot \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n+1 \cdot n^n}{(n+1)(n+1)^n}$

$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n \to +\infty} \exp\left(n \log\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$

$= e^{-1}.$

## Serie di Potenze

**Definizione:** Chiamiamo serie di potenze una serie di funzioni della forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

dove $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ è una successione di numeri reali e $x \in \mathbb{R}$.

Ci chiediamo per quali $x \in \mathbb{R}$ $f$ è ben definita, ossia per quali $x \in \mathbb{R}$ la serie converge.

La risposta dipenderà dagli $a_n$.

**Esempio:** Abbiamo già visto un esempio di serie di potenze: la **serie geometrica**.

In questo caso $\forall m \in \mathbb{N}$ $a_m = 1$,

$f(x) = \sum x^m$. Sappiamo che è ben definita per $|x| < 1$ e vale $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

**Osservazione** $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ è sempre definita almeno in un punto. Infatti $f(0) = a_0$.

**Teorema:**

Sia $f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ una serie di potenze.

a) Esiste $R \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ chiamato **raggio di convergenza** della serie tale che

1) se $|x| < R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ converge

2) se $|x| > R$ allora $\sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m$ non converge.

b) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L,$$
allora $R = \dfrac{1}{L}$.

c) Se esiste
$$\lim_{m \to +\infty} \frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} =: \tilde{L},$$
allora $R = \dfrac{1}{\tilde{L}}$.

**Dimostrazione:**

* Dimostro che se esiste $\lim_{m \to +\infty} \sqrt[m]{|a_m|} =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \dfrac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo
$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |x|$$
$$= L|x| .$$

Per il criterio della radice se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.

** Dimostro che se esiste $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: L$ allora vale 1) e 2) con $R = \frac{1}{L}$

Considero $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Abbiamo
$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \cdot |x| = L|x|$$

Per il criterio del rapporto se $L|x| < 1$ (ossia $|x| < \frac{1}{L}$) allora la serie converge assolutamente e per il criterio della convergenza assoluta la serie converge.

Invece per $L|x| > 1$ (ossia $|x| > \frac{1}{L}$) la serie non converge.

# Lezione 51

## Equazioni differenziali ordinarie (O.D.E.)

Equazioni in cui l'incognita è una funzione (non un numero), che indicheremo di solito con $x(t)$, che in tutti i punti del suo dominio deve soddisfare una relazione che coinvolge le derivate della funzione.

ESEMPIO 1: $x'(t) = f(t)$ con $f$ una funzione data ($f$ continua)

Tutte e sole le soluzioni di $x'(t) = f(t)$ sono le funzioni del tipo $x(t) = F(t) + c$ con $c \in \mathbb{R}$ e $F$ una primitiva di $f$.
Verifichiamo che le funzioni del tipo indicato sono soluzioni:

$$x'(t) = (F(t) + c)' = F'(t) + c' = f(t).$$

Notiamo che abbiamo una famiglia a un parametro di soluzioni (il parametro è $c \in \mathbb{R}$).

ESEMPIO 2: $x'(t) + x(t) = 0 \quad (\#)$

Osservo che se moltiplico $(\#)$ per $e^t$ ottengo:

$$0 = e^t x'(t) + e^t x(t) = (e^t x(t))'$$

Le funzioni con derivata nulla sono le funzioni costanti, dunque

$$e^t x(t) = c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Esplicito la $x$:

$$x(t) = c\, e^{-t} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Abbiamo trovato una famiglia a un parametro ($c \in \mathbb{R}$) di soluzioni di (#).

ESEMPIO 3: $x''(t) = 2$ $(\star)$

$$\Updownarrow$$

$$x'(t) = 2t + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$x(t) = t^2 + ct + c_1 \qquad \text{con } c, c_1 \in \mathbb{R}$$

Dunque $x(t) = t^2 + ct + c_1$ con $c, c_1 \in \mathbb{R}$ è una famiglia a 2 parametri ($c, c_1 \in \mathbb{R}$) di soluzioni di $(\star)$.

## Equazioni differenziali ordinarie del PRIMO ORDINE:

Sono le O.D.E. che, in forma normale, si scrivono come

$$x'(t) = f(t, x(t))$$

$\forall\, t$ nel dominio di $x$, con $f$ funzione data.

(In breve scriveremo $x' = f(t, x)$ )

Primo ordine $\rightarrow$ appare la derivata prima, ma non le derivate di ordine più alto.

### Problema ai dati iniziali o problema di Cauchy per O.D.E. del I° ordine

$$(PC) \qquad \begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$f$ è una funzione data, $t_0$ e $x_0$ sono dati.

**Teorema: [Esistenza e unicità di soluzioni per (PC)]**

Sotto opportune ipotesi della $f$ ( $f$ continua, $f$ derivabile rispetto a $x$, e con questa derivata continua ) esiste una ed una sola soluzione $x(t)$ del problema (PC), ossia una ed una sola soluzione $x(t)$ di $x'(t) = f(t, x(t))$ che soddisfa anche $x(t_0) = x_0$.

Osservazione: le soluzioni di $x'(t) = f(t, x(t))$ formano una famiglia di funzioni che dipende da un parametro.

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x'(t) + x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \end{cases} \qquad (PC1)$$

$x(t) = c e^{-t}$ con $c \in \mathbb{R}$ è soluzione di $x'(t) + x(t) = 0$

Voglio ora che $x(t)$ soddisfi $x(0) = 1$

$t = 0$, $x(0) = 1$

$1 = x(0) = c e^{-0} = c$

$\Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow x(t) = e^{-t}$ è soluzione di (PC1).

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t) \\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \qquad (PC2)$$

$x(t) = \sin(t) + c$ è una famiglia a un parametro di soluzioni di $x'(t) = \cos(t)$.

Vogliamo ora che la soluzione di (PC2) soddisfi anche $x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4}$.

Dunque
$$-\frac{\sqrt{2}}{4} = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{2}}{2} + c$$

$$\Rightarrow c = -\frac{3\sqrt{2}}{4}$$

La soluzione del (PC2) è $x(t) = \sin(t) - \frac{3\sqrt{2}}{4}$

**Attenzione**: Il teorema di esistenza e unicità non ci dice nulla di quello che succede nel caso vengano imposte due o più condizioni iniziali oltre a $x'(t) = f(t, x(t))$.
Nella maggior parte dei casi NON esisterà soluzione.

**Esempio**:
$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t) \\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ x(0) = 0 \end{cases}$$

La funzione $x(t) = \sin(t) - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ è l'unica che soddisfa le prime due richieste, ma
$$x(0) = \sin(0) - \frac{3\sqrt{2}}{4} = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \neq 0,$$ quindi non soddisfa l'ultima richiesta, dunque NON ESISTONO soluzioni.

Se invece il problema è
$$\begin{cases} x'(t) = \cos(t) \\ x\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ x(0) = -\frac{3\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$
è facile verificare che $x(t) = \sin(t) - \frac{3\sqrt{2}}{4}$ soddisfa anche l'ultima richiesta ed è quindi l'unica soluzione del sistema.

# EQUAZIONI A VARIABILI SEPARABILI

**Definizione:** Una O.D.E. del primo ordine si dice "A VARIABILI SEPARABILI" se è della forma

$$x'(t) = g(x(t)) \cdot h(t)$$

(in breve $x' = g(x) \cdot h(t)$ )

con $g$ ed $h$ funzioni date.

**ESEMPI:** Sono O.D.E. a variabili separabili

$x'(t) = x^2(t) \cdot t^3$ $\qquad g(x) = x^2, \quad h(t) = t^3$

$x'(t) = e^x (1 + \sin(t))$ $\qquad g(x) = e^x \quad h(t) = 1 + \sin(t)$

ma anche

$x'(t) = e^{t+x}$ poiché $e^{t+x} = e^t \cdot e^x$

$g(x) = e^x \qquad h(t) = e^t$

**CONTROESEMPI:** NON sono O.D.E. a variabili separabili

$x'(t) = x(t) + t$

$x'(t) = \sin(x) + 1 + e^t$

**Proposizione:** Consideriamo $x'(t) = g(x(t)) \cdot h(t)$.
Supponiamo $g \neq 0$, chiamiamo $G$ una primitiva di $\frac{1}{g}$ e supponiamo che $G$ sia invertibile, chiamiamo $H$ una primitiva di $h$.
Allora le soluzioni di $x'(t) = g(x(t))\, h(t)$ sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = G^{-1}(H(t) + c) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

(una famiglia a 1 parametro).
dove $G^{-1}$ è l'inversa di $G$.

