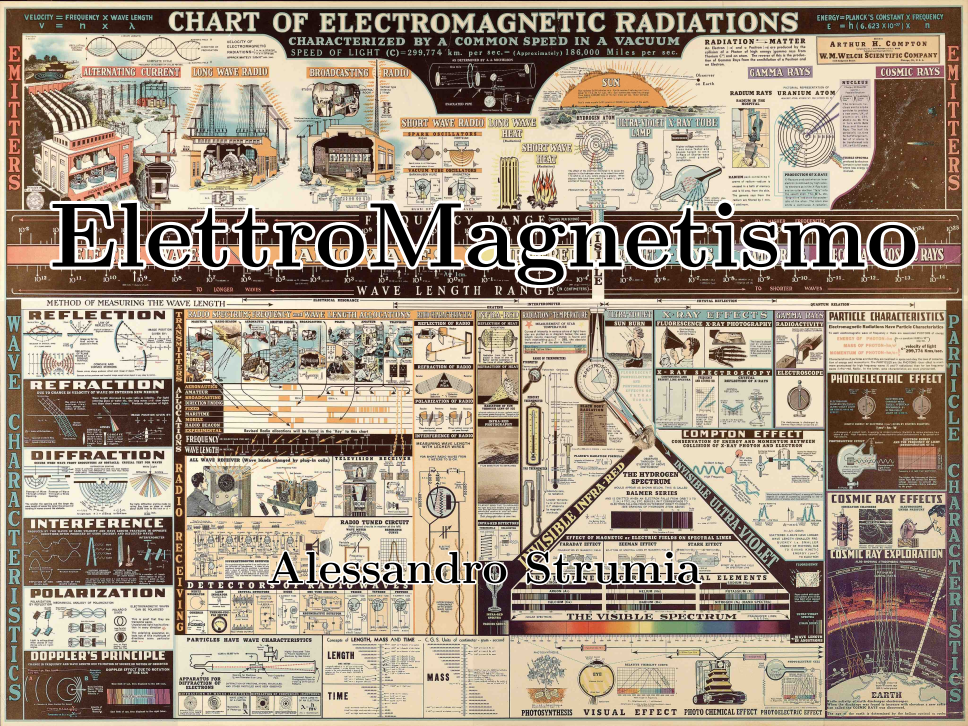
ElettroMagnetismo

Alessandro Strumia



Indice

Semina

Vendemmia

Introduzione

Programma del corso

Elettrostatica

Forza di Coulomb. Campo elettrico, potenziale elettrostatico, teorema di Gauss e Stokes, 1a e 2a equazione di Maxwell statiche. Equazioni di Poisson e Laplace. Campo elettrico di varie distribuzioni di carica. Dipoli, sviluppo in multipoli. Energia del campo elettrico e di una distribuzione di carica. Conduttori. Metodi di soluzione dei problemi di elettrostatica dei conduttori. Capacità, condensatori. Campo elettrico nella materia, dielettrici, polarizzazione (accenno). Correnti stazionarie, conservazione della carica, legge di Ohm, effetto Joule, resistenze.

Magnetismo

Forza di Lorentz. Campo magnetico generato da correnti: legge di Biot-Savart, legge di Ampere. Dipolo magnetico. Energia del campo magnetico e di un sistema di circuiti, induttanza e mutua induttanza. Magnetismo nella materia (accenno). Circuiti RL, RC, RLC. Legge di Faraday. Forza elettromotrice indotta, generatori di corrente. Corrente di spostamento. 3a e 4a equazione di Maxwell.

Elettro-magnetismo

Onde elettromagnetiche nel vuoto, polarizzazione, ricezione. Onde nella materia, riflessione e rifrazione, interferenza, diffrazione. Potenziale scalare e vettore, simmetria relativistica e di gauge. Soluzioni con tempo ritardato, irraggiamento.

Info

Corso 242BB, 9 crediti, 81 ore tenuto da Alessandro.Strumia@unipi.it

	Orario	Aula
Ma	11:00-13:00	Fib P1
Me	9:00-11:00	Fib P1
Gio	16:00-18:00	Fib N
Ve	9:00-11:00	Fib G

Streaming e registrazioni se possibile (manca telecamera). Studenti che risolvono esercizi possono evitarla. Se dimentico il connettore per favore recuperatelo.

Siti web: Esami. Registro lezioni. elearning.dm.unipi.it/enrol/index.php?id=547.
Registrarsi per avvisi. Contiene queste slides ed una raccolta di esercizi/compiti.
Sito non web: ufficio 177 edificio C. Ricevimento dopo lezioni e su Teams, etc.
Sostegno alla didattica: ricevimento circa settimanale di...

Valutazione (a meno di nuove norme covid)

Compitini: 2 di 2h (il 1o su E verso inizio Novembre, il 2o su B e onde alla fine del corso) contenenti esercizi ed un quiz moodle (con valore di orale: prevalentemente teoria sul sito e-learning del corso; ogni studente deve venire con propri strumenti internet); voto = 0.6 max + 0.4 min.
Compiti: 5 di 3h con quiz, dopo il corso. Dettagli sul sito esami.
Appelli straordinari: solo quiz per chi ha superato uno scritto precedente.

Risorse & testi consigliati

Risorse:

- Queste slides. Slides con titolo in rosso chiaro sono avanzate ed accennate.
- La raccolta di esercizi e compiti.

Le slides sono sintetiche (provo ad espandere in dispense). Solitamente serve anche un testo. Va bene uno qualunque fra quelli avanzati (useremo unità di misura MKS):

- Griffiths, *Introduction to Electrodynamics* .... [MKS]
- Mencuccini, Silvestrini, *Fisica II (Elettromagnetismo-Ottica)* .... [MKS]
- Lovitch, Rosati, *Fisica Generale 2* .... [MKS]
- Halliday, Resnick, Krane, *Fisica 2* .... [MKS]
- Mazzoldi, Nigro, Voci, *Elettromagnetismo e onde* .... [MKS]
- Fitzpatrick, gratis online .... [MKS]
- Tong, gratis online .... [MKS]
- La fisica di Berkeley, *Elettricità e magnetismo* .... [cgs]
- Picasso, ETS .... [cgs]
- ...

Testi ultra-avanzati:

- Jackson, *Elettrodinamica classica* .... [cgs, ora MKS]
- *The Feynman Lectures on Physics*, volume 2, gratis online .... [MKS]

A che  serve?

- "There is every probability that you will soon be able to tax it" (Faraday). Non aveva previsto tre telefonate al giorno per 'sconti sull'elettricità'.
- EM + quanti = Atomi. Materia. Chimica. Elettronica...
- Inizio: esperimenti nella materia, $E, B, D, P, H, M \ldots$.
- Fine: teoria fondamentale di campi elettrici E e magnetici B.
- Più teoria approssimata della materia e degli atomi.
- Più teoria della luce.
- Più nuovi concetti teorico/matematici:
  - Teoria di campo: da $\boldsymbol{x}(t)$ a $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$.
  - Relatività: da rotazioni spaziali SO(3) di $\boldsymbol{x}$ a rotazioni SO(3,1) di $\boldsymbol{x}, t$.
  - Invarianza di gauge $\mathrm{U}(1)_{\mathrm{em}}$.
- Invertendo la storia, si può derivare la teoria da principi primi scelti bene:

$$S = \int d^4x \left[-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + J_\mu A_\mu \right]$$

  Equazione classica minimizzando l'azione, $dS/dA = 0$. Quantistica: $\int dA \, e^{iS/\hbar}$.
- Le interazioni deboli e forti sono simili, gauge $\mathrm{U}(1)_Y \otimes \mathrm{SU}(2) \otimes \mathrm{SU}(3)$.

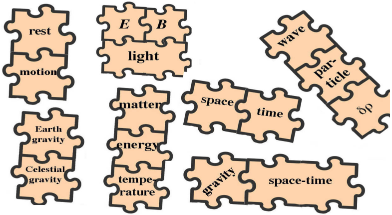
Fisica $\neq$ Matematica

Linguaggio fisico	Linguaggio matematico
Congettura	Vaga idea
Teorema	Congettura
Teorema rigoroso	Teorema
Dimostrazione	Abbozzo di dimostrazione
Teoria di campo classica	Funzione a più variabili
Teoria dei gruppi	Teoria delle rappresentazioni
Teoria dei gruppi astratta	Teoria dei gruppi

Fisica ≈ Matematica Babilonese

Babilonesi insegnavano matematica mostrando tanti esempi fino a trovare regole generali. Euclide scoprì come derivare rigorosamente i teoremi da assiomi.

La fisica progredisce su due gambe: esperimenti connessi da logica matematica. Vedremo due esempi: corrente di spostamento, inconsistenza finale.



La matematica tende a ramificarsi (?), la fisica ad unificarsi. In fisica non si parte da assiomi, ed il rigore della matematica sembra raramente utile in fisica. Si procede a tentoni a comporre un puzzle che mano a mano sembra chiarirsi.

$\Rightarrow$ Alcune leggi fisiche sono capite come deduzioni matematiche.

$\Leftarrow$ Altre sembrano matematiche speciali di cui non si capisce l'origine.

Si intravedono possibili origini diverse, e non si sa quale sia più fondamentale. (E.g. formulazioni di F_{Newton} e poi F_{Coulomb}: a) $\ddot{r} \propto 1/r^2$, locale nel tempo ma sembra non nello spazio. b) Campi: locale in tempo e spazio. c) $\min S$, sembra non locale, ma è equivalente).

Carica elettrica: prime evidenze sperimentali

Pettinando gatti con ambra ($\eta\lambda\varepsilon\kappa\tau\rho o\nu$ i.e. electron in greco) si osservano piccole forze. Pettinandosi con plastica, le punte del pettine attirano piccoli pezzi di carta. Si osservano forze repulsive fra uguali materiali strofinati, e a volte repulsiva tra materiali diversi. Suggerisce $F \sim q_1 q_2$ e due tipi di materiali: tipo plastica accumulano carica $q < 0$ (elettroni), tipo vetro accumulano $q > 0$ (perdono e).

Isolante: impedisce alle cariche di muoversi (vetro, plastica, ambra...).

Conduttore: materiale che permette alle cariche di muoversi (metalli...). Dimostrabile con elettroscopio a foglie. Sono effetti complicati ed indiretti. Meglio iniziare studiando sistemi semplici.

Forza di Coulomb

Mentre i fisici vedevano le forze di Van der Waals fra le molecole come fondamentali De Coulomb era un aristocratico francese esperto in bilance di torsione, che usava per studiare l'attrito. Nel 1789 tirava brutta aria e De Coulomb si ritirò a studiare le forze elettriche ri-osservando la legge non pubblicata da Henry Cavendish:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = k\frac{q_1 q_2 \boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}}$$

$1/r^2$ come Newton, ma repulsiva per cariche dello stesso segno. Esistono cariche + e −. La costante numerica

$$k = 8.9875\ 10^9 \frac{\mathrm{Nm}^2}{\mathrm{C}^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \qquad \epsilon_0 = 8.8542\ 10^{-12}\frac{\mathrm{C}^2}{\mathrm{Nm}^2}.$$

è solo la definizione del Coulomb, unità arbitraria di carica elettrica.
Useremo unità di misura metri-kilo-secondo-Coulomb (MKSC o 'internazionale').
Non useremo unità cm-grammo-secondo (cgs o 'razionale') dove $k = 1$.
Non useremo unità 'naturali' dove $\epsilon_0 = 1$ e poi $\mu_0 = 1$, $c = 1$, $\hbar = 1$, $k_B = 1$.

(Lo $_0$ indica che vale nel vuoto. Nella materia $\epsilon_0 \to \epsilon = \epsilon_r\epsilon_0$, con $\epsilon_r = 1.0005$ nell'aria e $\epsilon_r \approx 80$ nell'acqua; $\epsilon_r = 3.5$ nella carta, $\epsilon_r = 4.7$ nel vetro).

Considerazioni filosofiche

È una legge a potenza $1/r^p$: non appare nessuna lunghezza speciale.

Sembra azione a distanza ($F \neq 0$ per $r \neq 0$), come la forza di Newton che scriveva:

*"It is **inconceivable** that inanimate Matter should, without the Mediation of something else, which is not material, operate upon, and affect other matter without mutual Contact...*
*...that one body may act upon another at a distance thro' a Vacuum, without the Mediation of any thing else, by and through which their Action and Force may be conveyed from one to another, is to me so great an **Absurdity** that I believe no Man who has in philosophical Matters a competent Faculty of thinking can ever fall into it".*

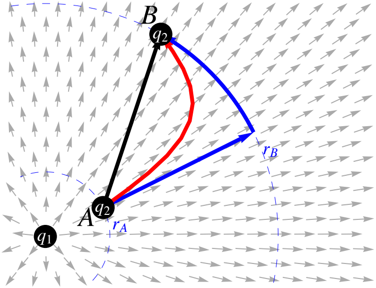
A fisica 1 si promuove $x = \frac{1}{2}at^2$ in $F = ma$, imparando che la fisica è locale nel tempo: $v(t + dt) = v(t) + dt\, F(t)/m$. Non lo sarebbe se invece

$$v_{\text{oggi}} = v_{\text{ieri}} + \Delta t \frac{F_{\text{ieri}}}{m} \qquad \text{o} \qquad v(t) = \int^t dt' \,\frac{F(t')}{m}.$$

Similmente, nelle prossime lezioni di fisica 2 riformuleremo Coulomb in maniera più locale, capendo cosa si nasconde dietro la potenza speciale $1/r^2$. Per intanto...

Lavoro ed energia potenziale

La forza elettrica è radiale, quindi conservativa.



Il lavoro per spostare q_2 da A a B nel campo di q_1 vale

$$\mathscr{L}(A \to B) = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = U(r_A) - U(r_B)$$

dove

$$\boxed{U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}} \qquad \text{è l'energia potenziale}$$

con dimensione $[U] =$ Joule, e $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$.

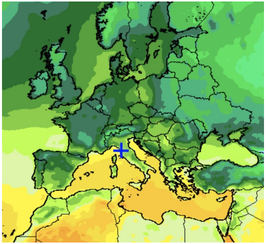
Principio di sovrapposizione

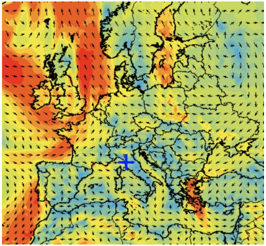
Si misura che la forza è la somma delle forze prodotte dalle singole cariche.
Quindi è naturale introdurre il $\boxed{\text{campo elettrico } \boldsymbol{E}}$ con dimensione $[E] = \mathrm{N/C}$:

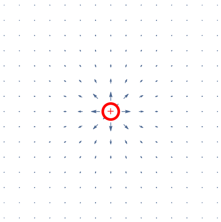
$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q q_i \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3} \equiv q\boldsymbol{E}(x,y,z,t), \qquad \boldsymbol{E} = \sum_i \boldsymbol{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|^3}$$

(Dettaglio spiacevole: bisogna escludere la carica q da $\sum_i$ per evitare $0/0$).
È un **campo vettore** in (3+1)d: una freccia in ogni punto dello spazio-tempo.

Campo scalare in 2d: T | Campo vettore in 2d: $\boldsymbol{v}$ | $\boldsymbol{E}$ esce da carica +





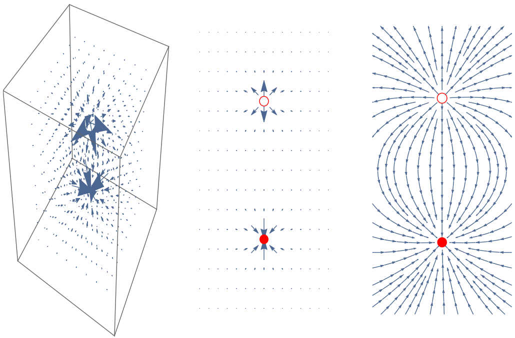


Linee di campo

Per visualizzare di solito conviene disegnare le linee di campo: traiettorie ottenute muovendosi seguendo $\boldsymbol{E}$, congiungendo le frecce come se fosse vento. Quindi non si incrociano. Si addensano dove E è grosso: modulo visualizzato indirettamente.

(Matematicamente equivale a risolvere $d\boldsymbol{x}/d\lambda = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ dove λ è un parametro).

Esempio: le linee di campo fra due cariche di segno opposto vanno da $+$ a $-$



Potenziale elettrico

Combinando $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$ con $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ si definisce

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi}, \qquad \varphi = \frac{U}{q} = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i|}$$

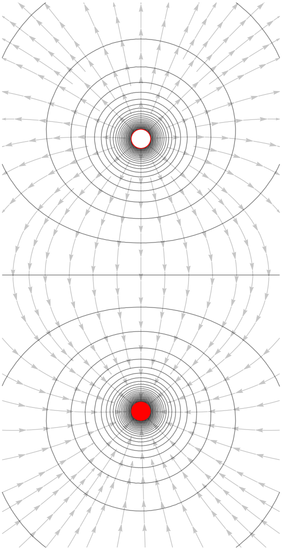
dove il campo scalare $\varphi(x, y, z, t)$ è chiamato **potenziale elettrico**. A volte denotato con V.

La sua unità di misura è famosa:

$$\boxed{[\varphi] = \frac{\text{Joule}}{\text{Coulomb}} \equiv \text{Volt(a)} = \text{V}}$$

φ è definito a meno di una costante. Per sorgenti di cariche finite è usualmente fissata imponendo $\varphi = 0$ all'infinito.

Superfici equipotenziali $\equiv$ superfici con $\varphi =$ cte. Sono ortogonali a $\boldsymbol{E}$ ed alle sue linee di campo.



Quantizzazione della carica dell'elettrone

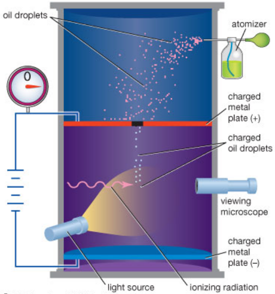
Interi in reazioni chimiche indicano che la natura è particellare, non continua.

Le cariche sono multiple di $\boxed{e = 1.60\ 10^{-19}\mathrm{C}}$.

Come misurarla? La forza fra due elettroni

$$F = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2 = 2\ 10^{-22}\mathrm{N}\,(\mathrm{mm}/r)^2$$

è troppo piccola perché $\propto e^2$.



© 2012 Encyclopædia Britannica, Inc.

Meglio un e in un $\boldsymbol{E}$ esterno, dove $F = eE$. Millikan nel 1910 mise piccole gocce di olio con carica random $q \sim 10e$, $r \sim 10^{-6}$m, $m \sim 10^{-15}$kg, visibili come puntini grazie ad una luce intensa, in un mezzo viscoso con $E \sim 1000\,\mathrm{V/m}$:

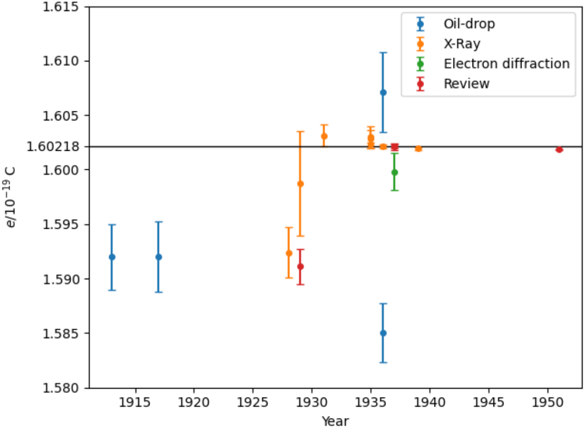
$$m\dot{v} + \eta v = F = qE + mg \qquad \Rightarrow \qquad v_{\rm lim} = \frac{F}{\eta}$$

con $mg \sim 10^{-14}$N $\sim qE$. Misurando $v_{\rm lim}$ con e senza E si ricava

$$q = \frac{mg}{E}\left[\frac{v_{\rm lim}(E)}{v_{\rm lim}(0)} - 1\right].$$

Risultati sperimentali

Imbarazzo: Millikan aveva lievemente sbagliato e per un po'altri lo avevano seguito



Quantizzazione della carica del protone

Si osserva che:

- Tutti gli elettroni hanno uguale carica $q_e = -e$ e massa m_e (vedremo come).
- L'idrogeno $H_2 \sim (ep)(ep)$ non è deflesso in $\boldsymbol{E}$ costante: questo significa che ha carica piccola o nulla $\boxed{|q_p + q_e| < 10^{-20} e}$.
- Oggi è noto che $p \sim uud$ dove $q_u = 2e/3$ e $q_d = -e/3$.
  E il neutrone è $n \sim udd$.

Si definisce eV $\equiv$ energia che un elettrone acquista attraversando 1 Volt

$$\boxed{\text{eV} \equiv e \times \text{V} = 1.60\ 10^{-19}\ \text{Coulomb} \times \text{Volt} = 1.60\ 10^{-19}\ \text{Joule}}$$

Newton vs Coulomb

$\boldsymbol{F}_{\rm C} = \dfrac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ è analoga a $\boldsymbol{F}_{\rm N} = -\dfrac{G_{\rm N} m_1 m_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ dove $G_{\rm N} = 6.67\ 10^{-11}{\rm Nm/kg}^2$.
Differenze: segno; la massa è solo positiva; la gravità è 'debole':

- Nell'idrogeno $F_{\rm N}/F_{\rm C} = 4\pi\epsilon_0 G_{\rm N} m_e m_p/e^2 = 4.4\ 10^{-40}$, non dipende da r. Coulomb batterebbe l'attrazione gravitazionale, ad esempio Terra/Sole, se ci fosse sbilanciamento di carica $|N_e - N_p| \gtrsim 10^{-40} N_{e,p}$ ($\sim 10^{14}$ nella Terra).
- Facile sollevare pesi nonostante l'attrazione gravitazionale della Terra.
- Nella materia grossa $F_{\rm C}$ fra 10^{30} cariche di entrambi i segni.

Una mole di idrogeno contiene $2N_A e = 192000{\rm C}$. A distanza di un metro, $F_{\rm C} \sim 3\ 10^{20}{\rm N}$! Abbastanza da sollevare un pianeta ($M_\oplus = 6\ 10^{24}{\rm kg}$).

	Elettricità	Gravità
Campo	$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$	$\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{\nabla}\phi$
Forza	$\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$	$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{g}$
Potenziale	$U = q\varphi$	$U = m\phi$
Sorgente	$q_e = -q_p$	$m_e = m_p/1876$
Fondamenta	$\varphi \to A_\mu$	$\phi \to g_{\mu\nu}$

Coulomb (fisica 2) è un fenomeno nuovo, non spiegabile in termini di forze fra materia (fisica 1). Le teorie nuove devono spiegare le vecchie. Non il contrario.

Coulomb tiene assieme atomi e materia

Vogliamo mostrare che la forza di Coulomb può spiegare atomi e materia.

Questa fisica può essere **calcolata** in termini di poche costanti fondamentali:

$$(G_{\rm N}), \qquad \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}, \qquad m_{e,p}, \qquad \hbar.$$

Evitiamo $\hbar$: facendo **stime** può essere sostituito dalla dimensione degli atomi. Ricaviamo dai dati le dimensioni degli atomi: $N_A = 6.02\ 10^{23}$ significa

$$r \sim \frac{\rm cm}{\sqrt[3]{N_A}} \sim 10^{-8}\,{\rm cm} \equiv \text{Å}, \qquad m_p \approx \frac{\rm gram}{2N_A} \sim 10^{-26}{\rm kg}.$$

Nel seguito useremo, a livello di stima, un fatto "noto" di termodinamica

$$\boxed{(\text{temperatura } T) \sim (\text{energia media})}.$$

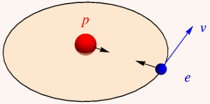
Teorema di equipartizione: ogni grado di libertà ha energia media $k_B T/2$. La costante di Boltzmann k_B è solo una costante di conversione. T ambiente:

$$T = 20\,\text{Celsius} = 293.15\,\text{Kelvin} \qquad \Rightarrow \qquad E = k_B T = \frac{\rm eV}{39.6}.$$

Atomo

La **forza elettrica** ha un valore quasi macroscopico

$$F_{\rm C} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \text{Å}^2} \approx 10^{-8}\text{N}.$$



Per cancellarla si formano atomi neutri. Il nucleo con Z protoni ha $q = Ze$ che determina la tavola periodica.

Il **potenziale elettrico** di un atomo di idrogeno *ep* è

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0 r} = 27\,\text{Volt} \qquad \text{per } r = 0.53\,\text{Å (idrogeno, } Z = 1).$$

Velocità: $m_e v_e^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ i.e. $v_e = e\sqrt{1/4\pi\epsilon_0 m_e r} \approx c/137 \ll c$.

Velocità angolare $\omega = v_e/r = e/\sqrt{4\pi\epsilon_0 m_e r^3} \approx 4.1\ 10^{16}\,\text{Hz} \sim$ righe spettrali.

L'**energia di legame**, per orbita classica circolare, è

$$E = \frac{m_e}{2} v_e^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r} = -13.6\,\text{eV} \equiv 1\ \text{Rydberg}$$

è antropicamente simile all'energia termica a temperatura ambiente, $E \sim$ eV/40.

Materia

La forza fra due atomi è $F_\mathrm{C} \approx e^2/4\pi\epsilon_0 \mathring{\mathrm{A}}^2 \approx 10^{-8}$N.

Una bacchetta di sezione 1 cm^2 ha $n = (\,\mathrm{cm}/\mathring{\mathrm{A}})^2 = 10^{16}$ legami fra atomi: per spezzarla serve $nF_\mathrm{C} \sim 10^8$N. Non male in approssimazione gesso $\approx$ acciaio. Solo gli elettroni esterni vengono ritoccati in reazioni: otteniamo sovra-stime.

Ricombinare una mole di materia fornisce o richiede energia

$$U \sim N_A \cdot \mathrm{eV} \sim 10^5\,\mathrm{Joule} \sim 100\,\mathrm{kcal} \qquad \mathrm{cal} = 4.2\,\mathrm{J}$$

È simile all'energia di tipiche reazioni chimiche e fisiche, ad esempio

$$\mathrm{H_2O(solido)} \leftrightarrow \mathrm{H_2O(liquido)} - 0.08\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{grammo}}$$

$$\mathrm{H_2O(gas)} \leftrightarrow \mathrm{H_2O(liquido)} + 0.54\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{grammo}}$$

$$\mathrm{H_2(gas)} + \frac{1}{2}\mathrm{O_2(gas)} \leftrightarrow \mathrm{H_2O(gas)} + 68\,\frac{\mathrm{kcal}}{\mathrm{mole}}$$

$$1\,\mathrm{cm}^3 \text{ di cioccolato} \sim 1 \text{ gianduiotto} \sim 0.1\,\mathrm{kcal}$$

Solidi a $k_BT \ll E$. Liquidi/molli a $k_BT \sim E$. Gas a $k_BT \gg E$.

(Alcune reazione chimiche come l'elettrolisi dell'acqua generano ioni carichi, consentendo di misurare la carica totale Q per mole e ricavare $N_A = Q/e$).

Oggetti

Massima altezza h di animale in g con spessore $S \equiv \epsilon h^2$, massa $M \sim m_p N_V$, $N_V \sim Sh/\mathring{\mathrm{A}}^3$, $N_S \sim S/\mathring{\mathrm{A}}^2$. Se troppo alto si rompe cadendo:

$$Mgh \sim \boxed{U_{\rm grav} \gtrsim U_{\rm el}} \sim N_S \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mathring{\mathrm{A}}}$$

Quindi $h \lesssim e/\sqrt{g m_p \epsilon_0} \sim$ m non dipende da Å o dalla forma $\epsilon = S/h^2$.

Massima altezza h di montagna: il terreno cede se la forza gravitazionale $F_{\rm N}$ degli $N = h/\mathring{\mathrm{A}}$ atomi sopra due atomi nella base è $\gtrsim$ della forza di Coulomb

$$Mg \sim N m_p g \sim \boxed{F_{\rm N} \lesssim F_{\rm C}} \approx \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \mathring{\mathrm{A}}^2}$$

dove $g \approx G_{\rm N} M_{\rm pianeta}/R^2_{\rm pianeta} \approx G_{\rm N} \rho_{\rm pianeta} R_{\rm pianeta} \approx G_{\rm N} m_p R_{\rm pianeta}/\mathring{\mathrm{A}}^3$:

$$hR_{\rm pianeta} \lesssim \frac{e^2}{G_{\rm N} m_p^2 \epsilon_0} \mathring{\mathrm{A}}^2 \approx 10^{36} \mathring{\mathrm{A}}^2 \approx (10^5\,\mathrm{km})^2 \to (300\,\mathrm{km})^2.$$

Per $R \sim 6000\,\mathrm{km}$ si ha $h \sim 15\,\mathrm{km}$. Pianeti più grandi di $300\,\mathrm{km}$ sono $\sim$sferici.

Un pianeta a temperatura antropica trattiene l'atmosfera se

$$G_{\rm N} \frac{M_{\rm pianeta} m_p}{R_{\rm pianeta}} \sim \boxed{U_{\rm grav} \gtrsim k_B T} \sim \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 \mathring{\mathrm{A}}}$$

Però

Classicamente non esistono configurazioni elettrostatiche stabili:

Il campo di una q nell'origine espanso attorno a $\boldsymbol{X} = (r, 0, 0) + (x, y, z)$ è

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^p} \simeq \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^{p-1}}\left[\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{r}\begin{pmatrix}(1-p)x\\y\\z\end{pmatrix} + \mathcal{O}(x^2, y^2, z^2)\right]$$

Per il valore fisico $p = 3$ i coefficienti si sommano a zero. Il teorema di Gauss mostrerà che l'impossibilità va oltre il 1o ordine. Sistemi dinamici stabili avranno problemi di irraggiamento e (oltre 2 corpi) di meta-stabilità.

Gli atomi sono tenuti da forze elettriche, ma la loro dimensione (tutti uguali!) è spiegata solo in Meccanica Quantistica dove le cariche sono onde e non punti

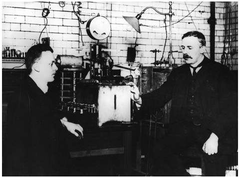
$$\text{Raggio di Bohr} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} = \frac{\hbar}{m_e c\alpha} = 0.529\ 10^{-10}\text{m}$$

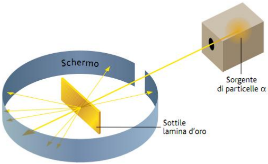
e $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c \approx 1/137.03599915$ è una costante fisica adimensionale.

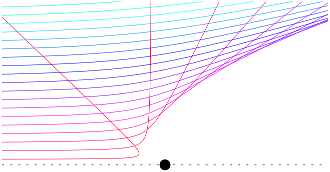
La MQ evita anche di dover escludere q stessa a mano nel calcolare $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$.
Il corso contiene questo passaggio extra-logico, matematicamente sporco.

Modello atomico di Rutherford

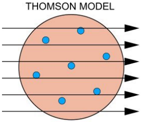
Sostanze radioattive emettono particelle α (nuclei di elio, $ppnn$) di grande energia. Rutherford scoprì nel 1913 che, urtando su atomi, a volte le α rimbalzano indietro

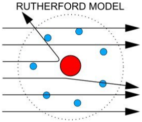






Capì che questo implica che tutta la massa è concentrata in un nucleo:





$$\tan\frac{\theta_{\rm d}}{2} = \frac{q_\alpha Q}{8\pi\epsilon_0 b K_\alpha}$$

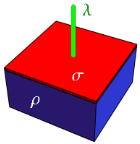
$\theta_{\rm d}$ = angolo di deflessione
b = parametro di impatto
K_α = energia cinetica

Il calcolo è analogo alle traiettorie dei pianeti e noioso, Gauss aiuterà a $\theta_{\rm d} \ll 1$...

Limite continuo: campo elettrico

Densità di carica volumetrica ρ, di superficie σ, lineare λ:

$$dq = \rho\, dV + \sigma\, dS + \lambda\, ds.$$



Carica totale (giusto per vedere il limite continuo in un caso semplice):

$$Q = \sum_i q_i \simeq \int dq' = \int dV' \frac{dq'}{dV'} = \int dV'\, \rho(\boldsymbol{r}')$$

Campo elettrico di una distribuzione generica di cariche:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_i|^3} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dq' \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int dV'\, \rho(\boldsymbol{r}') \frac{\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}.$$

Limite continuo: potenziale ed energia

Potenziale elettrico:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \simeq \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dq'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{dV'\ \rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}|}.$$

Energia elettrostatica:

$$U = \sum_{i>j}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}\frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 r_{ij}} \simeq \frac{1}{2}\iint \frac{dq'\ dq''}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|} = \frac{1}{2}\iint \frac{dV'\,dV''\rho(\boldsymbol{r}')\rho(\boldsymbol{r}'')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}'-\boldsymbol{r}''|}.$$

Il caso $i=j$, escluso dalla somma discreta, è irrilevante per una distribuzione volumetrica ρ: "$d^3r/r \to 0$". Cariche libere minimizzano U, ma integrale orribile.

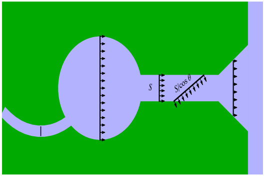
Usando il potenziale, l'energia è scritta in forma più utile

$$U = \frac{1}{2}\sum_j q_j\varphi(r_j)_{\text{altre}} = \boxed{\frac{1}{2}\int dq\ \varphi} = \frac{1}{2}\int dV\ \rho\varphi.$$

In generale $U \propto N^2$ ma $U \propto N$ nella materia neutra (e.g. sale).

Flusso

L'Arno ha un flusso di 110 m^3/s, il Po di 1500, il Rio delle Amazzoni di 200000. Dice quanta acqua passa. La si calcola in termini del campo vettore velocità del fluido $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$. Il flusso vale $\Phi_v = Sv$ se S è ortogonale ad una $\boldsymbol{v}$ costante.



In generale

$$\Phi_v = \int dS\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v}, \qquad \text{dove } \boldsymbol{n} \text{ è il versore normale alla superficie } dS.$$

In un fiume stazionario Φ_v non dipende dalla superficie scelta: $dS\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{v} = dS_\perp v$.

Si definisce il flusso di un campo vettoriale $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t)$ attraverso una superficie S

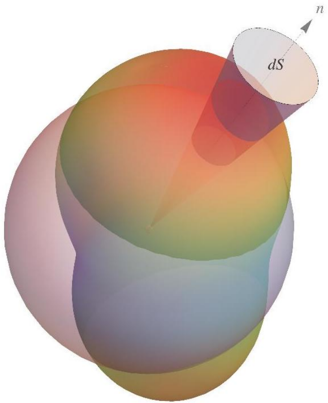
$$\boxed{\text{Flusso di } \boldsymbol{E} = \Phi_E \equiv \int_S dS\, \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E}}$$

Teorema di Gauss

$$\boxed{\Phi_E = \frac{Q_{\text{in}}}{\epsilon_0}}$$

Mettiamo una carica Q nell'origine e calcoliamo il flusso di $\boldsymbol{E}$ attraverso una sfera di raggio r: si ha $\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{E} = E_r = |\boldsymbol{E}|$ e

$$\Phi_E = Q \frac{4\pi r^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$



- La dipendenza da r si cancella: superficie $S \propto r^2$ vs $F_{\text{Coulomb}} \propto 1/r^2$.
- Il flusso $d\Phi_E$ attraverso una superficie storta è uguale a quello sulla sfera.
- Se la carica è esterna, il flusso è zero.
- Per tante cariche, o per una distribuzione continua, contribuiscono solo quelle interne.

Conseguenza: nessuna carica è in equilibrio stabile, non può essere circondata da $\boldsymbol{E}$ entrante o uscente in quanto $\Phi_{E_{\text{ext}}} = 0$.

Elettrostatica in d dimensioni

Abbiamo calcolato $\boldsymbol{E}$ generato da filo e piano con densità uniformi: sono l'analogo di una carica puntiforme in $d = 2$ e $d = 1$ dimensioni:

Dimensioni	Analogo a	$E_r(r)$	$\varphi(r)$	r^2
1	Piano in 3d	$\sigma/2\epsilon_0$	$-\sigma\|r\|/2\epsilon_0$	x^2
2	Filo in 3d	$\lambda/2\pi r\epsilon_0$	$\lambda\ln(r)/2\pi\epsilon_0$	x^2+y^2
3	Carica in 3d	$Q/4\pi r^2\epsilon_0$	$Q/4\pi\epsilon_0 r$	$x^2+y^2+z^2$
d		$\propto 1/S_d \propto 1/r^{d-1}$	$\propto 1/r^{d-2}$	$\sum_{i=1}^d x_i^2$

L'analogo in d dimensioni del teorema di Gauss dice che $E \propto 1/r^{d-1}$.
Questo mostra che $d = 3$ è speciale:

- Se $d \leq 2$ non esistono cariche libere: il potenziale non è finito a $r \to \infty$.
- Se $d \geq 4$ non esistono orbite stabili ($V_{\text{kin}} = L^2/2\mu r^2$). Anche in MQ.
- Solo per $d = 3$ esistono cariche libere e orbite stabili.

Raggio classico dell'elettrone

L'energia elettrica U di un oggetto di carica q carico e dimensione r diventa **enorme** per piccolo r, e diverge nel limite puntiforme $r \to 0$:

$$U = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \times \begin{cases} 1/2 & \text{densità } \sigma \text{ costante su superficie sferica} \\ 3/5 & \text{densità } \rho \text{ costante in sfera} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \text{per convenzione, ignorando la forma.} \end{cases}$$

L'energia U contribuisce alla massa come U/c^2. Applicandolo all'elettrone, si definisce il 'raggio classico' r_e tale che tutta la massa è elettrica, $m_e c^2 = U$:

$$r_e \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{m_e c^2} = 2.82\ 10^{-15}\text{m}.$$

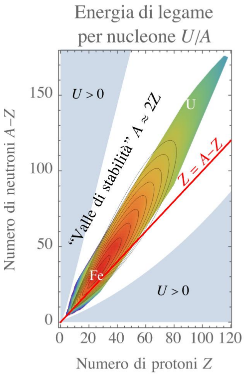
Oggi si sa che l'elettrone è (un'onda) più grande di r_e, e $U \sim m_e c^2/137 \ll m_e c^2$.

r_e sarà comunque utile. E per caso è circa la dimensione del protone.

Energia di legame nucleare

Un nucleo (notazione: ${}^A_Z$nome) è circa una sfera carica di *piccolo* raggio $R \sim A^{1/3} 1.3\ 10^{-15}$ m che contiene

- Z protoni p di massa $m_p \approx 0.9382\,\mathrm{GeV}/c^2$,
- $A - Z$ neutroni n di massa $m_n \approx 0.9395\,\mathrm{GeV}/c^2$.



$$
\begin{aligned}
M &= Zm_p + (A-Z)m_n + \frac{U}{c^2} \\
U &= U_{\rm em} + U_{\rm strong}, \\
U_{\rm em} &\approx +\frac{3}{5}\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon_0 R} \approx 0.0006\,\mathrm{GeV}\frac{Z^2}{A^{1/3}}
\end{aligned}
$$

Grossa in quanto R è piccolo! Formula di Weizsäcker:

$$
U_{\rm strong} \approx \overbrace{-0.01\,\mathrm{GeV}\,A}^{\text{legame forte a corto raggio}} + \overbrace{0.01\,\mathrm{GeV}\,A^{2/3}}^{\text{termine di superficie, conta meno}} \overbrace{+0.1\,\mathrm{GeV}\frac{(Z-A/2)^2}{A}}^{\text{accoppiamento } p,n}
$$

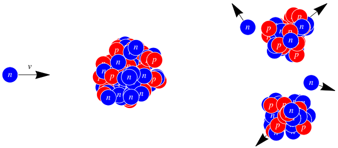
Lungo $A \gtrsim 2Z$ si ha $U \approx (-0.02\,Z + 0.01(2Z)^{3/2} + 0.0005\,Z^{5/3})\,\mathrm{GeV}$.
$U/A = (E_{\rm legame}$ per nucleone) è minima a $Z \sim 26$: ${}^{56}_{26}$Fe è il più stabile.
Gli altri nuclei contengono una enorme energia nucleare. Sediamo su una bomba.

Fissione e fusione nucleare

- **Fusione**: nuclei piccoli liberano energia unendosi, $\Delta U = U_1 + U_2 - U_{1+2}$. Ad esempio $\mathrm{D} + \mathrm{D} = \mathrm{T} + p + 4\,\mathrm{MeV}$. Ma devono superare la repulsione Coulombiana: classicamente $K > Z_1 Z_2 e^2/4\pi\epsilon_0 R \sim$ MeV $\sim 10^{10}\,\mathrm{K} \equiv T_{\rm cr}$. Le stelle si accendono a $T \gtrsim T_{\rm cr}$ e trovano un equilibrio tranquillo. Difficile fondere artificialmente. Altrimenti sarebbe tutto Fe.
- Un nucleo troppo grosso decade: U è minima a $Z \sim 120$.
- **Fissione**: dividendosi a metà libera energia elettromagnetica

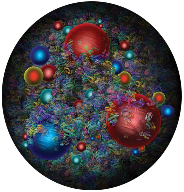
$$\Delta U \approx \Delta U_{\rm em} \approx \frac{3}{5}\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}(1 - 2^{-2/3}) \sim \frac{Mc^2}{1000}.$$

- Un n *lento* può urtare su ${}^{235}_{92}\mathrm{U}$ stimola la 'fissione' che libera ΔU e $\sim 2n$:



Sopra la massa critica $M \gtrsim (R_{\rm atomo}/R_{\rm nucleo})^3 m_p \sim$ kg una reazione a catena libera $\mathrm{g}\,c^2 \sim 20\,\mathrm{kton}$, $\mathrm{kton} \equiv 4.2\;10^{12}$ J. Reattori rimangono poco sub-critici.

Masse di protone e neutrone



Protoni e neutroni sono stati di 3 quark qqq legati da interazioni forti. Esistono $q = u$ (carica $q_u = 2e/3$, massa $m_u \lesssim m_d$) e $q = d$ ($q_d = -e/3$). Alla massa contribuisce l'energia elettrica

$$m_{p,n} \approx \frac{U_{\rm strong} + U_{\rm em}^{p,n}}{c^2} + \sum_q m_q$$

stimata approssimando qqq su triangolo equilatero di lato r:

particella	quarks	Energia elettrica	$\sum m_q$
p	uud	$\dfrac{q_u^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = 0$	$2m_u + m_d$
n	udd	$\dfrac{q_d^2 + 2q_u q_d}{4\pi\epsilon_0 r} = -\dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$	$m_u + 2m_d$
Δ^{++}	uuu	$\dfrac{3q_u^2}{4\pi\epsilon_0 r} = +\dfrac{4}{3}\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$	$3m_u$
Δ^{-}	ddd	$\dfrac{3q_d^2}{4\pi\epsilon_0 r} = +\dfrac{1}{3}\dfrac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$	$3m_d$

dove Δ^{++} e Δ^- sono altre particelle. La particella stabile più leggera è il protone:

$$\underbrace{m_n - m_p}_{1.3\,{\rm MeV}/c^2} = \underbrace{m_d - m_u}_{3\,{\rm MeV}/c^2} + \underbrace{\mathcal{O}(e^2/4\pi\epsilon_0 r)}_{-1.7\,{\rm MeV}/c^2}.$$

Vince 'per caso' e produce la chimica. n diventa stabile dentro i nuclei.

Il gradiente

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}}\frac{\partial}{\partial z}}$$

soddisfa alle leggi di 2 mondi: è un **vettore** e un **operatore differenziale**. La fisica è invariante sotto rotazioni SO(3). Simmetria esplicita scrivendo in termini di vettori, rappresentazioni di SO(3). Sotto rotazioni $x_{i'} = \sum_i R_{i'i} x_i$ le componenti di un vettore $\boldsymbol{V} = \sum_i V_i \hat{\boldsymbol{x}}_i = \sum_{i'} V_{i'} \hat{\boldsymbol{x}}_{i'}$ ruotano come $V_{i'} = \sum_i R_{i'i} V_i$.

Il gradiente è un vettore: dimostrazione algebrica usando $R^{-1} = R^T$

$$\nabla_{i'} \equiv \frac{\partial}{\partial x_{i'}} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial x_{i'}} \frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_i R_{i'i} \nabla_i \qquad x_i = \sum_{i'} (R^{-1})_{ii'} x_{i'} = \sum_{i'} x_{i'} R_{i'i}$$

Dimostrazione geometrica: definendo il vettore spostamento $d\boldsymbol{x} = \sum_i dx_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$, il differenziale di una funzione arbitraria f è uno scalare, dato da

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f$$

Quindi $\boldsymbol{\nabla} f$ è un vettore: quello che punta nella direzione di massima pendenza. Avendo significato geometrico indipendente dalle coordinate, soddisfa a teoremi.

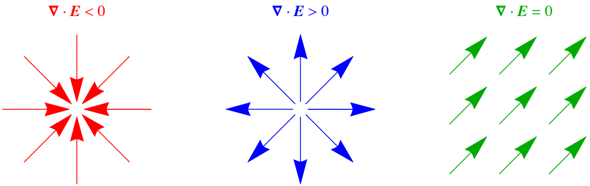
La divergenza

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}}$$

è uno scalare. Cioè ruotando $x \to x'$, $E_x \to E_{x'}$, etc si ha

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial E_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial E_{z'}}{\partial z'}$$

Significato geometrico: per un flusso d'acqua (per semplicità 2-dimensionale) dice se ci sono sorgenti: un tubo che preleva acqua è come una carica puntiforme; la pioggia p è come una distribuzione di carica uniforme: $v_x = \text{cte} + px$.

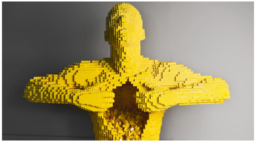


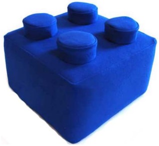
Teorema della divergenza

Lega il flusso (uno scalare) alla divergenza (quindi, uno scalare):

$$\boxed{\int dS\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} = \int dV\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}}$$

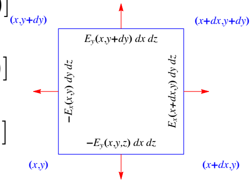
Vale per un volume generico; si dimostra decomponendolo in cubettini infinitesimi e verificando che il teorema si applica separatamente a ciascun cubettino.





Per un cubetto infinitesimo di lati $dx\,dy\,dz$

$$\begin{aligned}\int dS\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} \quad &= \quad +\int dy\,dz[E_x(x+dx,y,z)-E_x(x,y,z)]\\ &\quad\quad +\int dx\,dz[E_y(x,y+dy,z)-E_y(x,y,z)]\\ &\quad\quad +\int dx\,dy[E_z(x,y,z+dz)-E_z(x,y,z)]\\ &= \quad \int dx\ dy\ dz\left[\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right]\end{aligned}$$



Prima equazione di Maxwell

Combinando il teorema di Gauss con quello della divergenza

$$\frac{1}{\epsilon_0}\int dV\ \rho = \frac{Q_{\rm in}}{\epsilon_0} \stackrel{\rm Gauss}{=} \Phi_E = \int dS\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{E} \stackrel{\rm divg}{=} \int dV\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}$$

si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0}.$$

Dice (parzialmente) come una densità di carica ρ genera un campo elettrico $\boldsymbol{E}$.

