

UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Laurea Triennale in Matematica

**Sulla minimizzazione della rigidità torsionale
tra i corpi di spessore costante**

Relatrice:

Prof.ssa Ilaria Lucardesi

Candidato:

Simone Saccani

ANNO ACCADEMICO 2024/2025

Indice

Abstract	v
Introduzione	vii
1 Corpi convessi	1
1.1 Struttura di spazio metrico	1
1.2 Rappresentazione dei corpi convessi	4
1.3 Corpi di spessore costante	8
2 Rigidità torsionale	15
2.1 Continuità della rigidità torsionale	16
2.2 Stime della rigidità torsionale	19
2.3 Funzioni test e principio del massimo	20
3 Ottimizzazione di forma	23
3.1 Teoremi di esistenza	23
3.2 Stima sull'inradius dell'insieme ottimale	24
3.2.1 Stima con la sfera inscritta	24
3.2.2 Stima con 3-cap	25
3.2.3 Possibili strategie e congettura	29
4 Ottimizzazione numerica	33
4.1 Funzioni di supporto nel piano	33
4.2 Implementazione in MATLAB	35
4.3 Calcolo della rigidità torsionale di un 3-r-cap	39
5 Possibili estensioni	45
5.1 Primo autovalore del Laplaciano	45
Ringraziamenti	49

Abstract

Lo scopo di questa tesi è studiare un problema, ad oggi aperto, di ottimizzazione di forma con vincolo geometrico: si vuole minimizzare la rigidità torsionale tra gli insiemi convessi in dimensione generica, con spessore costante fissato.

Dopo aver richiamato le proprietà fondamentali dei corpi di spessore costante e della rigidità torsionale, si dimostra l'esistenza di un insieme ottimale e se ne indagano alcune proprietà qualitative. In particolare, il problema viene studiato nel piano, in cui la ricerca è supportata da simulazioni numeriche (MATLAB), che forniscono un'intuizione sulla forma ottimale: il triangolo di Reuleaux. La tesi si conclude con la presentazione di alcune possibili strade da intraprendere per la caratterizzazione della forma ottimale.

Introduzione

Un problema di ottimizzazione di forma è un problema di Calcolo delle Variazioni del tipo

$$\inf\{F(\Omega) : \Omega \in \mathcal{A}\},$$

in cui il funzionale F ha come variabile un insieme Ω di \mathbb{R}^n , detto *forma*. La classe \mathcal{A} rappresenta l'insieme di *forme ammissibili* e descrive i vincoli che si vogliono imporre, di tipo geometrico, topologico o di regolarità.

In questo elaborato, consideriamo come classe di forme ammissibili \mathcal{K}_w^n : i corpi convessi di \mathbb{R}^n di spessore costante assegnato w . Geometricamente, queste forme possono essere descritte come gli insiemi compatti e convessi di \mathbb{R}^n tali che, presa una qualunque coppia di iperpiani paralleli e tangenti al corpo, questi hanno sempre la stessa distanza reciproca, pari a w . Due insiemi rappresentativi in questa classe sono: in dimensione generica n , la palla di raggio $w/2$; nel piano, per $n = 2$, il triangolo di Reuleaux, il cui bordo è formato da tre archi di circonferenza centrati ai vertici di un triangolo equilatero, di raggio pari al lato del triangolo, di lunghezza w .

Lo studio dei corpi convessi di spessore costante risale al 1700 con Eulero, che li aveva denominati *orbiformi*. Negli ultimi due secoli, l'interesse nei loro confronti è cresciuto considerevolmente, anche grazie alle loro applicazioni fisiche e ingegneristiche.