**Dimostrazione:** $x'(t) = g(x(t)) \cdot h(t)$
Visto che $g \neq 0$, posso dividere per $g$

$$\frac{x'(t)}{g(x(t))} = h(t)$$

Cerco una primitiva di

$$\int \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt = \int h(t)\, dt \qquad (*)$$

Mi concentro su $\int \frac{x'(t)}{g(x(t))}\, dt$:

effettuo il cambio di variabile

$$x(t) = x$$

$$x'(t)\, dt = dx$$

e ottengo

$$\int \frac{1}{g(x(t))}\, x'(t)\, dt = \int \frac{1}{g(x)}\, dx$$

Riscrivo (*) come

$$\int \frac{1}{g(x)}\, dx = \int h(t)\, dt$$

$$G(x) = H(t) + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

applico $G^{-1}$

$$G^{-1}(G(x)) = G^{-1}(H(t)+c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$x = G^{-1}(H(t)+c) \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

$$x(t) = G^{-1}(H(t)+c) .$$

ESERCIZIO: Risolvere $\begin{cases} x'(t) = e^{-x(t)}\, t \\ x(0) = 0 \end{cases}$

$$x' = e^{-x}\, t$$

$$\int e^{x}\, dx = \int t\, dt$$

dobbiamo trovare una primitiva di $t$ e di $e^x$

$$e^{x} = \frac{t^2}{2} + c \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

trovo la $c$ che mi permette di avere $x(0) = 0$

sostituisco $t=0$ e $x(0) = 0$

$$e^{x(0)} = e^{0} = 1$$

$$1 = 0 + c \implies c = 1$$

$$\implies e^{x} = \frac{t^2}{2} + 1$$

esplicito la $x$:

$$x = \log\left(\frac{t^2}{2} + 1\right).$$

Casi in cui si incontrano difficoltà a risolvere il PROBLEMA di CAUCHY:

$$* \begin{cases} x'(t) = g(x(t)) \cdot h(t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \qquad (PC)$$

e $g(x_0) = g(x(t_0)) = 0$

In questo caso la soluzione del (PC) è $x(t) \equiv x_0$.

Verifichiamolo

$x(t) \equiv x_0 \implies x(t_0) = x_0$ ✓

$x(t) \equiv x_0 \implies x'(t) = 0 \quad \forall t$

$$g(x(t)) \cdot h(t) = g(x_0) \cdot h(t) = 0$$

det. di $x(t)$
$x(t) \equiv x_0$

ipotesi
$g(x_0) = 0$

$0 = 0$ ✓.

EsEMPIO:
$$\begin{cases} x' = -2t\,x^2 \\ x(2) = 0 \end{cases}$$

$h(t) = -2t \qquad g(x(t)) = x^2(t)$

$g(x_0) = g(x(t_0)) = 0$

La soluzione è $x(t) \equiv 0$.

Verifichiamolo: se $x(t) \equiv 0$, allora $x(2) = 0$

se $x(t) \equiv 0$, allora $x'(t) = 0$

e $-2t x^2 = 0 \implies 0 = 0$

## Altri casi complicati

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\cos(t)}{2x(t)} \\ x(0) = 3 \end{cases}$$

Seguendo il metodo risolutivo, devo cercare una primitiva di $2x$ e una primitiva di $\cos(t)$

$$\int 2x \, dx = \int \cos(t) \, dt$$

$$x^2 = \sin(t) + c.$$

Cerco ora $c$ per cui $x(0) = 3$

$$3^2 = \sin(0) + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 9.$$

Abbiamo $\quad x^2 = \sin(t) + 9.$

Il problema ora è che $G = x^2$ non ammette inversa.

Sappiamo però che se restringiamo la funzione $G$ agli $x$ positivi (e restringiamo il codominio all'immagine) allora $G^{-1} = \sqrt{y}$ e se restringiamo $G$ agli $x$ negativi (e restringiamo il codominio all'immagine) allora $G^{-1} = -\sqrt{y}$.

Quindi, a seconda dei casi avremo

$$x^2 = \sin(t) + 9 \quad \begin{array}{l} \nearrow \ x = \sqrt{\sin(t) + 9} \\ \searrow \ x = -\sqrt{\sin(t) + 9} \end{array}$$

Sembra che abbiamo trovato due soluzioni, contraddicendo il teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy.

In realtà, grazie ad una ispezione più attenta notiamo che $x = -\sqrt{\sin(t)+3}$ NON è una soluzione perchè non soddisfa $x(0)=3$.

Dunque l'unica soluzione è

$$x(t) = \sqrt{\sin(t)+3}$$

ESEMPIO:
$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2t}{-\sin(x(t))} \\ x(1) = -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

Seguendo il metodo risolutivo, devo cercare una primitiva di $-\sin(x)$ e una primitiva di $2t$

$$\int -\sin(x)\,dx = \int 2t\,dt$$

$$\cos(x) = t^2 + c \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Cerco ora $c$ per cui $x(1) = -\frac{\pi}{2}$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1 + c$$

$$0 = 1 + c \implies c = -1$$

$$\cos(x) = t^2 - 1$$

Devo ora esplicitare la $x$.

Sono tentato di dire

$$x(t) = \arccos(t^2-1)$$

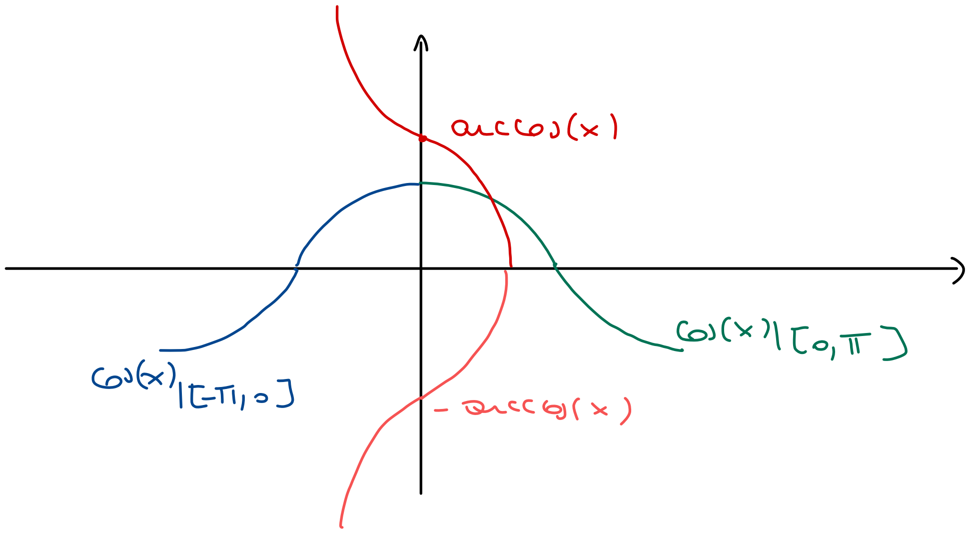
MA questa funzione non soddisfa $x(1) = -\frac{\pi}{2}$

Infatti $x(1) = \arccos(1-1) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2} \neq -\frac{\pi}{2}$.

Il problema è che l'arcocoseno è l'inversa del coseno ristretto a $[0,\pi]$.

Noi però per trovare la $c$ adeguata a

risolvere il nostro problema di Cauchy abbiamo calcolato $\cos(-\frac{\pi}{2})$ $\left( \cos(x(1)) = \cos(-\frac{\pi}{2}) \right)$ e $-\frac{\pi}{2}$ non appartiene all'intervallo $[0, \pi]$.
Per concludere l'esercizio dobbiamo scrivere l'inversa della funzione coseno ristretta ad un intervallo che contiene $-\frac{\pi}{2}$. Ad esempio $[-\pi, 0]$. L'inversa di $\cos(x)$ ristretto a $[-\pi, 0]$ è $-$ arcocoseno.




La soluzione è $x(t) = -\arccos(t^2-1)$
infatti $x(1) = -\arccos(0) = -\frac{\pi}{2}$ ✓.