Verifica: Coulomb $\boldsymbol{E}\propto \boldsymbol{r}/r^3$ ha divergenza zero per $r\neq 0$ in $d=3$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = \frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}\cdot\boldsymbol{\nabla}r = \frac{d}{r^3} - 3\frac{\boldsymbol{r}}{r^4}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0.$$

La forza di Coulomb è locale?

$F\propto 1/r^p$ sembra una qualunque forza non-locale, che fa azione a distanza, 'assurda' secondo Newton. Riscrivendo Coulomb si inizia a vedere che $p=2$ è speciale, descritto dalla più semplice equazione *locale*, con 1 derivata, *se il campo* $\boldsymbol{E}$ *è la vera entità fisica*. Per ora statico, poi dinamico.
Si iniziano a vedere principi fondamentali: **località + invarianza per rotazioni + semplicità**, da cui segue $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}\propto$ la sorgente ρ.

Densità di energia del campo elettrico

$$U = \frac{1}{2}\int dq\ \varphi = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV\ E^2 \qquad \text{cioè} \qquad u = \frac{dU}{dV} = \frac{\epsilon_0}{2}E^2$$

'Dimostrazione': vale per due piastre parallele di superficie S a distanza d con densità superficiale $\pm\sigma$. Dentro $E_{\rm in} = \sigma/\epsilon_0$ costante, quindi

$$U = \frac{1}{2}Q\cdot\Delta\varphi = \frac{S\sigma\cdot E_{\rm in}d}{2} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{\epsilon_0}{2}VE_{\rm in}^2$$

Dimostrazione: si integra per parti in 3d, usando

$$U = \frac{1}{2}\int dV\ \varphi\rho = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV\varphi\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \frac{\epsilon_0}{2}\int dV[\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi] = \frac{\epsilon_0}{2}\Phi_{\varphi\boldsymbol{E}} + \int dV\ u$$

'Teorema' se il termine di bordo $\Phi_{\varphi\boldsymbol{E}}$ vale zero:

- Per distribuzioni di cariche finite, vale zero all'infinito

$$\int dS\ \varphi E \sim \int \frac{r^2 d\Omega}{r\times r^2} \stackrel{r\to\infty}{=} 0.$$

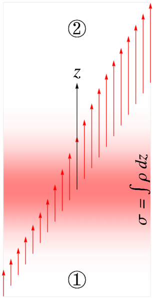
- Se ci sono cariche puntiformi c'è una divergenza ad $r\to 0$. È l'energia di una carica su stessa. La matematica suggerisce che averla omessa a mano in $\sum_{i\neq j} q_i q_j/4\pi\epsilon_0 r_{ij}$ era brutto. La formula bella $\int dV\ u$ la include, e diverge. Questa è la fisica giusta, non il limite ideale di cariche puntiformi.

Pressione su cariche superficiali

$\boldsymbol{F} \stackrel{?}{=} \sigma S \boldsymbol{E}$. $\quad E_{\parallel}$ è continuo ma $E_{\perp 1} - E_{\perp 2} = \sigma/\epsilon_0$. $\quad \boxed{\boldsymbol{F} = \sigma S(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)/2}$.

Motivo intuitivo: per il principio di azione e reazione la forza **deve** essere generata solo dal campo elettrico 'esterno'

$$(\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2)/2.$$



Dimostrazione: bisogna abbandonare l'idealizzazione di superficie di spessore zero, e studiare cosa accade dentro un piccolo spessore finito. Chiamando z l'asse $\perp$ alla superficie si ha $\sigma = \int \rho\, dz$ e la 1a equazione di Maxwell $dE_z/dz = \rho/\epsilon_0$. Integrando in dz si riottiene $E_{z2} - E_{z1} = \sigma/\epsilon_0$ (Gauss su cilindretto ortogonale). La pressione vale:

$$p = \frac{dF_z}{dS} = \int E_z\, \rho\, dz = \epsilon_0 \int E_z \frac{dE_z}{dz} dz = \epsilon_0 \frac{E_{z2}^2 - E_{z1}^2}{2} = u_2 - u_1$$

formula vera in contesti più generali e.g. in gas. Concludendo:

$$p = \epsilon_0 (E_{\perp 2} - E_{\perp 1}) \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2} = \sigma \frac{E_{\perp 2} + E_{\perp 1}}{2}.$$

Teorema del rotore

Il rotore di un campo vettoriale è uno (pseudo)vettore:

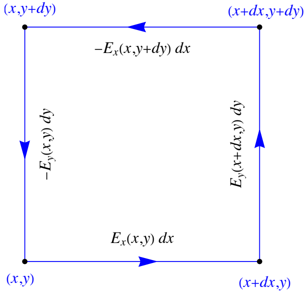
$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \det \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{x}} & \hat{\boldsymbol{y}} & \hat{\boldsymbol{z}} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right)}$$

usando $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_i = \epsilon_{ijk} A_j B_k$ i.e. $(\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B})_z = A_x B_y - A_y B_x$. Vale:

$$\boxed{\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int dS\, \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})}$$

con $\oint$ in verso antiorario. Dimostrazione: decomponendo una superficie generica in rettangoli infinitesimi e verificando che vale su ognuno. Per uno di lati $dx\, dy$

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} &= +\int dx[+E_x(x,y) - E_x(x,y+dy)] \\ &\quad +\int dy[-E_y(x,y) + E_y(x+dx,y)] \\ &= \int dx\, dy \left[\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] \\ &= \int dx\, dy\, (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_z \\ &= \int dx\, dy\, \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}). \end{aligned}$$



3 teoremi al prezzo di 1

Sono casi particolari di un teorema valido per una n-superficie in d dimensioni:

$$\int_X \partial \wedge A^{(n)} \wedge dx^{(n+1)} = \oint_{\partial X} A^{(n)} \wedge dx^{(n)}$$

dove $A^{(n)}$ è un tensore anti-simmetrico ad n indici (detto n-forma), ∂ significa 'bordo di', e $\wedge$ indica anti-simmetrizzazione. In $d = 3$ dimensioni:

$n = 0$: teorema banale ($\int$curva $\to \int$ suo bordo = punti)

$$\int_L \boldsymbol{\nabla} f \cdot d\boldsymbol{x} = \Delta f = \oint_{\partial L = P} f.$$

$n = 1$: teorema del rotore ($\int$superficie $\to \int$ suo bordo = curva)

$$\int_S (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_{\partial S = L} \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}.$$

In 3d la 2-forma di superficie è il vettore perpendicolare, $\epsilon_{ijk} dx_j dx_k = dS\ n_i$.

$n = 2$: teorema della divergenza ($\int$volume = $\int$ suo bordo = superficie)

$$\int_V (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})\, dV = \oint_{\partial V = S} \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

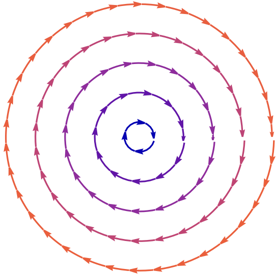
In 3d una 2-forma è un vettore $A_i = \epsilon_{ijk} A_{jk}$.

2a equazione di Maxwell (elettrostatica)

$\boldsymbol{E}$ ha 3 componenti, la divergenza da sola non lo determina univocamente.

Campi 'rotazionali' come $\boldsymbol{E} = (y, -x, 0)$ hanno divergenza zero. Cariche non li generano in quanto la forza di Coulomb $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ è radiale, quindi conservativa

$$\int_A^B \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \varphi_A - \varphi_B = 0 \qquad \text{se } A = B.$$



Per il teorema del rotore

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int dS\, \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})$$

quindi

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0}$$

Automaticamente soddisfatta se $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$: $(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\nabla}\varphi)_i = \epsilon_{ijk}\partial_j\partial_k\varphi = 0$.

Equazioni di Maxwell per l'elettrostatica

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} &=& \rho/\epsilon_0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} &=& 0 \end{array}\right.} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \nabla^2\varphi &=& -\rho/\epsilon_0 \\ \boldsymbol{E} &=& -\boldsymbol{\nabla}\varphi \end{array}\right.}$$

dove $\nabla^2\varphi \equiv \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}\varphi = \partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$ è il Laplaciano, l'unico operatore differenziale scalare sotto rotazioni.

	caso particolare	lezione generale
Fisica 1	$x = at^2/2$	$F = m\ddot{x}$
Fisica 2	$F = q_1 q_2/4\pi\epsilon_0 r^2$	$\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$

Per linearità si ha la soluzione integrale (equivalente a $\nabla^2\frac{1}{r} = -4\pi\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})$)

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}} \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\rho(\boldsymbol{r}')\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}}.$$

Se fossero dinamiche $\rho(\boldsymbol{r},t)$ uno potrebbe trasmettere segnali a velocità infinita.

Verifica, potenziale in d dimensioni: $\nabla^2\varphi = 0$ per $r \neq 0$ è risolto da $\varphi \propto r^{2-d}$

$$\frac{\partial r^p}{\partial x} = px\,r^{p-2}, \qquad \frac{\partial^2 r^p}{\partial x^2} = p\,r^{p-2} + p(p-2)x^2 r^{p-4}, \qquad \nabla^2 r^p = p[d+p-2]r^{p-2}.$$

Formule utili (da wikipedia)

Operatore	Coordinate cartesiane (x,y,z)	Coordinate cilindriche (ρ,φ,z)	Coordinate sferiche (r,θ,φ)
Definizione delle coordinate		$\begin{cases} x = \rho\cos\phi \\ y = \rho\sin\phi \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\phi & 0 \leqslant \theta \leqslant \pi \\ y = r\sin\theta\sin\phi & 0 \leqslant \phi < 2\pi \\ z = r\cos\theta & 0 \leqslant r < +\infty \end{cases}$
		$\begin{cases} \rho = \sqrt{x^2+y^2} \\ \phi = \arctan(y/x) \\ z = z \end{cases}$	$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta = \arccos(z/r) \\ \phi = \arctan(y/x) \end{cases}$
Campo vettoriale $\mathbf{A}$	$A_x\hat{\mathbf{x}} + A_y\hat{\mathbf{y}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + A_z\hat{\mathbf{z}}$	$A_r\hat{\boldsymbol{r}} + A_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + A_\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Gradiente ∇f	$\frac{\partial f}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial \rho}\hat{\boldsymbol{\rho}} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{\partial f}{\partial r}\hat{\boldsymbol{r}} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \phi}\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Divergenza $\nabla\cdot\mathbf{A}$	$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}$
Rotore $\nabla\times\mathbf{A}$	$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{x}} +$ $\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{y}} +$ $\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{z}}$	$\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $\left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\phi)}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{z}}$	$\frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\phi\sin\theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\phi)\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(rA_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Laplaciano $\nabla^2 f$	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$	$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}$
Laplaciano di un vettore $\nabla^2\mathbf{A}$	$\nabla^2 A_x\hat{\mathbf{x}} + \nabla^2 A_y\hat{\mathbf{y}} + \nabla^2 A_z\hat{\mathbf{z}}$	$\left(\nabla^2 A_\rho - \frac{A_\rho}{\rho^2} - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{\rho^2} + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial A_\rho}{\partial \phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $(\nabla^2 A_z)\hat{\mathbf{z}}$	$\left(\nabla^2 A_r - \frac{2A_r}{r^2} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{r}} +$ $\left(\nabla^2 A_\theta - \frac{A_\theta}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial A_r}{\partial\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\phi}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $\left(\nabla^2 A_\phi - \frac{A_\phi}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\phi} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\phi}\right)\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Lunghezza infinitesima	$d\mathbf{l} = dx\hat{\mathbf{x}} + dy\hat{\mathbf{y}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = d\rho\hat{\boldsymbol{\rho}} + \rho d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}} + dz\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{l} = dr\hat{\mathbf{r}} + rd\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta d\phi\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Area infinitesima	$d\mathbf{S} = dydz\hat{\mathbf{x}} +$ $dxdz\hat{\mathbf{y}} +$ $dxdy\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = \rho d\phi dz\hat{\boldsymbol{\rho}} +$ $d\rho dz\hat{\boldsymbol{\phi}} +$ $\rho d\rho d\phi\hat{\mathbf{z}}$	$d\mathbf{S} = r^2\sin\theta d\theta d\phi\hat{\mathbf{r}} +$ $r\sin\theta dr d\phi\hat{\boldsymbol{\theta}} +$ $rdrd\theta\hat{\boldsymbol{\phi}}$
Volume infinitesimo	$dv = dxdydz$	$dv = \rho d\rho d\phi dz$	$dv = \rho^2\sin\theta d\rho d\theta d\phi$

Sistemi di coordinate ortogonali

Per derivare queste formule è utile essere più generali...

Uno spazio piatto in coordinate curve (o uno spazio curvo) è in generale descritto dalla metrica $ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij}(x)dx_i dx_j$. Per semplicità, solo coordinate ortogonali

$$ds^2 = g_{11}dx_1^2 + g_{22}dx_2^2 + g_{33}dx_3^2 = d\boldsymbol{x}\cdot d\boldsymbol{x} \qquad \text{dove} \qquad d\boldsymbol{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$$

è il vettore spostamento infinitesimo, $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ è il versore lungo la coordinata i e $g_i \equiv \sqrt{g_{ii}}$ (notazione inusuale). In 2d $d\boldsymbol{x} = dx\,\hat{\boldsymbol{x}} + dy\,\hat{\boldsymbol{y}} = dr\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}}$:

Coordinate 3d	coefficienti metrici			$d\boldsymbol{x}$
Cartesiane x, y, z	$g_x = 1$	$g_y = 1$	$g_z = 1$	$dx\,\hat{\boldsymbol{x}} + dy\,\hat{\boldsymbol{y}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$
Cilindriche r, θ, z	$g_r = 1$	$g_\theta = r$	$g_z = 1$	$dr\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + dz\,\hat{\boldsymbol{z}}$
Sferiche r, θ, ϕ	$g_r = 1$	$g_\theta = r$	$g_\phi = r\sin\theta$	$dr\,\hat{\boldsymbol{r}} + r\,d\theta\,\hat{\boldsymbol{\theta}} + r\sin\theta\,d\phi\,\hat{\boldsymbol{\phi}}$

Superficie nel piano 12: $dS_{12} = g_1 g_2 dx_1 dx_2$. Volume: $dV = g_1 g_2 g_3 dx_1 dx_2 dx_3$.

Gradiente in coordinate ortogonali

In un generico sistema di coordinate ortogonali x_i si definisce il gradiente come:

$$df = f(x_i + dx_i) - f(x_i) = \sum_i dx_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv d\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla} f.$$

Inserendo $d\boldsymbol{x} = \sum_i g_i dx_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} = \sum_i \frac{\hat{\boldsymbol{x}}_i}{g_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\hat{\boldsymbol{x}}_1}{g_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\hat{\boldsymbol{x}}_2}{g_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\hat{\boldsymbol{x}}_3}{g_3} \frac{\partial}{\partial x_3}}$$

Ad esempio, in coordinate cartesiane, sferiche e cilindriche si ha

$$\boldsymbol{\nabla} = \hat{\boldsymbol{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{y}} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial}{\partial z} = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} = \hat{\boldsymbol{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{z}} \frac{\partial}{\partial z}.$$

In particolare $E_r = -(\boldsymbol{\nabla}\varphi)_r = -\partial\varphi/\partial r$.

Divergenza in coordinate ortogonali

Calcolando $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ in coordinate in cui i versori $\hat{\boldsymbol{x}}_i$ non sono costanti (in coordinate cilindriche e sferiche la loro orientazione varia) occorre tenere conto che $\boldsymbol{\nabla}$ applicata a $\boldsymbol{E} = \sum_i E_i \hat{\boldsymbol{x}}_i$ deriva sia le componenti E_i che i versori $\hat{\boldsymbol{x}}_i$.

Ad esempio, applicando $\boldsymbol{\nabla}$ ad un campo vettoriale radiale $\boldsymbol{E} = \hat{\boldsymbol{r}} E_r(r)$ in coordinate sferiche (utili appunto quando si ha simmetria sferica) si ottiene

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\partial E_r}{\partial r} + E_r \left(\frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\phi}}}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial \hat{\boldsymbol{r}}}{\partial \phi} \right) = \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{1+1}{r} E_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r .$$

Questo metodo è sistematico ma porta a passaggi pesanti.

Divergenza in coordinate ortogonali′

Si arriva al risultato finale più rapidamente calcolando in un sistema di coordinate ortogonali $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}$ usando la sua espressione nel teorema della divergenza

$$\int (\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E})\, dV = \int \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

Consideriamo un volumetto di lati $d\boldsymbol{x}_{1,2,3}$. Il contributo al flusso delle superfici perpendicolari a $d\boldsymbol{x}_1$ valgono

$$\begin{aligned} (E_1 dS_{23})_+ - (E_1 dS_{23})_- &= (E_1 g_2 g_3)_+ dx_2\, dx_3 - (E_1 g_2 g_3)_- dx_2\, dx_3 = \\ &= dx_1 dx_2 dx_3\ \frac{\partial}{\partial x_1}(E_1 g_2 g_3) = \frac{dV}{g_1 g_2 g_3} \frac{\partial}{\partial x_1}(E_1 g_2 g_3). \end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1}(E_1 g_2 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_2}(E_2 g_1 g_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(E_3 g_1 g_2) \right]}$$

Verifica: riotteniamo la divergenza di un vettore radiale in coordinate polari:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial r} E_r r^2 \sin\theta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 E_r.$$

Rotore

In modo analogo, il rotore si ottiene usando il teorema di Stokes

$$\oint_\gamma \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int dS \; \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})$$

Consideriamo un rettangolino di lati $d\boldsymbol{x}_{1,2}$. Il contributo alla circuitazione dei tratti lungo $d\boldsymbol{x}_2 = g_2 \hat{\boldsymbol{x}}_2 dx_2$ vale

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}_2)_+ - (\boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{x}_2)_- &= dx_2[(g_2E_2)_+ - (g_2E_2)_-] = dx_1 dx_2 \frac{\partial}{\partial x_1}(g_2E_2) = \\
&= \frac{dS_{12}}{g_1 g_2} \frac{\partial}{\partial x_1}(g_2E_2) = \frac{dS_{12}}{g_1 g_2 g_3} g_3 \frac{\partial}{\partial x_1}(g_2 E_2)
\end{aligned}$$

Quindi

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{pmatrix} g_1 \hat{\boldsymbol{x}}_1 & g_2 \hat{\boldsymbol{x}}_2 & g_3 \hat{\boldsymbol{x}}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ g_1 E_1 & g_2 E_2 & g_3 E_3 \end{pmatrix}}$$

Laplaciano

Combinando le formule per la divergenza e per il gradiente si ottiene:

$$\boxed{\nabla^2\varphi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{g_2 g_3}{g_1}\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{g_1 g_3}{g_2}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{g_1 g_2}{g_3}\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right]}$$

In coordinate cilindriche:

$$\nabla^2\varphi = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\right] = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

In coordinate polari:

$$\nabla^2\varphi = \underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)}_{(r\varphi)''/r} + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}.$$

In d dimensioni il laplaciano di una funzione di $r^2 = \sum_{i=1}^d x_i^2$ vale

$$\nabla^2\varphi(r) = \frac{1}{r^{d-1}}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{d-1}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{d-1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Quindi $\nabla^2\varphi(r) = 0$ se $\varphi \propto r^{2-d}$.

Esempi matematici

Potenziale di Yukawa. Per particelle massive l'equazione di Poisson diventa

$$\nabla^2\varphi - \lambda^2\varphi = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(r) = \frac{e^{-\lambda r}}{r}.$$

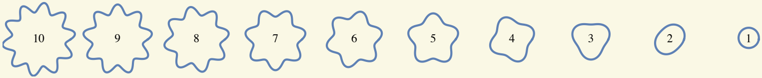
Fattore esponenziale: le forze nucleari forti sono a corto raggio.

Atomo di idrogeno quantistico. La funzione d'onda $\psi(\boldsymbol{r})$ risolve

$$H\psi = E\psi \qquad \text{dove} \qquad H = \frac{p^2}{2m_e} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{p} = -i\hbar\boldsymbol{\nabla}.$$

La soluzione ha livelli discreti. Intuitivamente: un elettrone libero ha $\psi \propto \exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x})$, ovvero lunghezza d'onda 'di de-Broglie' $\lambda = 2\pi/k = 2\pi\hbar/p$. Onde stazionarie negli atomi sono ottenute per valori speciali dell'energia E tali che le orbite sono multipli interi di λ. La soluzione per lo stato di minima energia è

$$\psi(r) \propto e^{-r/a_0}, \qquad a_0 = \frac{\hbar^2}{m_e q_q^2}, \qquad E = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 a_0}.$$

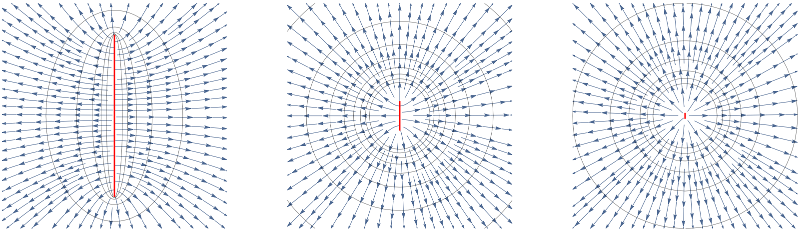


Dipolo

Il dipolo elettrico

Un sistema di cariche di dimensione spaziale d e carica totale $Q \neq 0$ sembra una carica Q puntiforme quando visto da grande distanza:

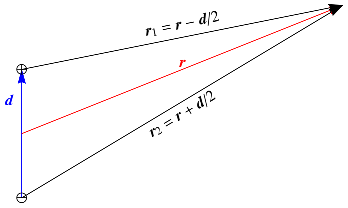
$$\boldsymbol{E} \overset{r \gg d}{\simeq} \frac{Q\hat{\boldsymbol{r}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \cdots$$



È possibile espandere in serie di potenze di d/r. Il campo della carica totale è detto monopolo, il termine successivo dipolo. Il dipolo domina quando $Q = 0$.

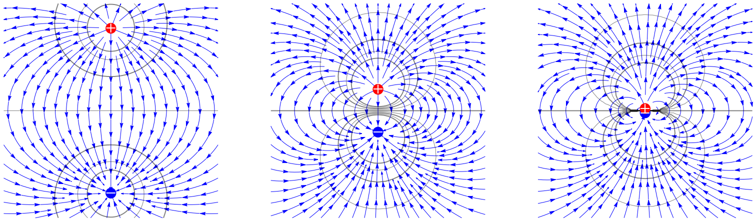
Esempi di dipolo: una molecola di acqua, un'antenna...
L'archetipo di dipolo sono due cariche $\pm q$ a distanza d.

Potenziale di dipolo



$$
\begin{aligned}
\varphi(\boldsymbol{r}) &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r_2^2 - r_1^2}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} = \\
&= \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{r}}{r_1 r_2 (r_1 + r_2)} \\
&\overset{r \gg d}{\simeq} \boxed{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3}} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}
\end{aligned}
$$

usando $\boldsymbol{\nabla}(1/r) = -\boldsymbol{r}/r^3$. Dipende solo dal momento di dipolo $\boxed{\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}}$.



Campo di dipolo

Usando $\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{\nabla}(1/r^3) = -3\boldsymbol{r}/r^5$ si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right]}$$

e cancellando $\boldsymbol{p}/r^3$ usando $\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})$ con $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{p}$ e $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\Bigg[\underbrace{\frac{2(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5}}_{E_r} + \underbrace{\frac{\boldsymbol{r}\times(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p})}{r^5}}_{E_\theta}\Bigg].$$

In coordinate polari (con asse z lungo $\boldsymbol{p}$): $\varphi = p\cos\theta/4\pi\epsilon_0 r^2$ e quindi

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{p\cos\theta}{2\pi\epsilon_0 r^3}, \qquad E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{p\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r^3}, \qquad E_\phi = 0.$$

Il modulo vale $E = \sqrt{E_r^2 + E_\theta^2} = \dfrac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta} \propto \dfrac{1}{r^3} > 0.$

Momento di dipolo

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_i|} \overset{r\gg r_i}{\simeq} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i\left[\frac{1}{r} - \boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} + \cdots\right] =$$

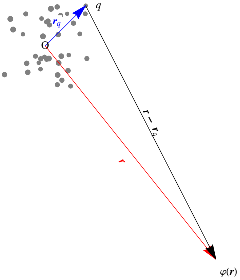
$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_i q_i\left[\frac{1}{r} + \frac{\boldsymbol{r}_i\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \cdots\right] = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \frac{\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r}}{r^3} + \cdots\right]$$

Il momento di monopolo è la Q totale

$$Q = \sum_i q_i = \int dq = \int dV\,\rho.$$

Il momento di dipolo $\boldsymbol{p}$ si misura in Coulomb $\cdot$ metro

$$\boxed{\boldsymbol{p} = \sum_i q_i \boldsymbol{r}_i = \int dq\ \boldsymbol{r} = \int dV\,\rho\ \boldsymbol{r}}$$



e dipende dall'origine se $Q \neq 0$, essendo il 2o termine di una serie di Taylor.

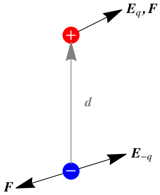
Vari modi di calcolarlo. Se $Q = 0$ è dato da una carica totale positiva q con baricentro $\boldsymbol{r}_+$ ed una $-q$ con baricentro $\boldsymbol{r}_-$, allora $\boldsymbol{p} = q(\boldsymbol{r}_+ - \boldsymbol{r}_-)$.

Dipolo in E esterno: energia e forza

Prendendo un $\boldsymbol{p}$ come due cariche $\pm q$, al 1o ordine in d si ha

$$U = q(\varphi_q - \varphi_{-q}) \simeq q(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\varphi = \boxed{-\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}} = -pE\cos\theta$$

$$\boldsymbol{F} = q[\boldsymbol{E}_q - \boldsymbol{E}_{-q}] \simeq \boxed{q(\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}} = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} \equiv \boxed{-\boldsymbol{\nabla}U}.$$



L'ultimo passaggio assume dipolo $\boldsymbol{p}$ costante e $\boldsymbol{E}$ irrotazionale:

$$0 = \boldsymbol{p}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) = (\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}).$$

Stesso conto in componenti: prendiamo un dipolo lungo y e calcoliamo F_x:

$$F_x = p_y\frac{\partial E_x}{\partial y} = p_y\frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

La formula $\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla}U$ non si applica:
a) quando $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}\neq 0$, generati da campi magnetici variabili; e.g. p_z in $E_z = cx$;
b) se il dipolo $\boldsymbol{p}$ dipende da $\boldsymbol{E}$, perché ci sono altre energie in gioco.

Momento su dipolo in E esterno

Un dipolo è una particella vettoriale: può ruotare. Serve il momento delle forze

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r_q} \times q\boldsymbol{E} + \boldsymbol{r}_{-q} \times (-q\boldsymbol{E}) = q(\boldsymbol{r}_q - \boldsymbol{r}_{-q}) \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E}.$$

U fornisce informazioni sul moto traslatorio e rotatorio: $M = pE\sin\theta \overset{\checkmark}{=} -\dfrac{\partial U}{\partial \theta}$.

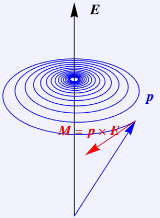
Le molecole di H_2O hanno 'grosso' dipolo

$$p = 6.2\ 10^{-30}\,\mathrm{C}\cdot\mathrm{m} = 0.39\ e\,\text{Å}$$

e sono libere di ruotare. $\boldsymbol{M}$ fa girare $\boldsymbol{p}$ attorno ad un $\boldsymbol{E}$ esterno ($d\boldsymbol{L}/dt = \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L}$). Urti consentono di dissipare energia verso il minimo di U: $\boldsymbol{p}$ allineato ad $\boldsymbol{E}$. Ma di poco:

$$pE \ll k_B T \sim \mathrm{eV}/40 \text{ per } E \ll 6\ 10^8\,\mathrm{V/m} \text{ realistici.}$$

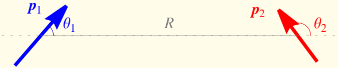
Forno a micro-onde: invertendo $\boldsymbol{E}$ il processo si ripete, riscaldando l'acqua. Ma non il ghiaccio.



Mettendo dipoloni in $\boldsymbol{E}$ si visualizzano le linee di campo, come notò Faraday.

Dipoli: esempi

Due dipoli liberi di ruotare a distanza fissa R tendono ad allinearsi $\rightarrow\rightarrow$ o $\leftarrow\leftarrow$:



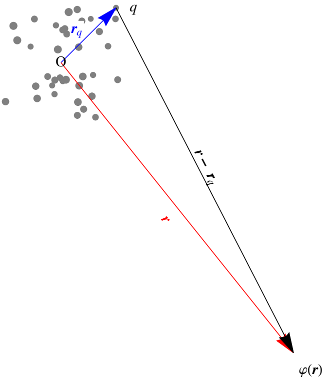
$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 R^3}[\boldsymbol{p}_1 \cdot \boldsymbol{p}_2 - 3(\boldsymbol{p}_1 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})(\boldsymbol{p}_2 \cdot \hat{\boldsymbol{r}})] = \frac{p_1 p_2}{4\pi\epsilon_0 R^3}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos\theta_1\,\cos\theta_2\right]$$

$3 \gg 1$. N dipoli hanno $NU \gg k_B T$ e fanno memorie scrivibili (von Neumann).

Espansione in multipoli

Espansione in multipoli rozza

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\sum_q \frac{q_q}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q|}$$



Espandendo in serie di Taylor per $r_q \ll r$:

$$\boxed{\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{Q}{r} + \sum_{i=1}^{3}\frac{p_i\hat{r}_i}{r^2} + \sum_{i,j}\frac{Q_{ij}\hat{r}_i\hat{r}_j}{2r^3} + \cdots\right]}$$

dove

- $Q = \sum_q q_q$ è il **monopolo** (mucca sferica).
- $p_i = \sum_q q_q r_{qi}$ con $i = \{x, y, z\}$ è **dipolo**.
- $Q_{ij} = \sum_q q_q(3r_{qi}r_{qj} - r_q^2\delta_{ij})$ è **quadrupolo** (analogo del tensore di inerzia): tensore simmetrico a traccia nulla (la traccia è monopolo), quindi matrice 2×2 con 5 elementi, non 6.

Segue un formalismo che automaticamente ripulisce Taylor anche a ordini più alti, dando le rappresentazioni di SO(3) di dimensione 1, 3, 5, 7, 9... Non lo useremo, in Meccanica Quantistica spiegherà la tavola periodica, quindi è utile vederlo ora.

Espansione in multipoli

Espansione generale in coordinate sferiche:

$$\boxed{\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{1}{\epsilon_0}\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{q_{\ell m}}{2\ell+1}\frac{Y_{\ell m}(\theta,\phi)}{r^{\ell+1}}}$$

dove

- $\boxed{q_{\ell m} = \int dV\ r^\ell\, Y^*_{\ell m}(\theta,\phi)\rho(r,\theta,\phi)}$ sono i “momenti di multipolo”.

- $Y_{\ell m}(\theta,\phi)$ sono funzioni speciali dette ‘armoniche sferiche’:
  - $\ell = 0$ è il **monopolo**: $Y_{00} = 1/\sqrt{4\pi}$, scalare sotto rotazioni SO(3).
  - $\ell = 1$ $(m = \{-1, 0, 1\})$ è il **dipolo**: vettore di SO(3), simmetria SO(2),
  $$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \propto \frac{z}{r}, \qquad Y_{11} = -Y^*_{-1\,0} = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta e^{i\phi} \propto \frac{x+iy}{r}.$$
  - $\ell = 2$ $(m = \{0, \pm1, \pm2\})$ è il **quadrupolo**, tensore di SO(3).
  - eccetera: tutte le altre rappresentazioni di SO(3).

(Qui non li useremo. Fatti perché serviranno in Meccanica Quantistica.
Tavola periodica = Coulomb + Meccanica Quantistica + soluzioni con $Y_{\ell m}$).

Espansione in multipoli: derivazione

L'equazione $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ ha la soluzione regolare all'infinito:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}.$$

La serie di Taylor di $1/|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ a grandi distanze $r \gg r'$ è

$$\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 - r'^2 - 2rr'\cos\gamma}} = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{r'^{\ell}}{r^{\ell+1}}P_\ell(\cos\gamma)$$

dove P_ℓ sono polinomi di Legendre [~~QED~~] che dipendono dall'angolo fra $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$

$$\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

e possono essere scritti in termini di armoniche sferiche orto-normali [~~QED~~]

$$P_\ell(\cos\gamma) = \frac{4\pi}{2\ell+1}\sum_{m=-\ell}^{\ell} Y^*_{\ell m}(\theta',\phi')Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

dando l'espressione esplicita per i coefficienti di multipolo $q_{\ell m}$.

Espansione in multipoli: derivazione

Conviene ripartire dall'equazione $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ per sorgente $\rho \neq 0$ solo localmente. Si risolve $\nabla^2\varphi = 0$ in coordinate polari nella zona dove $\rho = 0$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\varphi) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial^2\phi} = 0.$$

Cerchiamo una soluzione separabile:

$$\varphi(r,\theta,\phi) = \frac{U(r)}{r}P(\theta)Q(\phi).$$

Sostituendo e moltiplicando per $r^2\sin^2\theta/UPQ$ si ottiene:

$$r^2\sin^2\theta\left[\frac{1}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right] + \frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = 0.$$

L'ultimo termine deve essere costante perché è l'unico a dipendere da ϕ

$$\frac{1}{Q}\frac{d^2Q}{d\phi^2} = -m^2 \qquad \Rightarrow \qquad Q = e^{\pm im\phi}$$

Q deve avere periodicità 2π, quindi m deve essere intero.

Equazione in r

Il resto dell'equazione

$$\sin^2\theta \left[\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)\right] = m^2$$

si separa introducendo una costante

$$\frac{r^2}{U}\frac{d^2U}{dr^2} = \ell(\ell+1)$$

scritta $\ell(\ell+1)$ in maniera da ottenere potenze semplici di r nella soluzione

$$U = Ar^{\ell+1} + Br^{-\ell}.$$

Equazione in θ

L'equazione per $P(\theta)$ è lineare

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP}{d\theta}\right)+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{\sin^2\theta}\right]P=0.$$

Riscritta in termini di $c=\cos\theta$, è l'"equazione di Legendre generalizzata":

$$\frac{d}{dc}\left[(1-c^2)\frac{dP}{dc}\right]+\left[\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-c^2}\right]P=0.$$

Per $m=0$ ha soluzioni P_ℓ periodiche in θ solo per $\boxed{\ell \text{ intero positivo}}$:

$$P_0=1,\qquad P_1=c,\qquad P_2=\frac{1}{2}(3c^2-1),\qquad P_3=\frac{1}{2}(5c^3-3c),$$

$$P_\ell=\frac{1}{2^\ell\ell!}\frac{d^\ell}{dc^\ell}(c^2-1)^\ell$$

che soddisfano alla condizione di orto-normalità

$$\int_{-1}^{1}dc\,P_{\ell'}(c)P_\ell(c)=\frac{2\delta_{\ell\ell'}}{2\ell+1}$$

Per $m\neq 0$ si dimostra che esistono soluzioni con $-\ell\leq m\leq\ell$ e $\ell>0$:

$$P_{\ell m}=(-1)^m(1-c^2)^{m/2}\frac{d^m}{dc^m}P_\ell(c)$$

Armoniche sferiche

Combinando le soluzioni precedenti si definiscono le armoniche sferiche

$$Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,P_{\ell m}(\cos\theta)e^{im\phi} =$$

Quindi $\ell = 0$ è lo scalare (monopolo), $\ell = 1$ è il vettore a 3 componenti (dipolo), e gli altri sono altre rappresentazioni di SO(3). Soddisfano alla condizione di orto-normalità integrate sulla superficie di una sfera:

$$\int d\Omega\; Y^*_{\ell' m'}(\theta,\phi)Y_{\ell m}(\theta,\phi) = \delta_{\ell\ell'}\delta_{mm'} \qquad d\Omega = d\phi\,\sin\theta\,d\theta.$$

Quindi la più generale soluzione di $\nabla^2\varphi = 0$ ha la forma

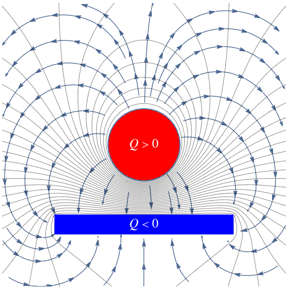
$$\varphi(r,\theta,\phi) \propto \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\frac{1}{2\ell+1}\left(A_{\ell m}r^{\ell} + \frac{q_{\ell m}}{r^{\ell+1}}\right)Y_{\ell m}(\theta,\phi).$$

dove $A_{\ell m}$ e $q_{\ell m}$ sono costanti arbitrarie. Ci interessano soluzioni che non esplodono ad $r = \infty$ e quindi $A_{\ell m} = 0$.

Conduttori

Conduttori

Sono materiali con tanti elettroni (tipicamente circa uno per molecola) 'quasi' liberi di muoversi al loro interno, dentro una buca di potenziale $\sim$ eV. Carichiamo un conduttore a $Q \neq 0$, o lo mettiamo a φ dato, o applichiamo un $\boldsymbol{E}_{\text{ext}}$. Nasce un $\boldsymbol{E}$ interno: fa muovere gli elettroni che grazie al 'quasi' dissipano energia, fino a raggiungere l'unico stato stabile possibile:



$$\boxed{\boldsymbol{E} = 0 \text{ nel conduttore e } \boldsymbol{E}_{\parallel} = 0 \text{ sulla superficie}}$$

Quindi ogni conduttore è a potenziale φ costante.

Gauss o la I eq. di Maxwell implicano che la densità di carica interna vale

$$\boxed{\rho/\epsilon_0 = \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0}.$$

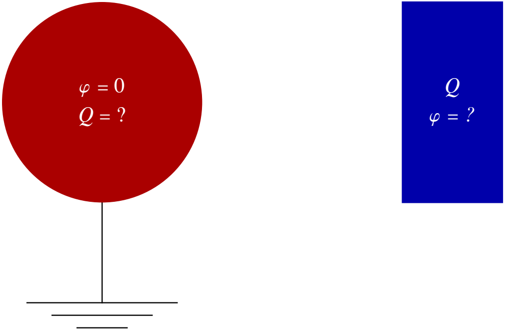
La densità superficiale σ è legata ad $E_{\perp} = \sigma/\epsilon_0$. Pressione superficiale:

$$d\boldsymbol{F}/dS = \sigma(\boldsymbol{E}_{\text{fuori}} + \underbrace{\boldsymbol{E}_{\text{dentro}}}_{0})/2 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p = \sigma E_{\perp}/2}.$$

Unicità della soluzione

Problema fisico:

- "Conduttore a terra" $\equiv$ connesso da filo con "terra" ∞: ha potenziale $\varphi = \varphi_\infty = 0$ e carica Q da determinare. Conduttore infinito: è una terra.
- "Conduttore isolato" ha carica Q data e potenziale φ da determinare.



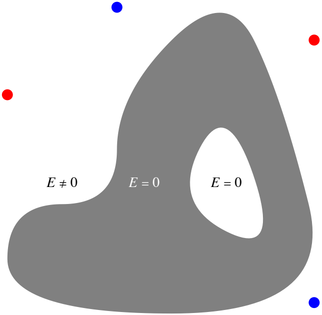
Problema matematico: risolvere l'eq. $\nabla^2\varphi = 0$ con condizioni al bordo

- su φ ('Dirichlet', ad esempio conduttori a potenziali dati), o
- su $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$ ('Neumann', ad esempio conduttori isolati a carica data), o
- miste. Ma non entrambe sulla stessa superficie ('Cauchy', no soluzione).

Date due soluzioni φ_1 e φ_2, $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ risolve con condizioni al bordo zero e

Esempi pratici

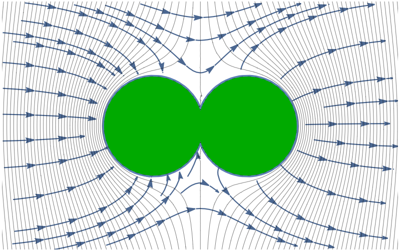
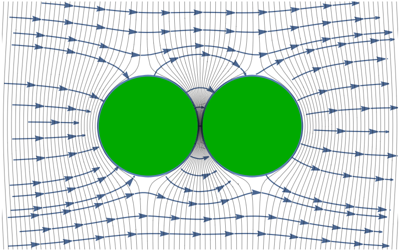
Gabbia di Faraday: regioni di spazio separate da conduttori sono schermate. Consente di misurare che l'esponente nella forza di Coulomb è 2 entro 10^{-15}.



Effetto delle punte: Cercano di allontanarsi il più possibile le cariche si concentrano sulle punte dei conduttori. La sfera piccola schematizza una punta e consente di fare un calcolo esplicito. Si determinano le cariche q e Q sulle due sfere imponendo che i potenziali sulle superfici delle due sfere siano uguali: $Q/R = q/r$. Quindi il campo elettrico è grosso attorno alla sfera piccola:

Scariche nei gas

Effetto delle punte: acino d'uva in micro-onde. Sfera al plasma. Che succede?

Se gli acini sono vicini ma non si toccano, $\boldsymbol{E}$ è intenso nella zona intermedia.

Nei gas poco densi la distanza fra le molecole è $d \sim n^{-1/3} \gg$ Å. Ad esempio l'aria ha densità $\sim$1000 volte minore dell'acqua, quindi $d \sim 10$Å. Un elettrone ionizzato ed accelerato da $E_{\rm ext}$ per un tratto d urta un altro atomo e lo ionizza se $E_{\rm ext} d$ è maggiore del potenziale degli atomi $\varphi_{\rm atomo} \sim$ V:

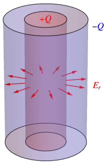
$$E_{\rm ext} \gtrsim \frac{\varphi_{\rm atomo}}{d} \sim E_{\rm atomo} \times \frac{\text{Å}}{d} \sim 10^8 \,\frac{\rm V}{\rm m} \times 10^{-2} \sim \frac{\rm MV}{\rm m}$$

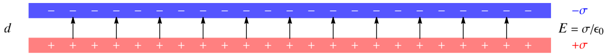
per aria asciutta. Reazione a catena rende l'aria conduttrice: parte scarica.

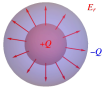
Mettendo punte su di parafulmini si facilita ad una nuvola carica elettricamente

Induzione completa: condensatore

Si dice "condensatore" (o "capacità") un sistema di due conduttori a differenza di potenziale V in cui le linee di campo vanno solo da uno all'altro. Servono ad immagazzinare carica ed energia senza disturbare con campi elettrici. Devono avere cariche $+Q$ e $-Q$ ed essere uno interno all'altro. Si definisce la **capacità** C tale che $\boxed{Q = CV}$.







1d) Due piani (piatti paralleli di superficie S a distanza $d \ll \sqrt{S}$ per trascurare effetti ai bordi): $\sigma = Q/S$, $E = \sigma/\epsilon_0$, $V = dE = Q \cdot d/S\epsilon_0$: $\boxed{C = \epsilon_0 S/d}$.

2d) Due cilindri: $\lambda = \dfrac{Q}{h}$, $E_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r}$, $V = \dfrac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \dfrac{r_2}{r_1}$: $\boxed{C = \dfrac{2\pi\epsilon_0 h}{\ln(r_2/r_1)}}$.

3d) Due sfere: $E_r = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$, $V = \dfrac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\dfrac{1}{r_1} - \dfrac{1}{r_2}\right)$: $\boxed{C = \dfrac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1}}$.

Nel limite $r_2 \to \infty$ si riduce ad una sfera isolata: $C = 4\pi\epsilon_0 r$.

C è misurata in Coulomb/Volt = Farad, ma vale $C \approx \epsilon_0 S/d \sim \epsilon_0 \times$ (dimensione dell'oggetto) $\approx 10^{-11}$ F per $S/d \approx$ m: sono più pratiche unità μF, nF, pF.

Energia ed induzione parziale

Energia in un condensatore:

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2} Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}(Q\varphi_1 - Q\varphi_2) = \frac{1}{2}QV \overset{\text{memo}}{=} \boxed{\frac{Q^2}{2C}} = \frac{CV^2}{2}.$$

Fattore 1/2 ri-derivato in maniera intuitiva: aggiungere dQ costa lavoro $d\mathscr{L} = V\,dQ = Q\,dQ/C$. Accumulare carica da 0 a Q necessita $\mathscr{L} = \int_0^Q d\mathscr{L} = Q^2/2C$.

Esempio: $C \sim 100\,\mu\mathrm{F}$ caricata a $V \sim 250\,\mathrm{V}$ ha $U = CV^2/2 \approx 3\,\mathrm{J}$: usata per flash.

Induzione parziale. Un conduttore da solo ha $\varphi_1 = P_{11}Q_1$; le linee di $\boldsymbol{E}$ vanno all'infinito. Con due conduttori, le linee possono andare in parte all'infinito. Per più conduttori con cariche Q_i a potenziali φ_i la linearità delle eq. di Maxwell implica $\boxed{\varphi_i = \sum_j P_{ij}Q_j}$ quindi $Q_i = \sum_j C_{ij}\varphi_j$ con $P_{ij} = (C^{-1})_{ij}$. Per 2:

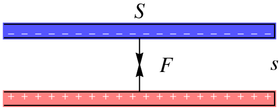
$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\varphi_1 - \varphi_2} = \frac{Q}{(P_{11} - P_{12})Q - (P_{21} - P_{22})Q} = \frac{1}{P_{11} + P_{22} - 2P_{12}}.$$

L'energia vale $U = \frac{1}{2}\sum_i Q_i\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{ij} C_{ij}\varphi_i\varphi_j = \frac{1}{2}\sum_{ij} P_{ij}Q_iQ_j$.

$C_{ij} = C_{ji}$: si dimostra calcolando U mettendo prima φ_1 ($U_1 = \frac{1}{2}C_{11}\varphi_1^2$) e poi φ_2 (extra $\Delta U = \frac{1}{2}C_{22}\varphi_2^2 + \Delta Q_1\varphi_1$ con $\Delta Q_1 = C_{12}\varphi_2$), e il viceversa.

Forze su condensatori

Esempio: i piatti di un condensatore piano a distanza s risentono di una forza che tende a ridurre s in quanto cariche opposte si attirano:



$$F = -pS = -\frac{E\sigma}{2}S = -\frac{\epsilon_0}{2}E^2 S = -\frac{\epsilon_0}{2}\frac{V^2}{s^2}S.$$

In generale, la forza F su condensatore (a Q costante o a V costante) vale

$$\boxed{F = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{ds}}$$

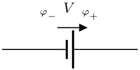
Segno: F cerca di diminuire U, cioè aumentare C. Verifica su condensatore piano: $C = \epsilon_0 S/s$, quindi $F = -SV^2\epsilon_0/2s^2$, attrattiva. Altri casi non ovvi.