I primi problemi di ottimizzazione di forma ambientati in tale classe si limitavano al caso planare e consideravano funzionali puramente geometrici. Il primo risultato notevole risale al 1860, quando J.E. Barbier ha dimostrato che i corpi planari di spessore costante w hanno perimetro costante, uguale a πw ; in luce di questo fatto, ogni problema ambientato in tale classe è in realtà anche un problema isoperimetrico. Inoltre, il teorema diventa falso se la dimensione è maggiore di due; questo è un esempio di come i corpi di spessore costante diventino più difficili da indagare in dimensione superiore. All'inizio del ventesimo secolo, W. Blaschke e H. Lebesgue hanno dimostrato che il triangolo di Reuleaux è il corpo convesso di spessore costante con area minima; questo risultato è oggi noto come Teorema di Blaschke-Lebesgue. Invece il problema rimane aperto nello spazio tridimensionale: nel 1934, Bonnesen e Fenchel hanno ipotizzato che i corpi convessi di spessore costante con il volume minimo siano due corpi di Meissner, ossia due solidi ottenuti arrotondando alcuni spigoli di un tetraedro di Reuleaux, tuttavia la congettura è ad oggi aperta.

In questo elaborato, ci occupiamo del problema di minimizzazione

$$\inf\{T(\Omega) : \Omega \in \mathcal{K}_w^n\},$$

dove T è la rigidità torsionale di Ω , definita come

$$T(\Omega) = \int_{\Omega} u_{\Omega} dx,$$

con u_{Ω} soluzione dell'equazione differenziale

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Questo funzionale di forma, definito a partire da una PDE, non è di tipo geometrico. Pertanto, il problema che affrontiamo non rientra nella teoria classica ed è ad oggi un problema aperto.

In questa tesi, dimostriamo un risultato di esistenza del minimo nella classe dei corpi convessi di spessore costante, in ogni dimensione. In dimensione 2 forniamo una condizione di ottimalità sull'inradius. L'analisi è guidata dall'ottimizzazione numerica, che suggerisce che il minimo sia il triangolo di Reuleaux.

Questo elaborato è organizzato in cinque capitoli.

Nel Capitolo 1 viene introdotta la classe dei corpi convessi in \mathbb{R}^n . Dotando lo spazio degli insiemi compatti e non vuoti di \mathbb{R}^n della distanza di Hausdorff, si dimostra un importante criterio di compattezza per i corpi convessi, noto come Principio di selezione di Blaschke. Dopodiché vengono studiate le proprietà geometriche di tali corpi, attraverso i loro piani di supporto, descritti dalle funzioni di supporto associate. Infine si introduce il concetto di larghezza direzionale e di corpi di spessore costante; si dà inoltre una caratterizzazione dei poligoni di Reuleaux, particolari corpi planari di spessore costante dati dall'intersezione di un numero dispari di cerchi.

Nel Capitolo 2, si introduce la rigidità torsionale. Dopo aver elencato alcune sue semplici proprietà, si dimostra la sua continuità rispetto alla distanza di Hausdorff. Infine, si enunciano alcune disuguaglianze che coinvolgono la rigidità torsionale, come la disuguaglianza di Saint-Venant, grazie alla quale si riesce a mostrare che il massimo di T in \mathcal{K}_w^n è dato dalla palla; inoltre vengono illustrati brevemente due metodi con cui determinare stime di tale funzionale.

Nel Capitolo 3 viene studiato il problema di ottimizzazione di forma: innanzitutto viene dimostrata l'esistenza di un minimo nella classe dei corpi convessi di spessore costante e nella classe dei poligoni di Reuleaux con al più N lati; dopodiché si cerca di determinare alcune proprietà qualitative dell'ottimo. In particolare, all'interno di un corpo di spessore costante è possibile inscrivere una figura, denominata 3- r -cap; calcolandone numericamente la rigidità torsionale, è possibile trovare una stima dall'alto dell'inradius ottimale.

Nel Capitolo 4 vengono illustrati i codici MATLAB utilizzati per implementare il calcolo numerico della rigidità torsionale. Tali funzioni si basano sul pacchetto *PDE Toolbox*, che sfrutta il metodo degli elementi finiti. Inoltre viene calcolata la rigidità torsionale di un 3- r -cap, per motivare le stime del Capitolo 3.

Nel Capitolo 5 si illustra un problema strettamente legato a quello studiato, cioè la massimizzazione del primo autovalore del Laplaciano. Dopo aver mostrato come in realtà entrambi possano essere inquadrati in un contesto più ampio, si formula una congettura più generale che li accomuna.