Ci possiamo inoltre chiedere per quali $t \in \mathbb{R}$ valga il nostro problema di Cauchy, ossia quale sia il dominio della soluzione $x(t)$.
Affinché $-\arccos(t^2-1)$ sia definito deve valere $-1 \leq t^2-1 \leq 1$ ossia $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$, ma affinché $-\arccos(t^2-1)$ sia anche derivabile deve valere $-1 < t^2-1 < 1$,
dunque $-\sqrt{2} < t < 0$, $0 < t < \sqrt{2}$

Visto che il problema di Cauchy chiede $x(1) = -\frac{\pi}{2}$, $t = 1$ deve appartenere all'intervallo di definizione di $x(t)$.

La nostra soluzione è

$$x(t) : \begin{cases} (0, \sqrt{2}) \to (-\pi, 0) \\ t \mapsto -\arccos(t^2 - 1) \end{cases}$$

Lezione 52

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI LINEARI del I° ORDINE

**Definizione:** Una O.D.E. del primo ordine si dice lineare se è del tipo

$$x'(t) + a(t)\,x(t) = b(t)$$

con $a, b$ funzioni date.

La funzione $a(t)$ viene detta coefficiente e la funzione $b(t)$ viene detta termine noto.

Se $b(t) \equiv 0$ allora diremo che l'equazione è omogenea.

In generale una O.D.E. del primo ordine è del tipo $x'(t) = f(t, x(t))$

nel caso delle eq. lineari

$f(t, x(t)) = -a(t)\,x(t) + b(t)$

In forma breve spesso scriveremo

$x' = -a(t)\,x + b(t)$

ESEMPI: $x' + 4tx = 0$ $\quad a(t) = 4t \quad b(t) = 0$

$x' - 2x = \sin(t)$ $\quad a(t) = -2 \quad b(t) = \sin(t)$

CONTROESEMPI: NON sono O.D.E. lineari del primo ordine

$x' + 2x^2 = 0$

$x' + t\cos(x) = t^2$

**Teorema:** Le soluzioni dell'eq. $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ sono tutte e sole le funzioni della forma

$$x(t) = e^{-A(t)}\left[ B(t) + c \right]$$

con $c \in \mathbb{R}$, dove

$A(t)$ una primitiva di $a(t)$

$B(t)$ è una primitiva di $e^{A(t)} \cdot b(t)$

Dimostrazione :

Consideriamo $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Moltiplico per $e^{A(t)}$ con $A(t)$ primitiva di $a(t)$

$$\underbrace{x'(t) \cdot e^{A(t)} + a(t)\, e^{A(t)} x(t)}_{\begin{array}{c} \| \\ \left(x(t)\, e^{A(t)}\right)' \end{array}} = e^{A(t)}\, b(t)$$

Dunque $\left(x(t)\, e^{A(t)}\right)' = e^{A(t)}\, b(t)$

da cui $x(t)\, e^{A(t)} = B(t) + c$

con $B(t)$ primitive $e^{A(t)}\, b(t)$.

Esplicitando $x(t)$ otteniamo

$$x(t) = e^{-A(t)} \left[ B(t) + c \right].$$

ESEMPIO: Risolvere $x' + 2x = 3$

$\left( x'(t) + 2x(t) = 3 \qquad a(t) = 2 \quad b(t) = 3 \right)$

$a(t) = 2 \quad \to \quad A(t) = 2t$

$e^{A(t)} = e^{2t}$

$$e^{2t} x' + e^{2t} \cdot 2x = 3e^{2t}$$

$$(x\, e^{2t}) = 3\, e^{2t}$$

cerco $B(t)$ primitiva di $e^{A(t)}\, b(t) = 3e^{2t}$

$$\int 3\, e^{2t}\, dt = \int \frac{3}{2} \cdot 2\, e^{2t}\, dt = \frac{3}{2} \int 2\, e^{2t}\, dt$$

$$= \frac{3}{2}\, e^{2t} + c$$

$$x\, e^{2t} = \frac{3}{2} e^{2t} + c$$

$$\boxed{x = \frac{3}{2} + c\, e^{-2t}}$$ con $c \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: $x' - \frac{x}{t} = 2t^2$ $(*)$

$\left( x'(t) - \frac{1}{t} x(t) = 2t^2 \qquad a(t) = -\frac{1}{t} \quad b(t) = 2t^2 \right)$

$a(t) = -\frac{1}{t}$

se $t>0$ $\quad A(t) = -\log(t)\,, \quad e^{A(t)} = \frac{1}{t}\,, \quad e^{-A(t)} = t$

$e^{A(t)} \cdot b(t) = 2t \qquad B(t) = t^2$

$x(t) = t\,(t^2 + c) = t^3 + ct \qquad c \in \mathbb{R}$

se $t<0$ $\quad A(t) = -\log(-t)\,, \quad e^{A(t)} = -\frac{1}{t}\,, \quad e^{-A(t)} = -t$

$e^{A(t)} \cdot b(t) = -2t \qquad B(t) = -t^2$

$x(t) = -t(-t^2 + c) = t^3 - ct = t^3 + \tilde{c}t$

Dunque sia per $t<0$ che per $t>0$

$x(t) = t^3 + Ct$ con $C \in \mathbb{R}$

ESEMPIO: Risolvere $\begin{cases} x' + 2tx = 4t^3 \\ x(0) = 2 \end{cases}$

$$a(t) = 2t \quad , \quad b(t) = 4t^3$$

$$\Rightarrow A(t) = t^2 \quad , \quad e^{A(t)} = e^{t^2}$$

$$e^{A(t)} b(t) = 4t^3 e^{t^2}$$

$$B(t) = 2e^{t^2} [ t^2 - 1 ]$$

Infatti $\displaystyle\int 4t^3 e^{t} \, dt = \int \underbrace{2t^2}_{g} \cdot \underbrace{2te^{t^2}}_{f} \, dt$

per parti $\to$ $\displaystyle = 2t^2 e^{t^2} - \int 4t e^{t^2} dt = 2te^{t^2} - 2 \int 2te^{t^2} dt$

$$= 2t^2 e^{t^2} - 2e^{t^2} + c$$

$$= 2e^{t^2} [ t^2 - 1 ] + c$$

Dunque $x(t) = e^{-A(t)} [ B(t) + c ]$

$$= e^{-t^2} [ 2e^{t^2} ( t^2 - 1 ) + c ]$$

$$= 2 ( t^2 - 1 ) + c e^{-t^2} \qquad \text{con } c \in \mathbb{R}$$

Vogliamo ora trovare $c \in \mathbb{R}$ tale per cui $x(0) = 2$.

$$2 = 2 ( 0 - 1 ) + c e^0$$

$$\Rightarrow \quad 2 = -2 + c$$

$$\Rightarrow \quad c = 4$$

La soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 2(t^2 - 1) + 4e^{-t^2}$$

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE del II° ORDINE

Sono quelle che si scrivono nella forma

$$x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$$

con $f$ funzione data.

**Problema di Cauchy (o ai dati iniziali)**

$$(PC) \quad \begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = x_1 \end{cases}$$

**Teorema [Esistenza e unicità di soluzioni per (PC)]**

L'equazione $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ (sotto opportune ipotesi su $f$) ammette <u>una ed una sola</u> soluzione che soddisfa anche le condizioni iniziali $x(t_0) = x_0$ e $x'(t_0) = x_1$.

**Osservazione:** Le soluzioni di $x''(t) = f(t, x(t), x'(t))$ formano una famiglia a <u>due</u> parametri

## EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE

**Definizione:** Un'eq. differenziale ordinaria si dice lineare del second'ordine se è del tipo

$$x''(t) + a(t)\,x'(t) + b(t)\,x(t) = c(t)$$

con $a, b, c$ funzioni date.

Le funzioni $a(t)$, $b(t)$ si chiamano coefficienti.

Se $a(t) \equiv a$ e $b(t) \equiv b$ (con $a, b \in \mathbb{R}$) sono indipendenti da $t$, diciamo che l'eq. è a coefficienti costanti. La funzione $c(t)$ si chiama termine noto. Se $c(t) \equiv 0$, l'eq. è omogenea.

# EQUAZIONI DIFFERENZIALI ORDINARIE LINEARI del II° ORDINE OMOGENEE

**Teorema:** Chiamiamo $X$ l'insieme delle soluzioni di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \qquad (*)$$

Allora $X$ è uno spazio vettoriale e $\dim(X) = 2$.