Si dimostra usando la conservazione dell'energia meccanica più elettrostatica variando la geometria (ad es. la distanza s fra i piatti). Visto che F è la stessa consideriamo Q costante (altrimenti, a V costante, la batteria complica l'argomento): la differenza di potenziale $V(s)$ dipende dalla geometria. Quindi

$$F = -\frac{dU}{ds} = -\frac{d}{ds}\frac{Q^2}{2C(s)} = -\frac{Q^2}{2}\frac{d}{ds}\frac{1}{C} = \frac{Q^2}{2C^2}\frac{dC}{ds} = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{ds}.$$

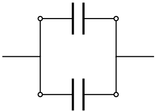
Circuiti

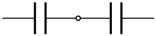
Sono sistemi semplici calcolabili approssimando le eq. di Maxwell con $+ - \times \div$.
Filo conduttore: connette oggetti mettendoli allo stesso potenziale.

Batteria: differenza di potenziale $V = \varphi_+ - \varphi_-$ disegnata come 

.
La **capacità** è disegnata come ⊣|⊢. Due capacità si combinano come:

- Capacità in parallelo: $\boxed{C = \sum C_i}$ in quanto $Q_i = C_i V$ e $Q = \sum Q_i$.
  Infatti per piatti piani $C_{1+2} = \epsilon_0 (S_1 + S_2)/d$.



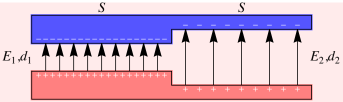


- Capacità in serie: $\boxed{1/C = \sum 1/C_i}$ in quanto $V_i = Q/C_i$ e $V = \sum V_i$.
  Infatti per piatti piani $C = \epsilon_0 S/(d_1 + d_2)$.

Esempi

Vedremo che i circuiti consentono di calcolare fisica non ovvia. Per iniziare:

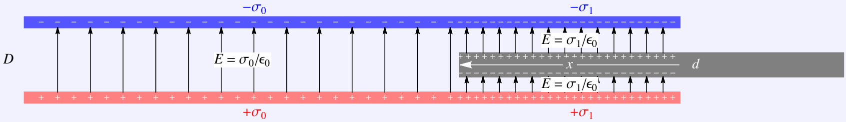
$$\begin{aligned} E_1 d_1 &= E_2 d_2 = V, \\ C &= Q/V = S(\sigma_1 + \sigma_2)/V \\ &= \epsilon_0 S(E_1 + E_2)/V \\ &= \epsilon_0 S(V/d_1 + V/d_2)/V \end{aligned}$$



Oppure:

$$\begin{aligned} C &= C_1 + C_2 = \\ &= \epsilon_0 S(1/d_1 + 1/d_2) \end{aligned}$$

Lo stesso è ottenuto inserendo un conduttore in un condensatore:



$$C = C_0 + (C_1^{\text{sopra}} \text{ in serie a } C_1^{\text{sotto}}) = \frac{\epsilon_0 L^2}{D}\left[1 + \frac{xd}{L(D-d)}\right].$$

Quindi una forza (generata da effetti al bordo!) attira il conduttore dentro:

$$F_x = \frac{V^2}{2}\frac{dC}{dx} = \frac{V^2}{2}\frac{dL\epsilon_0}{D(D-d)}.$$

Dielettrici

Alcuni = sono + = di altri =

Finora equazioni esatte. Ora trattazione approssimata di effetti di materia.

Si misura che $F_{\rm C}$ nella materia è come nel vuoto ma con $\epsilon_0 \to \epsilon \equiv \epsilon_r \epsilon_0$. E.g. $\epsilon_r \sim 80$ per l'acqua: la capacità di un condensatore riempito di acqua aumenta.

Questo fenomeno è dovuto al modo in cui la materia, neutra ma composta di elettroni e protoni carichi, reagisce ad un campo elettrico esterno $\boldsymbol{E}_{\rm ext}$: ogni molecola diventa un dipolo elettrico $\boldsymbol{p}$, le molecole polarizzate generano un $\boldsymbol{E}_{\rm pol}$ che si oppone a $\boldsymbol{E}_{\rm ext}$ dando $\boldsymbol{E}_{\rm tot} = \boldsymbol{E}_{\rm ext} + \boldsymbol{E}_{\rm pol} < \boldsymbol{E}_{\rm ext}$ i.e. come se $\epsilon > \epsilon_0$.

$$\boldsymbol{E}_{\rm ext} \quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \delta\boldsymbol{E} \quad\Rightarrow\quad \delta\boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \delta\delta\boldsymbol{E} \quad\Rightarrow\quad \delta\delta\boldsymbol{p} \quad\Rightarrow\quad \delta\delta\delta\boldsymbol{E}\ldots$$

Il dipolo elettrico di una molecola è circa proporzionale a $\boldsymbol{E}_{\rm tot}$ (non $\boldsymbol{E}_{\rm ext}$):

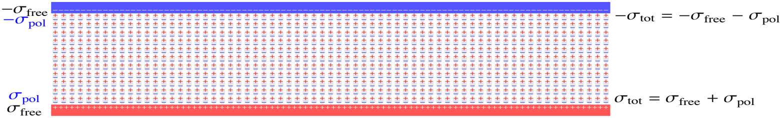
$$\boxed{\boldsymbol{p} \approx \alpha\epsilon_0 \boldsymbol{E}_{\rm tot}}$$

α è detta **costante di polarizzabilità**. Se n è la densità dei dipoli, troveremo

$$\boxed{\epsilon = \epsilon_0(1 + n\alpha)}$$

Dielettrico con geometria semplice

Piatti piani con densità n di dipoli. Dividiamo le cariche in tot = free + pol.



File di dipoli producono una densità superficiale di carica 'di polarizzazione'

$$\sigma_{\text{pol}} = \mp np \qquad \text{opposta a } \sigma_{\text{free}}. \text{ Dimostrazioni:}$$

1) $\pm\sigma_{\text{pol}}$ produce dipolo totale $P_{\text{tot}} = S\sigma_{\text{pol}}D$, uguale a $P_{\text{tot}} = Np = Vnp$.
2) Separando + da −: volumi con $\rho = \pm en$ a distanza d danno $\sigma_{\text{pol}} = \rho d$.

Il campo elettrico totale è prodotto da $\sigma_{\text{tot}} = \sigma_{\text{free}} + \sigma_{\text{pol}}$. Lo scriviamo come se fosse prodotto dalle sole cariche libere, definendo una "costante dielettrica del materiale" ϵ

$$E_{\text{tot}} = \frac{\sigma_{\text{tot}}}{\epsilon_0} \equiv \frac{\sigma_{\text{free}}}{\epsilon}$$

che vale quindi

$$\epsilon \equiv \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{free}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \frac{\sigma_{\text{tot}} - \sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}} = \epsilon_0 \left(1 - \frac{\sigma_{\text{pol}}}{\sigma_{\text{tot}}}\right) = \epsilon_0(1 + n\alpha)$$

avendo usato $\sigma_{\text{tot}} = \epsilon_0 E_{\text{tot}}$ e $\sigma_{\text{pol}} = -np = -n\alpha\epsilon_0 E_{\text{tot}}$.

Materiali non polari: allungamento

Nei materiali non polari (costituiti di molecole prive di dipolo proprio, come l'idrogeno), p nasce perché ciascuna molecola viene 'stiracchiata' da $\boldsymbol{E}$.

Stima della polarizzabiità: $\boxed{\alpha \approx a^3}$ dove a è la dimensione della molecola. Segue per motivi dimensionali $p \sim \epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}$, ma vediamolo in dettaglio:

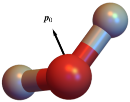
- Atomo di Thomson. $\boldsymbol{E}_{\text{tot}} = \boldsymbol{E}_{\text{ext}} + e\boldsymbol{r}/4\pi\epsilon_0 a_0^3 \Rightarrow \boldsymbol{p} = e\boldsymbol{r} = 4\pi\epsilon_0 a^3 \boldsymbol{E}_{\text{ext}}$.
- Atomo di Rutherford: per orbite circolari nel piano xy con E_{ext} lungo z

$$F_z = -e\left(E_{\text{ext}} + \frac{e}{4\pi\epsilon_0}\frac{z}{a^3}\right) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad p = -ez = 4\pi\epsilon_0 a^3 E_{\text{ext}}.$$

Quindi la correzione ad ϵ_0 è di ordine uno nei liquidi e nei solidi dove $n \sim 1/a^3$. Un gas a temperatura/pressione ambiente ha $n \sim 10^{-(2-3)}/a^3$: $\epsilon_{\text{gas}} \sim 1.003\epsilon_0$.

Materiali polari: allineamento

Alcune molecole hanno un dipolo proprio $p_0 \sim ea$ permanente.
Ad esempio l'acqua $H_2^+O^-$ ha $p_0 \approx 0.39\ e\,\text{Å}$.



- L'energia $U = -\boldsymbol{p}_0 \cdot \boldsymbol{E}_{\rm ext}$ cerca di allineare $\boldsymbol{p}_0$ ad $\boldsymbol{E}_{\rm ext}$.
- L'agitazione termica cerca di orientare $\boldsymbol{p}_0$ a caso.

Stima della polarizzabiità: nuovamente $\boxed{\alpha \approx a^3}$.
Meccanica statistica: la frazione di dipoli allineati è $\sim U/k_B T$. Quindi

$$p \sim p_0 \frac{p_0 E_{\rm ext}}{k_B T} \qquad \text{cioè} \qquad \alpha \sim \frac{e^2 a^2}{k_B T \epsilon_0}.$$

La cte di Boltzmann $k_B = 1.4\ 10^{-23}$ J/K converte [energia] $\leftrightarrow$ [temperatura].
A temperatura ambiente 'antropica' $k_B T \sim E_B \sim e^2/\epsilon_0 a$ si ha ancora $\alpha \sim a^3$.

In generale, i due effetti si sommano: $\alpha = \alpha_{\rm allineamento} + \alpha_{\rm allungamento}$.

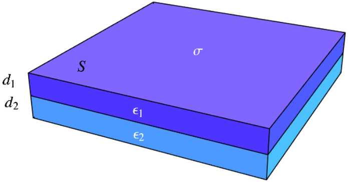
Capacità con dielettrico

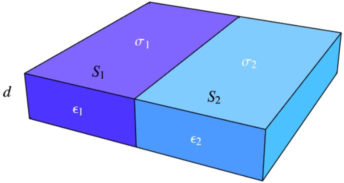
Ha interesse definire $C \equiv Q/V$ con $Q = Q_{\text{free}}$. Per una capacità piana $\boxed{C = \epsilon S/d}$.

C aumenta in un dielettrico perché E diminuisce. $U = CV^2/2 = \int dV\,\epsilon E^2/2$.

Nel limite $\epsilon \to \infty$ un dielettrico ha $E \to 0$: si comporta come un conduttore.

A volte si può ragionare come capacità in serie e parallelo: con due dielettrici





$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{d_1}{\epsilon_1 S} + \frac{d_2}{\epsilon_1 S} \qquad C = C_1 + C_2 = \frac{\epsilon_1 S_1}{d} + \frac{\epsilon_2 S_2}{d}$$

In generale occorre il trattamento generale...

Dielettrici: trattamento generale

Consideriamo un dielettrico contenente dipoli $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})$ con densità in numero $n(\boldsymbol{r})$. Definiamo il campo vettoriale **densità di polarizzazione** $\boxed{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) \equiv n(\boldsymbol{r})\boldsymbol{p}(\boldsymbol{r})}$.

- Sulla superficie di un dielettrico c'è $\boxed{\sigma_{\text{pol}} = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n}}$.
- Nel volume c'è una carica di polarizzazione $\boxed{\rho_{\text{pol}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}}$.

Considerando un volume immaginario, la carica dentro è opposta a quella che ha attraversato la superficie, essendo solo cariche $-+$ che si spostano:

$$\int dV\, \rho_{\text{pol}} = -\int dS\, \sigma_{\text{pol}} = -\int dS\; \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{n} = -\int dV\; \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}.$$

Ad esempio per un cubetto $dV = dx\, dy\, dz$, considerando solo facce $dS = dy\, dz$:

$$\rho_{\text{pol}} = \frac{dq_{\text{pol}}}{dV} = -\frac{(\sigma_{\text{destra}} + \sigma_{\text{sinistra}})dS}{dV} = -\frac{P_x(x+dx) - P_x(x)}{dx} = -\frac{\partial P_x}{\partial x}.$$

Dielettrici: equazioni generali

Inserendo $\rho_{\text{pol}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}$ nella 1a equazione di Maxwell $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = (\rho_{\text{pol}} + \rho_{\text{free}})/\epsilon_0$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left[\boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{P}}{\epsilon_0}\right] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}.$$

Usando l'approssimazione $\boldsymbol{p} = \alpha\epsilon_0\boldsymbol{E}$ si ha $\boldsymbol{P} \equiv n\boldsymbol{p} = \chi\epsilon_0\boldsymbol{E}$ dove $\chi = n\alpha$ è la 'suscettività elettrica', adimensionale e di ordine uno per solidi e liquidi. Quindi

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot [\boldsymbol{E}(1+\chi)] = \frac{\rho_{\text{free}}}{\epsilon_0}.$$

Usualmente viene scritta come se solo ρ_{free} fosse sorgente

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\text{free}} \qquad \text{definendo} \qquad \boldsymbol{D} \equiv \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} \equiv \epsilon\boldsymbol{E}, \qquad \epsilon = \epsilon_0(1+\chi)}$$

La 2a equazione di Maxwell rimane $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$: si hanno quindi due campi $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{D}$.

Per un unico dielettrico uniforme ϵ non dipende da $\boldsymbol{r}$, e si riduce a

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho_{\text{free}}/\epsilon \qquad \text{se } \epsilon \text{ è costante.}$$

Cioè: un solo dielettrico è come se $\epsilon_0 \to \epsilon$. Per $\epsilon \to \infty$ è come un conduttore.

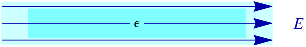
Dielettrici uniformi

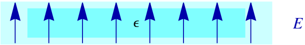
In molti casi pratici ϵ è costante entro ciascun materiale: si risolve in ciascun materiale imponendo condizioni di raccordo sui bordi fra diversi dielettrici

$$\boxed{\Delta E_{\parallel} = 0, \qquad \Delta D_{\perp} = \sigma_{\rm free}}$$

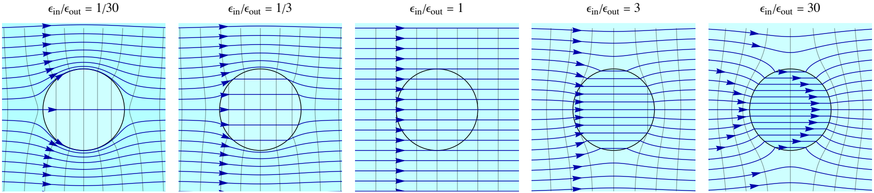
La prima condizione segue da $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = 0$, la seconda da $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{D} = \rho_{\rm free}$.

- Dielettrico lungo e sottile: domina $\Delta E_{\parallel} = 0$, quindi $E_{\rm in} = E_{\rm ext}$.
- Dielettrico corto e largo: domina, $\Delta D_{\perp} = 0$, quindi $\epsilon_{\rm in} E_{\rm in} = \epsilon_{\rm out} E_{\rm out}$.





- Dielettrico sferico: risolto da $\boldsymbol{P} = \chi\epsilon_0 \boldsymbol{E} = \chi\epsilon_0 \boldsymbol{E}_{\rm ext}/(1+\chi/3)$ cioè $\sigma_{\rm pol} = P\cos\theta$



Carica davanti a semi-spazio dielettrico: risolvibile con 2 cariche immagini.

Energia di un dielettrico

Le cariche libere $Q = CV$ in un condensatore con $C = \epsilon S/d > C_0$ hanno energia $U = CV^2/2 > U_0$. Ok: servono più cariche $Q > Q_0$ per raggiungere V. Suggerisce

$$\boxed{u = \frac{\epsilon}{2}E^2 = \frac{1}{2}\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}} > u_0.$$

Ha senso? A livello fondamentale la densità di energia è $\epsilon_0 E^2/2$. Ragioniamo...

Le cariche sono divise in $\rho = \rho_{\text{free}} + \rho_{\text{pol}}$. Rimane vero che $u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} = \epsilon_0 E^2/2$. Ma l'energia totale include u_{spring}, l'energia necessaria per polarizzare i dipoli (che a sua volta è microscopicamente di tipo elettrico):

$$u = u_{\text{free}} + u_{\text{pol}} + u_{\text{spring}} = u_{\text{free}}$$

in quanto si dimostra che $u_{\text{spring}} = -u_{\text{pol}}$: un dielettrico riduce E immagazzinando meccanicamente la sua energia. Quindi l'energia di un dielettrico lineare finito vale

$$U = U_{\text{free}} = \frac{1}{2}\int \rho_{\text{free}}\varphi\, dV = \frac{1}{2}\int (\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D})\varphi\, dV \to \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot(-\boldsymbol{\nabla}\varphi)\, dV = \frac{1}{2}\int \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}\, dV.$$

Correnti e conduzione

Corrente

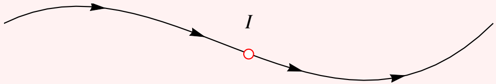
Passiamo dall'elettrostatica a studiare cariche in moto. Se $\nabla^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$ si ha trasmissione istantanea di segnali: sposto q e $\boldsymbol{E}$ varia istantaneamente ovunque,

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) \stackrel{?}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

Iniziamo a capire il moto 'lento', questioni concettuali si chiariranno dopo.

Corrente elettrica $I \equiv dQ/dt$

dove dQ è la carica che passa per un dato punto in un tempo dt. Come contare il passaggio di frontalieri. Direzione non ancora specificata. Per ora I potrebbe dipendere dal punto. Si misura in Coulomb/sec $\equiv$ Ampere.



Densità di corrente elettrica $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})$

Definita analogamente alla corrente di un fiume $I = \Phi_J = \int dS\, \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}$. Per ora segno arbitrario. Per convenzione la direzione di $\boldsymbol{J}$ è la direzione del moto

Conservazione della carica

Conservazione globale

$Q_{\text{oggi}} = Q_{\text{ieri}}$ dove $Q \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} dV\, \rho$. La perdi di qua, la ritrovi di là.

Conservazione locale

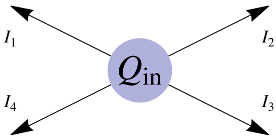
La carica in un volume generico varia solo quando esce o entra.

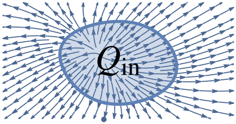
Conservazione locale osservata in fisica della materia a basse energie: Faraday faceva trabiccoli con circuiti complicati racchiusi da un conduttore, con cui misurava che la carica totale rimaneva costante. Interpretazione: ogni particella ha la sua carica ed il numero di particelle si conserva.

Conservazione locale osservata anche ad alte energie in cui le particelle cambiano, ma ogni processo conserva la carica (ad esempio $n \to pe\bar{\nu}$, $e^- e^+ \to \gamma\gamma$). L'elettrone è stabile perché è la particella carica più leggera.

Conservazione locale della carica

In un circuito 'conservazione della carica' significa I costante in ogni filo, e sui nodi $\boxed{\dot{Q}_{\rm in} = -\sum I_i}$, con $Q \neq 0$ solo in un condensatore, su cui si accumula Q.





In un volume generico significa $\boxed{\dot{Q}_{\rm in} = -\Phi_J}$ (superficie chiusa ha segno standard: normale uscente, $\Phi_J > 0$ se la carica esce). Il teorema della divergenza implica la conservazione della carica in forma differenziale:

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0} \qquad \text{(equazione relativistica).}$$

Contro-intuitivo: si possono avere correnti anche se $\dot{\rho} = 0$: ad esempio una J costante, tipo fiume. Anche se $\rho = 0$: e.g. circuito senza capacità.

In un dielettrico con $\boldsymbol{P}(t)$, $\rho_{\rm pol} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{P}$ implica $\boldsymbol{J}_{\rm pol} = \partial \boldsymbol{P}/\partial t$.

Legge di Ohm e resistenza

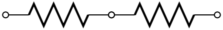
Ohm nel 1826 osservò la seguente legge approssimata di fisica dei materiali:

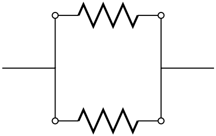
$$\boxed{I = \frac{V}{R}, \qquad R = \rho\frac{L}{S} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{J} = \sigma \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{E}}{\rho}}$$

ρ (**resistività**) e $\sigma = 1/\rho$ (**conducibilità**) dipendono dal materiale e da T.
La **resistenza** ha dimensioni $[R] = \mathrm{V/A} \equiv \Omega = \mathrm{Ohm}$, quindi $[\rho] = \Omega \cdot \mathrm{m}$.

Le resistenze, simbolizzate nei circuiti come , si combinano come tubi:

- Resistenze in serie: $V_1 = R_1 I$ e $V_2 = R_2 I$. Quindi $V_1 + V_2 = (R_1 + R_2)I$, in accordo con la geometria $L = L_1 + L_2$.

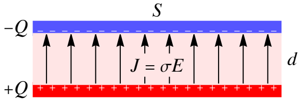




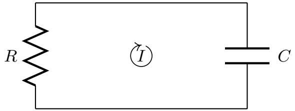
- Resistenze in parallelo: $V = R_1 I_1 = R_2 I_2 \equiv R(I_1 + I_2) = R(1/R_1 + 1/R_2)V$ da cui $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$, in accordo con la geometria $S = S_1 + S_2$.

Correnti nei materiali

Condensatore con dielettrico conduttore: $Q(t) = Q(0)e^{-t/\tau}$, $\tau = \epsilon/\sigma = RC$:



$\Leftrightarrow$



$$\dot{Q} = -SJ = -S\sigma E = -\frac{\sigma}{\epsilon}Q \qquad \Leftrightarrow \qquad R\dot{Q} + Q/C = 0$$

Si osserva che diversi materiali hanno diversissimi valori di ρ (a differenza della polarizzabilità $\alpha \sim a^3$), e per questo vengono divisi in conduttori ed isolanti

materiale	ρ	$\tau = \epsilon_0 \rho$
rame (un tipico conduttore)	$1.7\ 10^{-8}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$	10^{-18} sec
vetro (un tipico isolante)	$10^{10-14}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$	sec–day
silicio (un tipico semi-conduttore)	$10^{3}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$	10^{-7} sec
‘terreno’	$10^{2}\ \Omega \cdot \mathrm{m}$	10^{-8} sec .

Come mai? Da dove viene la legge di Ohm? Esprimiamo la conduzione in termini del moto delle particelle. In molti materiali la conduzione è dominata da elettroni di carica q_e, massa $m_e \ll m_p$, densità n_e, numero $N_e = n_e V$, velocità $\boldsymbol{v}_e$. In un filo di lunghezza L passa $\Delta Q = N_e q_e$ in $\Delta t = L/v_e$, quindi

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{N_e q_e v_e}{L} \qquad \Rightarrow \qquad J = \frac{I}{S} = n_e q_e v_e .$$

Velocità caotica vs velocità di deriva

In gas e liquidi conducono anche ioni: sommando su tutti i tipi di particelle i

$$\boxed{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}) = \sum_i n_i(\boldsymbol{r}) q_i \boldsymbol{v}_i(\boldsymbol{r})}$$

Esempio: $N \sim 6\ 10^{23}$ elettroni in un filo di lunghezza $L \sim 10\,\mathrm{m}$ a velocità $v_e \sim 10^{-4}\,\mathrm{m/s}$ producono una grossa corrente $I = -Nev/L \sim$ Ampere.
Lento! Perché le lampadine si accendono istantaneamente?

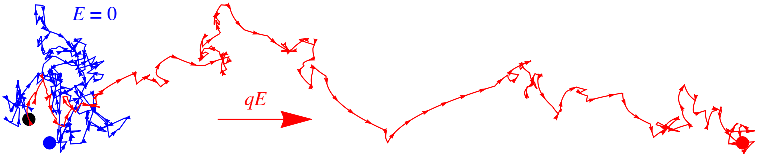
Come aprire un rubinetto: anche qui le particelle si muovono lentamente, ma un'onda di pressione che si propaga alla velocità del suono le fa partire in blocco.

In entrambi i casi la velocità degli elettroni è data da $m_e v^2/2 \sim k_B T$. A temperatura ambiente $k_B T \approx \mathrm{eV}/40$ significa $v_e \approx 10^5\,\mathrm{m/s}$ ovvero $v_e/c \sim 10^{-3}$, simile alla velocità degli elettroni negli atomi in quanto $k_B T \sim E_B$.

Quindi le particelle vanno veloci, ma in media non vanno da nessuna parte: $J_{\text{elettrica}} = J_{\text{acqua}} = 0$. La corrente nasce quando gli elettroni, oltre alla **velocità caotica**, hanno una *piccola* velocità media chiamata **velocità di deriva**.

Legge di Ohm dal modello di Drude

Un E esterno accelera le cariche: $ma = qE$. In che modo $F = ma$ diventa $v \propto F$? Artificialmente aggiungendo attrito $ma = qE - \gamma v$ si ha $v = qE/\gamma$. Fisicamente, assumiamo che urtino in media ogni τ, e che dopo ogni urto ripartano con velocità termica random a media zero: $v_{\rm deriva} = v = qE\tau/m$, come se $\gamma = m/\tau$.



Per elettroni liberi con densità n_e, usando $J = n_e e v_e \equiv E/\rho$ la resistività vale:

$$\boxed{\rho = m_e/e^2 n_e \tau}$$

Assumendo distanza fra gli atomi $d \sim$ Å si ha $\tau \sim d/v_{\rm termica} \sim 10^{-14\div 15}\,{\rm sec} \propto 1/\sqrt{T}$ che non dipende da $\boldsymbol{E}$ in quanto $v_{\rm deriva} \ll v_{\rm termica}$.
Conferme sperimentali: (Se $eEd >$ eV, cioè $E \gtrsim 10^{10}\,{\rm V/m}$ gli e acquistano cosí tanta energia da ionizzare gli atomi. Nelle sostanze rarefatte come i gas dove $d \sim 100$ Å basta un E minore, e.g. $E < 3\ 10^6\ {\rm V/m}$ nell'aria). (Moto Browniano).

Quindi, come mai ρ varia tanto?

Il colpevole è la densità di elettroni *liberi* $n_e \propto e^{-E_B/k_\mathrm{B}T}$, che dipende dal rapporto tra l'energia termica $k_\mathrm{B}T$ e l'energia di ionizzazione $E_B \sim eQ/4\pi\epsilon_0 a$.

- **Conduttori**. Se $E_B \ll k_BT$ ogni atomo ha $\sim$ un elettrone libero, $n \sim 1/\mathring{\mathrm{A}}^3$, quindi $\rho = m_e/e^2 n_e \tau \sim 10^{-8}\,\mathrm{Ohm}\cdot\mathrm{m}$: il valore tipico di un metallo.
- **Isolanti**. Se $E_B \gg k_BT$ quasi tutti gli elettroni sono legati: n_e^{free} è soppresso da $e^{-E_B/k_BT} \sim 10^{-20}$.
- **Semiconduttori**. Caso intermedio. Alcuni e più debolmente legati possono avere $E_B \sim \mathrm{few} \times k_BT$.
- (**Superconduttori**. A basso T effetti quantistici danno un moto collettivo degli elettroni, tale che la resistenza è zero. Al momento non sono noti superconduttori a temperatura ambiente).

Effetto Joule

In un elemento generico di un circuito a differenza di potenziale V:

$$dU = dQ\,V \qquad \Rightarrow \qquad \frac{dU}{dt} = \boxed{W = IV}$$

(Come potenza di mulino idrico). Su di una resistenza $V = IR$:

$$W = I^2 R = \frac{V^2}{R}.$$

L'energia si conserva, e quella elettrica diventa calore (il moto collettivo di cariche che urtano diventa moto caotico): stufe, ferri da stiro, forni, etc. funzionano in base all'effetto Joule, che dà il nome all'unità di energia.

Curiosità: una I che incontra resistenze $R_{1,2}$ in parallelo si ripartisce in $I_1 + I_2$ in maniera da minimizzare la potenza dissipata totale $W = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2$:

$$\frac{dW}{dI_1} = 2R_1 I_1 + 2R_2(I_1 - I) = 0 \qquad \text{risolta da} \qquad R_1 I_1 = I\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = R_\parallel I.$$

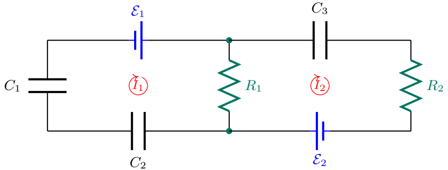
Microscopicamente, il riscaldamento è prodotto da urti fra particelle, che degradano energia in calore. Applicando $W = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}$ a particelle con densità n

$$W = \int dV\ n\,\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v} = \int dV\ nq\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{v} = \int dV\ \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J} \qquad \boxed{\frac{dW}{dV} = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}}$$

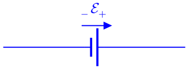
vera anche se $\boldsymbol{J} \neq \sigma\boldsymbol{E}$, più generale dei conduttori.

Circuiti: leggi di Kirchhoff

Alcuni circuiti risolubili come serie e paralleli. Altrimenti equazioni generali.



Nodi •: $\sum_A I_{A\to B} = 0$. Soluzione geometrica: una I_i per ogni 'maglia'.
Fili: conduttori a $\varphi =$ cte. Su ogni maglia $0 = \sum V_{AB}$ dove $V_{AB} = \varphi_A - \varphi_B$.
Resistenza: $V_{AB} = RI_{A\to B}$ dove la corrente fluisce da A a B.
Capacità: accumuli di carica. $V_{AB} = Q/C$ con $\dot{Q} = I_{A\to B}$.
Batteria: $\mathcal{E} = \varphi_+ - \varphi_-$, una linea corta indica il polo a potenziale minore:

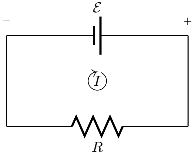


Come funziona una batteria:

- Meccanica: forza sposta cariche su isolante. E.g. cinghia Van de Graaf.
- Chimica: ioni migrano dove la concentrazione è minore per dare reazione.
- Fotoelettrica: luce fornisce energia ionizzando e.
- Magnetica: $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} \neq 0$.

Circuiti: esempi

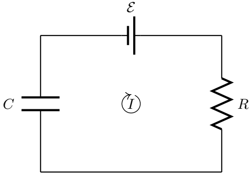
Circuito R: gli elettroni, di carica negativa, vanno al polo positivo ($\boldsymbol{F} = e\boldsymbol{E} = |e|\boldsymbol{\nabla}\varphi$) e quindi la corrente va verso il polo negativo, girando nel circuito.



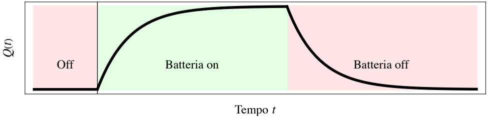
$$\varphi_+ - \varphi_- = \mathcal{E} = RI.$$

Una batteria ha sempre una $R_{\rm batt}$ interna. La potenza dissipata da R $W = RI^2 = R\mathcal{E}^2/(R+R_{\rm batt})^2$ è massima per $R = R_{\rm batt}$.

Circuito RC: $\mathcal{E} = RI + Q/C$. Definendo $\tau = RC$ le soluzioni rilevanti sono



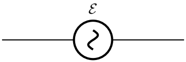
$$Q(t) = \left\{ \begin{array}{ll} C\mathcal{E}[1 - e^{-t/\tau}] & \text{carica da } Q(0) = 0 \\ C\mathcal{E}e^{-t/\tau} & \text{scarica con } \mathcal{E} = 0 \end{array} \right.$$



Correnti alternate

Per motivi pratici discussi dopo si usa corrente alternata. Circuito RLC:

$$\frac{Q}{C} + RI + L\dot{I} = \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t \ =$$

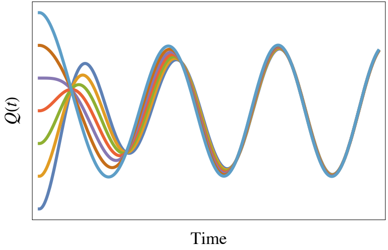


Complicato: dopo un periodo iniziale $\tau \sim RC$ detto **transiente** R ha dissipato l'energia iniziale e **a regime** rimane solo un'oscillazione a ω: interessa, visibile in oscilloscopio. Per calcolarla si scrive

$$\mathcal{E} = \Re \hat{\mathcal{E}} e^{i\omega t} \qquad \hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$$

e si cerca una **soluzione complessa**

$$I = \Re \hat{I} e^{i\omega t}$$



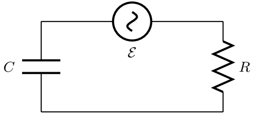
di cui poi prendere la parte reale, tanto l'equazione è lineare:

$$\Re \hat{I} Z = \Re \hat{\mathcal{E}} \qquad \boxed{Z = \frac{1}{i\omega C} + R + i\omega L}$$ = "**impedenza**", si combinano come R.

$$\hat{I} = \frac{\hat{\mathcal{E}}}{Z} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{|Z|} \cos(\omega t + \delta)}$$ dove δ è la fase di $\hat{I}$.

Correnti alternate: potenza dissipata

Esempio: circuito RC, a regime sono impedenze $Z_R = R$ e $Z_C = 1/i\omega C$ in serie.



La differenza di potenziale ai capi di C (R) taglia frequenze alte (basse):

$$\frac{V_C}{\mathcal{E}} = \left|\frac{Z_C}{Z_R + Z_C}\right| = \left|\frac{1}{1 + i\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}}.$$

$$\frac{V_R}{\mathcal{E}} = \left|\frac{Z_R}{Z_R + Z_C}\right| = \left|\frac{1}{1 + 1/i\omega RC}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + 1/(\omega RC)^2}}.$$

Vale $\hat{V} = Z\hat{I}$ ai capi di una impedenza Z a regime. Potenza dissipata $W = VI$.
Il prodotto non è una operazione lineare: $W = \text{Re}(\hat{V})\text{Re}(\hat{I}) \neq \text{Re}(\hat{V}\hat{I})$.
Bisogna tornare ai numeri reali: scrivendo $Z = R + iY$ e $\hat{I} = I_0 e^{i\omega t}$

$$W = \underbrace{(I_0 R \cos\omega t - I_0 Y \sin\omega t)}_{\text{Re}\hat{V} = \text{Re}Z\hat{I}} \cdot \underbrace{(I_0 \cos\omega t)}_{\text{Re}\hat{I}}.$$

Facendone la $\langle$media temporale$\rangle$ **solo la parte resistiva dissipa energia**:

$$\langle W\rangle = I_0^2 \langle R\cos^2\omega t - Y \sin\omega t \cos\omega t\rangle = \frac{R}{2} I_0^2.$$

Costante dielettrica complessa: esempi

Piatto piano sottile con costante dielettrica ϵ in campo esterno $E_{\rm ext}$:

$$\Delta D_\perp = \epsilon_0 E_{\rm ext} - \epsilon E_{\rm in} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad E_{\rm in} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_{\rm ext}.$$

Piatto piano sottile con ϵ e resistività ρ in campo esterno $E_{\rm ext}(t)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \epsilon_0 E_{\rm ext} - \epsilon E_{\rm in} = \sigma \\ \dot\sigma = J = E_{\rm in}/\rho \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \sigma + \tau\dot\sigma = \epsilon_0 E_{\rm ext}, \\ \epsilon \dot E_{\rm in} + E_{\rm in}/\rho = \epsilon_0 \dot E_{\rm ext} \end{array} \right. \qquad \tau = \epsilon\rho.$$

Come RC. Per $E_{\rm ext} = \Re \hat E_{\rm ext} e^{i\omega t}$ a regime $\sigma = \Re \hat\sigma e^{i\omega t}$, $E_{\rm in} = \Re \hat E_{\rm in} e^{i\omega t}$:
il dielettrico-conduttore diventa come se la costante dielettrica fosse complessa

$$\boxed{\hat\epsilon = \epsilon + \frac{1}{i\omega\rho}} \qquad E_{\rm in} = \Re \frac{\epsilon_0}{\hat\epsilon} E_{\rm ext} = \frac{\epsilon_0 \hat E_{\rm ext}}{\epsilon\sqrt{1 + 1/(\tau\omega)^2}} \cos(\omega t + \delta) \quad \delta = \operatorname{arcot} \omega\tau$$

(Similmente calcolabile campo ruotante, descritto da $\hat{\boldsymbol{E}}_{\rm ext} = \hat E_{\rm ext}(1, i, 0)/\sqrt{2}$)

Costante dielettrica complessa

In un dielettrico con cariche fisse e di conduzione $\rho_{\text{free}} = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}$:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\epsilon \boldsymbol{E}) = \rho_{\text{fix}} + \rho_{\text{cond}}.$$

Conservazione della carica: $\dot{\rho}_{\text{cond}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J}$. A regime $\dot{\rho}_{\text{cond}} = i\omega\rho_{\text{cond}}$. Quindi

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(\epsilon \boldsymbol{E} + \frac{\boldsymbol{J}}{i\omega} \right) = \rho_{\text{fix}}.$$

In un conduttore $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{E}/\rho$, quindi

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \cdot (\hat{\epsilon} \boldsymbol{E}) = \rho_{\text{fix}}, \qquad \hat{\epsilon} = \epsilon + \frac{1}{i\omega\rho} = \epsilon \left(1 + \frac{1}{i\omega\tau} \right) \qquad \tau = \epsilon\rho}.$$

Conduttore dielettrico a regime: come se fosse costante dielettrica complessa.

Riassunto dell'elettrostatica

Equazioni fondamentali nel vuoto

La forza di Coulomb $\boldsymbol{F} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{q_1 q_2}{r^2}\hat{\boldsymbol{r}}$ spiega la materia.
Non locale ma equivale a $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{E}$ ed alle 2 equazioni locali di Maxwell

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} & = & \rho/\epsilon_0 \\ \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} & = & 0 \end{array}\right.} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\left\{\begin{array}{rcl} \nabla^2\varphi & = & -\rho/\epsilon_0 \\ \boldsymbol{E} & = & -\boldsymbol{\nabla}\varphi \end{array}\right.}$$

Forma integrale: $\Phi_E = Q_{\rm in}/\epsilon_0$, $\oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = 0$.
La carica si conserva $\dot\rho + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = 0$ ed è quantizzata: $q_p = -q_e = e$.
Energia: $u = dU/dV = \frac{1}{2}\rho\varphi = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$, $p = u$, $w = dW/dV = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$.
Approssimazione: monopolo, dipolo, multipoli.

Equazioni approssimate nella materia

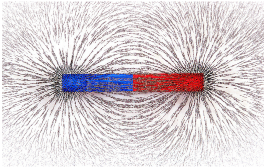
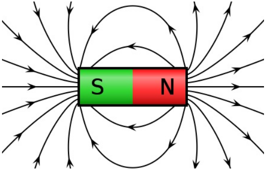
- Dielettrici: come se $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\epsilon\boldsymbol{E}) \approx \rho_{\rm free}$ con $\epsilon \approx \epsilon_0(1+n\alpha)$.
- Conduttori: φ costante in equilibrio; $\boldsymbol{J} \approx \sigma\boldsymbol{E}$ con $\sigma \approx \tau e^2 n_e^{\rm free}/m_e$.
- Dielettrici-conduttori a regime: $\hat\epsilon = \epsilon + 1/i\omega\rho$.

Etc etc. Raffinamenti eleganti capitano quando la fisica diventa noiosa...

Magnetostatica

Il campo magnetico

'Magnetismo' deriva da ossidi di Fe estratti nella regione ex-greca di Magnesia.

Questi minerali attraggono più limatura su poli. Sagomandoli a bacchetta si osserva che esistono due tipi di poli: NS che si attraggono, e NN e SS che si respingono, con forza $1/r^2$. Una bacchetta ha NS e non è possibile separarli in 'cariche': come se fossero 'dipoli'. Non possono essere elettrici perché la magnetite conduce. Inoltre, se liberi di ruotare si allineano lungo nord/sud (polo nord del magnete verso nord).

Limatura visualizza le linee di un nuovo campo $\boldsymbol{B}$: girano; si sommano $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_1 + \boldsymbol{B}_2$; esiste $\boldsymbol{B}$ terrestre.

I ferromagneti (per via di effetti quantistici) generano grossi 'campi magnetici'. Discuteremo prima cosa $\boldsymbol{B}$ fa, e poi come viene generato.

Forza di Lorentz

Si scoprì (1895) che $\boldsymbol{B}$ esercita la '**forza di Lorentz**' su cariche **elettriche**:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})} \qquad \Rightarrow \qquad W_{\rm mag} = \boldsymbol{F}_{\rm mag} \cdot \boldsymbol{v} = 0$$

Regola della mano destra: l'indice indica $\boldsymbol{v}$; il medio indica $\boldsymbol{B}$, il pollice $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.

Simmetrie della forza di Lorentz

L'aver misurato $F_\perp = qvB\sin\theta$ significa che la fisica è invariante per rotazioni:

$$\text{vettore} = \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = \text{vettore}.$$

$\boldsymbol{F}$ dipende da $\boldsymbol{v}$, rendendo non ovvia l'invarianza sotto trasformazioni Galileiane

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{u}t, \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \qquad \text{quindi} \qquad \boldsymbol{F}' = \boldsymbol{F}.$$

La forza di Lorentz è invariante se i campi elettromagnetici trasformano come

$$\boxed{\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{B}' = \boldsymbol{B}}$$

Quindi $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}'\cdot\boldsymbol{B}'$ rimane invariante. Relatività rilevante a grandi $u \lesssim c$.

Lorentz è quello delle trasformazioni: alla fine B risulterà essere un effetto relativistico soppresso da $(v/c)^2 \sim 10^{-30}$ visibile perché i campi elettrici di $N \sim 10^{30}$ e e p si cancellano, ma e fanno moti collettivi dando correnti.

Campi magnetici

La forza di Lorentz $F \sim qvB$ definisce le dimensioni del campo magnetico

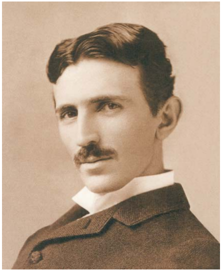
$$\boxed{[B] = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{m}} \equiv \text{ Tesla}}$$

Gauss $= 10^{-4}$ Tesla è usato ma non MKS.

- Una calamita produce $B \sim 10^{-2}$ T.
  (Si definisce 'polo nord' quello da cui escono le linee del campo).
- La terra genera $B \sim 10^{-4}$ T.
  (Polo nord è il polo nord, ogni tanto cambia).
- Con la tecnologia attuale al massimo si ottiene

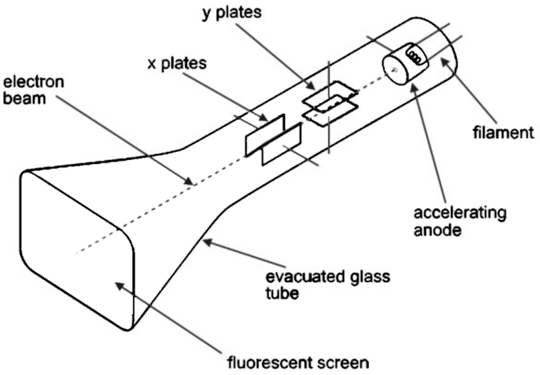
$$B_{\max} \sim 20\,\mathrm{T}.$$

- Una stella di neutroni ruotante genera 10^8 T.
- La nostra galassia contiene $B \sim 10^{-10}$T.



Moto in E: non-misura di m_e

I) Nel 1897 Thomson scoprì l'elettrone: ionizzando atomi e facendo attraversare $V \sim$ kV gli e acquistano energia $K = m_e v^2/2 =$ keV. Picchiando su di uno schermo (poi usato per costruire televisori) gli e fanno un punto luminoso. Ma questo non consente di misurare v e ricostruire m_e: l'intensità del lampo è data da K, ed il tempo di volo è (era) troppo breve da non essere misurabile.

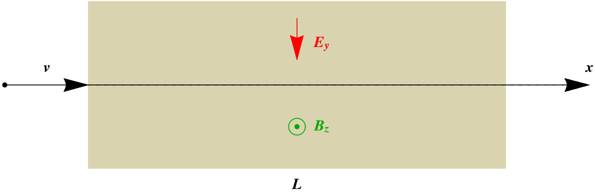


II) Facendo passare e in E_y si produce una deflessione. Come già visto,

$$\theta = \frac{p_y}{} \simeq \frac{Ft}{} = \frac{eE_y \cdot L/v}{} = \frac{eE_y L}{} = 2\frac{\Delta U}{}$$

Moto in B: misura di m_e

III) Si misura v aggiungendo anche un campo $B_z = E_y/v_x$, scelto in modo tale che (ad esempio) si abbia $F = 0$ e quindi nessuna deflessione:



B è misurabile utilizzando un corpo macroscopico, di massa M e carica Q nota. Sorprendentemente si trovò che l'elettrone pesa 1836 volte meno dell'idrogeno.

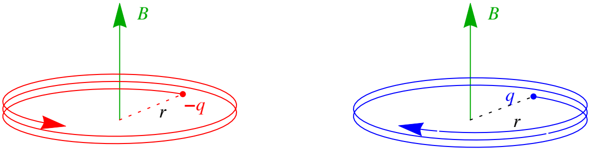
$$m_e = 0.91\ 10^{-30}\,\mathrm{kg} \qquad m_e c^2 = 0.511\,\mathrm{MeV}.$$

L'apparato produce fasci di particelle con energia data, usati in spettrometri...

Moto di carica q in B costante

Equazione del moto $m\boldsymbol{a} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ risolta da moto elicoidale, ovvero:

- La componente $v_\parallel$ di $\boldsymbol{v}$ parallela a $\boldsymbol{B}$ rimane costante.
- Nel piano perpendicolare a $\boldsymbol{B}$, rotazione uniforme $mv_\perp^2/r = qv_\perp B$ con raggio 'di Larmor' $r = mv_\perp/qB$. In termini di $p_\perp = mv_\perp$ rimarrà valida anche in relatività: $\boxed{p_\perp = rqB}$. Il periodo $T = 2\pi r/v_\perp = 2\pi m/qB$ non dipende da r. Pulsazione di Larmor: $2\pi\nu = 2\pi/T = \boxed{\omega_B = qB/m}$.

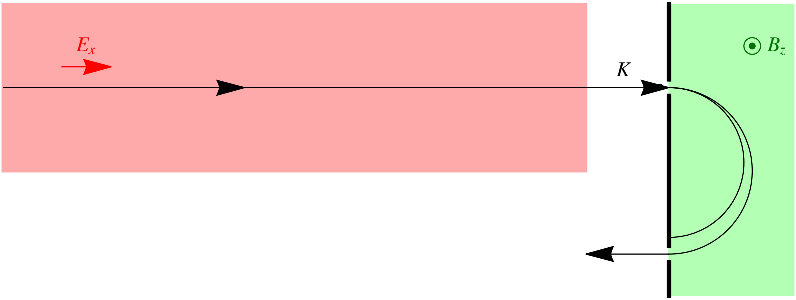


Misurando ω_B o r si ricava la massa di elettroni e protoni.
Ad esempio, elettroni in $B = \mathrm{T}$ girano con $\omega_B = 1.7\ 10^{11}$ Hz. Se l'energia è nota, e.g. $K = \mathrm{keV}$, hanno $p = \sqrt{2m_e K} = 0.03\,\mathrm{MeV}/c$ e quindi $r \approx 10^{-4}$ m:

$$p_\perp = rqB = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m/s}}\frac{r}{\mathrm{m}}\frac{q}{\mathrm{C}}\frac{B}{\mathrm{Tesla}} = \frac{c}{\mathrm{m/s}}\frac{e\mathrm{V}}{c}\frac{r}{\mathrm{m}}\frac{q}{e}\frac{B}{\mathrm{Tesla}} = 300\frac{\mathrm{MeV}}{c}\frac{r}{\mathrm{m}}\frac{q}{e}\frac{B}{\mathrm{Tesla}}$$

avendo usato Joule/Coulomb = Volt = eV $/e$.

Spettrometro



Ioni di carica e e massa M_i accelerati in $V \sim$ kV acquistano energia $K = eV \sim$ keV, quindi velocità $v_i = \sqrt{2K/M_i}$. Mandandoli in B, si osserva che dopo mezzo giro escono a valori discreti di $2r_i$. Motivo: hanno valori discreti delle masse:

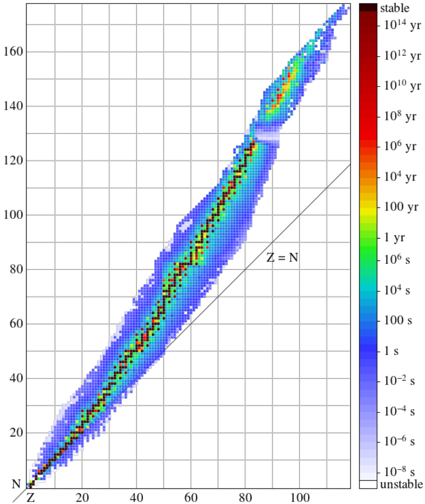
$$r_i = \frac{M_i v_i}{eB} = \frac{\sqrt{2KM_i}}{eB} = \mathrm{m}\frac{0.1\,\mathrm{T}}{B}\sqrt{\frac{K}{5\,\mathrm{keV}}\frac{M_i}{100\,\mathrm{GeV}}}.$$

Isotopi

Thomson nel 1913 rivelò l'esistenza degli **isotopi**, separando Neon$^{20}_{10}$ (90%) e Ne$^{22}_{10}$ (9%). Aston nel 1919 risolse un mistero della chimica: come mai i pesi molari degli elementi presenti in natura sono *quasi* multipli interi di m_H? Le masse degli atomi sono multipli interi

$$M_{Z,N} \approx Z(m_p+m_e)+(N-Z)m_n$$

a meno dell'energia di legame. Ma in natura si trovano miscugli di isotopi con diverso numero di neutroni: ad es. il carbonio ha $Z = 6$ e $N = \{12, 13, 14\}$.
Es.: separare ^{235}U da ^{238}U.

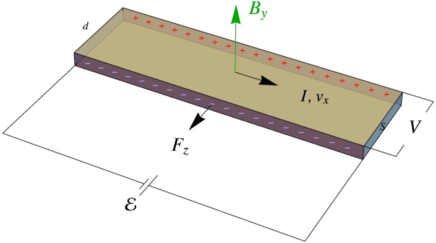


Effetto Hall: gli elettroni conducono

Che segno ha la carica q_e dei portatori di carica? Si muovono nella stessa direzione della corrente o in direzione opposta? Hall nel 1879 rispose sperimentalmente a questa domanda sfruttando che la forza magnetica dipende da v.

Filo conduttore con portatori di carica di densità numerica n, velocità v_x: scorre

$$I = n_e q_e S v_x .$$



Si aggiunge B_y ortogonale al filo: i portatori sentono una forza $F_z = q_e v_x B_y \propto I$ e vanno storti verso un lato del filo, di spessore d. Si accumulano fino a creare un campo elettrico E_z tale che

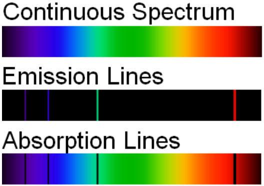
$$F_z = q_e(E_z + v_x B_y) = 0$$

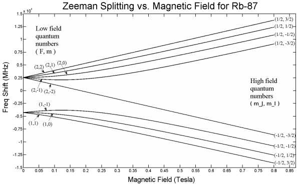
e riprendono ad andare dritti. Misurando la differenza di potenziale $V = E_z d$ e quindi E_z si ricava v_x, scoprendo che ha segno opposto a I, cioè che $q_e < 0$.

Si misura inoltre che v_x è piccolo, come atteso. Verifica: l'effetto Hall svanisce muovendo meccanicamente la lamina con velocità opposta a v_x e $\boldsymbol{J} = \sigma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$.

Effetto Zeeman

B modifica la frequenza con cui gli elettroni ruotano attorno ai nuclei negli atomi. Viene osservato tramite righe spettrali (legate alla frequenza di rotazione $\sim \Delta\omega$, quantistico ma intuitivo) che si **spostano** (e **separano**) quando B viene acceso.





Lo spostamento è dovuto alla forza magnetica sugli elettroni, può essere compreso classicamente. Per elettroni su orbite circolari $\perp \boldsymbol{B}$ con $v = \omega r$:

$$m_e r \omega^2 = F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} + eBv \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 + \omega\omega_B} \simeq \omega_0 + \frac{\omega_B}{2}, \qquad \omega_B = \frac{eB}{m_e}$$

Da questo Zeeman e Lorentz misurarono e/m_e, ricevettero il Nobel 1902, ma non capirono di aver scoperto una particella molto più leggera dell'atomo: l'elettrone.

(Come la Terra attorno al Sole, gli elettroni fanno rivoluzione e rotazione: la rotazione produce la separazione, descritta quantisticamente come *spin*).

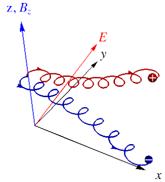
Moto in campi B, E costanti

Risolviamo $m\dot{\boldsymbol{v}} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$. Invarianza per rotazioni consente di assumere

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}, \qquad \left\{ \begin{array}{l} m\dot{v}_x = q v_y B_z \\ m\dot{v}_y = q(E_y - v_x B_z) \\ m\dot{v}_z = qE_z \end{array} \right.$$

Soluzione in termini di $\omega_B = qB_z/m$ e 3 velocità iniziali v_z^0, $v_{\rm rot}, \varphi$:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = +v_{\rm rot}\cos(\omega_B t + \varphi) + \dfrac{E_y}{B_z} \\[2ex] v_y = -v_{\rm rot}\sin(\omega_B t + \varphi) \\[2ex] v_z = v_z^0 + \dfrac{qE_z t}{m} \end{array} \right. \qquad =$$



Drift a velocità costante $\boldsymbol{u} = (E_y/B_z, 0, 0) = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/B^2$ che non dipende da q, m: è universale? L'invarianza galileiana consente di mettere a zero la componente di $\boldsymbol{E}' = \boldsymbol{E} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{B}$ ortogonale a $\boldsymbol{B}$ (mentre $\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B}$ è invariante).

(Esercizi: fotomoltiplicatore in B, ciclotrone, ...).

Forza magnetica su di un filo

Un filo dritto di lunghezza L e sezione di area S contiene $N = nLS$ elettroni in moto a velocità v. La forza magnetica totale vale

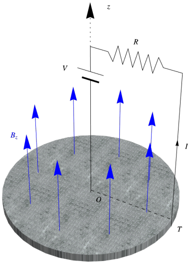
$$F = NevB = LIB, \qquad I = SJ = S \cdot nev.$$

Per un filo non dritto, dando per convenzione a $d\boldsymbol{s}$ il verso della corrente:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = \int I \; d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{B}}$$

Applicazioni:

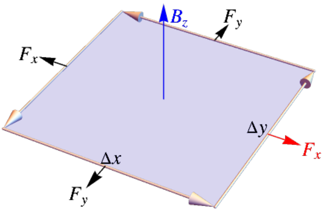
- Amperometro. Mettendo filo in B si ricava I dal punto di equilibrio fra la forza magnetica e quella di una molla.
- Motori elettrici. Per ora: corrente continua in circuito chiuso da contatto strisciante su conduttore libero di ruotare. Raggiunge $\omega_{\rm lim}$ tale che l'effetto Hall compensa la batteria, $V = \int_0^R dr\, \omega r B_z = B_z \omega R^2/2$.
- Generatori di correnti alternate. Facendo girare una spira si crea una fem tramite l'induzione magnetica...



Induzione magnetica

Spira ferma in campo magnetico

Iniziamo con geometria semplice: spira rettangolare di lati Δx e Δy ferma nel piano xy in presenza di un B_z. Su ogni lato di lunghezza L agisce una forza $|\boldsymbol{F}| = |ILB|$ diretta verso l'esterno se I gira in senso antiorario e $B_z > 0$. La forza totale vale zero se B è uniforme:



$$\boldsymbol{F} = I\left(\oint d\boldsymbol{s}\right) \times \boldsymbol{B} = 0$$

ed è diversa da zero se B non è costante, ad esempio sul bordo di una calamita. Per semplicità assumiamo

$$B_z = \begin{cases} 0 & \text{per } x < 0 \\ B_z & \text{per } x > 0 \end{cases}$$

La forza totale vale $F_x = IB_z\,\Delta y$. Ad esempio $F = 1\,\mathrm{N}$ se $I = 1\,\mathrm{A}$ e $\Delta y = 1\,\mathrm{m}$ e $B = 1\,\mathrm{T}$. Il campo magnetico terrestre vale $B \sim 10^{-4}\,\mathrm{T}$ ed è circa uniforme.

Spira in moto in campo magnetico

Assumiamo ora che la spira sia in moto con velocità v_x: quindi

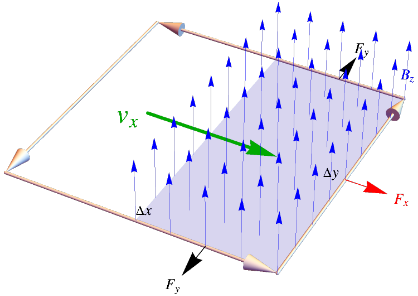
$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \neq 0.$$

Dubbio: la forza magnetica non compie lavoro su singole cariche

$$W = q(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{v} = 0.$$

Come può compiere lavoro su di un circuito percorso da corrente I, cioè su tante cariche che girano?

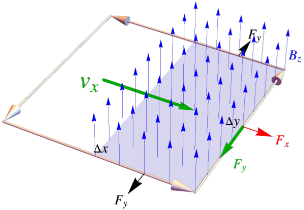
L'energia si conserva?
Le formule sono giuste.
Magari altro contribuisce al totale...



Legge di Faraday

Ogni q è soggetta alla forza di Lorentz $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Nei lati Δx F_L è trasversa al filo: è l'effetto Hall. Nel lati Δy, F_L è *parallela* al filo: la forza magnetica è una delle forze che possono generare una fem: come $q\boldsymbol{E}_{\text{eff}}$ con $\boldsymbol{E}_{\text{eff}} = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$. Nell'esempio la fem vale

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y B_z = -\frac{\Delta S}{\Delta t} B_z.$$



Per un campo magnetico più generale conta la differenza fra i due lati:

$$\mathcal{E} = -v_x \Delta y \left[B_z(x + \Delta x) - B_z(x) \right].$$

Notare che $\mathcal{E} \neq 0$ se B non è uniforme: come $\boldsymbol{F}_{\text{mecc}}$. La formula generale è:

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(Legge di Faraday-Lenz)}}$$

dove Φ_B è il flusso di B attraverso la spira (misurato in Wb, Weber). Valida per una spira di forma qualunque, come si dimostra decomponendola in rettangolini. O anche usando che il flusso sulla superficie chiusa $\Phi_B(t+dt) - \Phi_B(t) + d\Phi_B^{\text{cut}} = 0$

$$\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E}_{\text{eff}} \cdot d\boldsymbol{s} = \oint (\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{B}) \cdot d\boldsymbol{s} = \frac{d}{dt} \oint \underbrace{(d\boldsymbol{s} \times d\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}}_{dS\, B_\perp} = \frac{d}{dt} \int d\Phi_B^{\text{cut}} = -\frac{d\Phi_B}{dt}.$$

Legge di Faraday: conservazione dell'energia

Il segno in $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ è importante, significa la conservazione dell'energia.

- La forza meccanica discussa in precedenza produce una potenza meccanica

$$W_{\text{mecc}} = Fv = ILB\,v.$$

- La fem genera una corrente I: la potenza elettrica in generale vale

$$W_{\text{el}} = I\mathcal{E} = -I\,LBv.$$

  Ad esempio, se c'è una resistenza, $I = \mathcal{E}/R$ e $W_{\text{el}} = -W_R = -I^2R$ viene dissipata, quindi F deve opporsi a v.

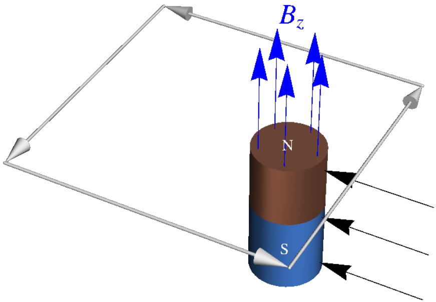
Le due potenze sono uguali: con il segno giusto *l'energia si trasforma*

$$\boxed{\text{energia meccanica} \quad \leftrightarrow \quad \text{energia elettrica}}$$

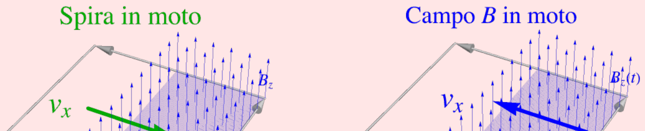
L'energia spesa per spingere una spira in un campo magnetico diventa energia elettrica del circuito (centrale elettrica). Oppure l'energia elettrica può venire usata per far muovere un circuito (motore elettrico).

Spira e campo magnetico in moto

Dubbio fondamentale: supponiamo di muovere il magnete e tenere ferma la spira. Siccome $\boldsymbol{v} = 0$, secondo le equazioni attuali, non dovrebbe venire generata nessuna forza $q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ e quindi nessuna fem, $\mathcal{E} = 0$.



Strano: eppure è lo stesso esperimento visto da due osservatori in moto relativo:



Spira e campo magnetico in moto

L'esperimento dice: *in tutti i casi si ha*

$$\boxed{\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} \qquad \text{(Legge di Faraday-Lenz)}}$$

Per spira in moto la legge di Faraday segue dalla forza di Lorentz, $\boldsymbol{F} = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$.

Ma ora la legge di Faraday ha validità più generale: si applica anche quando il circuito è fermo e $\boldsymbol{B}$ dipende dal tempo (ad esempio per correnti alternate).

Occorre modificare le equazioni fondamentali.

- Circuito in moto in $B(\boldsymbol{r})$: forza magnetica genera fem $\mathcal{E}$ come se ci fosse $\boldsymbol{E}$.
- Circuito fermo in $B(t)$: interpretazione (giusta): c'è un $\boldsymbol{E}$ mai visto prima.

Seconda equazione di Maxwell

Otteniamo la forma definitiva della 2a equazione di Maxwell, combinando

- esperimento: la legge di Faraday-Lenz, $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B = -\int \dot{\boldsymbol{B}} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$,
- interpretazione: un vero $\boldsymbol{E}$ produce $\mathcal{E} = \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s}$,
- matematica: il teorema del rotore $\oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} = \int (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$.

Si ottiene

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}}$$

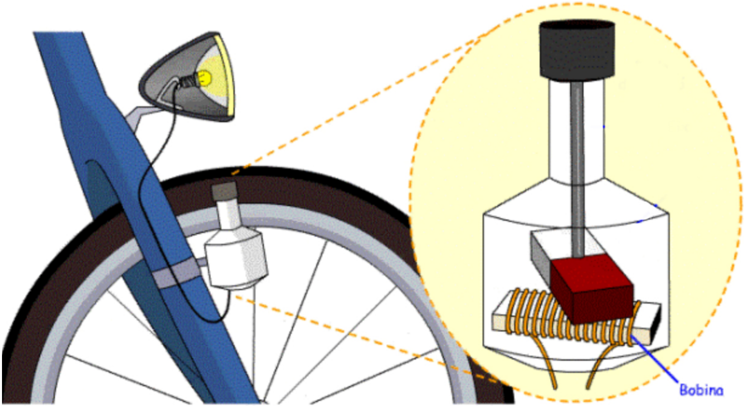
Il campo elettrico $\boldsymbol{E}$ è irrotazionale solo quando $\boldsymbol{B}$ non dipende da t. Quindi, in generale non è più possibile scrivere $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi$. Niente panico: alla fine il potenziale scalare φ risorgerà in una generalizzazione con potenziale vettore $\boldsymbol{A}$, e l'energia elettrica rimarrà $\boxed{u = \epsilon_0 E^2/2} \neq \frac{1}{2} \int \rho\varphi\, dV$ ('teorema di Poynting').

La legge Faraday-Lenz segue a volte dalla forza di Lorentz, a volte dalla II equazione di Maxwell. Strano? Capita perché le equazioni nascondono una simmetria extra: equivalenza fra diversi sistemi di riferimento (Galileo $\to$ relatività).

Quando discuteremo la generazione di campi magnetici vedremo che il segno $-$ ('legge di Lenz') è tale che la fem indotta genera una I che genera un B che si oppone alla variazione $\dot{\Phi}_B$; e.g. per una spira in moto tende a frenare.

Spira ruotante

Dinamo in biciclette e corrente elettrica nelle prese: fem generata in maniera analoga all'esercizio precedente, con una geometria più complicata ma più conveniente: una spira che gira (invece di traslare) rispetto a campo magnetico.

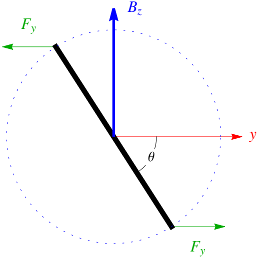


Facciamo ruotare la spira di lati Δx e Δy in un $\boldsymbol{B}_z$ uniforme. Il lato esterno Δx ruota attorno all'asse x: i suoi punti hanno

Spira ruotante: energia

La potenza elettrica vale

$$W_{\rm el} = I\mathcal{E} = I\; B_z S \sin\theta\,\dot\theta.$$



Per $\boldsymbol{B}$ uniforme la forza totale vale zero: sui due lati Δx agisce $F_y = \Delta x I B_z$, e la somma fa zero. Non vale zero il momento delle forze

$$M_x = F_y \Delta y \sin\theta = I B_z S \sin\theta.$$

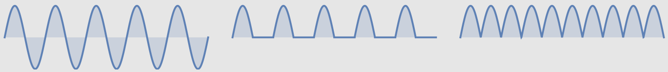
La potenza meccanica vale

$$W_{\rm mecc} = \boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{\omega} = M_x\dot\theta = I B_z S\ \sin\theta\ \dot\theta.$$

Potenza elettrica = potenza meccanica.

$W_{\rm mecc} = 2F_y v_y$ è anche calcolabile come moto non-rotatorio dei due lati Δx.

Se uno vuole corrente più continua: diodo può trasformare $\sin\omega t$ in $\max(0, \sin\omega t)$. Diodi o marchingegni con contatti striscianti possono ‘rettificare’ $\sin\omega t$ in $|\sin\omega t|$.



Generazione di campi magnetici

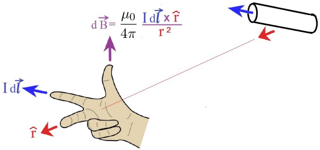
B è generato da J

Nel 1820 Hans-Christian Orsted insegnava elettrostatica all'università di Cophenagen. Durante una dimostrazione dell'effetto Joule, in cui una corrente elettrica riscaldava un filo, per caso una bussola magnetica era vicino al filo. Orsted notò che la bussola si muoveva quando veniva accesa la corrente. Ne fu magnetizzato.

Formula integrale per B

Assumendo che la fisica è invariante per rotazioni, questi pochi casi bastano per dedurre la formula generale di Biot-Savart. Una densità di corrente $\boldsymbol{J}$ genera

$$\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV'\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}}$$

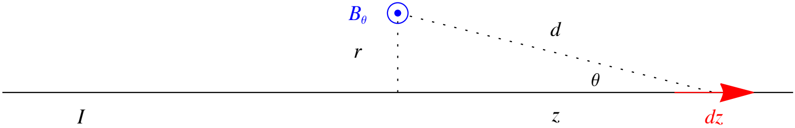


i.e. un filo $I = JS$ o una carica in $\boldsymbol{r}'$ generano

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int d\boldsymbol{r}'\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} = \frac{\mu_0}{4\pi}q\boldsymbol{v}\times\frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3}$$

Verifica 1: filo infinito rettilineo

$$B_\theta(r) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,\frac{\sin\theta}{d^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz\;r}{(z^2+r^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r}\left.\frac{z}{(z^2+r^2)^{1/2}}\right|_{-\infty}^{\infty} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



Verifica 2: nel centro di una spira circolare di raggio a

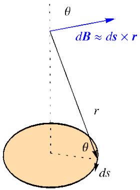
$d\boldsymbol{B} \approx d\boldsymbol{s}\times\boldsymbol{r}$

Circuitazione del campo magnetico

Definiamo la circuitazione $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s}$ e proviamo a calcolarla.

Caso 1: $\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I$ lungo un cerchio e ogni altro percorso che racchiude I.

Caso 2. Calcoliamo $B_z(z)$ lungo l'asse di una spira circolare di raggio a nel piano xy:



$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{2\pi a}{r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia}{r^2} \cos\theta = \frac{\mu_0}{2} \frac{Ia^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$$

dove $d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r}$ forma angolo θ con l'asse z.
La circuitazione su di un cerchio di raggio infinito vale

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_{-\infty}^{+\infty} dz \, B_z = \mu_0 I$$

Disco di Rowland

Anche il moto *meccanico* di cariche genera B?
Stimiamo: una carica $Q \sim \mathrm{C}$ su un condensatore che gira 1 volta al secondo genera $I = 1$ A, che genera $B \sim \mu_0 I/r \sim 10^{-7}\,\mathrm{T}$ a $r \sim \mathrm{m}$. Ma genera anche

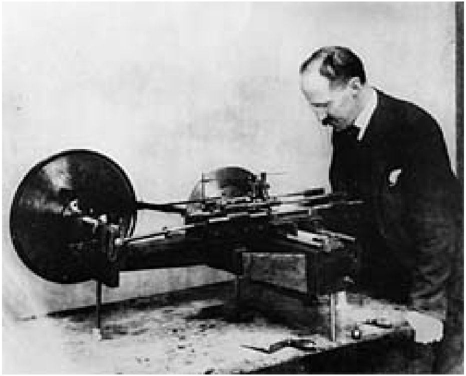
$$E \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \sim 10^{11}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$$

$$F \sim QE \sim 10^{11}$$

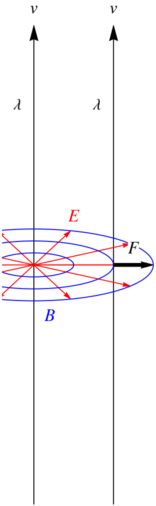
distruggendo disco e aria. Rowland nel 1878 usò $Q \sim 10^{-6}$ C e $\nu \sim 100$ Hz, che produce a $d \sim 0.1\,\mathrm{m}$

$$B \sim 10^{-10}\,\mathrm{T} \qquad E \sim 10^{5}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}.$$

Schermando $\boldsymbol{E}$ tramite un conduttore, Rowland riucì a rivelare $B(t)$ nonostante il B terrestre 10^5 volte maggiore.



Elettricità vs magnetismo



Due fili rettilinei a distanza r hanno densità di carica uniforme λ e sono in moto con velocità v lungo i propri assi. Il moto di ogni filo equivale ad una corrente $I = \lambda v$ per cui ogni filo dà

$$E_r = \frac{1}{2\pi\epsilon_0}\frac{\lambda}{r}, \qquad B_\theta = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I}{r}.$$

Nasce una forza elettrica (repulsiva) e magnetica (attrattiva). Chi vince? La forza per unità di lunghezza è finita:

$$\frac{dF_v}{dr} = \lambda(E_r - vB_\theta) = \frac{\lambda^2}{2\pi r}\left(\frac{1}{\epsilon_0} - \mu_0 v^2\right).$$

Incompatibile con la relatività Galileiana, secondo cui $F_v = F_0$.

$$\frac{dF_v}{dr} = \frac{\lambda^2}{2\pi\epsilon_0 r}\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \qquad \boxed{c \equiv \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \approx 2.997924\ 10^8\ \frac{\text{m}}{\text{sec}}}.$$

Lorentz darà $F_v = F_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$ e contrazioni dell'unità di lunghezza, di λ... F_v giusta a meno di altri effetti relativistici di ordine v^2/c^2. **La forza magnetica è correzione relativistica alla forza elettrica**. Poi troveremo lo stesso risultato calcolando la forza fra due cariche con velocità $\boldsymbol{v}$.

III e IV equazione di Maxwell (per ora)

La sorgente di $\boldsymbol{B}$ è $\propto \boldsymbol{J}$, le uniche equazioni invarianti per rotazioni sono

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} \propto \boldsymbol{J}.$$

$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = 0}$ in quanto nessuno ha mai visto cariche magnetiche q_m da cui esce $\boldsymbol{B}$: le linee del campo magnetico 'girano' senza uscire da sorgenti.

$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J}}$ implica la **legge di Ampere**

$$\boxed{\oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\text{concatenata}} \qquad \text{dove} \qquad I_{\text{concatenata}} = \Phi_J = \sum I_i}$$

che riproduce gli esempi. Applicazione: solenoide rettilineo, circolare...
Verifica: applichiamo il rotore a Biot-Savart $\boldsymbol{B} = (\mu_0/4\pi)\int dV\,\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{r}/r^3$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV\,\boldsymbol{\nabla}\times\left(\boldsymbol{J}\times\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV\,\left[\boldsymbol{J}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}) - \frac{\boldsymbol{r}}{r^3}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J})\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dV\,[\boldsymbol{J}4\pi\delta(\boldsymbol{r}) - \cdots\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}\,] = \mu_0\boldsymbol{J} + \cdots\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} \overset{?}{=} \mu_0\boldsymbol{J}
\end{aligned}$$

usando $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{r}/r^3) = -\nabla^2(1/r) = 4\pi\delta(\boldsymbol{r})$. Il termine $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J}$ vale zero nel limite statico. Boh, siamo nel bacino di attrazione della teoria giusta, andiamo avanti.

Riassunto (finora)

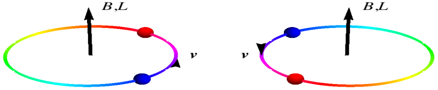
$$\begin{cases} 1) & \nabla\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} & \Rightarrow & \Phi_E = Q_{\rm in}/\epsilon_0 \\ 2) & \nabla\times\boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} & \Rightarrow & \oint \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{s} = \mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B \\ 3) & \nabla\cdot\boldsymbol{B} = 0 & \Rightarrow & \Phi_B = 0 \\ 4) & \nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{J} & \Rightarrow & \oint \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\rm conc} \\ & \dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = 0 & \Rightarrow & \dot{Q}_{\rm in} + \Phi_J = 0 \\ & q(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{F} & & \end{cases}$$

Le equazioni sono invarianti sotto **rotazioni** (vettori di SO(3)) e sotto **parità** se

$$\boldsymbol{r} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{r} \qquad \nabla \xrightarrow{P} -\nabla \qquad \boldsymbol{v} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{v} \qquad \boldsymbol{J} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{J} \qquad \rho \xrightarrow{P} \rho$$

$\boldsymbol{E} \xrightarrow{P} -\boldsymbol{E}$ è un vettore come $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{J}$;
$\boldsymbol{B} \xrightarrow{P} +\boldsymbol{B}$ è un pseudo-vettore come

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p} \xrightarrow{P} (-\boldsymbol{r})\times(-\boldsymbol{p}) = +\boldsymbol{L}.$$



ρ è scalare; ρ_m sarebbe pseudo-scalare. Le 1), 2) e 4) non invarianti sotto Galileo:

$$\rho \to \rho, \qquad \boldsymbol{J} \to \boldsymbol{J} + \rho\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}, \qquad \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}.$$

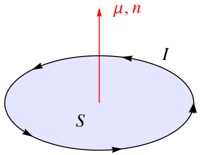
Dipolo magnetico

Dipolo magnetico

Dimostreremo le seguenti formule:

Una piccola spira di superficie S percorsa da corrente I è approssimabile come **dipolo magnetico** di momento

$$\boxed{\boldsymbol{\mu} = \frac{1}{2}\int dV\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J} = \frac{I}{2}\oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r} = I\int dS\, \boldsymbol{n} \simeq IS\boldsymbol{n}}$$



con unità di misura $\mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2 = \mathrm{J/T}$. Forza su dipolo in campo magnetico esterno:

$$\boxed{\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U \qquad U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}}$$

Momento delle forze:

$$\boxed{\boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}}$$

Campo generato da dipolo magnetico:

$$\boxed{\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right]}$$

Similitudine fra dipolo elettrico e magnetico

Le formule per dipoli magnetici ricordano quelle per dipoli elettrici:

$$
\begin{array}{ccc}
\boldsymbol{p} \simeq q\boldsymbol{d} & \leftrightarrow & \boldsymbol{\mu} \simeq IS\boldsymbol{n} \\
\boldsymbol{p} = \int dV\, \boldsymbol{r}\, \rho & \leftrightarrow & \boldsymbol{\mu} = \int dV\, \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{J}/2 \\
U = -\boldsymbol{p} \cdot \boldsymbol{E} & \leftrightarrow & U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{M} = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{E} & \leftrightarrow & \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B} \\
\boldsymbol{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{p}}{r^3}\right] & \leftrightarrow & \boldsymbol{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\left[\dfrac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right]
\end{array}
$$

Il motivo generale della similitudine è che nel vuoto $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ soddisfano alla stessa equazione: zero divergenza e zero rotore. Quindi hanno la stessa espansione in potenze di d/R: monopolo, dipolo, quadrupolo...

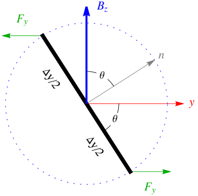
Non esistono cariche magnetiche, quindi il dipolo magnetico domina.

Se esistessero cariche magnetiche si potrebbe ottenere un dipolo magnetico da due cariche magnetiche $+$ e $-$. Non esistono, il conto è più complicato.

Momento su dipolo magnetico — esempio

Il momento delle forze sulla spira $\Delta x \, \Delta y$ di pag. 130 valeva

$$M_x = F_y \Delta y \sin\theta = B_z \, IS \sin\theta, \qquad F_y = \Delta x I B_z$$



θ è anche l'angolo fra $\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z)$ e $\boldsymbol{\mu} = IS\boldsymbol{n}$ con $\boldsymbol{n} = (0, \sin\theta, \cos\theta)$ la normale alla spira. Riscriviamo

$$M_x = \mu_y B_z, \qquad \boldsymbol{M} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}.$$

Quindi $M = -\partial U/\partial\theta$ dove $U = -\mu B \cos\theta = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ è una energia potenziale.

Applicazioni del dipolo magnetico:

- Bussola. Grazie all'attrito $\boldsymbol{\mu}$ si allinea a $\boldsymbol{B}$.
- Levitazione magnetica. Dipolo sospeso sopra spira: $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ è minima se $\boldsymbol{\mu}$ si allinea a $\boldsymbol{B}$ e scende verso B intensi. Ma un dipolo anti-parallelo a $\boldsymbol{B}$ mantiene la sua orientazione se ruota, per conservazione di $\boldsymbol{L} \propto \boldsymbol{\mu}$.

Momento su dipolo magnetico

Dimostrazione generale. Si consideri un circuito in campo magnetico esterno *costante*. La forza totale vale $\boldsymbol{F} = I(\oint d\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = 0$. Il momento delle forze vale

$$\boldsymbol{M} = \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{F} = I \oint \boldsymbol{r} \times (d\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B}) = I \oint (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}) d\boldsymbol{r} - 0$$

avendo espanso il doppio prodotto vettore ed usato che l'altro termine è proporzionale a $\oint d\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} = 0$. Per ciascuna componente di M

$$\boldsymbol{M}_i \quad = \quad I \oint (\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{B}) d\boldsymbol{r}_i = \frac{IB_j}{2} \oint [(r_j dr_i + r_i dr_j) + (r_j dr_i - r_i dr_j)]$$

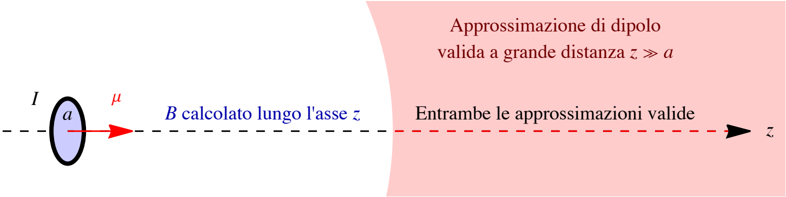
Il primo termine si semplifica in $d(r_i r_j)$ il cui integrale vale zero. Il secondo vale:

$$\boldsymbol{M} \quad = \quad I \oint [d\boldsymbol{r}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r}) - \boldsymbol{r}(\boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{r})] = (\frac{I}{2} \oint \boldsymbol{r} \times d\boldsymbol{r}) \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\mu} \times \boldsymbol{B}$$

Campo di dipolo magnetico — esempio

Sappiamo la forma generale del campo di dipolo. Dimostriamo che $\boldsymbol{\mu} = IS\boldsymbol{n}$ è vera per un caso particolare: una spira circolare di raggio a. Lungo il suo asse

$$B_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2(a^2+z^2)^{3/2}} \qquad \text{e, a grande distanza } z \gg a \qquad B_z \simeq \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}.$$



Il campo di dipolo magnetico, vero per sistema generico piccolo

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{3(\boldsymbol{\mu}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{r}}{r^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{r^3}\right] \qquad \text{e, sull'asse } \boldsymbol{\mu} \parallel \boldsymbol{r} \parallel \hat{\boldsymbol{z}} \qquad B_z = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\mu}{z^3} \stackrel{\checkmark}{=} \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\pi I a^2}{z^3}$$

avendo inserito $\mu = \pi I a^2$, il valore per una spira di raggio a.

Campo di dipolo magnetico

Dimostrazione che una piccola spira di superficie S con normale $\boldsymbol{n}$ percorsa da corrente I genera in P a grande distanza un $\boldsymbol{B}$ di dipolo $\boldsymbol{\mu} = IS\boldsymbol{n}$. Definendo O il centro della spira; $\boldsymbol{R} = OP$; $\boldsymbol{r}$ il raggio vettore dal centro della spira si ha:

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r})}{|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}|^3} \overset{R \gg a}{\simeq} \frac{\mu_0}{4\pi R^3} I \oint d\boldsymbol{s} \times (\boldsymbol{R}\frac{3\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{r}}{R^2} - \boldsymbol{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\frac{3(\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{R})\boldsymbol{R}}{R^5} - \frac{\boldsymbol{\mu}}{R^3} \right]$$

1o passaggio: si è espanso al primo ordine in $\boldsymbol{r}$: $|\boldsymbol{R} - \boldsymbol{r}|^{-3} \simeq R^{-3}(1 + 3\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{r}/R^2)$.
2a passaggio: il secondo termine dell'integrale è facile, visto che $d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{r} = r^2 \boldsymbol{n} d\theta$ e fornisce il *doppio* dell'ultimo termine del risultato. Per fare il primo termine dell'integrale conviene osservare che esso è ortogonale ad $\boldsymbol{R}$:

$$\oint d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R} \frac{\boldsymbol{R} \cdot \boldsymbol{r}}{R^2} = c \left[\boldsymbol{n} - \frac{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{R})}{R^2} \right]$$

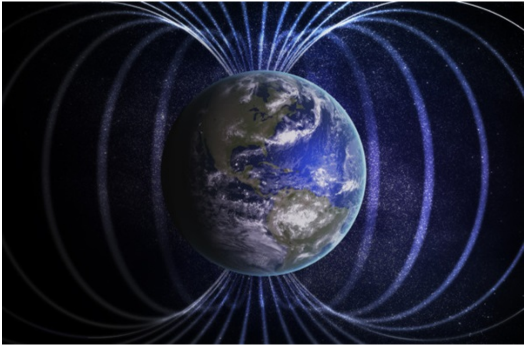
Mettendo l'asse z lungo $\boldsymbol{n}$ e l'asse x ortogonale ad $\boldsymbol{R} = R_z \boldsymbol{n} + R_y \hat{\boldsymbol{y}}$ e moltiplicando entrambi i lati per $\boldsymbol{n}$, il secondo termine diventa cR_y^2/R^2; nel primo si usa $\boldsymbol{n} \cdot (d\boldsymbol{s} \times \boldsymbol{R}) = d\boldsymbol{s} \cdot (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{n})$ ottenendo la costante c:

$$c = -\frac{R^2}{R_y^2} \cdot \frac{R_y^2}{R^2} \oint dx\, y = -S.$$

Fattore giro-magnetico g

- La Terra ha un campo magnetico circa di un dipolo $\mu_{\rm E} = 8.05\ 10^{22}$ J/T orientato verso sud. A Pisa (latitudine 45 gradi) $\boldsymbol{B}$ esce a 45 gradi:

$$B = \frac{\mu_0 \mu}{4\pi R^3}\sqrt{1+3\cos^2\theta} = 5\ 10^{-5}\,\mathrm{T}.$$



- Pulsar (stelle collassate a $R \sim 10\,\mathrm{km}$ che ruotano a $\omega \sim 1/\mathrm{s}$): $\mu \sim 10^{29}$ J/T.

Dipolo magnetico di particelle elementari

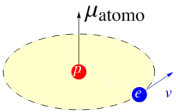
Gli elettroni che girano negli atomi secondo $m_e v_e^2/r = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ dovrebbero dare

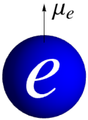
$$\mu_{\text{atomo}} \sim \frac{erv_e}{2} = \frac{e^3}{8\pi\epsilon_0 m_e v_e} \sim 1.3\ 10^{-23}\,\text{J/T}.$$

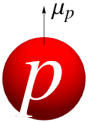
Si osserva che una bacchetta magnetica ha $\mu_{\text{bacchetta}} \sim$ J/T, quindi gli atomi hanno $\mu_{\text{atomo}} \sim \mu_{\text{bacchetta}}/N_A \sim 10^{-23}$ J/T. Osservando meglio si scopre che (alcuni) atomi e addirittura particelle elementari hanno dipoli magnetici **fissi**:

$$\mu_e = 0.93\ 10^{-23}\,\text{J/T}, \qquad \mu_p = 1.4\ 10^{-26}\,\text{J/T}.$$

Tutti gli elettroni hanno lo stesso $\mu = \mu_e$, come se fossero palline che girano su se stesse sempre alla stessa velocità! Similmente per protoni.





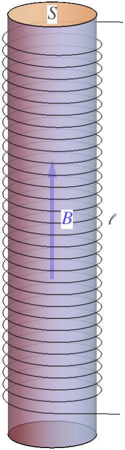


Classicamente ancora più incredibile di $p_{H_2O} = 6.2\ 10^{-30}$ C m.

Induttori ed energia magnetica

Auto-induzione

Auto-induzione: $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ con il $\boldsymbol{B}$ generato dalla corrente I nel circuito stesso. Un **induttore** è l'analogo magnetico di un condensatore: un dispositivo che immagazzina B e la sua energia. L'analogo di $C = Q/V$ è l'auto-induttanza L



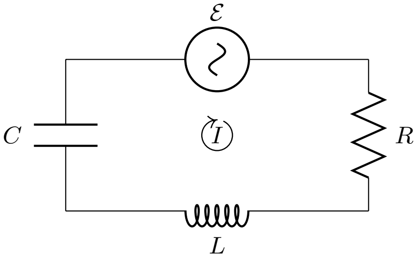
$$1/L = I/\Phi_B \qquad \text{cioè} \qquad \boxed{\Phi_B = LI}.$$

L si misura in T m^2/A $\equiv$ Henry.
Ai capi di una L costante: $\mathcal{E}_L = -\dot{\Phi}_B = -L\dot{I}$.
Una spira circolare genera B complicato: L dipende dallo spessore del filo. Il simbolo circuitale dell'induttanza è  in quanto il suo archetipo è un lungo solenoide di lunghezza ℓ ed area $S \ll \ell^2$ con $N = n\ell \gg 1$ spire. Il teorema di Ampere su circuito rettangolare implica che dentro $\boxed{B = \mu_0 n I}$ è costante. L'induttanza vale

$$L \equiv \frac{\Phi_B}{I} = \frac{NSB}{I} = \frac{\mu_0 S N^2}{\ell} = \mu_0 S \ell n^2.$$

Circuito RLC

L'induttanza contribuisce come una batteria all'equazione di un circuito RLC:



$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_L = \mathcal{E}_R + \mathcal{E}_C$$
$$\Downarrow$$
$$\mathcal{E} = L\dot{I} + RI + Q/C$$

Analogia formale fra circuito RLC e molla con attrito:

$$m\ddot{x} + \gamma\dot{x} + kx = F_{\rm ext} \qquad \text{analogo a} \qquad L\ddot{Q} + R\dot{Q} + Q/C = \mathcal{E}$$

Analogia formale fra circuiti RC e RL:

$$\mathcal{E} \leftrightarrow \mathcal{E}, \qquad Q \leftrightarrow I, \qquad R \leftrightarrow L, \qquad 1/C \leftrightarrow R.$$

RC: $\mathcal{E} = R\dot{Q} + Q/C$, carica $Q(t) = (C\mathcal{E})[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\tau = RC$ e $U_E = Q^2/2C$.
RL: $\mathcal{E} = L\dot{I} + RI$, carica $I(t) = (\mathcal{E}/R)[1 - e^{-t/\tau}]$ con $\boxed{\tau = L/R}$.

Il fatto che ci voglia tempo per carica o scarica indica che un'induttanza contiene **energia magnetica** associata alla corrente I. Dimostriamo che $U_B = LI^2/2$.

Energia magnetica

Energia magnetica in una induttanza:

$$\frac{dU_B}{dt} = -W = -\mathcal{E} I = L I \dot{I} = \frac{d}{dt}\frac{LI^2}{2} \qquad \boxed{U_B = \frac{LI^2}{2}}.$$

Quindi la densità di energia magnetica in un lungo solenoide vale

$$u_B = \frac{U_B}{V} = \frac{LI^2/2}{S\ell} = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

A pag. 192 dimostreremo che questo è un risultato generale: in presenza di E e B

$$\boxed{\text{densità di energia elettromagnetica} = u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}}$$

Max B: $u_B \lesssim u_E$ i.e. $B \lesssim \dfrac{E_{\text{atomo}}}{c} \sim \dfrac{e}{4\pi\epsilon_0 \text{Å}^2 c} \sim 1000\,\text{T}$. In pratica 40 T.

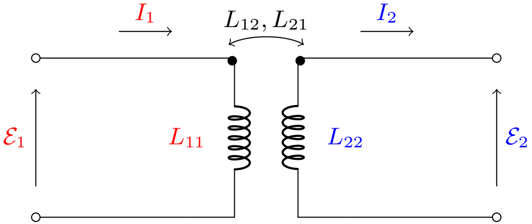
Una tipica induttanza vale $L \sim \mu_0 \cdot \text{m} \sim 10^{-6}\,\text{mT/A}$: se e.g. $I = 1\,\text{A}$ si ha $U = 10^{-6}\,\text{J}$ che è poca energia. Provoca le scintille negli interruttori. Per immagazzinare energia bisogna far circolare una corrente I, che viene dissipata da resistenze. Un condensatore è un migliore strumento per immagazzinare energia. L'induttanza ha come uso pratico il trasformatore.

Mutua induzione

Consideriamo due circuiti. Anche se sono separati, il magnetismo li accoppia:

$$-\mathcal{E}_1 = \dot\Phi_1 = L_{11}\dot I_1 + L_{12}\dot I_2, \qquad -\mathcal{E}_2 = \dot\Phi_2 = L_{22}\dot I_2 + L_{21}\dot I_1.$$

Applicazione: **trasformatore** (sarà discusso con il ferromagnetismo).



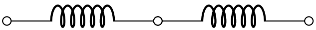
Si dimostra che $L_{12} = L_{21}$ o nuovamente con l'energia o con la geometria:

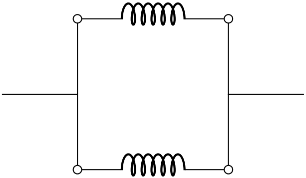
$$\begin{aligned} L_{12} &\equiv \frac{\Phi_{1,B_2}}{I_2} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int dS_1 \boldsymbol{n}_1 \cdot \oint d\boldsymbol{s}_2 \times \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\int dS_1 \boldsymbol{n}_1 \cdot \oint d\boldsymbol{s}_2 \times \boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int dS_1 \boldsymbol{n}_1 \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \oint \frac{d\boldsymbol{s}_2}{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint\oint \frac{d\boldsymbol{s}_1 \cdot d\boldsymbol{s}_2}{r} = L_{21}. \end{aligned}$$

e quindi conviene semplificare la notazione: $\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{pmatrix}$.

Induttanze in serie e parallelo

$$\mathcal{E}_1 = -L_1\dot{I}_1 - M\dot{I}_2$$
$$\mathcal{E}_2 = -L_2\dot{I}_2 - M\dot{I}_1$$





- Se $M = 0$ le induttanze si combinano come le resistenze: sono impedenze.
- In serie dritti: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = I_2$ implica $\boxed{L = L_1 + L_2 + 2M}$.
- In serie a rovescio: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2$ e $I = I_1 = -I_2$ implica $L = L_1 + L_2 - 2M$. $L > 0$ implica $M < (L_1 + L_2)/2$. Solenoide: $L_i = \mu_0 S\ell_i n^2 \gg M$, $\ell = \ell_1 + \ell_2$.
- In parallelo dritti $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2$ e quindi

$$\dot{I}_1 = -\mathcal{E}\frac{L_2 - M}{L_1 L_2 - M^2}, \qquad \dot{I}_2 = -\mathcal{E}\frac{L_1 - M}{L_1 L_2 - M^2}$$

$$-\mathcal{E} \equiv L\dot{I} = L(\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \qquad \boxed{L = \frac{L_1 L_2 - M^2}{L_1 + L_2 - 2M}}$$

  da cui $\boxed{M \leq \sqrt{L_1 L_2}}$, che è una condizione più stringente.
- In parallelo a rovescio viene $L = (L_1 L_2 - M^2)/(L_1 + L_2 + 2M)$.