**Osservazione:** L'insieme $V$ delle funzioni da $I \subset \mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$ è uno spazio vettoriale:
la somma è l'usuale somma tra funzioni
$((f+g)(x) := f(x) + g(x))$ e il prodotto per scalare è l'usuale prodotto per uno scalare ($c \in \mathbb{R}$, $(cf)(x) := c \cdot f(x)$).

**Dimostrazione:**

Dimostriamo che $X$ è un sottospazio vettoriale di $V$.

(i) $X$ è chiuso rispetto alla somma.

Siano $x_1(t)$ e $x_2(t)$ due soluzioni di $(*)$.

Allora $(x_1 + x_2)(t) = x_1(t) + x_2(t)$ è soluzione di $(*)$

Infatti

$$(x_1+x_2)''(t) + a(t)(x_1+x_2)'(t) + b(t)(x_1+x_2)(t)$$

$$= x_1''(t) + x_2''(t) + a(t)x_1'(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_1(t) + b(t)x_2(t)$$

$$= \underbrace{x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)}_{=0} + \underbrace{x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)}_{=0}$$

$$= 0$$

(ii) $X$ è chiuso rispetto al prodotto per scalare

Sia $x_1(t)$ soluzione di $(*)$ e $c \in \mathbb{R}$.

Allora $(cx_1)(t) = c \cdot x_1(t)$ è soluzione di $(*)$.

Infatti

$$(cx_1)''(t) + a(t)(cx_1)'(t) + b(t)(cx_1)(t)$$

$$= c\,x_1''(t) + a(t)\cdot c\cdot x_1'(t) + b(t)\cdot c\cdot x_1(t)$$

$$= c\left(x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t)\right) = c\cdot 0 = 0.$$

(iii) $X$ non è vuoto

La funzione $x(t) \equiv 0$ è soluzione di (*):

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 + a(t)\cdot 0 + b(t)\cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x(t) \equiv 0 \in X \quad \Rightarrow \quad X \neq \emptyset.$$

Possiamo concludere che $X$ è sottospazio vettoriale di $V$, quindi è uno spazio vettoriale.

Dobbiamo dimostrare che $\dim(X) = 2$

Dimostriamo che $X$ è isomorfo a $\mathbb{R}^2$.

Definisco $T: \begin{cases} X \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x \longmapsto \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \end{cases}$

che manda soluzioni di (*) nel vettore con prima entrata la funzione calcolata in zero e la sua derivata calcolata in zero.

(i) $T$ è lineare

Siano $x_1(t), x_2(t)$ due soluzioni di (*). Allora

$$T(x_1 + x_2) = \begin{pmatrix} (x_1+x_2)(0) \\ (x_1+x_2)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1(0) + x_2(0) \\ x_1'(0) + x_2'(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2(0) \\ x_2'(0) \end{pmatrix} = T(x_1) + T(x_2).$$

Sia $x_1(t)$ soluzione di (*) e $c \in \mathbb{R}$. Allora

$$T(cx_1) = \begin{pmatrix} (cx_1)(0) \\ (cx_1)'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c\,x_1(0) \\ c\,x_1'(0) \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_1'(0) \end{pmatrix} = c\,T(x_1).$$

(ii) $T$ è iniettiva

Dimostriamo che $\mathrm{Ker}(T) = \{x(t) \equiv 0\}$, ossia che l'unica soluzione di $(*)$ che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è la funzione costantemente nulla.

Si vede facilmente che $x(t) \equiv 0$ è una soluzione del problema di Cauchy

$$(\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 0 \end{cases}$$

Grazie al teorema di esistenza e <u>unicità</u> <u>del problema di Cauchy</u> possiamo concludere che $x(t) \equiv 0$ è l'unica soluzione di $(\#)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Ker}(T)$ contiene solo il vettore nullo (che in questo caso è la funzione $x(t) \equiv 0$)

$\Rightarrow$ $T$ è iniettiva.

(iii) $T$ è suriettiva.

Dimostriamo che $\mathrm{Im}(T) = \mathbb{R}^2$, ossia che preso un qualsiasi vettore di $\mathbb{R}^2$ $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ esiste una soluzione di $(*)$ che soddisfa $\begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$. Questo coincide con dimostrare l'esistenza di soluzioni per il problema

$$(\#\#) \quad \begin{cases} x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0 \\ x(0) = v_1 \\ x'(0) = v_2 \end{cases}$$

con $v_1, v_2 \in \mathbb{R}$.

Il teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy ci garantisce che (##) ammette soluzione.

$\Rightarrow$ T è suriettiva.

$\Rightarrow$ T è un isomorfismo

$\Rightarrow X \simeq \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \dim(X) = \dim(\mathbb{R}^2) = 2.$

# Lezione 53

## Equazzioni differenzaiali ordinarie del second'ordine lineari a coefficienti costanti omogenee:

$$x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$

(in breve $x'' + ax' + bx = 0$)

**Teorema:** Data l'equazione

(*) $\quad x''(t) + a x'(t) + b x(t) = 0$ con $a, b \in \mathbb{R}$

chiamiamo equazione caratteristica associata l'equazione di secondo grado $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$

e indichiamo con $\Delta$ il suo discriminante.

1) Se $\Delta > 0$ indichiamo con $\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ le due soluzioni reali e distinte dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2) Se $\Delta = 0$ indichiamo con $\tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}$ l'unica soluzione dell'equazione caratteristica.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 t e^{\tilde{\lambda} t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

3) Se $\Delta < 0$ indichiamo con $\rho \pm i\omega$ le due soluzioni complesse dell'equazione caratteristica

$\left(\rho = -\frac{a}{2}, \quad \omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2}\right)$.

La soluzione generale di (*) è

$$x(t) = c_1 e^{\rho t} \cos(\omega t) + c_2 e^{\rho t} \sin(\omega t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Dimostrazione:

1) Sia $\Delta > 0$.

Mostriamo che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ è soluzione di (*).

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$$
$$x_1'(t) = \lambda_1 e^{\lambda_1 t}$$
$$x_1''(t) = \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t}$$

$$\Rightarrow \lambda_1^2 e^{\lambda_1 t} + a\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + b e^{\lambda_1 t}$$
$$= e^{\lambda_1 t} \underbrace{(\lambda_1^2 + a\lambda_1 + b)}_{\substack{=0 \text{ poiché } \lambda_1 \text{ è} \\ \text{soluzione di } \lambda^2 + a\lambda + b = 0}} = e^{\lambda_1 t} \cdot 0 = 0$$

Analogamente $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ è soluzione di (*).

Inoltre $c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

e con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$

$\Rightarrow x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

2) Sia $\Delta = 0$.

Grazie allo stesso argomento del punto 1)

verifico che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è soluzione di (*).

Considero ora $x_2(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$

$$x_2(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$$
$$x_2'(t) = e^{\tilde{\lambda} t} + \tilde{\lambda} t e^{\tilde{\lambda} t}$$
$$x_2''(t) = 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$\Rightarrow 2\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + (\tilde{\lambda})^2 t e^{\tilde{\lambda} t} + a e^{\tilde{\lambda} t} + a\tilde{\lambda} e^{\tilde{\lambda} t} + bt e^{\tilde{\lambda} t}$$
$$= e^{\tilde{\lambda} t} \underbrace{(2\tilde{\lambda} + a)}_{\substack{=0 \text{ poiché} \\ \tilde{\lambda} = -\frac{a}{2}}} + t e^{\tilde{\lambda} t} \underbrace{(\tilde{\lambda}^2 + a\tilde{\lambda} + b)}_{\substack{=0 \text{ poiché} \\ \tilde{\lambda} \text{ soluzione}}}$$
$$= 0 \cdot e^{\tilde{\lambda} t} + 0 \cdot t e^{\tilde{\lambda} t} = 0$$

$\Rightarrow x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ e $x_2(t)$ non sono proporzionali, dunque sono linearmente indipendenti.

3) Sia $\Delta < 0$.

Verifichiamo che $x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_1(t) = e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_1'(t) = \rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_1''(t) = (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\cos(\omega t) - 2\omega\rho e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\cos(\omega t) - a\omega e^{\rho t}\sin(\omega t) + b e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\cos(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= 0 \cdot e^{\rho}\cos(\omega t) - \omega \cdot 0 \cdot e^{\rho t}\sin(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_1(t)$ è una soluzione.