Forza magnetica dall'energia

$\boldsymbol{F} = -\boldsymbol{\nabla} U$ in assenza di oggetti (come generatori) che fanno lavoro. Altrimenti complicano il bilancio energetico e serve più 'lavoro' per calcolare la stessa F.

Nel caso elettrico si aveva

$$Q = CV \qquad U = \frac{CV^2}{2} = \frac{Q^2}{2C} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{F} = \frac{V^2}{2}\boldsymbol{\nabla} C, \qquad \text{e.g.} \quad C = \epsilon_0 \frac{S}{d}.$$

Variando la geometria in assenza di generatori, Q rimane costante mentre V varia con la geometria. Quindi F vuole aumentare C. E.g. vuole ridurre la distanza d fra i piatti di un condensatore piano. Infatti cariche opposte si attraggono.

Nel caso magnetico si hanno formule analoghe:

$$\Phi = LI \qquad U = \frac{LI^2}{2} = \frac{\Phi^2}{2L} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\boldsymbol{F} = \frac{I^2}{2}\boldsymbol{\nabla} L} \qquad \text{e.g.} \quad L = \mu_0 N^2 \frac{S}{d}.$$

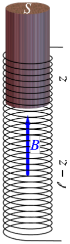
Variando la geometria in assenza di generatori e resistenze, I varia in maniera da mantenere Φ costante. Quindi F vuole aumentare L. E.g. vuole ridurre d avvicinando le spire di un solenoide. Infatti correnti concordi si attraggono.

Esempio: materiale in solenoide...

Magnetismo nella materia

Magnetismo nella materia

Si osserva forza su materiali inseriti in B di solenoide. Interpretazione: come se avessero $\mu \neq \mu_0$, quindi entrando di z modificano



$$L = L_z + L_{d-z} = [\mu z + \mu_0(\ell - z)]n^2 S \text{ producendo } F = I^2(\mu - \mu_0)n^2 S/2.$$

Alcuni materiali detti *diamagnetici* sono respinti: $\mu < \mu_0$, come se fossero dipoli $\downarrow$, analoghi alla dielettricità.
Altri materiali detti *paramagnetici* sono attratti: $\mu > \mu_0$, come dipoli $\uparrow$.
L'effetto è dovuto al dipolo magnetico delle molecole. Un $\boldsymbol{B}$ nella materia induce dipoli $\boldsymbol{\mu}$ con densità $\boldsymbol{M} = n\boldsymbol{\mu}$ che correggono $\boldsymbol{B}$:
Anche i dipoli magnetici possono essere propri o indotti:

- Diamagnetismo $\mu < \mu_0$: materia con dipoli magnetici indotti **scherma $\boldsymbol{B}$**.
- Paramagnetismo $\mu > \mu_0$: materia con dipoli magnetici propri **aumenta $\boldsymbol{B}$**.
- Si osserva poi il *ferromagnetismo* $\mu \gg \mu_0$.

Comprensione teorica: meccanica quantistica, o argomenti classici hand-waving.

Diamagnetismo (dipolo indotto)

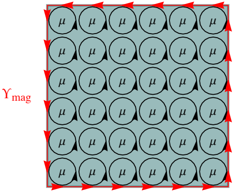
Effetto Zeeman: $\boldsymbol{B}(t)$ esterno varia la velocità angolare degli elettroni negli atomi

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_0 + \boldsymbol{\omega}_B, \qquad \boldsymbol{\omega}_B = \frac{e}{2m_e}\boldsymbol{B}.$$

(Assumendo che il raggio a rimanga lo stesso, fissato da meccanica quantistica. Lenz: $\dot{B}_z$ induce $E_\theta = -r\dot{B}_z/2$ che classicamente modifica la traiettoria).

Il dipolo magnetico indotto vale

$$\boldsymbol{\mu} = -\frac{ea^2}{2}\boldsymbol{\omega}_B = -\frac{e^2a^2}{4m_e}\boldsymbol{B}.$$



La legge di Lenz fissa il segno: dipoli $\boldsymbol{\mu}$ con densità n in solenoide generano $\delta\boldsymbol{B} = \mu_0 n\boldsymbol{\mu}$ che si oppone al $\boldsymbol{B}$ iniziale.

Analogamente alla dielettricità, il magnetismo viene schermato, ma di poco

$$\chi_m \overset{\sim}{\equiv} \frac{\delta B}{B} = -\mu_0 n\frac{e^2a^2}{4m_e} \sim -\frac{e^2/4\pi\epsilon_0 a}{m_e c^2} = -\frac{r_e}{a} \sim -10^{-(4\div 8)}.$$

La piccolezza segue da analisi dimensionale: m_e al denominatore. Senza risommare $\mu = (1+\chi_m)\mu_0 \equiv \mu_r\mu_0 < \mu_0$ ($\epsilon > \epsilon_0$ ma $1/\epsilon_0$ corrisponde a μ_0).

Misure: acqua ($\chi_m = -0.90\ 10^{-5}$), rame ($-0.90\ 10^{-5}$), idrogeno ($-0.45\ 10^{-8}$).

Paramagnetismo (dipolo proprio)

Un paramagnete è attratto da B forti, come un dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu} \parallel +\boldsymbol{B}$ è attirato da $U = -\boldsymbol{\mu} \cdot \boldsymbol{B}$ verso B forti rotazionali, senza analogo elettrico.
Segno: correnti parallele si attirano, a differenza di cariche eguali che si respingono.

Alcune sostanze hanno particelle con momento di dipolo magnetico permanente $\bar{\boldsymbol{\mu}}$, ma orientato in modo casuale per via dell'agitazione termica. $U = -\bar{\boldsymbol{\mu}} \cdot \boldsymbol{B}$ li orienta parzialmente lungo $+\boldsymbol{B}$. L'effetto è soppresso da $\bar{\mu}B/kT$ analogamente a come una bussola non indica il nord se agitata. Il dipolo medio

$$\mu \sim \bar{\mu}(\bar{\mu}B/kT)$$

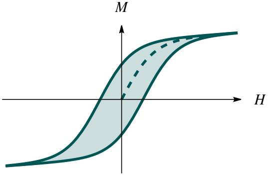
è proporzionale a $\bar{\mu}$ per il grado di allineamento dei dipoli, a sua volta proporzionale a $\bar{\mu}$. L'effetto è analogo a quello elettrico, con una differenza importante: *il segno*. Si ha $\mu > \mu_0$, anche se nuovamente è un effetto piccolo:

$$\mu_r \sim 1 + 10^{-(3 \div 6)}.$$

Esempio: ossigeno ($+0.38\ 10^{-5}$), alluminio ($+2.08\ 10^{-5}$).

Ferromagnetismo: sassi di Magnesia

Si osserva che alcuni ossidi di ferro hanno $\mu_r \sim 10^{3\div 5}$; che dipende molto da materiale e impurità; che la magnetizzazione M dipende dalla storia e rimane anche spegnendo il campo esterno ('ciclo di isteresi').



Interpretazione: dipoli magnetici molecolari vogliono allinearsi collettivamente in una direzione. Un piccolo B esterno indica la direzione, stimolando l'allineamento collettivo che genera un grosso B.

Questi sono hand-waving: maneggiamenti semi-logici che arrivano al risultato.

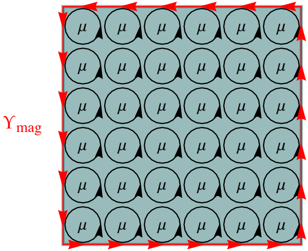
$$\frac{1\cancel{6}}{\cancel{6}4} = \frac{1}{4}$$

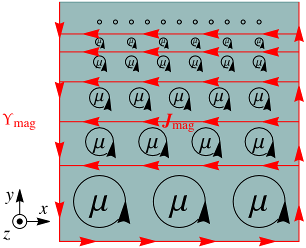
(Para-, dia-, e ferro-magnetismo non dovrebbero esistere, secondo la fisica statistica classica in cui la probabilità $\wp \propto e^{-E/k_B T}$ è determinata dall'energia $E = \frac{m}{2}v^2 + q\varphi$ che non dipende da B. Un dipolo magnetico ha energia $E = -\mu \cdot B$ ma un elettrone che gira non è un dipolo: è un elettrone che gira. In meccanica quantistica il principio di Pauli è essenziale nello spiegare il ferromagnetismo).

Inoltre, si osserva l'esistenza di **superconduttori**, materiali con $\sigma = \infty$ che espellono B e quindi descritti da $\mu_r = 0$. Sono uno stato quantistico macroscopico.

Magnetismo nella materia in generale

Tanti dipoli magnetici $\boldsymbol{\mu}$ con densità volumetrica n producono la **densità di magnetizzazione** $\boldsymbol{M} \equiv n\boldsymbol{\mu}$. Pensandoli come tante correnti che girano, un $\boldsymbol{M}$ costante genera una densità di corrente "di magnetizzazione" $\boxed{\boldsymbol{\Upsilon}_{\rm mag} = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{n}}$ sulla superficie del materiale magnetizzato:





Un $\boldsymbol{M}$ non costante $M_z(y)$ produce $J^x_{\rm mag}$. In generale

$$\boxed{\boldsymbol{J}_{\rm tot} = \boldsymbol{J}_{\rm free} + \boldsymbol{J}_{\rm mag} \qquad \boldsymbol{J}_{\rm mag} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{M}} \qquad \Rightarrow \qquad \oint \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{s} = I^{\rm conc}_{\rm mag}.$$

Dimostrazione: sommando le $\boldsymbol{\Upsilon}_{\rm mag}$ su facce attigue di piccoli cubetti...

Magnetismo nella materia in generale

Il trattamento generale ricalca quello della dielettricità:

$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\rho/\epsilon_0$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}$
$\rho=\rho_{\text{free}}+\rho_{\text{pol}}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}_{\text{free}}+\boldsymbol{J}_{\text{mag}}$
$\rho_{\text{pol}}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{J}_{\text{mag}}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}$
$\sigma_{\text{pol}}=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\Upsilon}_{\text{mag}}=\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=\rho_{\text{free}}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\text{free}}$
$\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}=\epsilon\boldsymbol{E}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M}=\boldsymbol{B}/\mu$
$\boldsymbol{P}\approx\chi_e\epsilon_0\boldsymbol{E}$	$\leftrightarrow$	$\boldsymbol{M}\approx\chi_m\boldsymbol{H}$

Separiamo la sorgente $\boldsymbol{J}$ in libera più quella dovuta alla magnetizzazione:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}_{\text{tot}}=\mu_0(\boldsymbol{J}_{\text{free}}+\boldsymbol{J}_{\text{mag}})=\mu_0\boldsymbol{J}_{\text{free}}+\mu_0\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{M}$$

diventa $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{B}/\mu_0-\boldsymbol{M})=\boldsymbol{J}_{\text{free}}$, riscritta come

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}_{\text{free}},\qquad \boldsymbol{B}\equiv\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})}$$

Descrivendo la materia con l'equazione approssimata $\boxed{\boldsymbol{M}=\chi_m\boldsymbol{H}}$ si ha

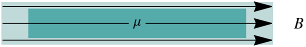
$$\boxed{\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}}\qquad\text{con}\qquad\boxed{\mu=\mu_0(1+\chi_m)=\mu_0\mu_r}$$

Ferromagnetismo

- Un materiale: come se $\mu_0 \to \mu$.
- Due materiali con diversi μ: risolvere in ognuno, e raccordare sulla superficie di separazione. Condizioni di raccordo in assenza di $\boldsymbol{J}_{\rm free}$:

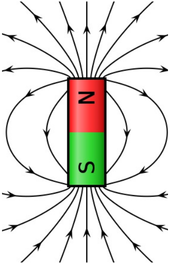
$$\boxed{\Delta B_\perp = 0, \qquad \Delta H_\parallel = 0}$$

Buco lungo: $H_{\rm in} = H_{\rm out}$ quindi $B_{\rm in}/\mu_{\rm in} = B_{\rm out}/\mu_{\rm out}$. Buco corto: $B_{\rm in} = B_{\rm out}$.



In generale:

$$B_\perp^{\rm aria} = B_\perp^{\rm ferro}, \qquad \frac{B_\parallel^{\rm aria}}{\mu^{\rm aria}} = \frac{B_\parallel^{\rm ferro}}{\mu^{\rm ferro}}.$$

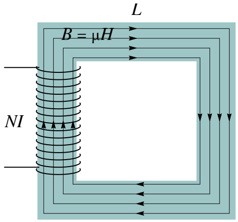


$\mu_r \gg 1$ semplifica: $B_\parallel^{\rm ferro} \gg B_\parallel^{\rm aria}$, il ferro ha alta *permeabilità magnetica* ed è come un solenoide: le correnti sui lati generano dentro. $\boldsymbol{B}$ esce solo ai bordi $\perp$. Altrimenti le linee di campo $\boldsymbol{B}$ rimangono dentro il ferromagnete, in cui

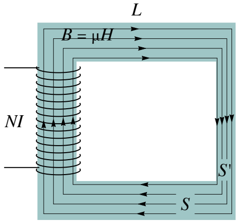
$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J}_{\rm free} \end{array} \right. \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} \Phi_B = 0 \\ \oint \boldsymbol{H} \cdot d\boldsymbol{s} = I_{\rm free}^{\rm conc} \end{array} \right.}$$

Magnetismo nel ferro: esempi

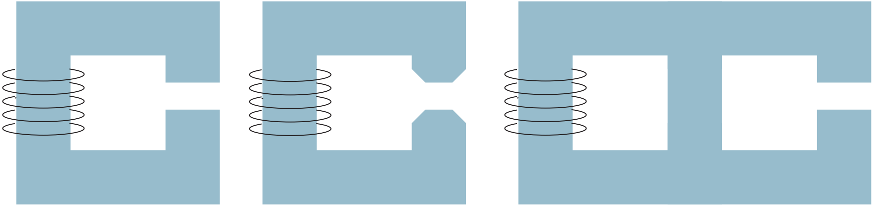
$\Phi_B = 0$. Quindi:
stessa area $\Rightarrow$ stesso $B \Rightarrow$ stesso H.
La circuitazione di H fornisce: $4LH = NI$
Quindi $B = \mu H = NI\mu/4L$.



$\Phi_B = 0$. Quindi $SB = S'B'$.
area dimezzata $\Rightarrow$ B raddoppiato $\Rightarrow$ H raddoppiato.
La circuitazione di H fornisce: $5LH = NI$
Quindi $B = \mu H = NI\mu/5L$



Magnetismo nel ferro: esempi



a) $\oint \boldsymbol{H}\cdot d\boldsymbol{s} = NI$ con $H = B/\mu$ e $B_{\text{in}} = B_{\text{out}}$ nel buco di spessore d. Quindi

$$\frac{(4L-d)B}{\mu} + \frac{dB}{\mu_0} = NI \qquad \Rightarrow \qquad B = \frac{NI\mu}{4L + d(\mu_r - 1)}$$

Un $d \sim (\mu_0/\mu)L \ll L$ riduce B.

b) Φ_B è costante, quindi $B_{\text{buco}}S_{\text{buco}} = BS$.

c) 'Riluttanze' o ragionamento. Definiamo B_L e B_R nelle maglie *L*eft e *R*ight.

$$4LB_L/\mu - LB_R/\mu = NI \qquad (4L-d)B_R/\mu - LB_L/\mu + dB_R/\mu_0 = 0.$$

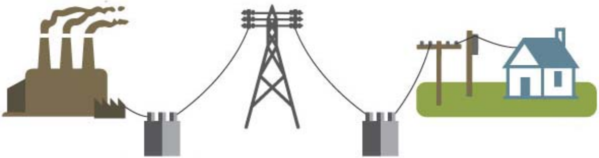
Quindi nel buco $B_R = NI\mu/(15L + 4d(\mu_r - 1))$.

A che serve il trasformatore

$\mu_r \gg 1$ consente di costruire pratici **trasformatori** di **corrente alternata**.

Per trasportare una data potenza $W = VI$ da una centrale elettrica al luogo di consumo conviene utilizzare un grosso V ed una piccola I, in modo da ridurre la potenza RI^2 dissipata per effetto Joule lungo la linea di trasmissione.

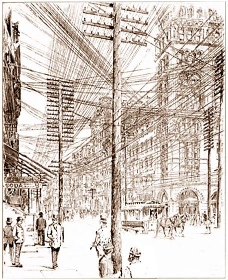
Esempio: per trasmettere $W = 10$ kW a $V = 100$ V serve $I = 100$ A; se invece la trasmetto a 10 kV basta $I = 1$ A, riducendo di 10^4 la potenza dissipata.



Però vendere corrente ad alto voltaggio ucciderebbe i clienti. Va trasformata a basso voltaggio. È possibile farlo usando l'induzione magnetica $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$ che necessita di correnti alternate (la corrente continua darebbe $\Phi_B = \text{cte}$).

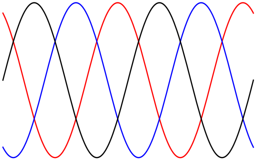
Guerra delle correnti (1880-1890)

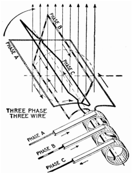
Per i minori di costi di trasporto la tecnologia della corrente alternata ha vinto su quella della corrente continua, sostenuta da Edison, ma che riusciva a venderla solo fino ad 1 km dalla centrale. A New York non erano contenti di avere una centrale a carbone e un cavo per ogni voltaggio. Westinghouse e Tesla proposero la corrente alternata.
Edison fece una campagna di boicottaggio sottolineando il pericolo dell'alta tensione, brevettò la sedia elettrica, uccise Topsy, perse e venne cacciato dalla Edison General Electric che diventò General Electric.



Tesla ed altri ottimizzarono con la **corrente trifase** che non necessita di cavi di ritorno: fattore 2 guadagnato in energia trasportata, B ruotanti...

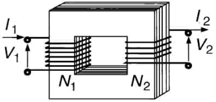
$$\sum_{k=1}^{N} \sin(\theta + 2\pi k/N) = 0 \qquad N = 3$$

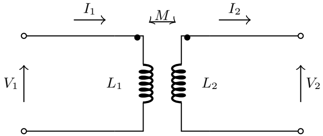




Trasformatore

Due circuiti vengono avvolti N_1 ed N_2 volte attorno ad un magnete toroidale di lunghezza ℓ: dentro $B = \mu(N_1 I_1 + N_2 I_2)/\ell$.





I coefficienti di auto-induzione valgono:

$$L_1 = \frac{\Phi_{B1}(I_1)}{I_1} = \frac{\mu S N_1^2}{\ell}, \qquad L_2 = \frac{\Phi_{B2}(I_2)}{I_2} = \frac{\mu S N_2^2}{\ell}.$$

La mutua induzione M viene simmetrica e massima, $M^2 = L_1 L_2$

$$M = \frac{\Phi_{B2}(I_1)}{I_1} = \frac{\Phi_{B1}(I_2)}{I_2} = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell}.$$

Trasformatore ideale

Consideriamo il limite $N_1 \gg N_2$ in cui il primario comanda ed il secondo riceve:

$$-\mathcal{E}_1 \approx L_1 \dot{I}_1, \qquad -\mathcal{E}_2 \approx M\dot{I}_1$$

In questo limite $\boxed{\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 = M/L_1 = N_2/N_1}$.
In realtà c'è un sistema di equazioni accoppiate: i circuiti si influenzano a vicenda. Senza risolvere il sistema completo, è chiaro che il trasformatore funziona solo quando vicino al limite ideale. Se M è invece molto più piccolo, l'effetto magnetico, lungi da funzionare, diventa trascurabile.

Supponiamo di voler trasformare una corrente alternata a $\omega = 2\pi$ 50Hz da $\mathcal{E}_1 = 60\,\text{kV}$ a $\mathcal{E}_2 = 220\,\text{V}$ per una potenza domestica $W = \mathcal{E}I = 3\,\text{kW}$. Serve

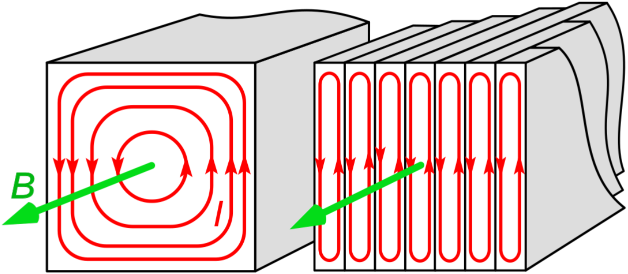
$$I_1 = \frac{W}{\mathcal{E}_1} = 0.05\,\text{A} \qquad M \approx \frac{\mathcal{E}_2}{\omega I_1} \approx 14\,\text{Henry} \qquad L_1 \approx \frac{\mathcal{E}_1}{\omega I_1} \approx 3400\,\text{Henry}.$$

Realizzabile con $S = 0.01\,\text{m}^2$, $\ell = 0.1\,\text{m}$, $\mu_r = N_1 = 3000$, $N_2 = N_1\mathcal{E}_2/\mathcal{E}_1 \sim 11$

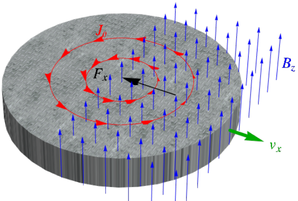
$$M = \frac{\mu S N_1 N_2}{\ell} \sim 14\,\text{Henry}, \qquad L_1 = \frac{\mu S N_1^2}{\ell} \sim 3400\,\text{Henry}.$$

Correnti parassite

Siccome $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$ nascono $\boldsymbol{E}$ 'ruotanti' che generano **correnti parassite** $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ che dissipano energia per effetto Joule $W_J = \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$ riscaldando i trasformatori. Ridotte mettendo lamine di ferro separate da isolanti.

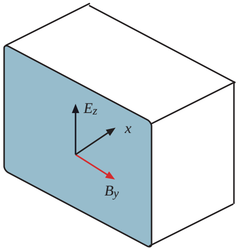


Campi $\boldsymbol{E}$ 'ruotanti' e correnti parassite $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ nascono anche quando un ferromagnete entra in $\boldsymbol{B}$: la forza magnetica su J agisce come attrito, in maniera da conservare l'energia.
Usate come freno per ruote di treni.



Effetto pelle

Parallelamente alla superficie di un semipiano metallico con permeabilità magnetica μ e conducibilità σ viene generato un campo magnetico oscillante



$$B_y = B_0 \cos \omega t = \Re B_0 e^{-i\omega t}.$$

B_y genera $E_z(x)$ che genera J_z che corregge $B_y(x)$:

$$\begin{cases} \partial H_y/\partial x = (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{H})_z = J_z = \sigma E_z \\ \partial E_z/\partial x = -(\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E})_y = \dot{B}_y = \mu \dot{H}_y \end{cases}$$

Eliminando E_z, 'equazione di diffusione' per H_y:

$$\frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = \mu\sigma \frac{\partial H_y}{\partial t}. \qquad \text{A regime: } \frac{\partial^2 H_y}{\partial x^2} = -k^2 H_y \qquad \text{con} \qquad k^2 \equiv i\omega\mu\sigma$$

quindi $k = (1+i)/\delta$ con $\delta = \sqrt{2/\omega\mu\sigma}$. Soluzione a regime:

$$H_y(x,t) = \Re \frac{B_0}{\mu_0} e^{-i\omega t - kx} = \frac{B_0}{\mu_0} e^{-x/\delta} \cos(\frac{x}{\delta} + \omega t).$$

B entra per la 'lunghezza di pelle' δ, venendo dissipato da correnti parassite. In un filo $J_z = \sigma E_z$ produce B_θ che spinge cariche all'esterno (corregge E e quindi J) aumentando la resistenza R se lo spessore è $\sim \delta$ (esercizio 201).


4a equazione di Maxwell:
corrente di spostamento

Riassunto del corso in 6 equazioni?

4 equazioni di Maxwell, forza, conservazione della carica?

$$\begin{cases} 1) & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ 2) & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ 3) & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\ 4) & \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

"B genera E."

(Più equazioni approssimate per la materia)

L'è tutto sbagliato, l'è tutto da rifare!

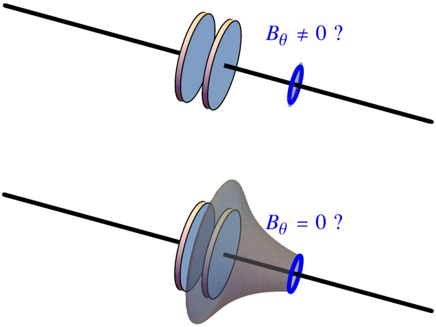
Le 6 equazioni fondamentali si contraddicono

Esempi pratici:

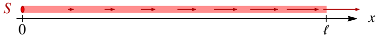
- Condensatore con $Q(t)$: $I = \dot{Q}$ nei fili, deve esistere un B. Applicando

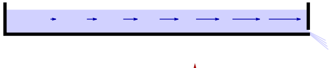
$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 I_{\rm conc}$$

  si trova che $I_{\rm conc}$ dipende da quale superficie uno sceglie: $I_{\rm conc} = I$ sui lati, ma 0 fra i piatti.



- Scarica di un filo carico: $I = -x\dot{\lambda}$ dipende dalla posizione. $I_{\rm conc} = ?$.





Corrente di spostamento

In generale: la divergenza della dubbia IV equazione, usando l'identità

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B}) = \sum_{ijk} \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

ovvero

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{A'} \times \boldsymbol{B}) = (A_y A'_z - A_z A'_y) B_x + (A_z A'_x - A_x A'_z) B_y + (A_x A'_y - A_y A'_x) B_z$$

implica $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = 0$. Incompatibile con la conservazione della carica $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{J} = -\dot{\rho}$.

Una teoria inconsistente ha funzionato abbastanza. In fisica serve meno rigore che in matematica perché c'è una seconda gamba, l'esperimento. Ormai siamo nel bacino di attrazione della teoria giusta, ci si arriva matematicamente.
Maxwell nel 1863 (quando c'era ancora confusione fra e.m. esatto nel vuoto ed e.m. approssimato nella materia) rimediò modificando la IV equazione in

$$\boxed{\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = \mu_0 (\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_S) \qquad \boldsymbol{J}_S = \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}}$$

la cui divergenza **implica** la conservazione della carica, grazie a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$.
Il nuovo effetto fisico predetto è chiamato **corrente di spostamento** $\boldsymbol{J}_S$ perché appare quando si spostano cariche e quindi $\dot{\boldsymbol{E}} \neq 0$. Equivalente integrale:

$$\oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0 (I_{\text{conc}} + \epsilon_0 \dot{\Phi}_E)$$

Riassunto del corso in 5 equazioni

$$
\begin{cases}
1) & \nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\
2) & \nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
3) & \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \\
4) & \nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J} + \mu_0 \epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{cases}
\qquad \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})
$$

Implicano la 6a equazione, conservazione della carica elettrica.
Che $\boldsymbol{E} \leftrightarrows \boldsymbol{B}$ sono oggetti fisici che si generano a vicenda.
Implicano la relatività.

Corrente di spostamento: esempi

Sfera carica in materiale con conducibilità σ. La corrente ha simmetria sferica: $J_r = \sigma E_r = \sigma Q/4\pi\epsilon_0 r^2$. Per simmetria sferica non può nascere alcun campo magnetico. Ed infatti $J_r + \epsilon_0 \dot{E}_r = (\sigma - \epsilon_0/\tau)E_r = 0$ in quanto $\tau = \epsilon_0/\sigma$.

In un conduttore generico con σ cte che si scarica come $e^{-t/\tau}$ con $\tau = \epsilon_0/\sigma$:

$$\boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_S = \sigma \boldsymbol{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} = 0.$$

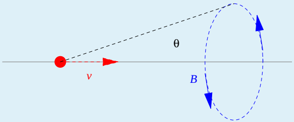
Carica q in moto con $v \ll c$. In prima approssimazione $\boldsymbol{E} \simeq q\boldsymbol{r}/4\pi\epsilon_0 r^3$. Genera

$$2\pi r B_\theta = \oint \boldsymbol{B} \cdot d\boldsymbol{s} = \mu_0\epsilon_0 \frac{d\Phi_E}{dt} = \mu_0 q \frac{d}{dt}\frac{1-\cos\theta(t)}{2} = \frac{\mu_0 q v r^2}{2(r^2 + (x-vt)^2)^{3/2}}$$

Se $v \sim c$ occorre procedere oltre $E_{\text{Coulomb}} \to B$: $B \to E' \to B' \to E'' \ldots$

Riduzionismo: una fila di cariche riproduce il campo di una corrente $I = \lambda v$:

$$B_\theta = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda\, dx\ \mu_0 v r}{4\pi[r^2 + (x-vt)^2]^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$



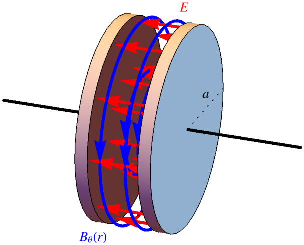
Corrente di spostamento in condensatore

Condensatore con $Q(t)$ e.g. $Q_0 e^{-t/\tau}$ o $Q_0 \cos\omega t$.
La corrente di spostamento vale $J_s = \epsilon_0 \dot{E} = \dot{\sigma}$,

$$I_\mathrm{s} = \Phi_{J_\mathrm{s}} = S\epsilon_0 \dot{E} = S\dot{\sigma} = \dot{Q} = I.$$

Dentro i piatti J_s genera

$$B_\theta(r) = \frac{\pi r^2 \mu_0 J_\mathrm{s}}{2\pi r} = \frac{\mu_0 r I}{2S} \qquad \text{per} \quad r < a.$$



Energia magnetica:

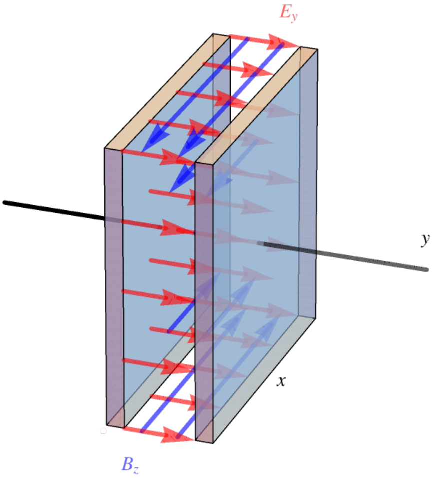
$$U_B = \int dV \frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{d\mu_0 I^2}{16\pi}, \qquad U_E = V\frac{\epsilon_0 E^2}{2}, \qquad \frac{U_B}{U_E} = \frac{1}{8}\left(\frac{a}{c\tau}\right)^2 \qquad \tau \equiv \left|\frac{Q}{\dot{Q}}\right|.$$

L'energia magnetica è importante se Q varia significativamente nel tempo impiegato dalla luce ad attraversare l'apparato. In tal caso occorre risommare $E \to B \to E \to B \cdots$ o risolvere Maxwell trovando $E \propto J_0(\omega r/c)$. La geometria cilindrica porta a funzioni di Bessel; meglio passare a geometria piana.

Condensatore con geometria piana

Consideriamo $E_y^{(0)} = E_0 \sin \omega t$. Non risolve IV_y: $\dfrac{\partial B_x}{\partial z} - \dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial E_y}{\partial t}$.

Aggiungiamo $B_z^{(1)} = -\dfrac{1}{c^2}\displaystyle\int_0^x dx\, \dot{E}_y^{(0)} = -\dfrac{x\omega}{c}\dfrac{E_0}{c}\cos(\omega t)$. Ha divergenza zero.



FIAT LVX

Onde elettromagnetiche

Onda piana nel vuoto

Cerchiamo una soluzione in cui $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ dipendono da x, t ma non da y, z.
Le 4 eq. di Maxwell nel vuoto diventano:

$$\begin{cases} 1) & & \dfrac{\partial E_x}{\partial x} = 0 & \\ 2) & -\dfrac{\partial E_z}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_y}{\partial t}, & \dfrac{\partial E_y}{\partial x} = -\dfrac{\partial B_z}{\partial t}, & 0 = \dfrac{\partial B_x}{\partial t} \\ 3) & & \dfrac{\partial B_x}{\partial x} = 0 & \\ 4) & -\dfrac{\partial B_z}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_y}{\partial t}, & \dfrac{\partial B_y}{\partial x} = \epsilon_0\mu_0 \dfrac{\partial E_z}{\partial t}, & 0 = \dfrac{\partial E_x}{\partial t} \end{cases}$$

Quindi E_x, B_x sono costanti, e possiamo metterli a zero perchè non descrivono fisica interessante. Le equazioni si dividono in due coppie di sistemi di 1o grado per E_z, B_y e per E_y, B_z. Aggiungendo opportune $\partial/\partial x$ e $\partial/\partial t$ vengono ridotte a 4 equazioni singole di 2o grado, trovando che tutte hanno la stessa forma:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) W = 0 \qquad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \qquad W = \{E_z, B_y, E_y, B_z\}.$$

Il segno 'spazio $-$ tempo' arriva dal segno di Lenz in $\mathcal{E} = -\dot{\Phi}_B$.

Equazione d'onda

È l'equazione delle onde, risolta da due onde che vanno una avanti ed una indietro a velocità c, con forma descritta da due funzioni generiche f e g:

$$W(x,t) = f_W(x-ct) + g_W(x+ct)$$

come si verifica passando alle variabili $u = x - ct$, $v = x + ct$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{c}\frac{\partial v}{\partial t}\frac{\partial}{\partial v} = -\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}$$

nelle quali l'equazione delle onde diventa

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) W = 4\frac{\partial W}{\partial u \partial v} = 0.$$

Trucco matematico simile: in 2 dimensioni

$$\nabla^2 \varphi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\varphi = 4\frac{\partial \varphi}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

dove $z = x + iy$. Risolto quindi da $\varphi = f(z) + g(\bar{z})$.

Onda piana nel vuoto

Combinando le equazioni abbiamo perso un po'di informazione. Imponendo II_z ($\partial_t B_z = -\partial_x E_y$) si trova che B_z è legato ad E_y come:

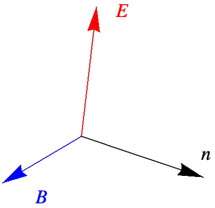
$$E_y = f_y(x - ct) + g_y(x + ct) \qquad \Rightarrow \qquad B_z = \frac{1}{c} f_y(x - ct) - \frac{1}{c} g_y(x + ct)$$

a meno di una funzione $\delta B_z(x)$ che deve valere zero per via della IV eq. di Maxwell. Prendendo solo l'onda in avanti si trova:

$$\begin{cases} E_y = f_y(x - ct) \\ E_z = f_z(x - ct) \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} B_y = -E_z/c \\ B_z = +E_y/c \end{cases}$$

In notazione vettoriale questo significa

$$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}/c$$



Per una generica onda piana $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sono ortogonali fra di loro ed alla direzione di propagazione, $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ nei conti attuali. Le equazioni di Maxwell sono risolte da onde con **polarizzazione** trasversa alla direzione del moto.

Equazione d'onda in notazione vettoriale

Conto ripetuto in notazione vettoriale. Prendiamo il rotore della II equazione:

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial}{\partial t} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{B} = -\frac{\partial}{\partial t} \left[\mu_0 \boldsymbol{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \right]$$

avendo usato la IV. Usando l'identità sul doppio prodotto vettore

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E}) = \boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E}) - \nabla^2 \boldsymbol{E}$$

nel vuoto $\rho = \boldsymbol{J} = 0$ si ottiene il d'Alambertiano $\boxed{\Box^2 \equiv \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}}$:

$$\Box^2 \boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0.$$

Prendendo il rotore della IV equazione si ottiene la stessa equazione per $\boldsymbol{B}$:

$$\Box^2 \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0.$$

Quindi $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ sono onde piane:

- La I e III equazione implicano campi perpendicolari alla direzione $\boldsymbol{n}$.
- La II e IV equazione implicano $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{B}$ con $E = cB$.

Onde piane nel vuoto

Per via del *teorema di Fourier* hanno interesse **onde piane** infinite della forma:

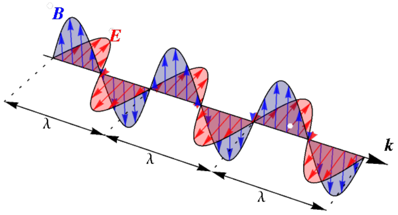
$$\boxed{\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t), \qquad \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_0 \cos(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x} - \omega t)}$$

dove il **vettore d'onda** $\boldsymbol{k}$ è legato alla **pulsazione** ω dalla **relazione di dispersione** $\boxed{\omega^2 = c^2 \boldsymbol{k}^2}$. Polarizzazione trasversa alla direzione del moto $\hat{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{k}/k$:

$$\boxed{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E} = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B} = 0 \qquad \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{k}} \qquad c\boldsymbol{B} = \hat{\boldsymbol{k}}\times\boldsymbol{E}}.$$

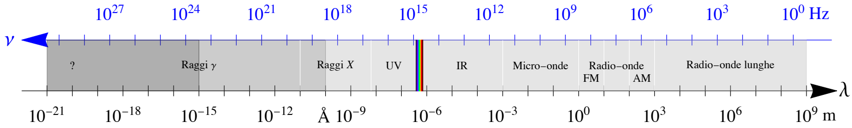
Si definiscono **lunghezza d'onda** λ e **frequenza** $\nu = 1/T$:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \qquad \omega = 2\pi\nu \qquad c = \frac{\omega}{k} = \lambda\nu.$$

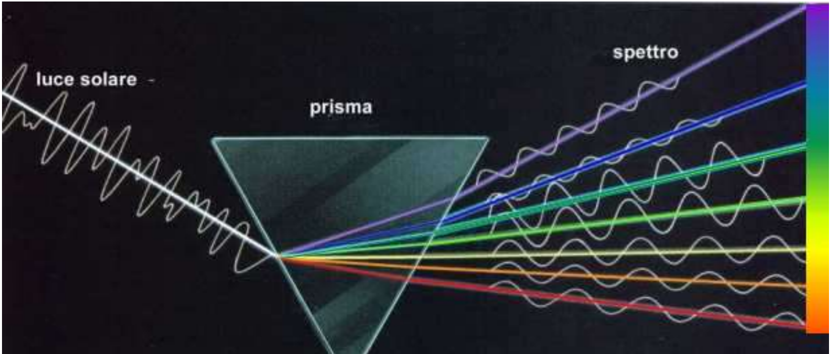


Spettro in frequenza

Luce visibile per λ fra 400 nm (blu) e 700 nm (rosso): $\nu \sim 10^{16}$ Hz $\sim \nu_{\text{atomo}}$ e quindi $\lambda \gg$ Å. Predice onde invisibili. Raggi X hanno $\lambda \sim$ Å. Hertz nel 1886 osservò onde 'radio' con $\nu \sim 10^6$ Hz trasmettono circa 10^6 bit/s.



Bianco = spettro. Prisma separa, e termometri si scaldano anche oltre il visibile



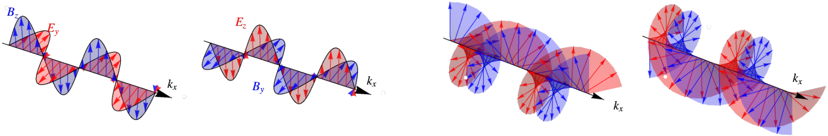
Polarizzazioni

I campi si sommano, $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2$, due onde fanno **interferenza**. Un'onda generica di dato $\boldsymbol{k}$ è scrivibile come sovrapposizione lineare di due *polarizzazioni* indipendenti. Usiamo come *base* due onde lineari con $\boldsymbol{E}$ perpendicolari.

Se hanno la stessa fase, la somma è **lineare** storta. Per $\hat{\boldsymbol{k}} = (1, 0, 0)$:

$$\boldsymbol{E}_0 = E_0(0, \sin\theta, \cos\theta) \qquad \text{orizzontale/verticale.}$$

In Italia i segnali TV sono trasmessi con $\boldsymbol{E}$ orizzontale, in UK con $\boldsymbol{E}$ verticale.



Fase diversa dà polarizzazione ellittica. Conviene usare la notazione complessa:

$$\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{E}_0 \exp(i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - i\omega t).$$

Sfasamento di 90°: polarizzazione **circolare** sinistra/destra: $\boldsymbol{E_0} = E_0 \dfrac{(0, 1, \pm i)}{\sqrt{2}}$.

In generale polarizzazione **ellittica**: $\boldsymbol{E_0} = E_0(0, \cos\theta, e^{i\delta} \sin\theta)$: 

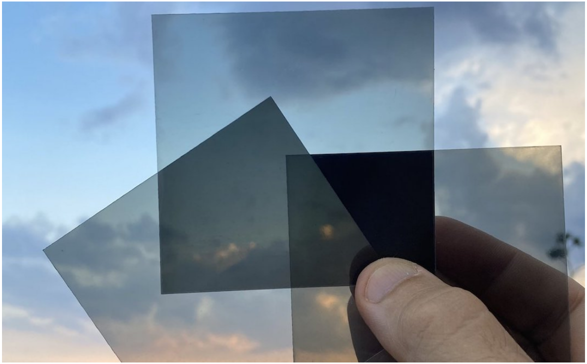
(L'energia $u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 \neq u_1 + u_2$ non si somma: $0 \leq u \leq 4u_{1,2}$ se $u_1 = u_2$. Onda anomala. Similitudine con ψ e $\wp = |\psi|^2$ in meccanica quantistica).

Polarizzatori

Alcuni cristalli, per via della disposizione degli atomi, fanno passare solo una polarizzazione. Polarimetro trasforma onda generica in onda polarizzata lineare

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\parallel + \boldsymbol{E}_\perp \to \boldsymbol{E}_\parallel.$$

Quindi, di un onda polarizzata lineare, passa la proiezione $\cos(\theta_{\rm onda} - \theta_{\rm polarimetro})$.
Attraverso due polarimetri ortogonali ($\updownarrow$ poi $\leftrightarrow$) non passa niente.
Aggiungendone uno intermedio a 45° ($\updownarrow$ poi $\swarrow\!\!\nearrow$ poi $\leftrightarrow$) passa qualcosa!



$$\boldsymbol{E} = E_\updownarrow \boldsymbol{n}_\updownarrow + E_\leftrightarrow \boldsymbol{n}_\leftrightarrow \stackrel{1}{\to} E_\updownarrow \boldsymbol{n}_\updownarrow \stackrel{2}{\to} \frac{E_\updownarrow}{\sqrt{2}} \boldsymbol{n}_{\swarrow\!\nearrow} \stackrel{3}{\to} \frac{E_\updownarrow}{2} \boldsymbol{n}_\leftrightarrow$$

Luce non polarizzata?

Si osserva che la luce del sole o di una lampadina è 'non polarizzata', nel senso che polarimetri lineari o circolari la dimezzano. Come è possibile?

Un'onda $\boldsymbol{E} = \mathrm{Re}\, \boldsymbol{E}_0 e^{i(kz-\omega t)}$ ha polarizzazione data, $\boldsymbol{E}_0 = E_0 \boldsymbol{n}$. Ad esempio

$$\boldsymbol{n}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{lineare } x \qquad \boldsymbol{n}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ +i \end{pmatrix} \quad \text{circolare } L \text{ o elicità } +$$

$$\boldsymbol{n}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{lineare } y \qquad \boldsymbol{n}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \quad \text{circolare } R \text{ o elicità } -$$

Sovrapponiamo due di queste onde con $\boldsymbol{E}$ polarizzato lungo $\boldsymbol{n}_x$ e $\boldsymbol{n}_y$:

- Se hanno differenza di fase $\delta = 0$ si sommano a dare un'onda con polarizzazione lineare storta $E_{0x}\boldsymbol{n}_x + E_{0y}\boldsymbol{n}_y$.
- Se $\delta \neq 0$ danno un'onda polarizzata ellittica $E_{0x}\boldsymbol{n}_x + e^{i\delta} E_{0y}\boldsymbol{n}_y$.

Si ottiene un'onda non polarizzata quando "la fase relativa $\delta(t)$ varia nel tempo".
In trasformata di Fourier significa uno spettro non monocromatico e.g. $\omega_1 \neq \omega_2$.

Parametri di Stokes

I **parametri di Stokes** descrivono un'onda generica parzialmente polarizzata e sono un analogo della **matrice densità** in meccanica quantistica:

$$\rho_{ij} = \frac{E_i^* E_j}{E^2}, \qquad \rho = \frac{1}{E^2}\begin{pmatrix} E_x^* E_x & E_y^* E_x \\ E_x^* E_y & E_y^* E_y \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{2}\begin{pmatrix} I+Q & U+iV \\ U-iV & I-Q \end{pmatrix}$$

con $I =$ intensità totale, etc. Infatti due onde si sovrappongono come

$$W_{\rm tot}\rho_{\rm tot} = W_1\rho_1 + W_2\rho_2 \qquad W_{\rm tot} = W_1 + W_2$$

in quanto l'energia è data da moduli quadri

$$|\boldsymbol{E}_{\rm tot}|^2 = |\boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2|^2 = |\boldsymbol{E}_1|^2 + |\boldsymbol{E}_2|^2 + 2{\rm Re}[\,\boldsymbol{E}_1^* \cdot \boldsymbol{E}_2 \cos[(\omega_2 - \omega_1)t].$$

Per $\omega_1 \neq \omega_2$ il termine misto si media a zero, ed è possibile ottenere luce parzialmente polarizzata o anche non polarizzata, $\rho = \frac{I}{2}{\rm diag}\,(1,1)$.

Onde 'sferiche' nel vuoto

Cerchiamo soluzioni delle equazioni nel vuoto che dipendono da r, t

$$\Box^2 \boldsymbol{E} = 0, \qquad \Box^2 \boldsymbol{B} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = 0, \qquad \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0, \qquad \text{etc.}$$

Ogni componente W di $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ soddisfa a $\Box^2 W = 0$. In coordinate polari

$$\nabla^2 W = \frac{(rW)''}{r} \qquad \Rightarrow \qquad \Box^2 W = \frac{(rW)''}{r} - \frac{\ddot{W}}{c^2} = 0.$$

Definendo $u(r) \equiv rW(r)$ si ottiene l'equazione 1d $u'' - \ddot{u}/c^2 = 0$ risolta da

$$W(r,t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r} \qquad W = \{\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}\}$$

dove f, g sono funzioni arbitrarie. Ignoriamo la soluzione 'entrante' $g(t + r/c)$.
Sorgenti puntiformi generano onde sferiche uscenti: in seguito discuteremo come ed i dettagli delle polarizzazioni trasverse (no simmetria sferica).

A grande distanza i.e. in piccolo cono le onde sferiche si riducono a onde piane.

La propagazione senza distorsioni (solo f, no rf') è speciale in $d = 3 + 1$.

Un'onda sferica ha componenti di $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B} \propto 1/r$ (!?): $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0$ con $\boldsymbol{S} \propto \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}$...

Teorema di Poynting

Dimostrato dal teorema di Poynting, che ha la forma di un'equazione di conservazione **locale** per l'energia, che in parte esce ed in parte diventa meccanica:

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}} \qquad \text{dove} \qquad \boxed{u = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{\mu_0}}$$

è detto vettore di Poynting (nomen omen). Dimostrazione:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}) = -\boldsymbol{B}\cdot\dot{\boldsymbol{B}} - \epsilon_0\mu_0\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - \mu_0\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}$$

Primo passaggio: $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{\nabla}_E + \boldsymbol{\nabla}_B$ poi permutazioni. Oppure in componenti.

Per un onda piana $\boldsymbol{S}$ è diretto lungo la direzione di propagazione e vale

$$u = \epsilon_0 E^2 \qquad \langle u\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 \qquad \boldsymbol{S} = c\,\epsilon_0 E^2\hat{\boldsymbol{k}} = c\hat{\boldsymbol{k}}u, \qquad \mathcal{I} \equiv \langle\boldsymbol{S}\rangle = c\hat{\boldsymbol{k}}\langle u\rangle$$

quindi l'energia u viene trasportata a velocità c, come era naturale aspettarsi.

Per un'onda sferica nel vuoto $S_r \propto 1/r^2$, con potenza 2 come se fossero quantani.

Unificazione sole/stelle: le stelle sono soli 10^9 meno luminosi perché $10^{4.5}$ volte più lontani [teorizzato da G. Bruno 1600, confermato da misure di parallasse 1838].

Vettore di Poynting: esempio

Condensatore con $Q(t)$ lentamente variabile:

$$E_z = \frac{Q}{S\epsilon_0} \qquad B_\theta = \frac{r\dot{E}_z}{2c^2}.$$

Energia in un cilindro di raggio r arbitrario:

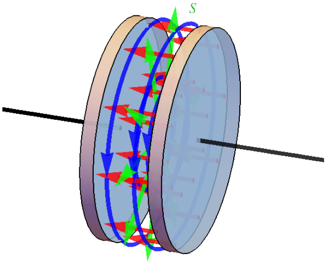
$$U \simeq U_E = (\pi r^2 h)\frac{\epsilon_0}{2}E^2 \qquad \dot{U} = \pi r^2 h\epsilon_0 E_z \dot{E}_z$$

Vettore di Poynting ($\hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = -\hat{\boldsymbol{r}}$):

$$S_r = -\epsilon_0 c^2 E_z B_\theta = -\frac{r}{2}\epsilon_0 E_z \dot{E}_z$$

Bilancio energetico:

$$\Phi_S = 2\pi r\, h S_r = -\dot{U}$$



In un **solenoide** rettilineo lungo avviene lo stesso con $E \leftrightarrow B$. Contiene un $B_z = \mu_0 n I$ e quindi un $E_\theta = -\dot{B}_z r/2$. Il vettore di Poynting vale $S_r = -B_z\dot{B}_z r/2\mu_0$. L'energia vale $U \simeq U_B = \pi r^2 h\, B_z^2/2\mu_0$, $\dot{U} = \pi r^2 h\, B_z\dot{B}_z/\mu_0$, $\Phi_S = 2\pi r h\, S_r = -\dot{U}$.

Filo resistivo di lunghezza ℓ: $E_z = V/\ell$; $J_z = \sigma E_z$ dissipa $W_{\rm J} = \ell \cdot \pi r^2\, J_z E_z$, genera $B_\theta = \mu_0 J_z \pi r^2/2\pi r$; $S_r = -r J_z E_z/2$ ha flusso $\Phi_S = -\ell\, \pi r^2\, J_z E_z = -W_{\rm J}$.

Impulso del campo elettromagnetico

Le forze magnetiche fra due cariche non sono uguali e opposte se $\boldsymbol{v}_1 \not\parallel \boldsymbol{v}_2$!?
Esprimendo ρ e $\boldsymbol{J}$ in funzione dei campi e facendo passaggi vari si dimostra che

$$\frac{d}{dt}\frac{d\boldsymbol{p}_{\rm mat}}{dV} = \frac{d\boldsymbol{F}}{dV} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} = \ldots = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{T} - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\boldsymbol{S}}{c^2}$$

Quindi il campo ha densità di impulso $\boxed{\boldsymbol{g} \equiv d\boldsymbol{p}_{\rm em}/dV = \boldsymbol{S}/c^2}$ trasportato come

$$\boxed{T_{ij} = \epsilon_0(E_iE_j - \delta_{ij}E^2/2) + (B_iB_j - \delta_{ij}B^2/2)/\mu_0}$$ “tensore degli stress”.

E ha momento angolare $d\boldsymbol{L}_{\rm em}/dV = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{g}$. Per un'onda $S = cu$ quindi $g = u/c$.
Onde ellittiche hanno momento angolare, andando oltre il limite di onda piana.
Verifica: onda che incide su una carica q. La carica riceve energia da $\boldsymbol{E}$

$$U = \int \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{v}\,dt = q\int \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}\,dt \qquad \boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$$

e impulso da $B = E/c$ (l'impulso trasmesso da E si media a zero in un periodo)

$$\boldsymbol{p} = \int \boldsymbol{F}\,dt = q\int \boldsymbol{v}\times\underbrace{(\frac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E})}_{\boldsymbol{B}}\,dt = \frac{q}{c}\int[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{E}\underbrace{(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})}_{\sim\rm cte}]\,dt = \frac{U}{c}\boldsymbol{n}.$$

Teorema di Noether

Abbiamo ottenuto la conservazione dell'energia e dell'impulso con trucchi. C'è un modo sistematico: Noether nel 1915 dimostrò che per ogni simmetria continua dell'azione $\mathcal{S} = \int dt\, L(q,\dot q)$ c'è una costante del moto, uguale a

$$\underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\dot q - L\right)}_{H}\delta t - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot q}}_{p}\,\delta q$$

Invarianza		Costante
Traslazioni temporali	$\Rightarrow$	Energia H
Traslazioni spaziali	$\Rightarrow$	Impulso $\boldsymbol{p}$
Rotazioni	$\Rightarrow$	Momento $\boldsymbol{L}$

Il teorema vale anche in teoria di campo, che rimpiazzando $q(t) \to \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t)$ e

$$\mathcal{S} = \int d^3x\, dt\, \mathscr{L}$$

è come meccanica classica con ∞ gradi di libertà.

Esempio: luce solare

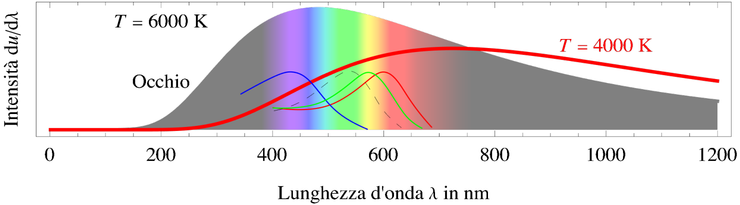
La Terra riceve luce solare con flusso di energia $K_\odot = 1366\,\mathrm{J/m^2 sec}$.
Totale: $\pi R_E^2 K_\odot = 1.7\ 10^{17}\,\mathrm{W} = 2\,\mathrm{kg}\,c^2/\mathrm{sec}$. Consumo umano: 10^4 volte minore.
Quindi $\langle S\rangle = K_\odot$. Pressione $\wp$, densità di energia u, densità di impulso g valgono

$$\langle\wp\rangle = c\langle g\rangle = \langle u\rangle = \frac{\langle S\rangle}{c} = 4.5\ 10^{-6}\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3} = 4.5\ 10^{-6}\,\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2}, \qquad g = 1.5\ 10^{-14}\,\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^2\,\mathrm{s}}$$

$\wp$ aiuta ad evitare collasso gravitazionale del sole e navigazione spaziale. Campi:

$$E_0 = 1014\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}, \qquad B_0 = \frac{E_0}{c} = 3.38\ 10^{-6}\,\mathrm{Tesla}.$$

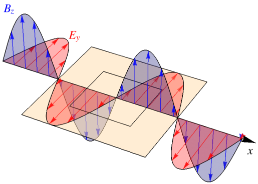
Spettro continuo di frequenze (corpo nero a $T_{\rm sup} \sim 6000$ K) piccato sul visibile:



Lampadina termica: 4000 K (+giallo, −UV), $\epsilon \sim 1\%$. Candela, $\epsilon \sim 0.05\%$.
Lumen $\equiv$ (potenza Φ_S emessa nel visibile a 555 nm in W)/683.

Ricezione di onde

Un circuito quadrato di lato ℓ nell'asse xy è attraversato da un'onda che si propaga lungo x con lunghezza d'onda λ ed E_0 lungo y. Calcolare la fem. Può essere calcolata usando $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B}$ in quanto l'onda risolve $\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{E} = -\dot{\boldsymbol{B}}$. Consideriamo $\ell = \lambda/2 \sim$ m per radio i.e. $k\ell = \pi$ (quadrato piccolo nella figura):



$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= \oint \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{s} \\
&= \ell[E_y(x=\ell) - E_y(x=0)] = \\
&= \ell E_0 \Big[\sin(k\ell - \omega t) - \sin(-\omega t)\Big] \\
&= E_0 \lambda \sin \omega t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} &= -\dot{\Phi}_B \\
\Phi_B &= \int dS\ B_z \\
&= \frac{\lambda}{2} \int_0^{\lambda/2} dx B_0 \sin(kx - \omega t) \\
&= \frac{B_0 \lambda^2}{2\pi} \cos \omega t
\end{aligned}$$

Sono uguali, come si verifica usando $\omega = 2\pi c/\lambda$ e $E_0 = cB_0$. Per ℓ generico:

$$\mathcal{E} = 2E_0 \ell \sin \frac{\pi \ell}{\lambda} \cos(\frac{\pi \ell}{\lambda} - \omega t), \qquad \langle \mathcal{E}^2 \rangle_t = 2E_0^2 \ell^2 \sin^2 \frac{\pi \ell}{\lambda} \quad \text{massima per } \ell = \frac{\lambda}{2}.$$

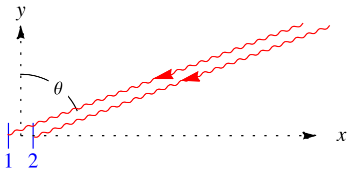
Se $\ell \ll \lambda$ riceve meglio un'antenna lineare in cui $\mathcal{E}_{\rm lin} = \ell E \gg \ell \Delta E$. Questa geometria è più pratica, ma è più complicato calcolare la corrente indotta.

Da dove arriva l'onda?

Misura rozza: la potenza ricevuta da un'antenna è $\propto \cos^2\theta$ dove

- Circuito come antenna: θ è l'angolo fra la normale e $\boldsymbol{B}$.
- Antenna lineare: θ è l'angolo fra l'antenna e $\boldsymbol{E}$.

Due (o più) antenne consentono di misurare più precisamente la direzione: l'antenna più vicina riceve prima. Esempio: due antenne a distanza $\Delta x = d$ ricevono un'onda piana con differenza di fase



$$\delta = 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta.$$

Se si può misurare δ con precisione di ordine 1, si deduce θ con precisione λ/d.

- A frequenze alte si utilizza la fisica: l'interferenza è sensibile a $\delta \sim 1$.
  È quello che fanno strumenti ottici nel visibile.
- A frequenze basse si può misurare δ anche meglio confrontando i segnali (computers arrivano a qualche GHz).

Onde nella materia

Onde in dielettrico

Cariche accelerate irraggiano onde elettromagnetiche: lo mostreremo nel futuro tramite un conto matematicamente complicato. Un'onda su materia accelera cariche, ogni atomo investito da onda irraggia onde secondarie che interferiscono.

Fisica complicata descritta da matematica semplice: ϵ. In un dielettrico lineare l'effetto collettivo è la propagazione di una sola onda modificata i.e. trasparenza.

In un dielettrico con $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ e $\mu = \mu_r \mu_0$ costanti, le equazioni hanno forma uguale a quelle nel vuoto ma con $v^2 = 1/\epsilon\mu$. Si definisce l'**indice di rifrazione**

$$n \equiv \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \qquad v = \frac{c}{n}$$

Di solito $\mu = \mu_0$ e $\epsilon > \epsilon_0$, quindi $v < c$.

Attenzione: in acqua $\epsilon_r \approx 80$ ma $n_{\text{visibile}} \approx 1.33 \neq \sqrt{80}$. Risolveremo con $\hat{\epsilon}(\omega)$.

Teorema di Poynting nella materia:

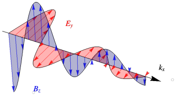
$$u = \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \qquad \boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{\mu}$$

si comportano analogamente al vuoto; u include l'energia che polarizza la materia.

Onde in conduttore

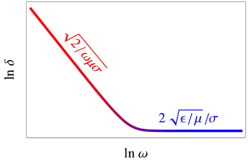
Correnti parassite dissipano energia per effetto Joule: attenuazione dell'onda. Un conduttore si scarica con $\tau = \epsilon/\sigma$: attenuazione onde dipende da ω vs $1/\tau$. Inserendo $\boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E}$ nella IV equazione di Maxwell $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu(\sigma\boldsymbol{E} + \epsilon\dot{\boldsymbol{E}})$ a regime $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x},t) = \hat{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x})e^{-i\omega t}$ si riduce all'equazione nel vuoto con $\boxed{\epsilon \to \hat\epsilon \equiv \epsilon + i\sigma/\omega}$. Equazione d'onda: $\left(\nabla^2 + \hat\epsilon\mu\omega^2\right)\hat{\boldsymbol{E}} = 0$. Onde piane $e^{i(kx-\omega t)}$ hanno k complesso:

$$\begin{array}{l} E \propto e^{ikx} \ni e^{-x/\delta} \\ B = kE/\omega \text{ sfasato} \end{array} \qquad \text{con} \quad k^2 = \hat\epsilon\mu\omega^2 = \epsilon\mu\left(\omega^2 + \frac{i\omega\sigma}{\epsilon}\right)$$



Definendo $\omega_{\rm cr} = \sigma/\epsilon$ la lunghezza di pelle $1/\delta = \operatorname{Im} k$ vale

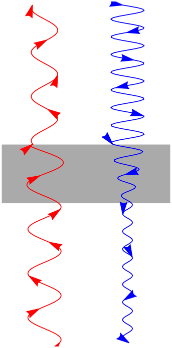
$$\delta \simeq \begin{cases} \sqrt{\dfrac{2}{\omega\mu\sigma}} & \text{per } \omega \ll \omega_{\rm cr} \\ \dfrac{2}{\sigma}\sqrt{\dfrac{\epsilon}{\mu}} & \text{per } \omega \gg \omega_{\rm cr} \end{cases} = \frac{\lambda_{\rm cr}}{\pi}\begin{cases} \sqrt{\dfrac{\omega_{\rm cr}}{\omega}} \\ 1 \end{cases} =$$

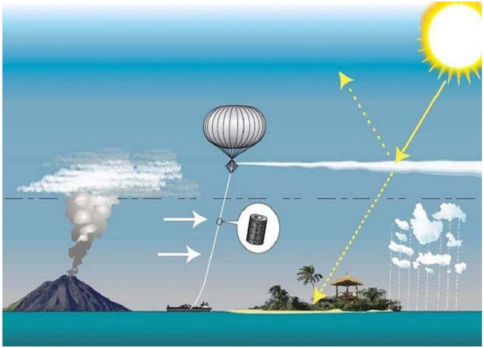


Onde in conduttore: esempi

Tipico metallo, ad esempio il rame a 300 K: $\sigma \approx 6\ 10^7/\Omega\mathrm{m}$, $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$.
La pulsazione critica $\omega_{\rm cr} = \sigma/\epsilon = 6.6\ 10^{18}\,\mathrm{Hz}$ cade nei raggi X ($\approx$quanti).
Quindi $\delta = \delta_{\min} = \lambda_{\rm cr}/\pi \sim 0.1\,\mathrm{nm}$ i.e. $\delta = (2/\sigma)\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ con $\sqrt{\mu_0/\epsilon_0} \approx 377\,\Omega$.
Luce visibile ($\omega \sim 10^{16}\,\mathrm{Hz}$) riflessa da $\delta_{\rm vis} \sim 6\,\mathrm{nm}$.
Micro-onde ($\omega \sim 10^{10}\,\mathrm{Hz}$) riflesse da $\delta_{\rm mic} \sim \mu\mathrm{m}$.

Lamine di spessore $\delta_{\rm vis} \lesssim \delta \ll \delta_{\rm mic}$ (o atomi CaCo$_3$) nella stratosfera rifletterebbero la luce solare, trasmettendo la radiazione IR terrestre, raffreddando la Terra.



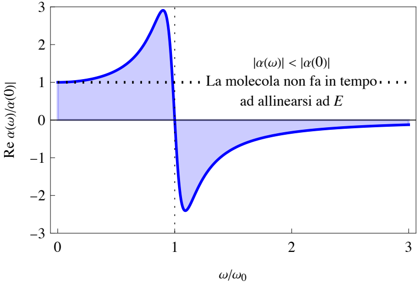


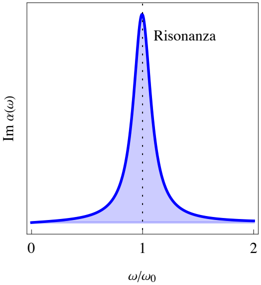
Acqua di mare: $\sigma \sim 4/\Omega\,\mathrm{m}$, $\epsilon \sim 80\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$. $\omega_{\rm cr} = \sigma/\epsilon \sim 10^{10}\,\mathrm{Hz}$ cade nelle micro-onde che penetrano per $\delta_{\rm mic} \sim 1\,\mathrm{cm}$. Per trasmettere a sottomarini servono

Onde in materiale

Fisica: molecola che ruota in $\boldsymbol{E}$ o elettroni che traslano. Servirebbe meccanica quantistica. Approssimiamo come forza elastica $m_e[\ddot{\boldsymbol{x}} + \gamma\dot{\boldsymbol{x}} + \omega_0^2\boldsymbol{x}] = -e\boldsymbol{E}$. La soluzione a regime è ottenuto con $d/dt = -i\omega$: il dipolo vale

$$\boldsymbol{p} = -e\boldsymbol{x} \equiv \alpha\epsilon_0\boldsymbol{E}, \qquad \text{polarizzabilità} = \alpha = \frac{e^2}{\epsilon_0 m_e(\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma)}.$$





Usando Clausius-Mossotti che nei gas si riduce a $\chi \simeq P/\epsilon_0 E \simeq n_e\alpha$ con $\boldsymbol{P} = n_e\boldsymbol{p}$:

$$\hat{\epsilon} = \epsilon_0\frac{1 + 2n_e\alpha/3}{1 - n_e\alpha/3} \simeq \epsilon_0(1 + n_e\alpha).$$

Onde in materiale

La costante dielettrica è complessa, dipende da ω esibendo picchi sulle $r$isonanze

$$\boxed{\hat{n}^2 \equiv \frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_r \frac{f_r}{\omega_{0r}^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_r}}$$

Scrivendo $\hat{n} = n_R + i n_I$ si ha $E \propto e^{i\omega(t - \hat{n}x/c)} = e^{-x/\delta} e^{i\omega(t - n_R x/c)}$ con $\delta = c/\omega n_I$. L'assorbimento è massimo attorno alle risonanze delle righe spettrali.

Limite statico. Se non ci sono e liberi: $\omega_{0r} \gg \omega$. Si riduce all'$\epsilon_r = n^2$ costante, reso più accurato espandendo in serie di Taylor, $n \simeq 1 + A(1 + \omega^2 B/4\pi^2 + \cdots)$.

Limite statico. Se ci sono e liberi con densità n_e^{free}: $\omega_0 \to 0$. Si riduce al modello di Drude con tempo fra gli urti $\tau \to 1/\gamma$:

$$\frac{\hat{\epsilon}}{\epsilon_0} = 1 + \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e(-i\omega\gamma)} \equiv 1 + \frac{i\sigma}{\omega\epsilon_0} \qquad \text{i.e.} \qquad \text{conducibilità} = \sigma = \frac{n_e^{\text{free}} e^2}{m_e \gamma}.$$

Onde in plasma

Limite statico: plasma di elettroni liberi senza attrito, $\omega_0, \gamma \to 0$:

$$n^2 = 1 - \frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e \omega^2} = 1 - \left(\frac{\omega_p}{\omega}\right)^2 \qquad \text{dove} \qquad \omega_p \equiv \sqrt{\frac{n_e e^2}{\epsilon_0 m_e}} = 56\,\mathrm{Hz}\sqrt{\frac{n_e}{1/\mathrm{m}^3}}$$

è detta **frequenza di plasma** perché frequenza delle oscillazioni meccaniche.

Esempi:

- La luce solare di giorno ionizza l'aria nella ionosfera a $h \sim (100 - 500)\,\mathrm{km}$ dove $n_e \sim 10^{10-12}/\mathrm{m}^3$, $\omega_p \sim 10^{7-8}$Hz: onde radio parzialmente 'riflesse'. Un aereo circondato da plasma diventerebbe invisibile ai radar.
- Metalli contengono $n_e \sim 10^{20}/\mathrm{m}^3$ elettroni liberi, quindi $\omega_p \sim 10^{12}\,\mathrm{Hz}$.

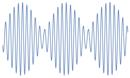
Per $\omega < \omega_p$ n è immaginario: le onde si attenuano su lunghezza $\delta = c/\omega_p$.
Per $\omega > \omega_p$ le onde si propagano con $n < 1$.

Ma $n < 1$ significa $v > c$?

Velocità di fase e velocità di gruppo

Un'onda monocromatica non trasmette informazione... Nel momento in cui la luce viene accesa non è monocromatica, $E \not\propto e^{i\omega t}$, e non avanza a $v = c/n$. Consideriamo una generale **relazione di dispersione** $\omega(k) = ck/n(\omega)$ e (per semplicità) la sovrapposizione di due onde con eguali campi: si ottiene

$$\begin{aligned} E &= A[\sin(k_1 z - \omega_1 t) + \sin(k_2 z - \omega_2 t)] \\ &= 2A \cos\left[\frac{k_1 - k_2}{2} z - \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right] \sin\left[\frac{k_1 + k_2}{2} z - \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right] \quad = \end{aligned}$$



un'onda corta che si muove alla **velocità di fase** $v_f = \omega/k = c/n$ modulata da un'onda lunga che trasmette energia/informazione alla **velocità di gruppo**

$$v_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n + \omega\, dn/d\omega}}.$$

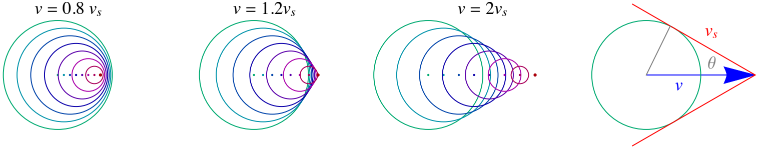
Nel vuoto $v_f = v_g = c$. In un materiale con n costante, $v_f = v_g = c/n$.
In un plasma per $\omega \gg \omega_p$ si ha $v_f > c$: simile a puntare un laser sulla luna producendo un cartone animato che **sembra** muoversi più veloce della luce

$$v_f = \frac{c}{n} \simeq c\left(1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) > c, \qquad v_g = \frac{c}{n + \omega\; dn/d\omega} \simeq c\left(1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega^2}\right) < c.$$

Effetto Cherenkov

Analogo elettromagnetico del cono di Mach per il suono: una sorgente che emette onde di velocità v_s in moto con $v > v_s$ forma un cono di angolo

$$\cos\theta = v_s/v.$$



La luce si propaga con $v_s = c/n$ e $v < c$, quindi $\cos\theta = c/nv < 1/n$. Nell'acqua $n = 1.33$: elettroni in moto con $E > 0.26\,\mathrm{MeV}/c^2$ fanno coni con $\theta \geq 41.2°$.

Ottica

Ottica

Non è possibile vedere oggetti più piccoli di λ, ma su scale più grosse la luce si comporta come raggi. L'elettromagnetismo implica tutte le leggi dell'ottica... Per semplificare: spazio diviso in regioni: vuoto, conduttori, dielettrici...

Condizioni di raccordo sul bordo fra due **dielettrici e/o diamagnetici**:

$$\boxed{\Delta D_\perp = 0, \qquad \Delta E_\parallel = 0, \qquad \Delta B_\perp = 0, \qquad \Delta H_\parallel = 0}$$

Valgono se il bordo è molto più sottile di λ, altrimenti è più complicato.

Condizioni sul bordo fra **vuoto ed un conduttore** perfetto $\sigma = \infty$:

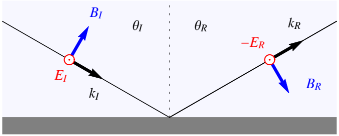
$$\boxed{E_\parallel = 0, \qquad B_\perp = 0}$$

Dentro deve essere $\boldsymbol{E} = 0$ e quindi $\boldsymbol{B} = 0$ in quanto $\dot{\boldsymbol{B}}$ genera $\boldsymbol{E}$.
Cariche e correnti di superficie generano $E_\perp, B_\parallel \neq 0$.

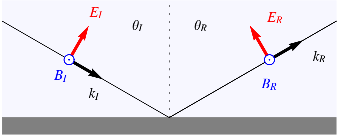
Riflessione

Inviando un'onda incidente si ottiene un'**onda riflessa** con $\omega_R = \omega_I$, $\theta_I = \theta_R$.
Condizioni al bordo $\forall t$ implicano che le onde I, R hanno la stessa ω.
Condizioni al bordo $\forall x$: le onde hanno lo stesso $k_\parallel^R = k_\parallel^I$. Quindi $k_\perp^R = -k_\perp^I$.
$E_\parallel^R + E_\parallel^I = 0$: onda incidente e riflessa hanno la stessa intensità.

$\boldsymbol{E}$ parallelo al piano

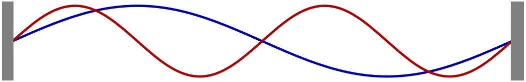


$\boldsymbol{B}$ parallelo al piano



Fra due specchi a distanza $d = n\lambda/2$ si possono avere **onde stazionarie**

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0[\cos(kx - \omega t) - \cos(kx + \omega t)] = 2\boldsymbol{E}_0 \sin(kx)\sin(\omega t).$$



Consentono di misurare $c = d\omega_n/n\pi$. Stati atomici sono nuove onde stazionarie?

Guide d'onda

Inclinando si ottengono onde in moto. Prendiamo guida rettangolare $\Delta x \times \Delta y$:

$$E_y = E_0 \sin(k_x x)\ e^{i(k_z z - \omega t)} \qquad k_x = \frac{n\pi}{\Delta x} \quad \text{con } n = 1$$

Sui bordi $E_{\parallel} = 0$. Soddisfa a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{E} = \partial E_y / \partial y = 0$. $\Box^2 E_y = 0$ implica

$$k_x^2 + k_z^2 = \omega^2 / c^2.$$

k_x agisce come termine di massa: $\omega > \omega_c = \pi c / \Delta x$. TE_{10} è il modo TE o TM con frequenza critica minore. Soluzione completa: aggiungo un B_x trasverso

$$B_x = B_0 \sin k_x x\ e^{i(k_z z - \omega t)}.$$

Soddisfa a $B_{\perp} = 0$ ma non ancora a $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{B} = 0$. Serve anche B_z non trasverso:

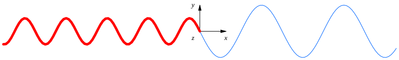
$$B_z = i \frac{k_x}{k_z} B_0 \cos k_x x\ e^{i(k_z z - \omega t)}, \qquad \frac{B_0}{E_0} = -\frac{k_z}{c}.$$

Utile per trasportare energia, che si propaga a $v_g < c < v_f$:

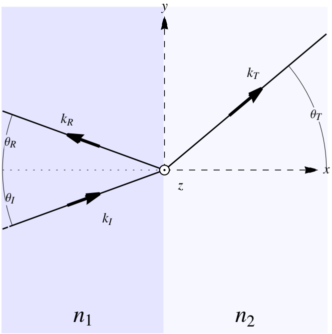
$$\langle u \rangle_{x,y,t} = \frac{\epsilon_0}{4} E_0^2, \qquad \langle S_z \rangle_{x,y,t} = u \cdot v_g, \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk_z} = c\sqrt{1 - \frac{\omega_c^2}{\omega^2}} < c.$$

Rifrazione: direzione

Analogo a calcolare la propagazione di un'onda in due corde attaccate



$$v_i^2 = \frac{1}{\epsilon_i \mu_0} \equiv \frac{c^2}{n_i^2}, \qquad \frac{E_i}{B_i} = \frac{c}{n_i} = \frac{\omega}{k_i}$$



Condizioni al bordo $\forall t$ implicano che le onde I, R, T hanno la stessa ω.

Condizioni al bordo $\forall y$: le onde hanno lo stesso

$$k_y \equiv k_y^I = k_y^R = k_y^T.$$

Moduli $k_i = n_i \omega / c$ quindi $k_I / k_R = 1$ ($\theta_R = \theta_I$) e $k_I / k_T = n_1 / n_2$: l'onda trasmessa si inclina

$$\sin \theta_T = \frac{k_y}{k_T} \qquad \sin \theta_I = \frac{k_y}{k_I} \qquad \Rightarrow \qquad n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T.$$

Legge di Snell. "Riflessione interna totale" per $\sin \theta_I \geq n_2 / n_1$ se $n_1 > n_2$. ($v = c/n$: minimizza il tempo percorso, come per salvare in mare).

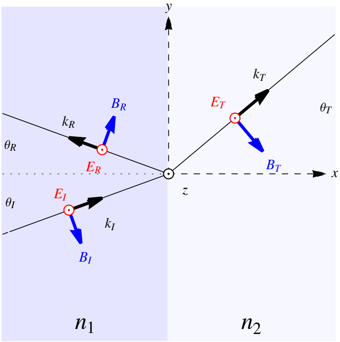
Intensità delle onde rifratte

Le intensità delle onde R e T sono date dalle condizioni di raccordo

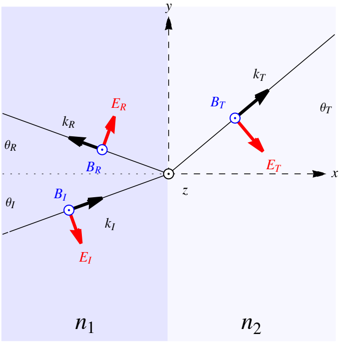
$$\Delta E_{\parallel} = 0, \qquad \Delta D_{\perp} = 0, \qquad \Delta \boldsymbol{B} = 0.$$

Dipendono dalla polarizzazione dell'onda incidente. Base conveniente:

$\boldsymbol{E}$ parallelo al piano



$\boldsymbol{B}$ parallelo al piano



Rifrazione: E parallelo al piano

Le 4 condizioni di raccordo si riducono a 2:

$$E_I + E_R = E_T \qquad (\text{da } E_\parallel = E_z \text{ o da } B_\perp = B_x \text{ usando } \boldsymbol{B} = \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E}/\omega)$$

$$k_x^I E_I - k_x^I E_R = k_x^T E_T \qquad (\text{da } B_\parallel = B_y = -k_x E_z/\omega \text{ o } E_y'^I + E_y'^R = E_y'^T)$$

Soluzioni ("formule di Fresnel"): notare sign $R = \text{sign}\,(n_1 - n_2)$

$$\begin{cases} R \equiv \dfrac{E_R}{E_I} = \dfrac{k_x^I - k_x^T}{k_x^I + k_x^T} = \dfrac{n_1 \cos\theta_I - \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_I}}{n_1 \cos\theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_I}} = -\dfrac{\sin(\theta_I - \theta_T)}{\sin(\theta_I + \theta_T)} \\[2em] T \equiv \dfrac{E_T}{E_I} = 1 + R = \dfrac{2n_1 \cos\theta_I}{n_1 \cos\theta_I + \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_I}} \end{cases}$$

Incidenza normale: $R = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$, $T = 2n_1/(n_1 + n_2) > 1$ se $n_2 < n_1$.

L'intensità mediata sullo spazio vale $I = vu$. In un dielettrico $v = c/n$ e

$$u = \left\langle \frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{\epsilon}{2}[E^2 + B^2 v^2] \right\rangle = \frac{\epsilon}{2} E_0^2$$

Quindi $I_R/I_I = R^2$ e $I_T/I_I = T^2 n_2/n_1$. L'energia si conserva:

$$(I_I - I_R)\cos\theta_I = I_T \cos\theta_T.$$

Per incidenza normale $I_T/I_I = 4n_1 n_2/(n_1 + n_2)^2 < 1$.

Rifrazione: B parallelo al piano

Le 4 condizioni di raccordo si riducono a 2:

$$\begin{aligned} B_I + B_R &= B_T && \text{(da } B_z \text{ o da } D_x \text{ usando } \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E}) \\ k_x^I (B_I - B_R)/n_1^2 &= k_x^T B_T / n_2^2 && \text{(da } E_y \text{ usando } \boldsymbol{E} = c^2 \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{k}/n^2\omega) \end{aligned}$$

Soluzioni:

$$\begin{cases} R \equiv \dfrac{E_R}{E_I} = \dfrac{B_R}{B_I} = \dfrac{n_2^2 \cos\theta_I - n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_I}}{n_2^2 \cos\theta_I + n_1\sqrt{n_2^2 - n_1^2 \sin^2\theta_I}} = \dfrac{\sin 2\theta_I - \sin 2\theta_T}{\sin 2\theta_I + \sin 2\theta_T} \\ T \equiv \dfrac{E_T}{E_I} = \dfrac{B_T/n_2}{B_I/n_1} = \dfrac{2n_1 \cos\theta_I}{n_2 \cos\theta_I + n_1\sqrt{1 - n_1^2 \sin^2\theta_I / n_2^2}} \end{cases}$$

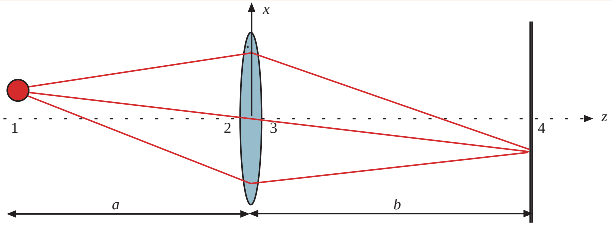
La luce riflessa ha intensità $R = 0$ se $\theta_I = \theta_{\text{Brewster}} = \arctan\dfrac{n_2}{n_1} = 53^\circ$ al mare. A questo angolo viene riflessa solo la luce con $\boldsymbol{E}$ polarizzato parallelo al piano. Occhiali polarizzati che lasciano passare solo $E_\perp$ riducono il riflesso del sole.

Ottica matriciale

Luce, approssimata come raggi ad angolo piccolo, descritta da $x(z)$ e $x'(z)$.

- Distanza ℓ vuota: $\begin{pmatrix} x(\ell) \\ x'(\ell) \end{pmatrix} = M(\ell) \begin{pmatrix} x(0) \\ x'(0) \end{pmatrix} \qquad M(\ell) = \begin{pmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- Lente sottile di focale f cambia solo l'inclinazione del raggio:

$$\begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{dopo}} = M_{\text{lente}} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}_{\text{prima}} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}$$



$$M = M(b)\cdot M_{\text{lente}}\cdot M(a) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1/f & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-b/f & a+b-ab/f \\ -1/f & 1-a/f \end{pmatrix}$$

Focale se $M_{12} = 0$ i.e. $1/a + 1/b = 1/f$. Allora $x_C = (1-b/f)x_A$ ingrandito.

Birifrangenza

Alcuni cristalli hanno atomi disposte in maniera regolare ma non isotropa.

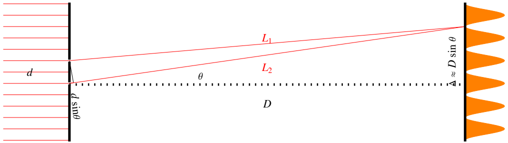
$$D_i = \epsilon E_i \qquad \rightarrow \qquad D_i = \sum_j \epsilon_{ij} E_j$$

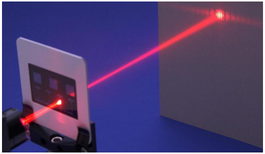
Produce indici di rifrazione diversi a seconda della polarizzazione della luce.
Luce non polarizzata inclinata: si divide in due fasci di data polarizzazione.
Inviando luce polarizzata lineare in direzione dritta, i due fasci hanno la stessa direzione ma si sfasano, dando polarizzazione ellittica.

Ottica ondulatoria

Interferenza

L'esperimento di Young (1801) mostra fenomeni tipici di onde. Due buchi di dimensione trascurabile a distanza d, illuminati da luce di lunghezza d'onda λ. Ogni buco emette onda sferica, osservata su schermo a distanza $D \gg d$





Differenza di cammino ottico $L_1 - L_2 = \sqrt{D^2 + (\Delta - d)^2} - \sqrt{D^2 + \Delta^2} \simeq d \sin\theta$. Differenza di fase: $\delta = 2\pi(L_1 - L_2)/\lambda = kd\sin\theta$. Ampiezza dell'onda totale:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2 \simeq \boldsymbol{E}_1(1 + e^{i\delta}), \qquad I \propto |E|^2 \propto \cos^2\frac{\delta}{2} = \cos^2\frac{kd\sin\theta}{2} = \cos^2\frac{\pi d\Delta}{\lambda D}$$

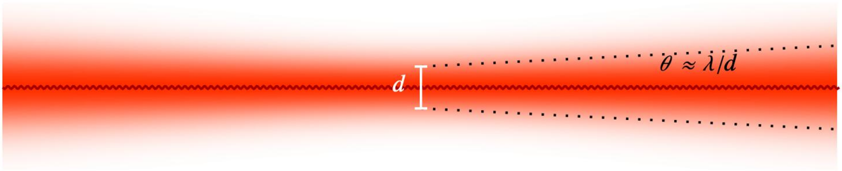
Massimi a $\theta_n = n\lambda/d$, dove $\cos^2(\pi n) = 1$. Grazie a $D/d \gg 1$ una piccola λ produce effetti su scala macroscopica: ad esempio $\Delta_1 = \text{mm}$ per $\lambda = \mu\text{m}$, $d = \text{mm}$, $D = 1\,\text{m}$. Film sottili (bolle di sapone) fanno interferenza fra luce riflessa in entrata ed uscita, costruttiva/distruttiva a seconda di λ (colore).

Ottica ondulatoria

I due buchi a distanza d davano interferenza costruttiva ad angolo $\theta_1 = \lambda/d$. Geometrie più complicate (onda piana attraversa un buco, o incontra un ostacolo di dimensione d) mostreranno che il fenomeno è più generale: la luce va storta di

$$\boxed{\theta \sim \lambda/d} \ll 1$$

Anticipiamo comprensione qualitativa. È una proprietà generale delle onde (non solo elettromagnetiche), non del buco. Le onde piane infinite non esistono.
Onde di sezione finita d hanno direzione non univoca entro $\delta\theta \sim \lambda/d$:



Onda di spessore finito

Lo si può vedere dalle polarizzazioni, ma è un fenomeno generale di onde. Ogni componente W di $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ soddisfa a $\Box^2 W = 0$. Un'onda finita con direzione univoca $W = f(y,z)\cos(kx-\omega t)$ non risolve. La soluzione generale è scrivibile somma di onde piane monocromatiche, cioè tramite trasformata di Fourier. Si può dimostrare la 'relazione di indeterminazione'

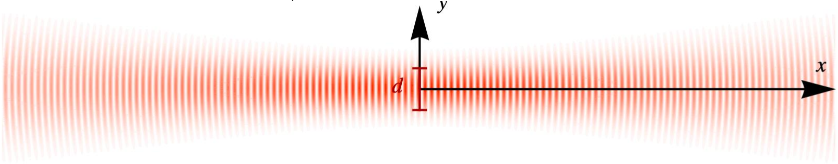
$$\begin{array}{llll} t \leftrightarrow \omega & \hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, f(t) e^{i\omega t} & \Rightarrow & \delta\omega\,\delta t \geq 1/2 \\ x \leftrightarrow k_x & \hat{f}(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx\, f(x) e^{ik_x x} & \Rightarrow & \delta k_x \delta x \geq 1/2 \\ y \leftrightarrow k_y & \hat{f}(k_y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dy\, f(y) e^{ik_y y} & \Rightarrow & \delta k_y \delta y \geq 1/2 \end{array}$$

con = per pacchetto d'onda Gaussiano. Quindi $\delta\theta = \delta k_y / k_x \gtrsim \lambda/\delta y$.

Sommo onde piane ottenendo onda con profilo Gaussiano di sezione d a $x = 0$:

$$W(x=0,y,z,t=0) = e^{-y^2/2d^2} = \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y\, e^{ik_y y - d^2 k_y^2/2} \qquad \Rightarrow \qquad k_y \sim 1/d$$

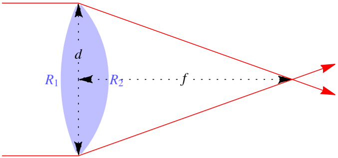
$$W(x,y,z,t) \approx \frac{d}{\sqrt{2\pi}} \Re \int_{-\omega/c}^{+\omega/c} dk_y\, e^{i(k_x x + k_y y - \omega t) - d^2 k_y^2/2}, \qquad k_x = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_y^2}$$

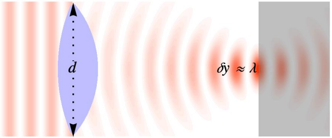


Risoluzione ottica

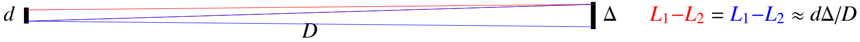
Strumenti ottici (fenditura, parabola, lente, occhio...) di dimensione d raggiungono la risoluzione angolare ideale $\theta \sim \lambda/d$. Esempio: si calcola che una lente di lunghezza focale $1/f = (n-1)(1/R_1 + 1/R_2)$ focalizza la luce in uno spessore

$$\delta y = \lambda \frac{4f}{\pi d} \gtrsim \lambda \qquad \Rightarrow \qquad \theta \sim \frac{1}{\text{numero di punti}} \sim \frac{\delta y}{d} \gtrsim \frac{\lambda}{d}$$





Un oggetto di dimensione Δ a distanza D sottende angolo $\theta \simeq \Delta/D$. Quindi è visibile se $\boxed{d\Delta \gtrsim \lambda D}$: notare simmetria $d \leftrightarrow \Delta$ fra osservato e osservatore



Risoluzione ottica: esempi

Un occhio ha $d \sim 3\text{mm} \gg \lambda \approx 600\,\text{nm}$: $\theta \approx 1/5000 \approx \text{arcmin} \equiv \text{deg}/60$.
Un occhio ideale (aquila) vede un coniglio di $\Delta \approx 0.2\,\text{m}$ a $D \approx 5000\Delta \approx \text{km}$.
Vede separati due fari a $\Delta \approx 2\text{m}$ fino a $D \approx 5000\Delta \approx 10\,\text{km}$.

È l'altezza di un aereo, da cui un telescopio di diametro $d \sim 0.2\,\text{m}$ può vedere $\Delta \approx 3\,\text{cm}$ e quasi leggere una targa in condizioni meteo ideali.

Lo stesso telescopio su di un satellite in orbita geo-stazionaria, $D \approx 42000\,\text{km}$, può vedere oggetti di dimensione $\Delta \sim \lambda D/d \sim 100\,\text{m}$.

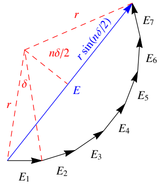
Questo telescopio ha $\theta \approx \lambda/d \approx 3\ 10^{-6} \approx \text{arcsec} \equiv \text{deg}/3600$.
Telescopi più grandi limitati dalle fluttuazioni nell'aria: $\theta \gtrsim \text{arcsec}$.
Nello spazio Hubble ha $d = 2.4\,\text{m}$ e vede $\text{arcsec}/20 \sim 2.4\ 10^{-7}$.

$\theta \sim \lambda/d$ vale ad altre frequenze e con altre onde. Pipistrelli 'vedono' poche centinaia di pixel in quanto ricevono onde sonore di $\lambda \approx 6\,\text{mm}$.

Diffrazione

La diffrazione è l'interferenza fra tante sorgenti. n sorgenti sfasate di δ:

$$E = E_1 \sum_{r=0}^{n-1} \cos(\omega t + r\delta) = \mathrm{Re} E_1 \sum_{r=0}^{n-1} e^{i\omega t + ir\delta}$$



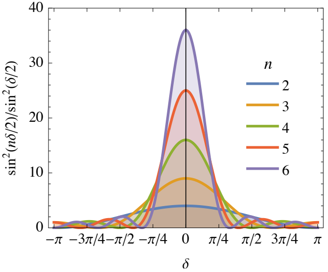
Usando $\mathbb{C}$ è come sommare n vettori nel piano complesso: fanno un arco di raggio $r = E_1/2\sin(\delta/2)$ dando $E = 2r\sin(n\delta/2)$.

$$\sum_{r=0}^{n-1} e^{ir\delta} = \frac{1 - e^{in\delta}}{1 - e^{i\delta}}, \qquad |E|^2 = |E_1|^2 \frac{\sin^2 n\delta/2}{\sin^2 \delta/2}$$

ok per $n = 2$: $\sin\delta/\sin(\delta/2) = 2\cos(\delta/2)$.

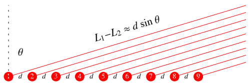
Area $2\pi n$, piccata a $\delta = 0$ per $n \gg 1$.
Massimo a $\delta = 0$: $W_{\max} \propto |E|^2 \simeq n^2 |E_1|^2$.
1^{o} minimo $E = 0$ a $\delta = 2\pi/n$ i.e. cerchio.
2^{o} massimo a $\delta = 3\pi/n$, piccolo:

$$W \simeq W_{\max} 4/9\pi^2 \approx 0.05 W_{\max}.$$



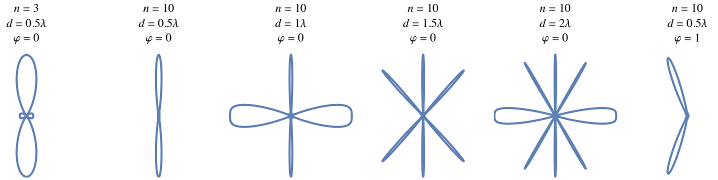
Griglia di diffrazione

Per n oscillatori a distanza d sfasati di φ uno dall'altro visti da osservatore a θ



$$\delta = \varphi + kd\sin\theta = \varphi + \frac{2\pi d}{\lambda}\sin\theta$$

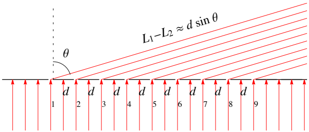
1^o massimo a $\delta = 0, \pm 2\pi, \ldots$ i.e. $2\pi m$: multipli se $d > \lambda$. Dipendono da λ.

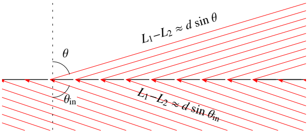


E.g. per $\varphi = 0$: 1^o massimo a $\theta = 0$ e 1^o minimo a $\sin\theta = \lambda/nd$.
Emissione concentrata in piccoli angoli a grande n.