Verifichiamo che $x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$ è soluzione di (*).

$$x_2(t) = e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$x_2'(t) = \rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + \omega e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$x_2''(t) = (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow (\rho^2 - \omega^2)e^{\rho t}\sin(\omega t) + 2\omega\rho e^{\rho t}\cos(\omega t)$$

$$a\rho e^{\rho t}\sin(\omega t) + a\omega e^{\rho t}\cos(\omega t) + b e^{\rho t}\sin(\omega t)$$

$$= \underbrace{(\rho^2 - \omega^2 + a\rho + b)}_{= \frac{a^2}{4} + \frac{a^2 - 4b}{4} - \frac{a^2}{2} + b = 0} e^{\rho t}\sin(\omega t) - \omega\underbrace{(2\rho + a)}_{= 0 \text{ poiché } \rho = -\frac{a}{2}} e^{\rho t}\cos(\omega t) = 0$$

$\Rightarrow x_2(t)$ è soluzione.

Inoltre $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ sono linearmente indipendenti.

Esempi:

- Risolvere $x'' - 4x' + 4x = 0$

$$\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0 \implies \lambda = 2$$

La soluzione generale di $x'' - 4x' + 4x = 0$ è

$$x(t) = c_1 e^{2t} + c_2 t e^{2t} = e^{2t}(c_1 + c_2 t) \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Risolvere $x'' - 3x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \implies \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2.$$

La soluzione generale di $x'' - 3x' + 2x = 0$ è $x(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Risolvere $x'' - 2x' + 5x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0 \implies \rho \pm \omega i = 1 \pm 2i$$

La soluzione generale di $x'' - 2x' + 5x = 0$ è $x(t) = e^{t}(c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t))$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

Giustificazione del perchè le soluzioni sono della forma vista nel teorema.

Cerchiamo le soluzioni a $x''+ax'+bx=0$ del tipo $\tilde{x}=e^{\lambda t}$ con $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\tilde{x}(t) = e^{\lambda t}$$
$$\tilde{x}'(t) = \lambda e^{\lambda t}$$
$$\tilde{x}''(t) = \lambda^2 e^{\lambda t}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 e^{\lambda t} + a\lambda e^{\lambda t} + b e^{\lambda t} = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{\lambda t}}_{>0}(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0 \qquad \forall t$$

$$\Rightarrow \lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

i) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. maggiore di zero, allora $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono le due soluzioni reali e distinte di $\lambda^2+a\lambda+b=0$

$\Rightarrow$ $x_1(t)=e^{\lambda_1 t}$, $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ sono soluzioni di $x''+ax'+bx=0$.

ii) Se il discriminante di $\lambda^2+a\lambda+b=0$ è strett. minore di zero, allora $\lambda_1$ e $\lambda_2$ sono le due soluzioni complesse di $\lambda^2+a\lambda+b=0$.

Dando per buono che anche per $\lambda \in \mathbb{C}$ $(e^{\lambda t})' = \lambda e^{\lambda t}$ e $(e^{\lambda t})'' = \lambda^2 e^{\lambda t}$, abbiamo ancora che $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$ con $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sono soluzioni di (*).

Possiamo scrivere $\lambda_{1,2} = p \pm \omega i$

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{(p+\omega i)t} = e^{pt} \cdot e^{i\omega t}$$
$$= e^{pt}(\cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{(\rho - \omega i)t} = e^{\rho t} \cdot e^{-i\omega t}$$
$$= e^{\rho t} ( \cos(\omega t) - i \sin(\omega t))$$
$$e^{-i\theta} = e^{i(-\theta)} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = \cos(\theta) - i \sin(\theta)$$

Se $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono soluzioni, anche $c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$ è soluzione

Prendo $c_1 = \frac{1}{2}$ e $c_2 = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$
$$= \frac{1}{2} e^{\rho t} ( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + \frac{1}{2} e^{\rho t} ( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$
$$= e^{\rho t} \cos(\omega t).$$

Prendo $c_1 = \frac{1}{2i}$ e $c_2 = -\frac{1}{2i}$ $\Rightarrow$

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$
$$= \frac{1}{2i} e^{\rho t} ( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) - \frac{1}{2i} e^{\rho t} ( \cos(\omega t) + i \sin(\omega t))$$
$$= e^{\rho t} \sin(\omega t).$$

Quindi $e^{\rho} \cos(\omega t)$ e $e^{\rho} \sin(\omega t)$ sono soluzioni.

iii) Se $\Delta = 0$, allora l'unica soluzione dell'eq. caratteristica è $\tilde{\lambda}$. Ripetendo i conti del punto i) troviamo che $x_1(t) = e^{\tilde{\lambda} t}$ è sol. di (*).

Resta da spiegare perché cerchiamo una seconda soluzione linearmente indipendente a $x_1(t)$ tra le funzioni della forma $te^{\lambda t}$.

Abbiamo che $\tilde{\lambda}$ è l'unica soluzione dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - 2\tilde{\lambda}\lambda + \tilde{\lambda}^2 = 0$ associata all'eq. diff. $x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0$. (*)

Prendiamo $h > 0$ piccolo, allora $\tilde{\lambda} + h$ tende a $\tilde{\lambda}$ per $h$ che tende a zero.

Abbiamo che $\lambda_1 = \tilde{\lambda}$ e $\lambda_2 = \tilde{\lambda} + h$ sono le due soluzioni reali e distinte dell'eq. caratteristica $\lambda^2 - (2\tilde{\lambda} + h)\lambda + \tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h = 0$ associata all'equazioni differenziale

$$x'' - (2\tilde{\lambda} + h)x' + (\tilde{\lambda}^2 + \tilde{\lambda} h)x = 0 \quad . \quad (**)$$

Visto che per $h \to 0$ abbiamo che $\tilde{\lambda} + h \to \tilde{\lambda}$ e l'equazione $(**)$ si riduce a $(*)$, ci aspettiamo un comportamento simile sulle soluzioni.

La soluzione generale di $(**)$ è

$$x(t) = c_1 e^{\tilde{\lambda} t} + c_2 e^{(\tilde{\lambda} + h)t} \quad \text{con} \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Prendo $c_1 = -\frac{1}{h}$ e $c_2 = \frac{1}{h}$

Con questa scelta ottengo $\tilde{x}(t) = -\frac{1}{h} e^{\tilde{\lambda} t} + \frac{1}{h} e^{(\tilde{\lambda}+h)t}$, che, ovviamente, è una soluzione di $(**)$

Mi aspetto che, se faccio il limite per $h$ che tende a zero di $\tilde{x}(t)$, ottengo una soluzione di $(*)$.

$$\lim_{h \to 0} \tilde{x}(t) = \lim_{h \to 0} \frac{e^{(\tilde{\lambda}+h)t} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{e^{\tilde{\lambda} t} \cdot e^{ht} - e^{\tilde{\lambda} t}}{h} = \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left( \frac{e^{ht} - 1}{h} \right)$$

$$= \lim_{h \to 0} e^{\tilde{\lambda} t} \left( \frac{\cancel{1} + t\cancel{h} - \cancel{1}}{\cancel{h}} \right) = t e^{\tilde{\lambda} t}$$

$$e^x = 1 + x + \mathcal{O}(x^2) \Rightarrow e^{th} = 1 + th + \mathcal{O}(h^2)$$

$\Rightarrow x(t) = t e^{\tilde{\lambda} t}$ è soluzione di

$$x'' - 2\tilde{\lambda} x' + \tilde{\lambda}^2 x = 0.$$

# Lezione 54

**Proposizione 1:**

Sia $x_1(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t)$

con $a, b, c_1$ funzioni date.

Sia $x_2(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_2(t)$

con $a, b, c_2$ funzioni date.

Allora $x_1 + x_2$ è soluzione di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

**Dimostrazione:**

Considero $(x_1 + x_2)(t)$. Vale

$$(x_1+x_2)''(t) + a(t)\left((x_1+x_2)'(t)\right) + b(t)(x_1+x_2)(t)$$

$$= x_1''(t) + x_2''(t) + a(t)x_1'(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_1(t) + b(t)x_2(t)$$

$$= x_1''(t) + a(t)x_1'(t) + b(t)x_1(t) + x_2''(t) + a(t)x_2'(t) + b(t)x_2(t)$$

$$= c_1(t) + c_2(t).$$

uso il fatto che $x_1$ è soluzione di $x'' + a(t)x' + b(t)x = c_1(t)$,
$x_2$ è soluzione di $x'' + a(t)x' + b(t)x = c_2(t)$

$\Rightarrow$ $x_1 + x_2$ è soluzione di

$$x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c_1(t) + c_2(t).$$

**Proposizione 2:** Sia $x_{om}(t)$ la soluzione generale di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = 0$ con $a, b$ funzioni date. Sia $\tilde{x}(t)$ una soluzione di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$.

Allora la soluzione generale di $x''(t) + a(t)x'(t) + b(t)x(t) = c(t)$ è $x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$.

**Dimostrazione:**

Abbiamo $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$

e $\tilde{x}(t)$ soluzione di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Applico la Proposizione 1 con $c_1(t)\equiv 0$ e $c_2(t)=c(t)$

$\Rightarrow$ $x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è soluzione di

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

Inoltre $x(t)=x_{om}(t)+\tilde{x}(t)$ è una famiglia

a due parametri di soluzioni, dunque $x(t)$

è la soluzione generale di $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$.

**Osservazione:** Chiamiamo $X$ lo spazio vettoriale

delle soluzioni dell'equazione omogenea

$x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=0$.

Allora l'insieme delle soluzioni dell'equazione non

omogenea $x''(t)+a(t)x'(t)+b(t)x(t)=c(t)$ (con $c(t)$ non zero)

è $S=X+\tilde{x}=\{x+\tilde{x} \mid x\in X,\ \tilde{x}$ soluzione particolare della eq. non omogenea$\}$

Si vede che $S$ <u>non</u> è uno spazio vettoriale.

La proposizione 2 ci da un metodo operativo

di risoluzione di $x''(t)+ax'(t)+bx(t)=c(t)$

per alcune classi di $c(t)$ e per $a,b\in\mathbb{R}$.

Infatti:

- se $a,b\in\mathbb{R}$ abbiamo un metodo per trovare $x_{om}$.
- ci sono casi in cui è semplice trovare $\tilde{x}$.

Sia $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ l'equazione caratteristica associata a $x'' + ax' + bx = 0$. Se $\Delta \geq 0$, chiamiamo $\lambda_1, \lambda_2$ le soluzioni di $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ (possibilmente coincidenti)

se $\Delta < 0$, chiamiamo $p \pm iw$ le soluzioni complesse.

| Forma di $c(t)$ | Forma di $\tilde{x}(t)$ |
|---|---|
| $c(t)$ è una costante | $\tilde{x}(t) = c$ con $c \in \mathbb{R}$ |
| $c(t)$ è un polinomio di grado $d$ | $\tilde{x}(t)$ è un polinomio di grado $d$<br>$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_d t^d$<br>con $c_0, c_1, c_2 \dots c_d \in \mathbb{R}$ |
| $c(t)$ è un multiplo di $e^{mt}$<br><br>con $m \neq \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$ (oppure $\lambda_1, \lambda_2$ complessi) | $\tilde{x}(t) = c\, e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$ |
| con $m = \lambda_1$, $m \neq \lambda_2$ | $\tilde{x}(t) = c t e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$ |
| con $m = \lambda_1 = \lambda_2$ | $\tilde{x}(t) = c t^2 e^{mt}$ con $c \in \mathbb{R}$ |
| $c(t)$ è combinazione lineare di $\sin(\alpha t)$ e $\cos(\alpha t)$<br><br>con $\alpha \neq w$ (oppure $\lambda_1, \lambda_2$ reali) | $\tilde{x}(t) = a \sin(\alpha t) + b \cos(\alpha t)$<br>con $a, b \in \mathbb{R}$ |
| con $\alpha = w$ | $\tilde{x}(t) = a t \sin(\alpha t) + b t \cos(\alpha t)$<br>con $a, b \in \mathbb{R}$ |
| $c(t)$ è combinazione lineare di $e^{mt} \sin(\alpha t)$ e $e^{mt} \cos(\alpha t)$.<br><br>con $m \pm i\alpha \neq p \pm iw$ | $\tilde{x}(t) = a e^{mt} \sin(\alpha t) + b e^{mt} \cos(\alpha t)$<br>con $a, b \in \mathbb{R}$ |
| con $m \pm i\alpha = p \pm iw$ | $\tilde{x}(t) = a t e^{mt} \sin(\alpha t) + b t e^{mt} \cos(\alpha t)$<br>con $a, b \in \mathbb{R}$ |

* coefficienti in blu da determinare.

ESEMPI:

1.a: Risolvere $x'' + x' - 6x = 3$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0$

$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2$

$x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \qquad$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) \equiv c$

con $c \in \mathbb{R}$.

$\tilde{x}(t) = c$

$\tilde{x}'(t) = 0$

$\tilde{x}''(t) = 0$

$0 + 0 - 6c = 3 \qquad \Rightarrow \qquad c = -\frac{1}{2}$

$\tilde{x}(t) = -\frac{1}{2}$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{1}{2} \qquad$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

1.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 2t^2$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \qquad$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2 \qquad$ con $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

$\tilde{x}(t) = c_0 + c_1 t + c_2 t^2$

$\tilde{x}'(t) = c_1 + 2c_2 t$

$\tilde{x}''(t) = 2c_2$

$2c_2 + c_1 + 2c_2 t - 6(c_0 + c_1 t + c_2 t^2) = 2t^2$

$2c_2 + c_1 - 6c_0 + t(2c_2 - 6c_1) - 6c_2 t^2 = 2t^2$

$$\begin{cases} 2c_2 + c_1 - 6c_0 = 0 \\ 2c_2 - 6c_1 = 0 \\ -6c_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{array}{l} c_0 = -7/54 \\ c_1 = -1/9 \\ c_2 = -\frac{1}{3} \end{array}$$

$$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{54} - \frac{1}{8}t - \frac{1}{3}t^2 \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

2.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 8e^t$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c\, e^t \qquad (m = 1,\ m \neq \lambda_1,\ m \neq \lambda_2)$$

$$\tilde{x}(t) = ce^t$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^t$$

$$\tilde{x}''(t) = ce^t$$

$$ce^t + ce^t - 6ce^t = 8e^t \implies c = -2$$

$$\tilde{x}(t) = -2e^t$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - 2e^t \qquad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.b. Risolvere $x'' + x' - 6x = 5e^{2t}$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$
- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c\, te^{2t} \qquad (m = 2,\ m = \lambda_2,\ m \neq \lambda_1)$$

$$\tilde{x}(t) = cte^{2t}$$

$$\tilde{x}'(t) = ce^{2t} + 2cte^{2t}$$

$$\tilde{x}''(t) = 4ce^{2t} + 4cte^{2t}$$

$$4ce^{2t} + 4cte^{2t} + ce^{2t} + 2cte^{2t} - 6cte^{2t} = 5e^{2t}$$

$$5ce^{2t} = 5e^{2t} \implies c = 1$$

$$\tilde{x}(t) = te^{2t}$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} + te^{2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

2.c. Risolvere $x'' - 2x' + x = 3e^t$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 1$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = c\, t^2 e^t \qquad (m = 1 = \lambda_1 = \lambda_2)$$

$$\tilde{x}(t) = ct^2 e^t$$

$$\tilde{x}'(t) = 2ct e^t + ct^2 e^t$$

$$\tilde{x}''(t) = 2ce^t + 4cte^t + ct^2 e^t$$

$$2ce^t + 4cte^t + ct^2e^t - 4cte^t - 2ct^2e^t + ct^2e^t = 3e^t$$

$$2ce^t = 3e^t \implies c = \frac{3}{2}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{3}{2} t^2 e^t$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + \frac{3}{2} t^2 e^t \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

3.a. Risolvere $x'' + x' - 6x = 10\cos(t)$

- $x_{om}(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t) \qquad (\alpha = 1 \neq \omega)$$

$$\tilde{x}(t) = a\cos(t) + b\sin(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = -a\sin(t) + b\cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -a\cos(t) - b\sin(t)$$

$-a\cos(t) - b\sin(t) - a\sin(t) + b\cos(t)$

$-6a\cos(t) - 6b\sin(t) = 10\cos(t)$

$(b-7a)\cos(t) + (-a-7b)\sin(t) = 10\cos(t)$

$$\begin{cases} b - 7a = 10 \\ -a - 7b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = -\frac{7}{5} \quad b = \frac{1}{5}$$

$\tilde{x}(t) = -\frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} - \frac{7}{5}\cos(t) + \frac{1}{5}\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

3.c. Risolvere $x'' + 4x = \cos(2t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + 4x = 0$.