Griglia di diffrazione

Basta tracciare solchi a d costante su di una superficie ed illuminarla. Farfalla blu, madreperla, cioccolata... CD contengono punti a distanza di circa 1 μm.





$$\delta = \varphi + kd\sin\theta = \frac{2\pi d}{\lambda}(\sin\theta - \sin\theta_{\rm in})$$

La luce può arrivare anche da sopra e uscire a $\theta = \theta_{\rm in}$ come nella riflessione, di cui questo è il meccanismo microscopico. Se $d > \lambda$ (non atomi) altri massimi uguali a $\delta = 2\pi m$ cioè $\sin\theta = m\lambda/d$ per $\theta_{\rm in} = 0$. Dipendono da λ: divide i colori meglio di un prisma. Inviando $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$

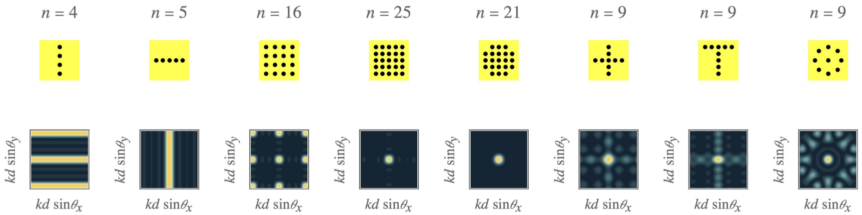
$$\delta' - \delta = 2\pi m(\frac{\lambda'}{\lambda} - 1) = 2\pi m\frac{\Delta\lambda}{\lambda} < \frac{2\pi}{n} \qquad \leftarrow \left(\begin{array}{c}\text{Posizione del minimo per } \lambda \\ \text{Criterio di Rayleigh, arbitrario}\end{array}\right)$$

Potere risolvente $\boxed{\Delta\lambda/\lambda < 1/mn}$.

È il solito $\Delta\nu \gtrsim 1/\Delta t$ dove $\Delta t = mn\nu$ è la differenza di tempo fra 1 ed n.

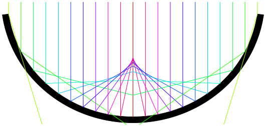
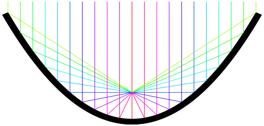
Griglia come antenna ricevente

Usiamo una griglia come occhio, inviando un'onda piana inclinata di $\theta_{\rm in}$ e osservando il segnale che la griglia produce nel suo punto "focale", la verticale $\theta = 0$, dove il segnale è la somma di tutti gli oscillatori, $\delta = \varphi = -2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta_{\rm in}$.
Si ha un picco se $\delta = 0$ cioè $\theta_{\rm in} = 0$. La larghezza del picco è data, per una griglia lineare, da $|\delta| < 2\pi/n$ quindi $\sin\theta_{\rm in} \simeq \boxed{\theta_{\rm in} < \lambda/L}$ dove $L = nd$. Questa è la *risoluzione angolare della griglia.*
Griglia non lineare (ad esempio 2d): ancora $E = \sum_{r=0}^{n-1} e^{i\varphi_r}$; ancora massimo per sorgente perpendicolare a griglia piana: $|E|^2 = n^2$. Risoluzione angolare:



Griglia come antenna ricevente

Lo si può costruire riflettendo con cerchio o meglio parabola: $\boxed{\theta < 1.22\lambda/L}$

Arceibo $L \sim 300\,\mathrm{m}$, FAST $L = 500\,\mathrm{m}$ ricevono fino a $\lambda = 0.1\,\mathrm{m}$ i.e. $\nu = 3\,\mathrm{GHz}$.
Una lente focalizza in un punto usando la rifrazione: analogo a griglia tonda. Capito come funziona un pixel che vede a $90°$, si ottengono occhi a più pixel aggiungendo sensori vicino al fuoco, che ricevono da altre direzioni vicine. Gli occhi vedono la direzione guardando alla fase.
Grosso telescopio raccoglie tanta luce ma costa e si rompe. Due bracci di fibre ottiche possono avere maggiore risoluzione e contrasto, perdendo luminosità. Utili per vedere pianeti extra-solari come variazione di intensità di stelle.

Principio di Huygens-Fresnel

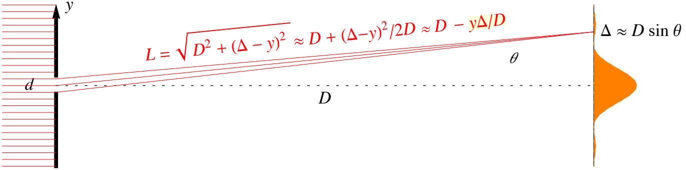
Come calcolare luce che incontra un ostacolo o un buco? Risolvendo le eq. di Maxwell. Difficile. In pratica si una un'approssimazione generica per onde.
Ogni dS di un fronte d'onda si può considerare come una sorgente secondaria di onde (sferiche) con fase ed ampiezza dell'onda primaria.

Spiegazione fisica: succede nella materia. Ogni atomo investito irraggia combinandosi a dare un'onda totale uguale a quella primaria a parte $n \neq 1$.

Spiegazione matematica: a frequenza data (Fourier) l'equazione d'onda scalare è $(\nabla^2 + k^2)\varphi = 0$. Identità matematica: $\int_V dV(\varphi\nabla^2 G - G\nabla^2\varphi) = \int_{\partial V} dS[\varphi\,\partial G/\partial n - G\,\partial\varphi/\partial n]$ (teorema di Green $\sim$ divergenza). Si sceglie $G = e^{ikR}/4\pi R$ la funzione di Green tale che $(\nabla^2 + k^2)G = -\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')$. Risultato: $\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_S dS\,\frac{e^{ikR}}{R}\boldsymbol{n}' \cdot [\varphi \cdots + \boldsymbol{\nabla}\varphi \cdots]$. Fattori angolari $f(\theta) \sim (1 + \cos\theta)/2$ evitano propagazione all'indietro. Generalizzabile a onde vettoriali.

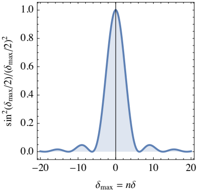
Utilizzo: approssimazione di Kirchhoff: zero su schermo, onda primaria su buchi. Inutile calcolare $\cdots$, è solo un'approssimazione (inconsistente...), ma va bene per buchi $d \gg \lambda$ e quindi angoli $\theta \ll 1$. Conta solo e^{ikR}.

Diffrazione da fenditura lineare



Fraunhofer: schermo lontano, $\lambda \ll d \ll \Delta \ll D$. Quindi $\delta(y) = ky\sin\theta$ e

$$A = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dy}{d}\, e^{i\delta} = \frac{2\sin(\frac{1}{2}kd\sin\theta)}{kd\sin\theta}, \qquad |A|^2 = \frac{4\sin^2(\frac{1}{2}kd\sin\theta)}{k^2d^2\sin^2\theta}$$

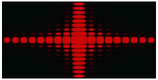


È il limite continuo della griglia, $n \to \infty$, $n\delta \to \delta_{\max}$

$$\frac{\sin^2 n\delta/2}{\sin^2 \delta/2} \to \frac{4\sin^2(\delta_{\max}/2)}{\delta_{\max}^2}$$

Schermo a infinito, o lente che focalizza su schermo finito.

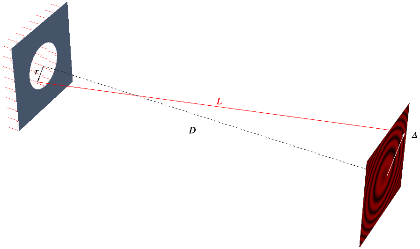
Fresnel: schermo vicino, $\lambda \ll d, \Delta \ll D$, y^2 in L produce erfi.
Fraunhofer da rettangolo: integrando su y e z esce $F_y F_z$.



Diffrazione da fenditura circolare

Onda piana incide $\perp$ su buco circolare di raggio a parametrizzato da $\boldsymbol{r}$:

$$A = \int \frac{dS}{S}\, e^{ikL}.$$



In approssimazione di Fraunhofer (a distanza infinita o nel fuoco di lente)

$$L \simeq D - \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{\Delta}}{L} = D - \frac{r\Delta}{D}\cos\phi.$$

Quindi, definendo $R = 2\pi a\Delta/D\lambda$

$$A = \frac{1}{\pi a^2}\int_0^a dr\, r\int_0^{2\pi} d\phi \exp\left(ik\frac{r\Delta}{D}\cos\phi\right) = \frac{4\pi}{a^2}\int_0^a dr\, r J_0\left(\frac{kr\Delta}{D}\right) = 4\pi\frac{J_1(R)}{R}$$

e $|A|^2 \propto J_1^2(R)/R^2$ fa "disco di Airy" con picco a $R=0$ (84% del flusso) zero a $R = 1.22\,\pi$ e poi altro massimo (0.017 più basso). Risoluzione angolare

$$\theta = \frac{\Delta}{D} \approx 1.22\frac{\lambda}{2a}$$

Fenomeno generale di onde e.g. scattering protone-protone. Path integral.

Il path integral

Huygens-Fresnel vale anche per un piano vuoto, senza nessuno schermo: è modo complicato di calcolare l'ovvio. Principio di Babinet degli schermi complementari: $A_{\text{piano}} = A_{\text{ostacolo}} + A_{\text{buco}}$ se piano = ostacolo + buco.

$I_{\text{piano}} = |A_{\text{piano}}|^2 \neq I_{\text{ostacolo}} + I_{\text{buco}}$. Con due ostacoli o buchi bisogna iterare

$$A \approx \int dq_1 \int dq_2 \, e^{iS} \qquad S = k(R_{S1} + R_{12} + R_{2O}) = 2\pi \left(\begin{array}{c} \text{numero di} \\ \text{lunghezze d'onda} \end{array} \right).$$

Con infiniti piani si ha un integrale sulle traiettorie $Dq = dq_1 \, dq_2 \cdots dq_\infty$

$$\Box^2 \varphi = 0 \qquad \overset{\Leftrightarrow}{\approx} \qquad \varphi \approx \iint Dq(x) \, e^{iS}$$

Ottica geometrica: domina la traiettoria dritta da S ad O che estremizza S. Soluzione approssimata perché $e^{ikR} f(\theta)/R \approx e^{ikR}$. Con $\approx \to =$ è la meccanica quantistica, di cui la meccanica classica è il limite geometrico $\delta S/\delta q = 0$.

Dubbi fondamentali

Equazione d'onda del suono ed effetto Doppler

La densità $\rho(\boldsymbol{x}, t)$ di un materiale a riposo soddisfa all'equazione delle onde sonore

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{v_s^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\rho \approx 0 \qquad \text{(materiale a riposo)}$$

Soluzione: ρ è una funzione di $x - v_s t$.

* Approssimando urti tra particelle come una pressione $\wp(\rho)$ da Fisica 1 si derivano le equazioni della fluido-dinamica per $\rho(\boldsymbol{x}, t)$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}, t)$

$$\begin{cases} \rho\left(\dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right)\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{\nabla}\wp + \cdots & \text{Legge di Newton } m\dot{\boldsymbol{v}} = \boldsymbol{F} \\ \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0 & \text{Conservazione della massa} \end{cases}$$

che portano alla velocità del suono $v_s^2 = \wp/\rho$.

Se il materiale si muove con velocità $\boldsymbol{v}$ (ad esempio se tira vento) basta andare nel sistema di riferimento $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}' + \boldsymbol{v}t$ rispetto a cui il materiale è fermo.

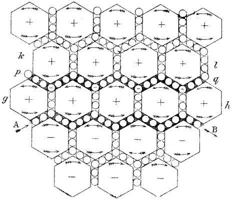
L'onda $\rho[k(x - v_s t)] = \rho[kx - \omega t]$ diventa $\rho[k'(x' - v_s' t')] = \rho[k'x' - \omega' t']$ con

$$k' = k, \qquad v_s' = v_s - v, \qquad \omega' = \omega\left[1 - \frac{v}{v_s}\right].$$

Doppler nel 1845 osservò questo effetto per le onde sonore. Sostituendo

Come Maxwell ci è arrivato

Dopo essere sopravvissuto al vaiolo, seguendo il pensiero meccanicistico clockwork dell'epoca, Maxwell immaginò un universo pervaso da un materiale detto **etere**, modellizzato come celle ruotanti lubrificate da rotelle mobili.



B è la rotazione media delle celle, E è il moto delle rotelle. L'energia di moto delle rotelle è l'energia elettrica. L'energia di rotazione delle celle è l'energia magnetica.

- Quando una cella ruota fa come la terra: si allarga ortogonalmente all'asse di rotazione; questo genera una pressione ed una tensione che spiega la pressione magnetica.
- Quando un circuito viene acceso, il moto delle rotelle fa girare le celle, trasmettendo il moto rotatorio a celle adiacenti; questo spiega l'induzione di una corrente in un circuito vicino, incluso il segno dell'effetto.
- Nei conduttori le celle sono libere di muoversi. Negli isolanti no. Pigiando, si distorcono un poco, per via della loro elasticità. Così facendo riescono a spostarsi un poco: per questo la chiamò 'corrente di spostamento'.
- ...

Fisica 1 $\Rightarrow$ Fisica 2? No

Alla fine Maxwell notò che il suo materiale trasmetteva onde analoghe a quelle del suono, con velocità $c = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ che puzzava di velocità della luce. Forse aveva capito cosa era la luce mentre era in vacanza a Glenair: dovette aspettare un mese prima di tornare al lavoro e verificare che c coincideva con il valore misurato.

Anni dopo, nel 1862, buttò via il modello meccanico proponendo le equazioni di Maxwell. Alcuni pensarono che avesse fatto un passo indietro.
Venne ignorato fino a quando 20 anni dopo Hertz confermò/scoprì le onde radio commentando: "it's of no use whatsoever".

Quando c'è una teoria nuova, la gente cerca di capire quella nuova in termini dei vecchi concetti. A volte funziona:

- Meccanica $\Rightarrow$ Meccanica Statistica (la temperatura è energia degli atomi).

A volte no, ed il problema si ribalta. In generale la teoria più fondamentale deve spiegare quella meno fondamentale.

- Elettromagnetismo $\Rightarrow$ Meccanica. Non il contrario.
  L'elettromagnetismo produce corpi macroscopici e forze di contatto, è inutile cercare di capirlo in termini di meccanica.
- Attenzione: Meccanica Quantistica $\Rightarrow$ Meccanica Classica. Non il contrario.

Fisica 2 ⇒ Fisica 1? Quasi

Tentativi di spiegare la materia in termini di e.m. (∼1900) davano roba strana.

- Stati legati di elettromagnetismo (materia) in moto si contraggono.
- Tentavano modelli dell'elettrone in cui tutta l'energia e l'impulso sono e.m. (ipotesi sbagliata). Assumendo una sfera non rigida Lorentz trovò una relazione di dispersione $E = p^2/2m$ con $m = m_0\sqrt{1 - v^2/c^2}$.
- La velocità della luce è c, ma rispetto a quale sistema di riferimento?

Più in generale, **in quale sistema di riferimento valgono le eq. di Maxwell?**

L'analogia Fisica 1 ⇒ Fisica 2 suggeriva idee ragionevoli, ma sbagliate:

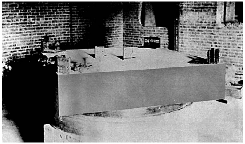
a) Rispetto al sistema di riferimento di chi ha emesso la luce, come una pistola?

b) Rispetto al sistema di riferimento di chi la propaga, come il suono?
"Le eq. di Maxwell sono come le eq. del suono, generato dal moto collettivo delle molecole di aria. Quindi esiste un fluido cosmologico, l'**etere**".

Bizzarro: il suono va veloce nei materiali duri, c è enorme, nessuno vede l'etere.

Servivano altri ~~schiaffoni~~ test sperimentali: se fosse $v_{\rm luce} = c$ rispetto all'etere, un osservatore in moto con velocità $\boldsymbol{v}$ vedrebbe $\boldsymbol{v}_{\rm luce} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{v}$. $v_{\rm Terra} \approx 30$ km/s $\ll c$, come misurare? Nuova fisica generava nuova tecnologia che genera nuova fisica...

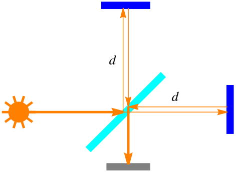
Esperimento di Michelson-Morley



Tramite riflessione parziale un'onda viene divisa in due raggi, uno parallelo ed uno perpendicolare al vento di etere. Il tempo necessario a fare avanti-indietro è

$$t_{\parallel} = \frac{d}{c+v} + \frac{d}{c-v} \overset{v \ll c}{\simeq} \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right)$$

$$t_{\perp} = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} \overset{v \ll c}{\simeq} \frac{2d}{c}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right).$$



Poi vengono ricombinati. Per $d \sim$ m la differenza

$$\Delta t = t_{\parallel} - t_{\perp} \sim \frac{v^2}{c^2}\frac{d}{c} \sim 0.3\ 10^{-16}\,\mathrm{s} \qquad c\Delta t \approx 100\,\mathrm{nm}$$

è comparabile alla λ della luce visibile, quindi rilevabile da un interferometro. Non videro alcuno spostamento. Oggi $v \lesssim 10^{-6}$m/s. Interpretazioni: la Terra trascina l'etere, il Sole gira attorno alla Terra piatta, ..., le equazioni di Maxwell sono valide in ogni sistema, ma le equazioni di trasformazione non sono quelle suggerite dal buonsenso galileiano che implicherebbero $c' = c + v$

$$\begin{cases} x' = x - vt \\ t' = t \end{cases}$$

Invarianza di gauge e relativistica

Potenziale vettore

Le equazioni di Maxwell nascondono simmetrie importanti

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\epsilon_0}\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\qquad \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B}=0\qquad \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{J}+\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}.$$

Le 2 eq. di Maxwell senza sorgenti sono automaticamente soddisfatte scrivendo:

$$\boxed{\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A},\qquad \boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi-\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}}.$$

Esempio: $\boldsymbol{B}$ costante descritto da *potenziale vettore* $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{r}/2$ 'che gira'. In termini di φ (ritorno del potenziale scalare) e $\boldsymbol{A}$ le 2 equazioni con sorgenti diventano

$$\left\{\begin{array}{rcl}\nabla^2\varphi &=& -\rho/\epsilon_0-\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\boldsymbol{A}}\\ \boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}) &=& \mu_0\boldsymbol{J}-\mu_0\epsilon_0(\boldsymbol{\nabla}\dot{\varphi}+\ddot{\boldsymbol{A}})\end{array}\right.$$

Usando $\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A})=-\nabla^2\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A})$ si inizia a vedere una struttura

$$\boxed{\left\{\begin{array}{rcl}\Box^2\varphi &=& -\dfrac{\rho}{\epsilon_0}-\dfrac{\partial}{\partial t}G\\ \Box^2\boldsymbol{A} &=& -\mu_0\boldsymbol{J}+\boldsymbol{\nabla}G\end{array}\right.}$$

dove

$$\Box^2\equiv\nabla^2-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2},\qquad G\equiv\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}.$$

Invarianza di gauge

Potenziali φ ed $\boldsymbol{A}$ della forma

$$\boxed{\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{\nabla}\omega, \qquad \varphi = +\frac{\partial \omega}{\partial t}}$$

dove $\omega(x, y, z, t)$ è una generica funzione, descrivono campi zero:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} = 0, \qquad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = 0.$$

Quindi i potenziali φ, $\boldsymbol{A}$ sono definiti a meno di una **trasformazione di gauge**

$$\boxed{\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\omega, \qquad \varphi \to \varphi + \frac{\partial \omega}{\partial t}}$$

Generalizza $\varphi \to \varphi + \text{cte}$: si può scegliere lo zero di φ ad ogni $\boldsymbol{r}, t$, quindi $\varphi = 0$.
6 campi $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{B}$ scritti in termini di 4 potenziali $\varphi, \boldsymbol{A}$ che in realtà sono 3.

Scelte di gauge

Scegliendo la **gauge di Coulomb** $\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{A} = 0}$ l'equazione per φ diventa come in elettrostatica, $\nabla^2 \varphi = -\rho/\epsilon_0$. Soluzione nota:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t)}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}$$

Trasmissione istantanea anche a $\boldsymbol{x}' \neq \boldsymbol{x}$. Strano. Ed infatti è solo illusorio: $\boldsymbol{E} = -\nabla\varphi - \dot{\boldsymbol{A}}$ dipende anche da $\boldsymbol{A}$, e la sua equazione è brutta.

Meglio scegliere la **gauge di Loren·z** $\boxed{G = 0}$. Le equazioni diventano

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{rcl} \Box^2 \varphi & = & -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box^2 \boldsymbol{A} & = & -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{array} \right. \qquad G = \nabla \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0}$$

Soluzione nel vuoto: $\varphi = \varphi(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$, $\qquad \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} - \omega t)$.
La condizione di gauge $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{A}' - k\varphi'/c = 0$ è soddisfatta da:
a) Trasversi: $\varphi = 0$ e $\boldsymbol{A} \perp \boldsymbol{k}$. Danno onde.
b) Longitudinali: $A_x(kx - \omega t) = \varphi(kx - \omega t)/c$. Danno campi 0.
Termini di sorgente danno $G = 0$ per conservazione carica: potenziali ritardati...

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3 r' \, \frac{\rho(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3 r' \, \frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', t')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|} \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}{c}$$

Invarianza relativistica SO(3,1)

Le equazioni di Maxwell sono invarianti sotto rotazioni spaziali SO(3) R_{ij} rese esplicite dalla notazione vettoriale $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$. Lasciano invarianti la distanza

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \text{cioè} \qquad \mathbb{1} = R^T \mathbb{1} R.$$

$\Box^2$ e $\{\boldsymbol{A}, \varphi\}$ e $\{\boldsymbol{J}, \rho\}$ suggeriscono 4-vettori che ruotano spazio $\leftrightarrow$ tempo. La simmetria che c'è dietro è più generale delle eq. di Maxwell. È **SO(3,1)** che ruota il quadri-vettore 'controvariante' $\boxed{\mathbb{X}^\mu = (x, y, z, ct)}$ che unifica lo spazio col tempo nello **spazio-tempo** di Minkowski e che conserva il prodotto scalare

$$\mathbb{X} \cdot \mathbb{X} \equiv x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = \mathbb{X}^T \eta \mathbb{X} \qquad \eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, -1) \qquad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

Forma esplicita di una 'rotazione' nel piano x, ct in termini di $\gamma = 1/\sqrt{1 - v^2/c^2}$:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \gamma \begin{pmatrix} 1 & -v/c \\ -v/c & 1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c^2) \end{array} \right.}$$

L'invariante $\eta_{\mu\nu}$ non è la matrice $\mathbb{1}$: bisogna distinguere il vettore 'covariante' $\mathbb{X}_\mu = (x, y, z, -ct) = \eta_{\mu\nu} \mathbb{X}^\nu$. Quindi $\mathbb{X}^2 = \mathbb{X}_\mu \mathbb{X}^\mu$ e $\eta_\mu^\nu = \mathrm{diag}\,(1, 1, 1, 1)$.

Dal differenziale si ottiene il quadri-vettore **quadri-gradiente**:

$$df = f(\mathbb{X} + d\mathbb{X}) - f(\mathbb{X}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbb{X}^\mu} d\mathbb{X}^\mu \equiv \Box f \cdot d\mathbb{X}$$

$$\Box_\mu = \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right) \qquad \Box^\mu = \eta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \mathbb{X}^\nu} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Invarianza relativistica delle eq. di Maxwell

La simmetria SO(3,1) delle equazioni di Maxwell è esplicita definendo i 4-vettori

$$\mathbb{A}^\mu = (A_1, A_2, A_3, \frac{\varphi}{c}), \qquad \mathbb{J}^\mu = (J_1, J_2, J_3, c\rho).$$

Le equazioni dell'elettro-magnetismo erano

$$\begin{cases} \Box^2\varphi + \dfrac{\partial G}{\partial t} &= -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box^2 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla} G &= -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{cases} \qquad G = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial t}$$

e sono riscritte come

$$\boxed{\Box^2\mathbb{A}^\mu - \Box^\mu G = -\mu_0\mathbb{J}^\mu \qquad G \equiv \Box\cdot\mathbb{A}}$$

Scrivendola come $(\Box^2\eta^{\mu\nu} - \Box^\mu\Box^\nu)\mathbb{A}_\nu = -\mu_0\mathbb{J}^\mu$ si nota che il primo termine vale zero contratto con $\Box_\mu$, ritrovando la conservazione della carica $\boxed{\Box\cdot\mathbb{J} = 0}$.

La trasformazione di gauge era

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A} - \boldsymbol{\nabla}\omega, \qquad \varphi \to \varphi + \frac{\partial\omega}{\partial t}$$

che, in notazione relativistica, si scrive come

$$\boxed{\mathbb{A}^\mu \to \mathbb{A}^\mu - \Box^\mu\omega}$$

Tensore dei campi

Senza fissare gauge, le equazioni di Maxwell con sorgenti sono

$$\Box_\nu(\Box^\nu \mathbb{A}^\mu - \Box^\mu \mathbb{A}^\nu) = -\mu_0 \mathbb{J}^\mu.$$

Compare un tensore di rango 2 (cioè matrice) anti-simmetrico (in ogni sistema). Contiene le 6 componenti dei campi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$:

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} = \Box_\mu \mathbb{A}_\nu - \Box_\nu \mathbb{A}_\mu = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -B_z & B_y & -E_x/c \\ B_z & 0 & -B_x & -E_y/c \\ -B_y & B_x & 0 & -E_z/c \\ \hline E_x/c & E_y/c & E_z/c & 0 \end{array}\right)$$

$F_{i0} = E_i/c$ e $F_{ij} = -\epsilon_{ijk} B_k$: in 3d (tensore anti-simmetrico) = (pseudo-vettore). Implicherà: trasformazioni di Lorentz dei campi. Essendo un tensore $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ più complicato di un vettore, è stato utile arrivarci passando tramite $\mathbb{A}_\mu$.

Il tensore dei campi è gauge-invariante:

$$\mathbb{F}_{\mu\nu} \to \mathbb{F}_{\mu\nu} + \Box_\mu \Box_\nu \omega - \Box_\nu \Box_\mu \omega = \mathbb{F}_{\mu\nu}.$$

Equazioni di Maxwell in notazione relativistica

Ritorno alle equazioni di Maxwell in termini di $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ in notazione relativistica:

$$\begin{cases} \boxed{\Box^\mu \mathbb{F}_{\mu\nu} = \mu_0 \mathbb{J}_\nu} & \text{I } (\nu = 0) \text{ e IV } (\nu = i) \text{ equazione} \\ \boxed{\Box^\mu \tilde{\mathbb{F}}_{\mu\nu} = 0} & \text{III } (\nu = 0) \text{ e II } (\nu = i) \text{ equazione} \end{cases}$$

avendo definito il **tensore dei campi duale**, che ha $\boldsymbol{E}/c \leftrightarrow \boldsymbol{B}$ scambiati:

$$\tilde{\mathbb{F}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{F}_{\rho\sigma} = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -E_z/c & E_y/c & -B_x \\ E_z/c & 0 & -E_x/c & -B_y \\ -E_y/c & E_x/c & 0 & -B_z \\ \hline B_x & B_y & B_z & 0 \end{array}\right)$$

$\epsilon_{i_1 i_2}$ è tensore invariante di SO(2), $\epsilon_{i_1 i_2 i_3}$ di SO(3), $\epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4}$ di SO(4) e SO(3,1).
Se ne può fare a meno: in notazione meno elegante la III+II equazione è

$$\Box_\sigma \mathbb{F}_{\mu\nu} + \Box_\mu \mathbb{F}_{\nu\sigma} + \Box_\nu \mathbb{F}_{\sigma\mu} = 0.$$

'Identità di Bianchi', matematica nota come 'forme differenziali' anti-simmetriche:

$$F = dA \quad \Rightarrow \quad dF = 0, \qquad d^*F = J \quad \Rightarrow \quad dJ = 0$$

In questa forma Maxwell si generalizza a dimensione $d \neq 3+1$ generica (E è vettore, B è tensore anti-simmetrico), e con sorgenti di dimensione $d' \neq 0+1$.

Trasformazioni di Lorentz

Cosa è SO(3,1)? Trucco matematico: $\boldsymbol{x}^2 - (ct)^2 = \boldsymbol{x}^2 + (ict)^2$. SO(3,1) diventa SO(4) cioè rotazioni in 4d. Consideriamone una nuova fra x e ict:

$$\begin{pmatrix} x' \\ ict' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ict \end{pmatrix} \qquad \text{i.e.} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & i\sin\theta \\ i\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}$$

Per rimane fra i reali bisogna prendere $\theta = ia$ dove a è detto rapidità. Infatti $\sin(ia) = i\sinh a$ e $\cos(ia) = \cosh(a)$. Le rotazioni spazio $\leftrightarrow$ tempo diventano

$$\begin{pmatrix} x' \\ ct' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} \cosh a & -\sinh a \\ -\sinh a & \cosh a \end{pmatrix} \qquad \left\{ \begin{array}{rl} x' &= +x\cosh a - ct\sinh a \\ ct' &= -x\sinh a + ct\cosh a \end{array} \right.$$

Verifica: infatti le trasformazioni lasciano invariante

$$x^2 - c^2t^2 = x'^2 - c^2t'^2 \qquad \text{cioè} \qquad \eta = \Lambda^T \eta \Lambda.$$

Sono le **trasformazioni di Lorentz**. Riscrivendo in termini di $\tanh a \equiv v/c$:

$$\cosh a = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \equiv \gamma, \qquad \sinh a = \gamma\frac{v}{c} \qquad \boxed{\left\{ \begin{array}{rl} x' &= \gamma(x - vt) \\ t' &= \gamma(t - xv/c^2) \end{array} \right.}.$$

Sono trasformazioni fra sistemi di riferimento in moto relativo con velocità v, entrate nelle eq. di Maxwell quando si è misurò che Lenz vale in ogni sistema.

Lorentz → Galileo

Per $v \ll c$ le trasformazioni di Lorentz si riducono a quelle di Galileo

$$\left\{ \begin{array}{l} x' = \gamma(x - vt) \\ t' = \gamma(t - xv/c^2) \end{array} \right. \qquad \overset{v \ll c}{\to} \qquad \left\{ \begin{array}{l} x' = x - vt \\ t' = t \end{array} \right. .$$

Analogo a: (simmetria SO di rotazione di una Sfera) $\overset{\text{localmente}}{\to}$ (traslazione T)

$$\mathrm{SO}(2) \to T_1, \qquad \mathrm{SO}(3) \to T_2.$$

Lorentz ha una struttura globale diversa da Galileo: la luce va a c rispetto ad ogni sistema di riferimento. Matematicamente, **SO ha (quadri)vettori**, T no.

Invece di studiare l'intero elettromagnetismo, Einstein nel 1905 isolò la lezione cruciale: la simmetria. Basandosi solo su Michelson-Morley postulò:

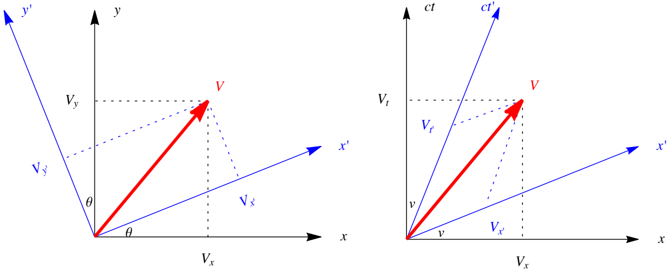
1) La velocità della luce è c in ogni sistema inerziale.
2) Stesse leggi della fisica in ogni sistema inerziale.

Secondo Galileo sono contradditori. Einstein modificò Galileo in Lorentz e aggiustò la meccanica rendendola Lorentz-invariante. L'elettromagnetismo è già ok.

Oggi tutta la fisica sono particelle (γ, e...) descritte da campi come quello elettromagnetico $\mathbb{A}_\mu(\mathbb{X})$ che soddisfano equazioni Lorentz-invarianti con $\Box^2$ e lo stesso c: proprietà non di una particella ma della geometria dello spazio-tempo.

Spazio-tempo di Minkowski

Minkowski (professore di matematica di Einstein) nel 1908 semplificò la relatività introducendo il formalismo SO(3,1): spazio-tempo e 4-vettori.

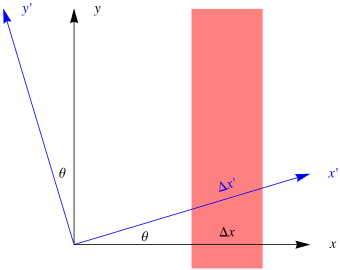


Disegnando in un piano a metrica positiva non è visibile l'invarianza di $x^2 - c^2t^2$.

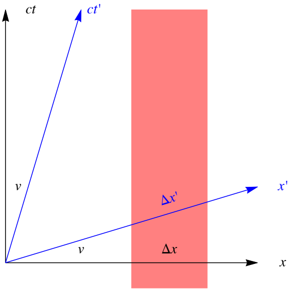
Contrazione delle lunghezze

Un albero ha sezione maggiore se tagliato storto, $\Delta x' = \Delta x / \cos\theta > \Delta x$.

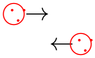
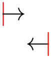
Rotazioni SO(2)



Lorentz SO(1,1)



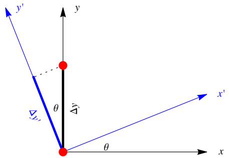
Bisogna calcolare per vedere che $\Delta x' = \Delta x / \cosh a = \Delta x / \gamma < \Delta x$.
I protoni sono sfere di 3 quark e gluoni. A $\gamma \gg 1$ urtano come piattelli...

$v \ll c :$  $\gamma \gg 1 :$ 

Dilatazione dei tempi

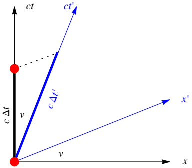
Rotazioni SO(2): un albero verticale a $x = 0$ rispetto ad S, è alto Δy. Rispetto ad S' girato

$$\begin{aligned} \Delta y' &= \Delta y \cos\theta + \Delta x \sin\theta \\ &= \Delta y \cos\theta < \Delta y \end{aligned}$$



Lorentz SO(1,1): un processo fermo a $x = 0$ rispetto ad S, impiega Δt. Rispetto ad S' boostato

$$\begin{aligned} \Delta t' &= \gamma(\Delta t - \Delta x\, v/c^2) \\ &= \Delta t \cosh a = \gamma \Delta t > \Delta t \end{aligned}$$



Un muone a riposo decade con vita media $\tau \approx 659\,\mathrm{m}\,c$. Prodotto ad alta energia $\gamma \gg 1$ da raggi cosmici nell'atmosfera è più stabile, $\gamma\tau$, e raggiunge la terra.

Un fascio di protoni si respinge e destabilizza in tempo τ. Se ha alta energia $\gamma \gg 1$ appare più stabile, $\gamma\tau$. In questo caso la dinamica è nota: repulsione Coloumbiana. La maggiore stabilità è calcolabile come $F = q(E + vB) < qE$ (pag. 136). Ma il risultato dipende solo dalla simmetria.

Causalità

Secondo Galileo $\Delta t' = \Delta t$. Prima e dopo sono assoluti. Se A avviene prima di B, A può causare B. La relatività viola la causalità? No, ma la modifica.

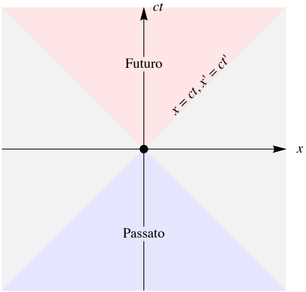
Secondo Lorentz $\Delta t' \neq \Delta t$ e il loro segno può differire per eventi lontani (mentre 'solo' $\Delta t' = \gamma \Delta t$ per eventi a $\Delta x = 0$).

Cosa avviene prima e cosa avviene dopo dipende dal sistema di riferimento...
... ma solo per eventi così lontani che non possono influenzarsi.

La causalità è preservata grazie all'invarianza di

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 - c^2 \Delta t^2 = \Delta x'^2 - c^2 \Delta t'^2$$

Se $\Delta x / \Delta t < c$ gli eventi sono causalmente connessi da segnali che viaggiano a $v \leq c$ e l'ordinamento temporale è assoluto. Infatti esiste sistema in cui $\Delta x = 0$.
Se $\Delta x / \Delta t > c$ l'ordinamento temporale non è assoluto ma non causa acausalità perché gli eventi non sono causalmente connessi.



Simmetrie Lorentz invarianti: Time inversion ($t \to -t$), Parità ($\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$), PT.

Meccanica relativistica

Quadri-posizione di punto $\mathbb{X}(\tau)$ dove τ è un parametro ($\tau \to \tau'$ è invarianza di gauge). Spesso conviene il **tempo proprio** $\boxed{d\tau^2 = dt^2 - dx^2/c^2} \neq 0$ se $v \neq c$.

Quadri-velocità: $\boxed{\mathbb{V} = \dfrac{d\mathbb{X}}{d\tau}}$ $\qquad \mathbb{V}^\mu = \dfrac{dt}{d\tau}\dfrac{d\mathbb{X}^\mu}{dt} = \gamma(\boldsymbol{v}, c), \qquad \mathbb{V}^2 = -c^2.$

Il **quadri-impulso** di una particella ferma non può essere $\mathbb{P} = (0,0,0,0)$, perché altrimenti sarebbe 0 anche quello Lorentz-ruotato di una particella in moto:

$$\mathbb{P} = \left(0,0,0,\frac{E_0}{c}\right)_S \overset{\text{Lorentz}}{=} \left(\gamma\frac{v}{c}\frac{E_0}{c}, \cdots\right)_{S'} \overset{v \ll c}{\simeq} \left(\frac{vE_0}{c^2}, \cdots\right)_{S'} \qquad \Rightarrow \qquad E_0 = mc^2.$$

La definizione giusta è

$$\boxed{\mathbb{P} = m\mathbb{V}} \qquad \mathbb{P}^\mu \equiv (\boldsymbol{p}, \frac{E}{c}), \qquad \begin{cases} \boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v} \simeq m\boldsymbol{v} + \cdots \\ E = m\gamma c^2 \simeq mc^2 + mv^2/2 + \cdots \end{cases}$$

$\mathbb{P} \cdot \mathbb{P} = -m^2c^2$ quindi $E^2 = (mc^2)^2 + (pc)^2$. Ha senso $m \to 0$ (fotone): $E = pc$. Conservato negli urti che ora permettono variazioni di massa e.g. decadimenti.

Quadri-forza: $\boxed{\mathbb{F} = \dfrac{d\mathbb{P}}{d\tau}}$ $\qquad \mathbb{F}^\mu = \gamma(\boldsymbol{F}, \dfrac{W}{c}), \qquad \boldsymbol{F} \equiv \dfrac{d\boldsymbol{p}}{dt}, \quad W \equiv \dfrac{dE}{dt} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v}.$

Forza elettromagnetica

Anche la forza di Lorentz su carica q è SO(3,1) simmetrica:

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \qquad \Leftrightarrow \qquad \boxed{\mathbb{F}_\mu = q\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{V}^\nu}$$

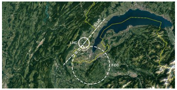
Infatti

$$\begin{cases} \mathbb{F}^0 = q\mathbb{F}^{0i}\mathbb{V}_i = q\dfrac{\boldsymbol{E}}{c} \cdot \gamma \boldsymbol{v} \overset{\checkmark}{=} \gamma \dfrac{W}{c} \\ \mathbb{F}_i = q(-\mathbb{F}_{i0}\mathbb{V}^0 + \mathbb{F}_{ij}\mathbb{V}^j) = q\gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_i = \gamma \boldsymbol{F} \end{cases}$$

riproducono la forza di Lorentz.

Esempio: q in B costante: $d\boldsymbol{p}/dt = q\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$ i.e. $(v/a)p = qvB$ i.e. $p = aqB$ dove ora $\boldsymbol{p} = m\gamma\boldsymbol{v}$. Accelerare a grande energia $E \simeq pc$ richiede grandi raggi a:

$$pc = caqB = \overbrace{\mathrm{eV}\frac{c}{\mathrm{m/s}}}^{0.3\ \mathrm{GeV}} \frac{a}{\mathrm{m}} \frac{q}{e} \frac{B}{\mathrm{Tesla}}$$



... e questo ha spezzato la catena virtuosa scoperte $\leftrightarrows$ applicazioni.

Invarianti di Lorentz dei campi

Quando possibile, conviene utilizzare invarianti. Ce ne sono due:

$$\boxed{\frac{1}{2}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu} = (E/c)^2 - B^2} \qquad \text{scalare}$$

$$\boxed{\frac{1}{8}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}_{\rho\sigma} = \frac{\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B}}{c}} \qquad \text{pseudo-scalare}$$

Esempio 1: per un'onda piana nel vuoto valgono zero.

Esempio 2: carica in $\boldsymbol{E}_y$ e $\boldsymbol{B}_z$ ortogonali. $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{B} = 0$ in ogni sistema.

- Se $E < cB$ posso andare in un sistema in cui $E' = 0$ e quindi $B' = \sqrt{B^2 - E^2/c^2}$. È il drift a velocità $v_x = E_y/B_z$ di pag. 119.
- Se $E > cB$ è così forte che B non incurva le traiettorie: vado in sistema dove $B' = 0$ e $E' = \sqrt{E^2 - c^2B^2}$ boostato di $v_x = c^2 B_z/E_y$ (pag. prossima).

Trasformazione di Lorentz dei campi

I campi trasformano come $\mathbb{F}_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}_{\mu'}\Lambda^{\nu}_{\nu'}\mathbb{F}_{\mu\nu}$. Per $\boldsymbol{v}$ lungo l'asse x:

$$\Lambda^{\nu'}_{\nu} = \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 0 & -\gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline -\gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right) \qquad \Lambda^{\mu}_{\mu'} = \eta^{\mu\nu}\Lambda^{\nu'}_{\nu}\eta_{\mu'\nu'} = \left(\begin{array}{ccc|c} \gamma & 0 & 0 & \gamma v/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \gamma v/c & 0 & 0 & \gamma \end{array}\right)$$

Quindi:

$$\boxed{\left\{\begin{array}{ll} E'_x = E_x & B'_x = B_x \\ E'_y = \gamma(E_y - vB_z) & B'_y = \gamma(B_y + vE_z/c^2) \\ E'_z = \gamma(E_z + vB_y) & B'_z = \gamma(B_z - vE_y/c^2) \end{array}\right.}$$

Verifica invarianti ✓. Notazione vettoriale:

$$\boldsymbol{E}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})_{\perp} \qquad \boldsymbol{B}'_{\perp} = \gamma(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{E}/c^2)_{\perp}$$

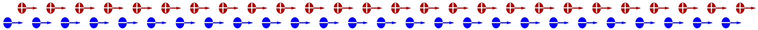
Per $v \ll c$ si riducono a Galileo, $\boldsymbol{E}' \simeq \boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}$, pag. 119.

I campi trasformano seguendo le loro sorgenti: $\begin{array}{ccc} \rho & \to & E \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ J & \to & B \end{array}$

Magnetismo come effetto relativistico

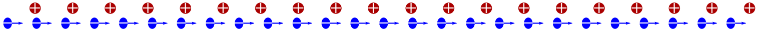
F_B è effetto relativistico, soppresso da $(v/c)^2 \sim 10^{-30}$ e visibile perché enormi F_E di $\sim 10^{30}$ e e p si cancellano, ma e fanno moti collettivi dando correnti. La materia è fatta di cariche opposte p^+ ed e^- con densità $\rho^0_+ + \rho^0_- = 0$. A riposo: correnti $\boldsymbol{J}_\pm = 0$, quadri-correnti $\mathbb{J}_\pm = (\boldsymbol{J}_\pm, c\rho_\pm) \neq 0$, totale $\mathbb{J} = \mathbb{J}_+ + \mathbb{J}_- = 0$:

Materia in moto (o vista da carica in moto): $\mathbb{J}_\pm = \gamma(\boldsymbol{v}, c)\rho^0_\pm$, $\mathbb{J}$ rimane 0:



Un $\boldsymbol{E}_{\rm ext}$ mette in moto i soli elettroni $\mathbb{J}_- = \gamma(\boldsymbol{v}, c)\rho^0_-$ quindi $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_- = \gamma \boldsymbol{v} \rho^0_-$ produce B; $\rho = (\gamma - 1)\rho^0_-$ produce piccolo E. È la contrazione delle lunghezze:

$$x'_n = na = \gamma(x_n - vt) \qquad \Rightarrow \qquad x_n = n\frac{a}{\gamma} + vt$$



$F_B \gg F_E$ su carica q in moto con $v_q \gg v$. Ma solo F_E nel sistema in cui $v'_q = 0$.

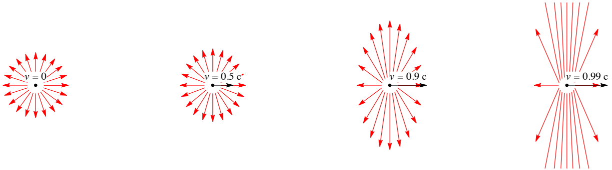
Campi da carica con velocità costante

Campi $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}$ generati da carica q in moto a velocità v costante lungo x.

1) $\boldsymbol{B}$ calcolato da $\boldsymbol{J}_s$ a pag. 176 per $v \ll c$: $B_\theta = \dfrac{\mu_0 q v \sqrt{y^2+z^2}}{4\pi((x-vt)^2+y^2+z^2)^{3/2}}$.

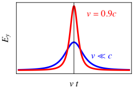
2) La formula integrale con il tempo ritardato porta a calcoli pesanti...

3) Nel sistema S dove q è ferma i campi sono $\boldsymbol{E} = q\boldsymbol{r}/4\pi\epsilon_0 r^3$, $\boldsymbol{B}=0$. Nel sistema S' diventano $E'_x = E_x$, $E'_{y,z} = \gamma E_{y,z}$, $\boldsymbol{B}' = \boldsymbol{E}' \times \boldsymbol{v}/c^2$ cioè $B'_\theta = vE'_\perp \sin\theta/c^2$. Per $v \sim c$ $\boldsymbol{E}'$ non è sferico e $\boldsymbol{r} = (x', y', z') = (\gamma(x-vt), y, z)$ contiene γ.



Osservatore in S' sente $E'_{y,z}$ intensificato di γ ma per un tempo ridotto di $1/\gamma$.

$$E'_y(0,b,0,t') = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\gamma b}{(b^2+\gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} =$$



Forza fra due q in moto a v: $F_v = q(E'_y - vB'_z) = \gamma(1-v^2/c^2)F_0 = F_0/\gamma$.

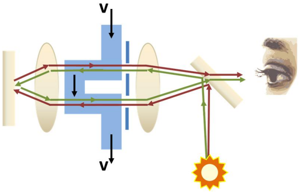
È solo la trasformazione delle forze, che produce la dilatazione dei tempi.