$\lambda^2 + 4 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = \pm 2i \quad (\rho = 0, \omega = 2)$

$x_{om}(t) = c_1 \sin(2t) + c_2\cos(2t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$\tilde{x}(t) = a t\sin(2t) + b t\cos(2t) \quad (\alpha = 2 = \omega)$

$\tilde{x}(t) = at\sin(2t) + bt\cos(2t)$

$\tilde{x}'(t) = a\sin(2t) + 2at\cos(2t) + b\cos(2t) - 2bt\sin(2t)$

$\tilde{x}''(t) = 4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4at\sin(2t) - 4b\sin(2t) - 4bt\cos(2t)$

$+ 4at\sin(2t) + 4bt\cos(2t) = \cos(2t)$

$4a\cos(2t) - 4b\sin(2t) = \cos(2t$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ -4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{1}{4} \quad b = 0$$

$\tilde{x}(t) = \frac{1}{4} t\sin(t)$

- La soluzione generale è

$x(t) = c_1\sin(2t) + c_2\cos(2t) + \frac{1}{4} t\sin(t)$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

4.a. Risolvere $x'' + x' + x = e^t \sin(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' + x' + x = 0$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0 \qquad \lambda_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \qquad \left(\rho = -\frac{1}{2},\ \omega = \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-\frac{1}{2}t} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 e^{-\frac{1}{2}t} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a\, e^t \sin(t) + b\, e^t \cos(t) \qquad (m \pm i\omega \neq \rho \pm i\omega)$$

$$\tilde{x}(t) = a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2b\, e^t \sin(t) + 2a\, e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) + (a-b) e^t \sin(t) + (a+b) e^t \cos(t)$$
$$+ a e^t \sin(t) + b e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$(2a - 3b) e^t \sin(t) + (3a + 2b) e^t \cos(t) = e^t \sin(t)$$

$$\begin{cases} 2a - 3b = 1 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \implies \begin{array}{l} a = \frac{2}{13} \\ b = -\frac{3}{13} \end{array}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} t\right) + \frac{2}{13} e^t \sin(t) - \frac{3}{13} e^t \cos(t)$$
$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

4.b. Risolvere $x'' - 2x' + 2x = e^t \cos(t)$

- Cerco $x_{om}(t)$ soluzione di $x'' - 2x' + 2x = 0$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0, \qquad \lambda_{1,2} = 1 \pm i \qquad (\rho = 1,\ \omega = 1)$$

$$x_{om}(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

- Cerco $\tilde{x}$ tra le funzioni del tipo

$$\tilde{x}(t) = a t e^t \sin(t) + b t e^t \cos(t) \qquad (m \pm i\omega = \rho \pm i\omega)$$

$$\tilde{x}(t) = ate^t \sin(t) + bte^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}'(t) = (a-b)te^t \sin(t) + (a+b)te^t \cos(t)$$
$$+ ae^t \sin(t) + be^t \cos(t)$$

$$\tilde{x}''(t) = -2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t)$$
$$+(2a-2b)e^t \sin(t) + (2a+2b)e^t \cos(t)$$

$$-2bte^t \sin(t) + 2ate^t \cos(t) + (2a-2b)e^t \sin(t)$$
$$+ (2a+2b)e^t \cos(t) + (2b-2a)te^t \sin(t)$$
$$-2(a+b)te^t \cos(t) - 2ae^t \sin(t) - 2be^t \cos(t)$$
$$+ 2ate^t \sin(t) + 2bte^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$-2be^t \sin(t) + 2ae^t \cos(t) = e^t \cos(t)$$

$$\begin{cases} 2a = 1 \\ -2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = 0 \end{array}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2}te^t \sin(t).$$

- La soluzione generale è

$$x(t) = c_1 e^t \sin(t) + c_2 e^t \cos(t) + \frac{1}{2}te^t \sin(t)$$

$$c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

# Lezione 55

**Osservazione:** Supponiamo di dover risolvere

$$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

Supponiamo di poter scrivere $c(t)$ come somma di funzioni $c_1(t) + c_2(t) + \dots c_d(t)$ e supponiamo di saper trovare una soluzione particolare $\tilde{x}_i(t)$ di $x''(t) + a x'(t) + b x(t) = c_i$ per $i = 1 \dots d$.

Allora una soluzione particolare di

$x''(t) + a\,x'(t) + b\,x(t) = c(t)$ è

$$\tilde{x}(t) = \tilde{x}_1(t) + \tilde{x}_2(t) + \dots + \tilde{x}_d(t).$$

**Esempio:** $x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$.

- Trovo la soluzione generale di $x'' + 4x = 0$

$$\lambda^2 + 4 = 0 \implies \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$x_{om}(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = e^t$.

$$\tilde{x}_1(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1'(t) = a e^t$$

$$\tilde{x}_1''(t) = a e^t$$

$$\implies 5ae^t = e^t \implies a = \frac{1}{5}$$

$$\tilde{x}_1(t) = \frac{1}{5} e^t$$

- Trovo una soluzione particolare di $x'' + 4x = 4t + 1$

$$\tilde{x}_2(t) = a + bt$$

$$\tilde{x}_2'(t) = b$$

$$\tilde{x}_2''(t) = 0$$

$$0 + 4a + 4bt = 4t + 1$$

$$\begin{cases} 4a = 1 \\ 4b = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{matrix} b = 1 \\ a = \frac{1}{4} \end{matrix}$$

$$\tilde{x}_2(t) = \frac{1}{4} + t$$

- La soluzione generale di $x''(t) + 4x(t) = e^t + 4t + 1$ è $x(t) = c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t) + \frac{1}{5} e^t + \frac{1}{4} + t$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

## Ancora sulle equazioni lineari del primo ordine

Le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (eq. lineare del primo ordine omogenea) formano uno spazio vettoriale di dimensione 1.

Inoltre le soluzioni di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ si possono scrivere come

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$

dove $x_{om}(t)$ è la soluzione generale di $x'(t) + a(t)x(t) = 0$ (ossia una famiglia a un parametro di soluzioni) e $\tilde{x}(t)$ è una soluzione particolare di $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$.

Nel caso in cui $a(t) \equiv a \in \mathbb{R}$ e $b(t)$ è una funzione tra quelle della tabella abbiamo un secondo metodo di risoluzione di $x'(t) + ax(t) = b(t)$.

1) Scrivo l'equazione caratteristica associata a $x'(t) + a x(t) = 0$, ossia

$$\lambda + a = 0 .$$

La soluzione dell'equazione caratteristica è $\lambda = -a \in \mathbb{R}$.

Quindi $x_1(t) = e^{-at}$ è una soluzione di $x'(t) + a x(t) = 0$.

La soluzione generale di $x'(t) + a x(t) = 0$ è $x_{om}(t) = c\, e^{-at}$ con $c \in \mathbb{R}$.

2) Trovo una soluzione particolare $\tilde{x}(t)$ di $x'(t) + a x(t) = b(t)$.

3) La soluzione generale di $x'(t) + a x(t) = b(t)$ è

$$x(t) = x_{om}(t) + \tilde{x}(t)$$

$$= c\, e^{-at} + \tilde{x}(t) \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Esempio: $x'(t) + 2x(t) = \sin(2t)\, e^{3t}$

1) $\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \lambda = -2 \Rightarrow x_{om}(t) = c\, e^{-2t}$, $c \in \mathbb{R}$

2) $\tilde{x}(t) = a\, e^{3t} \sin(2t) + b\, e^{3t} \cos(2t)$

$$\tilde{x}'(t) = (3a - 2b)\, e^{3t} \sin(2t) + (2a + 3b)\, e^{3t} \cos(2t).$$

$$(3a-2b)\, e^{3t} \sin(2t) + (2a+3b)\, e^{3t} \cos(2t) + 2a\, e^{3t} \sin(2t) + 2b\, e^{3t} \cos(2t) = e^{3t} \sin(2t)$$

$$\begin{cases} 5a - 2b = 1 \\ 2a + 5b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = \frac{5}{29} \\ b = -\frac{2}{29} \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{x}(t) = \frac{5}{29} e^{3t} \sin(2t) - \frac{2}{29} e^{3t} \cos(2t)$$

3) La soluzione generale è

$$x(t) = c\, e^{-2t} + \frac{5}{29} e^{3t} \sin(2t) - \frac{2}{29} e^{3t} \cos(2t), \quad c \in \mathbb{R}$$

**Esercizio:** Determinare per quali $a \in \mathbb{R}$

$x(t) = t^a$ risolve l'equazione $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$.

**Svolgimento:** $x(t) = t^a$

$x'(t) = a\, t^{a-1}$

$x''(t) = a(a-1)\, t^{a-2}$

$t^2 \cdot [a(a-1)\, t^{a-2}] - 6(t^a) = 0$

$(a^2 - a - 6)\, t^a = 0$

$a^2 - a - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = 3,\ a_2 = -2}$

* Osservo inoltre che $t^3$ e $t^{-2}$ sono linearmente indipendenti $\Rightarrow$

la soluzione generale di $t^2 x''(t) - 6x(t) = 0$

è $x(t) = c_1 t^3 + c_2 t^{-2}$ con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

**Esercizio:** Dato $a \in \mathbb{R}$ consideriamo l'eq. differenziale

$$\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 4e^{-t}. \qquad (*)$$

i) Trovare la soluzione generale per $a > 0$ e $a \neq 1$.

ii) Trovare la soluzione generale per $a = 1$

iii) Dimostrare che $\forall a \geq 2$ e per ogni $x(t)$ soluzione di $(*)$ si ha che $x(t) = o(e^t)$ per $t \to +\infty$.

**Svolgimento:**

i) ii) Cerchiamo $x_{om}(t)$ soluzione generale di $\ddot{x} + 2a\dot{x} + (2-a)x = 0$ al variare di $a$.

L'equazione caratteristica associata è

$$\lambda^2 + 2a\lambda + (2-a) = 0$$

e $\Delta = 4a^2 - 4(2-a) = 4(a^2 + a - 2)$

CASO 1: Se $a > 1$, allora $\Delta > 0$ e

$$\lambda_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2+a-2}.$$

Dunque

$$x_{om}(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

CASO 2: Se $0 < a < 1$, allora $\Delta < 0$ e

$$\lambda_{1,2} = -a \pm (\sqrt{2-a-a^2})i.$$

Dunque

$$x_{om}(t) = e^{-at}\left(c_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + c_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t\right)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.

CASO 3: Se $a = 1$, allora $\Delta = 0$ e $\lambda = -1$.

Quindi

$$x_{om}(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} \quad \text{con } c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Passiamo ora allora ricerca di $\tilde{x}(t)$ soluzione particolare.

Nel CASO 1 e CASO 2 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni della forma $\tilde{x}(t) = c e^{-t}$.

$$\tilde{x}(t) = c e^{-t}$$

$$\tilde{x}'(t) = -c e^{-t}$$

$$\tilde{x}''(t) = c e^{-t}$$

$$ce^{-t} - 2ace^{-t} + (2-a)ce^{-t} = 4e^{-t} \Rightarrow c = \frac{4}{3-3a}$$

$$\tilde{x}(t) = \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

Nel CASO 3 cerco $\tilde{x}(t)$ tra le funzioni del tipo $\tilde{x}(t) = c\, t^2 e^{-t}$.

$$\tilde{x}(t) = ct^2 e^{-t}$$
$$\tilde{x}'(t) = 2cte^{-t} - ct^2 e^{-t}$$
$$\tilde{x}''(t) = 2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2 e^{-t}$$
$$2ce^{-t} - 4cte^{-t} + ct^2 e^{-t} + 4cte^{-t} - 2ct^2 e^{-t} + ct^2 e^{-t} = 4e^{-t}$$
$$\Rightarrow \quad c = 2$$
$$\tilde{x}(t) = 2t^2 e^{-t}$$

Riassumendo: abbiamo

CASO 1: $a > 1$
$$x(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 2: $0 < a < 1$
$$x(t) = e^{-at}\left(c_1 \cos(\sqrt{2-a-a^2})t + c_2 \sin(\sqrt{2-a-a^2})t\right) + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

CASO 3: $a = 1$
$$x(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t} + 2t^2 e^{-t}$$

iii) Visto che $a \geq 2$, una soluzione di $(*)$ è del tipo
$$x(t) = c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t} + c_2 e^{(-a-\sqrt{a^2+a-2})t} + \frac{4}{3-3a} e^{-t}$$

E' chiaro che $\frac{4}{3-3a} e^{-t}$ è $o(e^t)$.

Inoltre $\forall a \geq 2$ vale $-a-\sqrt{a^2+a-2} < -a+\sqrt{a^2+a-2}$,

quindi ci basta far vedere che

$c_1 e^{(-a+\sqrt{a^2+a-2})t}$ è $o(e^t)$.

Si può ridurre questa affermazione a verificare

che $\forall a \geq 2$ vale
$$-a + \sqrt{a^2+a-2} < 1$$
$$\sqrt{a^2+a-2} < a+1$$
$$a^2+a-2 < a^2+2a+1 \quad \Rightarrow \quad a > -3 \quad \checkmark$$

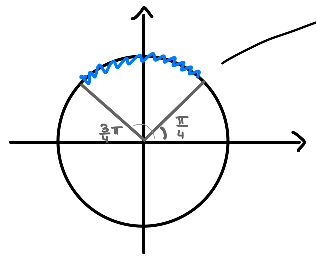
# Lezione 30 - seconda parte

## Alcuni esercizi in preparazione del compitino

**Es 1)** Trovare le soluzioni di $\sin(x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{1}{2}, 2]$.

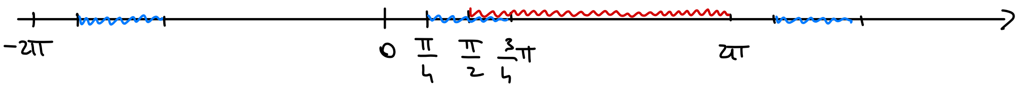
**Svolgimento:** I° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Modifico anche l'intervallo in cui cerco le soluzioni. Una volta trovate le soluzioni nel nuovo intervallo scrivo le soluzioni cercate usando il cambio di variabile $x = \frac{y}{\pi}$.

- $y = \pi x$. Se $x = \frac{1}{2}$, allora $y = \frac{\pi}{2}$; se $x = 2$ allora $y = 2\pi$. Quindi cerco le soluzioni di di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ in $[\frac{\pi}{2}, 2\pi]$.




$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$

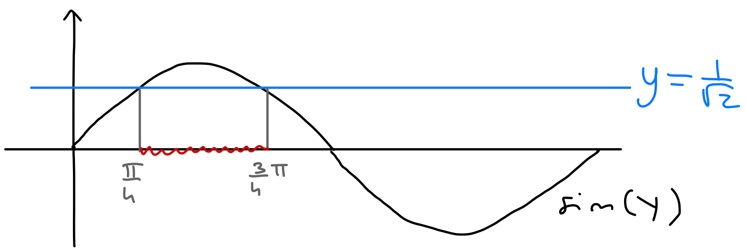
da intersecare con $\frac{\pi}{2} \leq y \leq 2\pi$.




$$\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{3}{4}\pi$$

Soluzione: $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

II° metodo: Cambio di variabile $y = \pi x$. Trovo le soluzioni di $\sin(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Cambio variabile, trovo le soluzioni di $\sin(\pi x) \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ e interseco con $[\frac{1}{2}, 2]$.




$\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq y \leq \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Cambio di variabile $y = \frac{x}{\pi}$

$\frac{1}{4} + 2k \leq x \leq \frac{3}{4} + 2k \quad k \in \mathbb{Z}$

Le soluzioni sono $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$.

Es 2) Trovare i punti di massimo e di minimo assoluti di $f(x) = \arctan(x^3 - x)$ relativamente alla semiretta $(-\infty, 1]$.

Svolgimento:

PASSO I)

$$f(1) = \arctan(0) = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x^3 - x) = -\frac{\pi}{2}$$

PASSO II)

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (x^3 - x)^2} \cdot (3x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \iff 3x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)$$

PASSO III) Confronto $f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$, $f(0)$ e $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

$$\underset{\overset{\shortparallel}{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)}}{\overset{\text{inf}}{\boxed{-\frac{\pi}{2}}}} < \underset{\overset{\shortparallel}{f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}{\arctan\left(-\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)} < \underset{\overset{\shortparallel}{f(0)}}{0} < \underset{\overset{\shortparallel}{f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}}{\overset{\text{max}}{\boxed{\arctan\left(\frac{2}{3\sqrt{3}}\right)}}}$$

Il punto di massimo è $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il punto di minimo non esiste.