Trasformazione di Lorentz di un'onda

Altri problemi dinamici risolti da simmetria. Contrazione di Lorentz di materia formata da e.m. Riflessione da specchio in moto. Trascinamento di onda...
I campi di un'onda sono funzioni di $\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t=\mathbb{K}\cdot\mathbb{X}$ dove $\boxed{\mathbb{K}^\mu=(\boldsymbol{k},\omega/c)}$ è un quadri-vettore. In un sistema S' in moto relativo con $v=v_x$ è $\mathbb{K}^{\mu'}=\Lambda_\mu^{\mu'}\mathbb{K}^\mu$

$$\begin{pmatrix} k'_x \\ \omega'/c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma & -\gamma v/c \\ -\gamma v/c & \gamma \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_x \\ \omega/c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \gamma(k_x-v\omega/c^2) \\ \gamma(\omega-vk_x)/c \end{pmatrix},\qquad k'_{y,z}=k_{y,z}.$$

Mediante interferometria Fizeau nel 1851 misurò la velocità della luce in acqua in moto con v. Nel sistema dove l'acqua è ferma $v_o=\omega/k=c/n$. Doppio circuito solo per cancellare sistematiche. Secondo Galileo: $\boldsymbol{v}'_o=\boldsymbol{v}_o-f\boldsymbol{v}$ con $f=1$. Ma si misura $f<1$. Relativisticamente si ottiene la formula di addizione delle velocità (per $\boldsymbol{v}_o\parallel\boldsymbol{v}$):



$$v'_o=\frac{\omega'}{k'}=\frac{v_o-v}{1-v_ov/c^2}\overset{v\ll c}{\simeq}v_o-fv+\mathcal{O}(v^2)\qquad f=1-\frac{v_o^2}{c^2}=1-\frac{1}{n^2}<1$$

Trasformazione di un'onda nel vuoto

Onda nel vuoto: $\boldsymbol{k} = \boldsymbol{n}\omega/c$. Quindi $\mathbb{K}^\mu = \omega(\boldsymbol{n}, 1)/c$ e $\mathbb{K}^{\mu'} = \omega'(\boldsymbol{n}', 1)/c$

$$\omega' = \gamma\omega(1 - n_x v/c), \qquad n'_x = \frac{n_x - v/c}{1 - n_x v/c} \qquad n'_{y,z} = \frac{n_{y,z}}{\gamma(1 - n_x v/c)}.$$

Trasformazioni dei campi. I due invarianti valgono zero. Conti noiosi. Per $\boldsymbol{n} = (1, 0, 0)$ parallelo a $\boldsymbol{v}$ i campi sono solo $\perp$ e $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}/c$ e trasformano:

$$\boldsymbol{E}' = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \gamma\left(1 - \frac{v}{c}\right)\boldsymbol{E} = r\boldsymbol{E} \quad r = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} \qquad \Rightarrow \qquad \boldsymbol{B}' = r\boldsymbol{B}.$$

Seguono le trasformazioni di densità di energia $u' = r^2 u$ e Poynting $I' = r^2 I$.

Raffreddamento laser. Forza su specchio (atomo) investito da entrambi i lati da luci di intensità $I_\pm = I$. Se fermo $F = 2S(I_+ - I_-)/c = 0$. Se in moto con velocità $v \ll c$ riceve forza di attrito (trascurando effetti di ordine v^2/c^2):

$$F \simeq F' = \frac{2S}{c}(I'_+ - I'_-) \simeq -\frac{8SI}{c^2}v \qquad I'_\pm \simeq (1 \mp 2\frac{v}{c})I_\pm$$

Possibile ottenerle in maniera diretta sapendo che fanno parte di tensore $\mathbb{T}_{\mu\nu}$.

Formalismo Lagrangiano

Le equazioni di Maxwell estremizzano l'**azione del campo elettromagnetico**

$$\boxed{\mathcal{S} = \int d^4\mathbb{X}\,\mathscr{L} \qquad \mathscr{L} = -\frac{\mathbb{F}_{\mu\nu}\mathbb{F}^{\mu\nu}}{4\mu_0} + \mathbb{J}^\mu \mathbb{A}_\mu}$$

Equazioni di Lagrange:

$$\Box_\mu \underbrace{\frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\Box_\mu\mathbb{A}_\nu}}_{\mathbb{F}^{\mu\nu}/\epsilon_0} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\mathbb{A}_\nu} \qquad \text{cioè} \qquad \Box_\mu\mathbb{F}^{\mu\nu} = \mu_0\mathbb{J}^\nu.$$

Costante di Noether per simmetria sotto 4-traslazioni $\mathbb{X}_\mu \to \mathbb{X}_\mu + \mathbb{D}_\mu$

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = \frac{\delta\mathscr{L}}{\delta\Box_\mu\mathbb{A}_\alpha}\Box^\nu\mathbb{A}_\alpha - \eta^{\mu\nu}\mathscr{L} = \frac{1}{\mu_0}\left[\mathbb{F}^{\mu\alpha}\mathbb{F}^{\nu}{}_{\alpha} + \frac{\eta^{\mu\nu}}{4}\mathbb{F}_{\alpha\beta}\mathbb{F}^{\alpha\beta}\right] \qquad \mathbb{T}^{\mu}{}_{\mu} = 0.$$

In componenti:

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = \left(\begin{array}{c|c} -T_{ij} & S_i/c \\ \hline S_j/c & u \end{array}\right) \qquad \begin{array}{l} u = \epsilon_0 E^2/2 + B^2/2\mu_0 = \text{densità di energia} \\ \boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}/\mu_0 = \text{flusso di energia} \\ T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j + B_i B_j/\mu_0 - \underbrace{\delta_{ij}u}_{\text{pressione}} = \text{tensore stress} \end{array}$$

Conservazione: $\Box_\mu\mathbb{T}^{\mu\nu} = \mathbb{F}^\nu = \mathbb{F}^{\nu\alpha}\mathbb{J}_\alpha$. Per $\nu = 0$ si ottiene il teo. di Poynting

$$\dot{u} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S} = -\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}.$$

Tensore dei campi

Onda piana che si propaga nel vuoto lungo l'asse x:

$$\mathbb{T}^{\mu\nu} = u \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Nel sistema S':

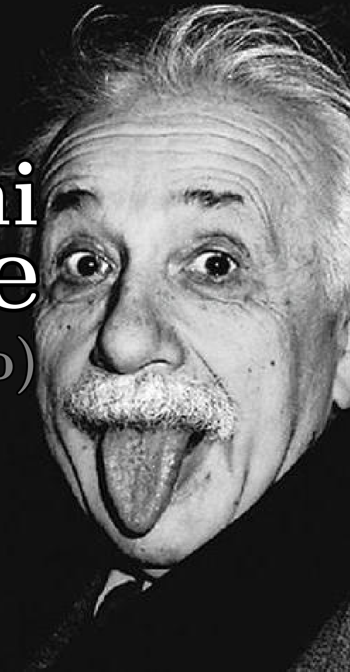
$$\mathbb{T}^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}_{\mu} \mathbb{T}^{\mu\nu} \Lambda^{\nu'}_{\nu} = \gamma^2 (1 - v/c)^2 \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv u' \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Stesso risultato già ottenuto con la trasformazione dei campi:

$$\boxed{u' = \frac{1 - v/c}{1 + v/c} u}$$

Elucubrazioni speculative

(Non parte del corso)



A posteriori

Oggi è possibile dedurre l'elettromagnetismo dal puro pensiero postulando:

a) invarianza relativistica SO(3,1), cioè $\mathbb{X} \cdot \mathbb{Y} = \mathbb{X}^\mu \operatorname{diag}(1,1,1,-1)_{\mu\nu}\, \mathbb{Y}^\nu$;

b) teoria di campo di un 4-vettore, cioè $\mathbb{A}_\mu(\mathbb{X})$;

c) fisica locale, cioè derivate;

d) niente energia negativa, cioè soluzioni classiche che esplodono.

a + b + c implica le equazioni più generali a due derivate:

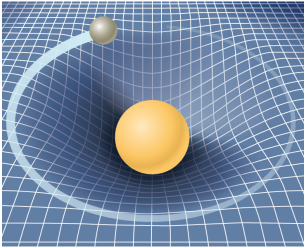
$$c_1(\Box \cdot \Box)\mathbb{A}_\mu + c_2 \Box_\mu (\Box \cdot \mathbb{A}) + m_\gamma^2 \mathbb{A}_\mu = \mathbb{J}_\mu.$$

Ma, per il $-$ di SO(3,1), le componenti spaziali $\boldsymbol{A}_{1,2,3}$ hanno energia cinetica con segno opposto alla componente temporale $\mathbb{A}^0 = \varphi/c$. Solo per $c_1 = -c_2$ c'è un ulteriore simmetria, l'invarianza di gauge, che rende non fisico un modo (ad esempio $\varphi = 0$). Implica 'massa' $m_\gamma = 0$, 2 polarizzazioni, conservazione della carica $\Box \cdot \mathbb{J} = 0$. Interazioni forti e deboli: fratello maggiore $\mathbb{A}_\mu^a$.

La gravità relativistica

Einstein cercò la generalizzazione relativistica della forza gravitazionale di Newton. Forse φ_{Newton} è un altro $\mathbb{A}_0$? Uno-scalare? Non funzionava finché ebbe l'idea giusta: il dato sperimentale $m_{\text{inerziale}} = m_{\text{gravitazionale}}$ implica che esiste un sistema in caduta libera in cui la gravità vale $\boldsymbol{g} = 0$. Matematicamente sembra analogo al fatto che uno spazio curvo è localmente piatto. Riemann aveva matematicamente descritto la curvatura dello spazio con un tensore metrico

$$ds^2 = \sum_{ij} g_{ij}(x) dx_i dx_j$$



in coordinate x_i arbitrarie (come già accennato). Quindi Einstein introdusse un campo

$$\eta_{\mu\nu} \to g_{\mu\nu}(\mathbb{X})$$

per descrivere la curvatura dello spazio-tempo.

Einstein-Hilbert trovarono nel 1915 la più semplice equazione covariante (con significato geometrico indipendentemente dalle coordinate scelte; in pratica l'analogo curvo del ∇^2). La relatività generale è una specie di e.m. più complicato. Per campo debole $g_{00} = -(1 + 2\varphi_{\text{Newton}})$ si riduce a Newton con $1/r^2$. Spiega il moto anomalo di Mercurio, pianeta vicino al campo forte del sole. Predice la deflessione gravitazionale della luce, onde gravitazionali, l'espansione dell'universo.

Altre simmetrie delle equazioni di Maxwell?

Lorentz SO(3,1), parità, inversione temporale, coniugazione di carica

	t	$\boldsymbol{r}$	$\boldsymbol{p} = m\dot{\boldsymbol{r}}$	$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p}$	$\boldsymbol{E}$	ρ	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{J}$
P	$+t$	$-\boldsymbol{r}$	$-\boldsymbol{p}$	$+\boldsymbol{L}$	$-\boldsymbol{E}$	$+\rho$	$+\boldsymbol{B}$	$-\boldsymbol{J}$
T	$-t$	$+\boldsymbol{r}$	$-\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{L}$	$+\boldsymbol{E}$	$+\rho$	$-\boldsymbol{B}$	$-\boldsymbol{J}$
C	$+t$	$+\boldsymbol{r}$	$+\boldsymbol{p}$	$+\boldsymbol{L}$	$-\boldsymbol{E}$	$-\rho$	$-\boldsymbol{B}$	$-\boldsymbol{J}$
CPT	$-t$	$-\boldsymbol{r}$	$-\boldsymbol{p}$	$-\boldsymbol{L}$	$+\boldsymbol{E}$	$-\rho$	$+\boldsymbol{B}$	$-\boldsymbol{J}$

Traslazioni spazio-temporali. $\mathbb{X}_\mu \to \mathbb{X}_\mu + \mathbb{D}_\mu$. Conservazione di $\mathbb{T}_{\mu\nu}$.
Invarianza di scala. $\mathbb{X}_\mu \to \lambda \mathbb{X}_\mu$ grazie a $m_\gamma = 0$. Quindi $\mathbb{T}^\mu_\mu = 0$. Ma $m_{e,p} \neq 0$.
Invarianza conforme. $\mathbb{X}_\mu \to \mathbb{X}'_\mu = \mathbb{X}_\mu/(\mathbb{X}\cdot\mathbb{X})$ (q davanti a sfera conduttrice...). Insieme a $\mathbb{X}'_\mu \to \mathbb{X}'_\mu + \mathbb{D}'_\mu$ e Lorentz e scala farebbe SO(4,2).
Dualità elettro-magnetica. Se esistessero cariche magnetiche conservate (magari sono pesanti e decadute) ci sarebbe una simmetria $\boldsymbol{E} \to c\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{B} \to -\boldsymbol{E}/c$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{E} = \dfrac{\rho_E}{\epsilon_0} & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E} = -\mu_0 \boldsymbol{J}_B - \dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\ \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{B} = \mu_0\rho_B & \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{J}_E + \mu_0\epsilon_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{F} = q_E(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + q_B(\boldsymbol{B} - \mu_0\epsilon_0 \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E})$$

Rimaste elucubrazioni teoriche. Einstein ha scelto la simmetria giusta.

Altre lezioni dalle eq. di Maxwell?

In termini di $\hat{\boldsymbol{Z}} \equiv \boldsymbol{E} + i\boldsymbol{B}$ etc le equazioni di Maxwell diventano 2

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} = \hat{\rho}, \qquad \boldsymbol{\nabla} \times \hat{\boldsymbol{Z}} = i\frac{\partial \hat{\boldsymbol{Z}}}{\partial t} + i\hat{\boldsymbol{J}}$$

Usare $\hat{\boldsymbol{Z}}$ semplifica le onde. La dualità e.m. diventa $\hat{\boldsymbol{Z}} \to -i\hat{\boldsymbol{Z}}$.

Matematica: tensori anti-simmetrici F a n indici sono detti 'n-forme' e consentono integrali covarianti su sotto-spazi di dimensione n (volume per $n = 3$, area per $n = 2$, lunghezza per $n = 1$...) in dimensione d.

- 'Duale di Hodge' ${}^*F$ è una $d - n$ forma. Identità ${}^{**}F = -F$.
- 'Derivata esterna' dF è $n + 1$ forma. Soddisfa all'identità $d^2 = 0$.

Vedendo $\mathbb{F}_{\mu\nu}$ come una 'forma' di SO(3,1), le equazioni di Maxwell diventano

$$d\mathbb{F} = \mathbb{J}_B = 0, \qquad d^*\mathbb{F} = \mathbb{J}.$$

- $\tilde{\mathbb{F}} =^* \mathbb{F}$ ha $4 - 2 = 2$ indici. La dualità e.m. è $\mathbb{F} \leftrightarrow {}^*\mathbb{F}$.
- $d\mathbb{F} = 0$ è risolta da $\mathbb{F} = d\mathbb{A}$ con $\mathbb{A}$ definito a meno di un $d\omega$.

Questa formulazioni generalizza l'e.m. a dimensione d arbitraria con sorgenti di dimensione n arbitraria (stringhe, brane etc invece di particelle puntiformi).

Analogo economico dell'invarianza di gauge

Weyl propose la prima teoria con invarianza di scala ('gauge' in tedesco) dove le unità di lunghezza possono essere ridefinite localmente. Nome improprio: l'invarianza di gauge dell'elettromagnetismo è invece libertà di scegliere una fase.

Immaginiamo un mondo con un paese ad ogni punto $\vec{r}$, vettore con valore interi. Chiamiamo $\wp(\boldsymbol{r}) = \exp[\varphi(\boldsymbol{r})]$ il prezzo di un prodotto espresso nella valuta locale. Chiamiamo $\exp[A_i(\boldsymbol{r})]$ il tasso di cambio da $\boldsymbol{r}$ a $\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i$.

Ogni paese può localmente ridefinire la sua moneta (unità di misura del valore) moltiplicandola per $\exp[\epsilon(\boldsymbol{r})]$. I tassi di cambio diventano

$$A_i(\boldsymbol{r}) \to A_i(\boldsymbol{r}) + \epsilon(\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i) - \epsilon(\hat{\boldsymbol{x}}_i)$$

Facendo un giro $\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i \to \boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i + \hat{\boldsymbol{x}}_j \to \boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_j \to \boldsymbol{r}$ uno guadagna

$$\exp[F_{ij}(\boldsymbol{r})] \qquad \text{dove} \qquad F_{ij}(\boldsymbol{r}) = [A_j(\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i) - A_j(\boldsymbol{r})] - [A_i(\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_j) - A_i(\boldsymbol{r})].$$

Commerciando un prodotto fra due paesi $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i$ uno guadagna

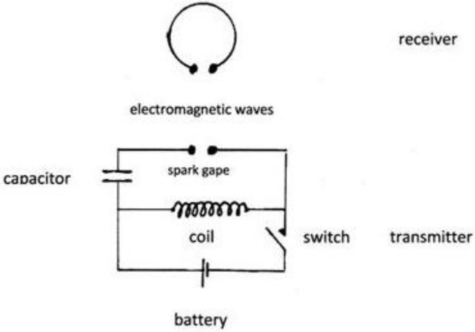
$$\exp[D_i\varphi(\boldsymbol{r})] \qquad \text{dove} \qquad D_i\varphi(\boldsymbol{r}) = \varphi(\boldsymbol{r} + \hat{\boldsymbol{x}}_i) - \varphi(\boldsymbol{r}) - A_i(\boldsymbol{r}).$$

Con assunzioni extra le eq. di Maxwell statiche descrivono l'equilibrio economico nel continuo [1410.6753]. Equazioni dinamiche da SO(3,1) o assunzioni extra.

Irraggiamento

Cosa genera le onde elettromagnetiche?

Abbiamo visto che si ottengono soluzioni di onda risommando $E \leftrightarrow B$ per condensatori con $Q(t)$ o solenoidi con $I(t)$. Hertz nel 1865 inviò la prima onda radio in questo modo, utilizzando scariche rapide:



Avendo la teoria di Maxwell, vediamo di capire meglio.

Onde sferiche nel vuoto

Nella **gauge di Lorenz** $G \equiv \boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ le equazioni si semplificano in

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \Box^2 \varphi & = & -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \Box^2 \boldsymbol{A} & = & -\mu_0 \boldsymbol{J} \end{array} \right. \qquad \text{da cui poi} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \dfrac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{A} \end{array} \right.$$

L'equazione $\Box^2 \varphi = 0$ ammette **onde a simmetria sferica**,

$$\varphi(r,t) = \frac{f(t - r/c)}{r} + \frac{g(t + r/c)}{r}$$

dove f, g sono funzioni arbitrarie. Ignoriamo la soluzione 'entrante' $g(t + r/c)$.

Un'onda sferica ha componenti di $\boldsymbol{E}$ o $\boldsymbol{B} \sim f'/r$, come atteso da $\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{S} = 0$.
Ma una q genera $E_r \propto 1/r^2$: cosa genera un'onda $E_\theta \propto 1/r$? Troveremo che

le onde elettromagnetiche sono generate cariche elettriche **accelerate**.

Soluzione integrale a $\Box^2\varphi = -\rho/\epsilon_0$

Un argomento intuitivo suggerisce la soluzione, che poi si verifica calcolosamente.
Iniziamo risolvendo per una carica puntiforme *variabile* (!!?) $q(t)$ ferma in $\boldsymbol{r} = 0$:

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = q(t)\,\delta(\boldsymbol{r}).$$

Per $r \neq 0$ la soluzione deve essere un'onda nel vuoto

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{f(t - r/c)}{r}$$

il cui profilo f va ora determinato dalla sorgente $q(t)$.

Nel limite $r \to 0$ si ha $f(t - r/c) \simeq f(t)$, e si deve ritrovare la soluzione statica:

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}.$$

Combinando le due informazioni, si deduce la soluzione dinamica:

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \frac{q(t')}{4\pi\epsilon_0 r}, \qquad t' = t - \frac{r}{c}.$$

dove t' è detto **tempo ritardato**. Sulla luna è 1.5 s fa, sul sole 8 min fa.

Soluzione integrale delle eq. di Maxwell

Una carica variabile $q(t)$ non esiste, è un utile artificio matematico: una sorgente generica $\rho(\boldsymbol{r},t)$ è somma di $q(t)$ in punti diversi. Per linearità la soluzione è

$$\boxed{\square^2\varphi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(\boldsymbol{r},t) = \int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}, \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}$$

Differisce dalla soluzione statica con $\square^2 \to \nabla^2$ solo per il **tempo ritardato** t'.

Riassumendo: nella gauge di Lorenz $G=0$ si ha

$$\left\{\begin{array}{rcl} \square^2\varphi &=& -\dfrac{\rho}{\epsilon_0} \\ \square^2\boldsymbol{A} &=& -\mu_0\boldsymbol{J} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \varphi(\boldsymbol{r},t) &=& \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int d^3r'\,\frac{\rho(\boldsymbol{r}',t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \\ \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) &=& \dfrac{\mu_0}{4\pi}\displaystyle\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',t')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \end{array}\right. \qquad t' = t - \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$$

La soluzione analoga con tempo avanzato viene ignorata per motivi di causalità.

Verifica calcolosa

Passare da ∇^2 (elettrostatica) a $\Box^2$ (elettrodinamica) implica che le sorgenti ρ, $\boldsymbol{J}$ sono integrate al **tempo ritardato** t'. Verifica: definendo $\boldsymbol{R} \equiv \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'$

$$\varphi(\boldsymbol{r}, t) = \int d^3r' \, \frac{\rho\left(\boldsymbol{r'}, t' = t - R/c\right)}{4\pi\epsilon_0 R}$$

$$\Box^2\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' \left[\rho\nabla^2\frac{1}{R} + \frac{1}{R}\nabla^2\rho + 2(\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R}) \cdot (\boldsymbol{\nabla}\rho) - \frac{\ddot{\rho}}{c^2 R}\right] \stackrel{\checkmark}{=} -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Il primo termine produce il risultato desiderato $\nabla^2(1/R) = -4\pi\delta(\boldsymbol{R})$ come nel caso statico, gli altri si cancellano usando $\boldsymbol{\nabla}\rho = \dot{\rho}\,\boldsymbol{\nabla}t' = -\dot{\rho}\boldsymbol{\nabla}R/c = -\dot{\rho}\boldsymbol{R}/Rc$ e

$$\nabla^2\rho = -\left(\frac{\boldsymbol{R}}{Rc}\right)^2 \ddot{\rho} - \frac{\dot{\rho}}{c}\frac{\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{R}}{R} - \frac{\dot{\rho}}{c}\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{R} = \frac{\ddot{\rho}}{c^2} - \frac{\dot{\rho}}{cR}(3-1).$$

Questa volta la verifica ha confermato la formula intuitiva.

Le onde in $d = 3$ non riverberano

$$\Box^2\varphi = 0 \qquad \text{con} \qquad \varphi(\boldsymbol{r},0) = f(\boldsymbol{r}) \qquad \text{e} \qquad \dot\varphi(\boldsymbol{r},0) = g(\boldsymbol{r})$$

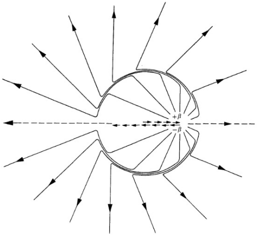
d	Fisica	Soluzione $\varphi(\boldsymbol{r}) =$	Grazie a
1	corda	$\dfrac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_{\rho\le ct} g(r')dr'$	D'Alambert
2	onda marina	$\dfrac{1}{2\pi c}\dfrac{\partial}{\partial t}\displaystyle\int_{\rho\le ct}\dfrac{f(\boldsymbol{r}')d^2r'}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}} + \dfrac{1}{2\pi c}\displaystyle\int_{\rho\le ct}\dfrac{g(\boldsymbol{r}')d^2r'}{\sqrt{c^2t^2-\rho^2}}$	Poisson
3	suono, luce	$\dfrac{1}{4\pi c^2}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{1}{t}\displaystyle\int_{\rho=ct} f(\boldsymbol{r}')d^2S' + \dfrac{1}{4\pi c^2 t}\displaystyle\int_{\rho=ct} g(\boldsymbol{r}')d^2S'$	Kirchoff

dove $\rho = |\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|$ e S' è la sfera ritardata.

($d-1$ si ricava da d considerando una funzione che non dipende da x_d).

L'onda si propaga con $v = c$; in $d = 3$ passa e se ne va; in $d < 3$ riverbera: a diventa aaa... Es1: lanciando un sasso in acqua, rimane agitata dopo il passaggio dell'onda. Es2: rimbombo tuono, onda sonora 2d prodotta da sorgente 1d.
E solo in $d = 3$ le onde sferiche non si distorcono (a diventa b).

Radiazione da carica in moto



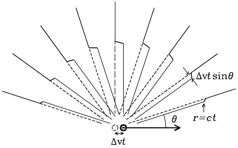
Le onde e.m. sono generate da cariche accelerate. Argomento intuitivo: una q genera un φ centrato sulla posizione ritardata, e quindi un $\boldsymbol{E}$ come in figura. Accelerando q da 0 a $\Delta v \ll c$ in un breve tempo Δt si produce un'onda trasversa. Fra r e $r + \Delta_r$ le linee di campo vengono shiftate in direzione ortogonale di Δ_θ:

$$E_\theta = E_r \frac{\Delta_\theta}{\Delta_r} = E_r \frac{\Delta v\, t \sin\theta}{c\,\Delta t} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{r}{c^2} \frac{dv}{dt} \sin\theta = \frac{q\dot{v}\sin\theta}{4\pi\epsilon_0 r c^2} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}}{c} \times \boldsymbol{E}$$

Il flusso del vettore di Poynting $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}/\mu_0 \propto 1/r^2$ fornisce la potenza totale irraggiata, zero parallela a $\dot{\boldsymbol{v}}$:

$$\mathcal{I} = \frac{dW}{dS} = S_r \qquad \frac{dW}{d\Omega} = r^2 S_r = \frac{\sin^2\theta}{4\pi} \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{4\pi\epsilon_0 c^3}$$

$$W = \Phi_S = \int \frac{dW}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 |\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{\mu_0 q^2 |\dot{\boldsymbol{v}}|^2}{6\pi c}$$



Otteniamo le stesse formule facendo derivate pesanti dei potenziali ritardati.

Radiazione da carica in moto

$\rho(\boldsymbol{r},t) = q\,\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t))$ e $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{v}_q\rho(\boldsymbol{r},t)$. Inserendo $1 = \int dt'\delta(t_{\rm rit}-t')$:

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \int d^3r' \int dt'\,\delta(t_{\rm rit}-t')\frac{\rho(\boldsymbol{r'},t')}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r'}|} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\int dt'\frac{\delta(t-t'-|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|/c)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')|}$$

Se $v \ll c$ è immediato ottenere la formula intuitiva:

$$\boxed{\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left.\frac{q}{R}\right|_{t-R/c}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left.\frac{q\boldsymbol{v}_q}{R}\right|_{t-R/c}}$$

dove $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_q(t')$. Derivando solo t' si ottengono (...) i campi di radiazione

$$\boldsymbol{B}_{\rm rad} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{v}}_q}{c^3R}, \qquad \boldsymbol{E}_{\rm rad} = c\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{B}_{\rm rad}, \qquad \boldsymbol{n} = \hat{\boldsymbol{R}}, \qquad W = \frac{q^2|\dot{\boldsymbol{v}}_q|^2}{6\pi\epsilon_0c^3}.$$

Per moto relativistico si ottengono i **potenziali di Lienard-Wiechert**

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left[\frac{q}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_q/c}\right]_{t-R/c}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{q\boldsymbol{v}}{R-\boldsymbol{R}\cdot\boldsymbol{v}_q/c}\right]_{t-R/c}$$

da cui, con conti pesanti, i campi in termini di $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{v}_q/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$

$$\boldsymbol{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0(1-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\beta})^3}\left[\frac{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta}}{\gamma^2R^2} + \frac{\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{\beta})\times\dot{\boldsymbol{\beta}}]}{cR}\right]_{t-R/c} \qquad \boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{n}}{c}\times\boldsymbol{E}.$$

Radiazione da dipolo elettrico

Caso fisicamente equivalente con geometria più semplice: non q in moto ma dipolo elettrico puntiforme $\boldsymbol{p}(t)$ che oscilla o ruota stando **fermo** nell'origine. Genera

$$\varphi(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{p}(t')}{r^3}, \qquad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\boldsymbol{p}}(t')}{r} \qquad \text{con} \qquad t' = t - \frac{r}{c}.$$

Infatti un filo genera $\boldsymbol{A} = \mu_0 \int d\boldsymbol{s}\, I/4\pi r$; un $\boldsymbol{p} = q\boldsymbol{d}$ sono come due $\pm q(t)$ a distanza d; quindi $I = \dot{q}$ genera $\boldsymbol{A} = \mu_0 I\boldsymbol{d}/4\pi r$. Poi $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{\nabla}\varphi - \dot{\boldsymbol{A}}$.

- Campi $\propto 1/r$ sono prodotti solo da $\boldsymbol{A} \propto 1/r$, non da $\varphi \propto 1/r^2$.
- Quando $\boldsymbol{\nabla}$ agisce su $1/r$ produce i soliti campi statici, $E \propto 1/r^3$, $B \propto 1/r^2$ che dominano a piccoli r.
- Quando $\boldsymbol{\nabla}$ agisce su t' produce campi di radiazione $E, B \propto 1/r$ che dominano a grandi $r \gg c/\omega$ dove $\omega \sim \dot{p}/p$ è la scala temporale della variazione di p.

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial r} \simeq \hat{\boldsymbol{r}}\times\frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial\dot{\boldsymbol{p}}}{\partial r} = -\frac{\mu_0}{4\pi r c}\hat{\boldsymbol{r}}\times\ddot{\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{r}}, \qquad \boldsymbol{S} = \hat{\boldsymbol{r}}\frac{\mu_0\ddot{p}^2\sin^2\theta}{(4\pi)^2 c r^2}, \qquad \Phi_S = \boxed{W_{\rm el} = \frac{\mu_0\ddot{p}^2}{6\pi c}} = \frac{\ddot{p}^2}{6\pi\epsilon_0 c^3}$$

Caso particolare: q accelerata e $-q$ ferma nell'origine: $\ddot{\boldsymbol{p}} = q\boldsymbol{a}_q$, come prima. Per $\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{p}_0\cos\omega t$ la potenza mediata sul tempo vale $\langle W_{\rm el}\rangle_t = \mu_0\omega^4 p_0^2/12\pi c$.

Radiazione da dipolo magnetico

Similmente tramite contaccci o dualità $E \leftrightarrow B$ si ottiene che un dipolo magnetico μ irraggia $\boldsymbol{E}_\mu \sim \boldsymbol{B}_p$ e $\boldsymbol{B}_\mu \sim \boldsymbol{E}_p$ e quindi $\boxed{W_{\rm mag} = \mu_0 \ddot{\mu}^2/6\pi c^3}$.

Quindi $\dfrac{W_{\rm mag}}{W_{\rm el}} \sim \left(\dfrac{\ddot{\mu}}{\ddot{p}c}\right)^2 \sim \left(\dfrac{\text{dimensione}}{\text{tempo}\, c}\right)^2 \ll 1$ a meno di sistemi speciali.

La Terra ha $\mu = 8.05\ 10^{22}$ J/T disallineato di 11° rispetto ad $\boldsymbol{\omega} = 2\pi/\text{day}$. Quindi $\mu_\perp$ produce $\dot{K} = I\omega\dot{\omega} = -W_{\rm mag}$ con $I \approx \frac{2}{5}MR^2$:

$$\frac{\dot{\omega}}{\omega} = -\frac{\mu_0 \mu_\perp^2 \omega^2}{6\pi I c^3} \approx \frac{1}{10^{35}\,\text{sec}}.$$

Stelle di massa $M \gtrsim 1.4 M_\odot$ collassano a stelle di neutroni: raggio scende di $\lambda \sim r_{\rm atomo}/r_{\rm nucleo} \sim 10^5$ fino a $R \sim 10\,\text{km}$, densità aumenta da atomica a nucleare di λ^3, $L = I\omega$ costante, quindi ω aumenta di λ^2 fino a $\sim 1/\text{s}$. Si osservano pulsar con $\dot{T} = -2\pi\dot{\omega}/\omega^2 \sim 10^{-10}$ da cui $\mu_\perp \sim 10^{30}$ J/T, $B(R) \sim 10^{11}$ T e

$$\omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 + t/\tau}} \qquad \tau = \frac{3\pi I c^3}{\mu_0 \mu_\perp^2 \omega_0^2}$$

Radiazione da sorgente estesa periodica

Assumere $\rho(\boldsymbol{r},t) = \rho(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ e $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r})e^{-i\omega t}$ è generale per Fourier. Semplifica i conti: il tempo ritardato diventa una fase. Per avere $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A}$ basta

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) = e^{-i\omega t}\frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\exp(ik|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|) \qquad k \equiv \frac{\omega}{c}.$$

Vicino ad una sorgente di dimensione d si ha la "zona statica" per $d \ll r \ll \lambda$ in cui la fase vale 1. Lontano a $r \gg d$ si può approssimare $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'| \simeq r - \hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}'$ dove $\hat{\boldsymbol{r}}$ è la direzione dell'osservatore. In "zona di radiazione" $d \ll \lambda \ll r$, all'ordine dominante in r/λ si ottiene un'onda sferica $1/r$:

$$\boxed{\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},t) \simeq \frac{\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\int d^3r'\,\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}')\exp(-ik\hat{\boldsymbol{r}}\cdot\boldsymbol{r}')}$$

Essendo $d \ll \lambda$ si può espandere la fase esponenziale. All'ordine zero $\exp \simeq 1$ si ritrova la radiazione da dipolo elettrico integrando per parti

$$\int d^3r'\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}') = -\int d^3r'\boldsymbol{r}'\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{J} = \int d^3r'\boldsymbol{r}'\dot{\rho} = \dot{\boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{A}(r,t) = \frac{\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\dot{\boldsymbol{p}}$$

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{A} = \hat{\boldsymbol{r}}\times\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial r} \simeq ik\frac{\mu_0 e^{i(kr-\omega t)}}{4\pi r}\hat{\boldsymbol{r}}\times\dot{\boldsymbol{p}}, \qquad \boldsymbol{E} = c\boldsymbol{B}\times\hat{\boldsymbol{r}}$$

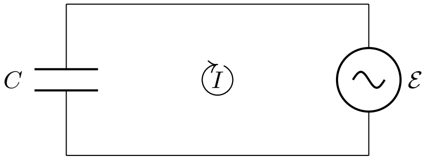
Al 1o ordine si trova dipolo magnetico e quadrupolo elettrico... [Jackson 9.3]

Radiazione da antenna

Come al solito, sistemi realistici piccoli sono approssimati come dipoli.

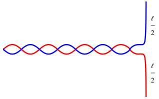
Condensatore: $p = Qd$, quindi $\dot{p} = Id$ e $W_{\rm el} = R_{\rm rad} I^2$ con resistenza di radiazione

$$R_{\rm rad} = \frac{\mu_0 \omega^2 d^2}{6\pi c} = Z_0 \frac{2\pi}{3}\frac{d^2}{\lambda^2} \qquad Z_0 \equiv c\mu_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 377\,\Omega.$$



Bacchette conduttrici di lunghezze $\pm\ell/2 \ll \lambda$ percorse da

$$I(z,t) \approx I_0 e^{-i\omega t}(1 - 2|z|/\ell) \qquad \Rightarrow \qquad p = iI_0 \ell e^{i\omega t}/2\omega$$



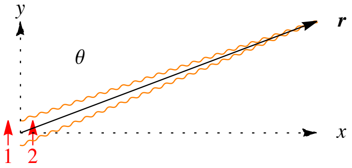
Si può anche usare una bacchetta sola, e l'immagine nella Terra.

Teorema di reciprocità fra emissione e ricezione di onde. Consideriamo due sorgenti $\boldsymbol{J}_{1,2}$ separate localizzate che producono $\boldsymbol{E}_{1,2}$, $\boldsymbol{B}_{1,2}$. Espandendo

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}_1 \times \boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{E}_2 \times \boldsymbol{B}_1) = (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{B}_2 - (\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{E}_1 - (1 \leftrightarrow 2) = \mu_0(\boldsymbol{J}_1\cdot\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{J}_2\cdot\boldsymbol{E}_1)$$

Radiazione da due antenne

L'approssimazione generale per $\boldsymbol{A}$ diventa intuitiva per due antenne. Se emettono con differenza di fase Δ, la differenza di fase totale in direzione θ vale

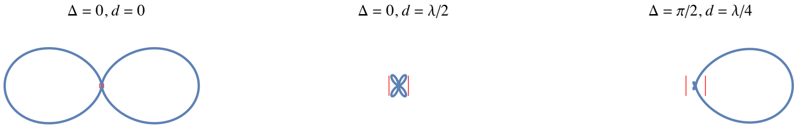


$$\delta = \Delta + 2\pi \frac{d}{\lambda} \sin\theta$$

Quindi possono irraggiare più direzionalmente: assumendo eguali intensità

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E_2} \simeq \boldsymbol{E}_1(1 + e^{i\delta}) \qquad \frac{dW}{d\Omega} = \frac{dW_1}{d\Omega} \times |1 + e^{i\delta}|^2 = \frac{\sin^2\theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\ddot{p}^2}{c^3} 4\cos^2\frac{\delta}{2}$$

Il fattore $z = 1 + e^{i\delta}$ è detto 'fasore'. Esempi:



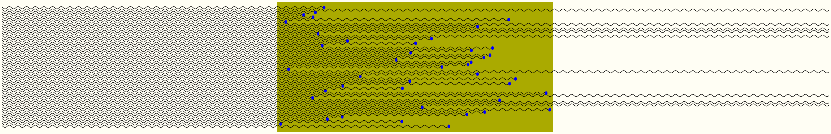
Radiazione da elettrone investito da onda

Un **elettrone libero** investito da un'onda elettromagnetica accelera $a = q_e E/m_e$ ed irraggia $W = q_e^2 a^2/6\pi\epsilon_0 c^3$. È come se la luce che finisce dentro la 'sezione d'urto' Thomson σ_e venisse presa dall'elettrone e irraggiata:

$$\sigma_e \equiv \frac{W}{S} = \frac{q_e^2 (q_e E/m_e)^2/6\pi\epsilon_0 c^3}{\epsilon_0 c E^2} = \frac{8\pi}{3} r_e^2 = 0.665\, 10^{-28}\,\mathrm{m}^2 \qquad \text{non dipende da } \omega$$

dove $r_e = q_e^2/4\pi\epsilon_0 m_e c^2 = 2.82\ 10^{-13}$ cm è il raggio classico dell'elettrone.

Lo stesso σ_e si applica per interazione fra **materia** e luce ad alto ω (raggi X...), che vede gli elettroni negli atomi come liberi, che entra nella materia in quanto σ_e è minore della dimensione degli atomi. Risultato: $S \propto e^{-n_e \sigma_e x}$, radiografia:



Stessa W ottenuta vedendo l'elettrone come un dipolo $p = q_e x$, anche a regime

$$\ddot{x} \simeq -\omega^2 x = \frac{q_e E}{m_e} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{p} \simeq -\omega^2 p = \frac{q_e^2 E}{m_e}$$

Radiazione da atomo investito da onda

Irraggiamento da atomo investito da onda e.m. Sistema quantistico, approssimato classicamente come p ed e tenuti fermi da forza elastica $\omega_0 \gg \omega$. A regime l'onda produce piccole oscillazioni di e ed un dipolo oscillante $p = q_e x$

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x \simeq (-\omega^2 + \omega_0^2)x = \frac{q_e E}{m_e} \qquad \Rightarrow \qquad x_{\text{legato}} \overset{\omega \ll \omega_0}{\simeq} -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} x_{\text{libero}}$$

e quindi $\boxed{\sigma_{\text{atomo}} = \sigma_e (\omega/\omega_0)^4}$. Per via dell'$\omega^4$ il cielo è blu lontano dal sole (si riceve luce diffusa polarizzata linearmente) e rosso vicino al sole al tramonto (quando l'aria attraversata è maggiore, si riceve la luce non diffusa).
Le nuvole sono bianche perché fanno riflessione/rifrazione da gocce di acqua.

Ora sapete perché

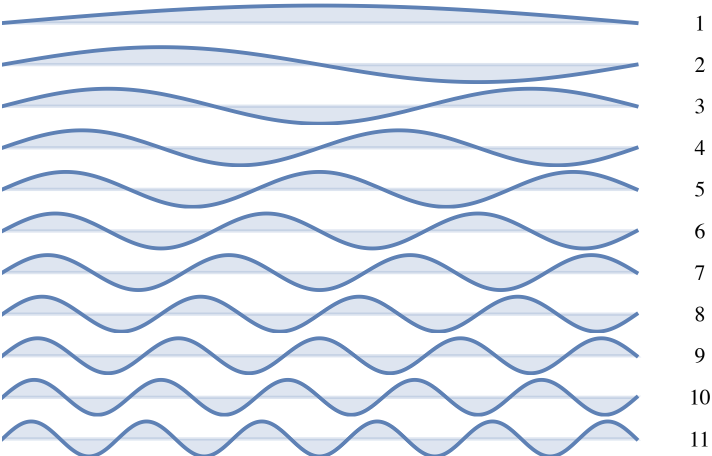
Difficoltà finali

Problema del corpo nero

Un generico campo $\varphi(\vec{x}, t)$ come quelli e.m. può essere discretizzato come tanti gradi di libertà. Fourier con periodicità in cubo di lato L:

$$\varphi(\vec{x}, t) = \frac{1}{L^{3/2}} \sum_{\vec{n}} q_{\vec{n}}(t) e^{i\vec{k}_{\vec{n}} \cdot \vec{x}} \qquad \vec{n} = (n_x, n_y, n_z), \qquad \vec{k}_n = \frac{2\pi\vec{n}}{L}.$$

Per $d = 1$ sono i modi normali di una corda: come pianoforte infinito



La fine è vicina

L'atomo di idrogeno collassa irraggiando rapidamente $E = \infty$ presa da

$$U = -e^2/4\pi\epsilon_0 r \to -\infty \text{ a } r \to 0 \qquad (\text{anche } E = m_e c^2 + m_p c^2 + U < 0).$$

Potenza irraggiata $W = e^2 a^2/6\pi\epsilon_0 c^3$ dove $a = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2 m_e = v^2/r$ per un e in orbita circolare. Eliminando $r = e^2/4\pi\epsilon_0 m v^2$, in un periodo $T = 2\pi r/v$ perde

$$\Delta E \sim W\,T = \frac{4\pi m_e v^5}{3c^3} = \epsilon|E| \qquad \epsilon = \frac{\Delta E}{E} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{v}{c}\right)^3 \lesssim 10^{-8}$$

dove ϵ è la frazione di energia E persa per giro:

$$E = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{m_e v^2}{2}.$$

Fa $\sim 1/\epsilon$ giri, per un tempo $\tau \sim T/\epsilon \sim 10^{-11}$ s.

Un conto più preciso conferma che l'atomo collassa in un tempo finito τ

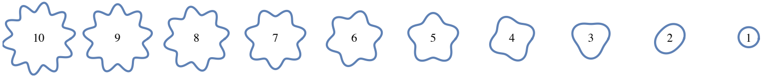
$$-\dot{E} = W = \frac{32}{3}\frac{4\pi\epsilon_0 E^4}{c^3 e^2 m_e^2} \qquad \Rightarrow \qquad E(t) = \frac{E_0}{(1-t/\tau)^{1/3}}$$

$$\tau = \frac{e^2 c^3 m_e^2}{128\pi\epsilon_0 |E_0|^3} = \frac{4\pi^2\epsilon_0^2 m_e^2 c^3}{e^4} r_0^3 \sim 10^{-11}\text{ s.}$$

Un'orbita ellittica perde energia ancora più rapidamente diventando circolare.

Meccanica quantistica

Gli atomi eccitati irraggiano circa come previsto da Larmor, ma su frequenze discrete. Poi si fermano, avendo tutti lo stesso raggio, diversamente dai pianeti. Anche gli elettroni sono descritti da campi $\psi(\boldsymbol{r}, t)$, che soddisfano l'equazione d'onda di Schroedinger. Elettroni liberi hanno lunghezza d'onda $\lambda = h/m_e v$ con $h = 6.6\ 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$. Diffrazione osservata. Elettroni in atomi formano stati stabili di raggi $2\pi r \sim N\lambda$ dove $N = 1, 2, \ldots$. Non possono collassare a $r < \lambda$.



Ma non ha senso, gli elettroni sono particelle individuali, non onde...?

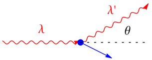
Gli elettroni sono particelle e onde. **Anche la luce sono fotoni e onde**

Tutto è campi quantistici, onde di probabilità che si manifestano come particelle. Mostrato da

- **Effetto Compton**: si osserva che luce su e cambia λ come se $\mathbb{P} = \hbar\mathbb{K}$.
- **Effetto fotoelettrico**: si osserva che illuminando una lastra fotografica con luce di frequenza ν escono elettroni di energia $E = h\nu - E_B$, indipendentemente dall'intensità dell'onda. Luce intensa: grande numero di quanti ($W_\odot/h\nu \sim 10^{21}/\mathrm{m}^2\,\mathrm{sec}$ per la luce solare) produce tanti elettroni. Affievolendo fino ad avere intensità minima si osservano pochi e a tempi casuali.

Effetto Compton: $\mathbb{P} = \hbar \mathbb{K}$

Dati mostrano che $\nu' = \nu$ è solo un limite di $h\nu + E_e = h\nu' + E'_e$. Compton nel 1923 mandò fotoni di lunghezza d'onda $\lambda \sim$ raggi X su elettroni fermi, trovando fotoni deflessi ad angolo θ con



$$\lambda'(\theta) = \lambda + \underbrace{\lambda_{\text{Compton}}}_{2.4\ 10^{-12}\text{m}} (1 - \cos\theta)$$

Spiegabile come scattering $\gamma e \to \gamma' e'$ se γ sono particelle con $\mathbb{P} = \hbar \mathbb{K}$, quindi $E_\gamma = h\nu = hc/\lambda$. Infatti $\mathbb{P}_\gamma + \mathbb{P}_e = \mathbb{P}'_\gamma + \mathbb{P}'_e$ consente generica deflessione $\theta \neq 0$:

$$\mathbb{P}_\gamma = \frac{E_\gamma}{c}(1, 0, 0, 1), \qquad \mathbb{P}'_\gamma = \frac{E'_\gamma}{c}(\cos\theta, \sin\theta, 0, 1), \qquad \mathbb{P}_e = (0, 0, 0, m_e c).$$

Quadrando $\mathbb{P}'_e = \mathbb{P}_e + \mathbb{P}_\gamma - \mathbb{P}'_\gamma$ si ottiene

$$m_e^2 c^2 = m_e^2 c^2 + 0 + 0 + 2m_e(E_\gamma - E'_\gamma) + \frac{2}{c^2} E_\gamma E'_\gamma (\cos\theta - 1)$$

cioè

$$\frac{1}{E'_\gamma} = \frac{1}{E_\gamma} + \frac{1 - \cos\theta}{m_e c^2} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda' = \lambda + \underbrace{\lambda_{\text{Compton}}}_{h/m_e c}(1 - \cos\theta).$$