Capitolo 1

Corpi convessi

In questo capitolo introduciamo il concetto di corpo convesso, facendo principalmente riferimento al testo [Sch13]. In particolare, mostriamo che lo spazio dei corpi convessi è metrizzabile e che, considerando la distanza di Hausdorff, tale spazio gode di buone proprietà di compattezza. Caratterizziamo poi i corpi convessi in termini geometrici, mostrando che ogni corpo è intersezione dei propri iperpiani di supporto, e studiamo tali iperpiani tramite la funzione di supporto. Infine, ci concentriamo sull'analisi dei corpi convessi di spessore costante e della sottoclasse costituita dai poligoni di Reuleaux.

Diamo ora la definizione di corpo convesso.

Definizione 1.1 - Corpo convesso

Un *corpo convesso* è un sottoinsieme K di \mathbb{R}^n non vuoto, convesso e compatto.

In realtà, è spesso utile pensare ai corpi convessi come sottospazio dello spazio

$$\mathcal{C}^n := \{K \subset \mathbb{R}^n : K \neq \emptyset, K \text{ compatto}\}.$$

Indichiamo con $\mathcal{K}^n \subset \mathcal{C}^n$ la classe dei corpi convessi in \mathbb{R}^n .

1.1 Struttura di spazio metrico

Come prima cosa, vogliamo dotare lo spazio \mathcal{C}^n di una struttura metrica, grazie alla seguente distanza.

Nel seguito, utilizziamo la notazione $|x - y|$ o $d(x, y)$ per indicare la distanza euclidea tra due punti x e y di \mathbb{R}^n . Indichiamo con dist la distanza di un punto $x \in \mathbb{R}^n$ da un insieme $A \subset \mathbb{R}^n$, cioè

$$\text{dist}(x, A) := \inf_{y \in A} d(x, y).$$

Definizione 1.2 - Distanza di Hausdorff

Dati $K, L \in \mathcal{C}^n$, la *distanza di Hausdorff* tra K e L è

$$d_H(K, L) := \max \left\{ \max_{x \in K} \text{dist}(x, L), \max_{y \in L} \text{dist}(y, K) \right\}.$$

Si verifica che d_H è una distanza su \mathcal{C}^n : le proprietà $d_H \geq 0$, $d_H(K, L) = 0 \iff K = L$, e $d_H(K, L) = d_H(L, K)$ seguono immediatamente dalla definizione. Invece, per la disuguaglianza triangolare, dati $K, L, M \in \mathcal{C}^n$, per $x \in K$ vale

$$\text{dist}(x, M) \leq d(x, y) + \text{dist}(y, M) \leq d(x, y) + d_H(L, M) \quad \forall y \in L.$$

Passando all'inf su $y \in L$, otteniamo

$$\text{dist}(x, M) \leq \text{dist}(x, L) + d_H(L, M) \leq d_H(K, L) + d_H(L, M),$$

per cui

$$\max_{x \in K} \text{dist}(x, M) \leq d_H(K, L) + d_H(L, M).$$

Ragionando analogamente con $\text{dist}(y, K)$ per $y \in M$, otteniamo infine $d_H(K, M) \leq d_H(K, L) + d_H(L, M)$.

Un altro strumento utile in \mathcal{C}^n è la seguente operazione binaria, detta *somma di Minkowski*.

Definizione 1.3 - Somma di Minkowski

Siano $K, L \in \mathcal{C}^n$. La *somma di Minkowski* di K e L è l'insieme

$$K + L := \{x + y : x \in K, y \in L\}.$$

Grazie alla somma di Minkowski, è possibile dare una caratterizzazione equivalente di d_H :

$$d_H(K, L) = \min\{r \geq 0 : K \subset (L)_r, L \subset (K)_r\},$$

dove $(K)_r$ è l'*r-intorno* o *r-insieme parallelo* di K , cioè

$$(K)_r := K + rB^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, K) \leq r\},$$

con B^n la palla unitaria in \mathbb{R}^n centrata nell'origine.

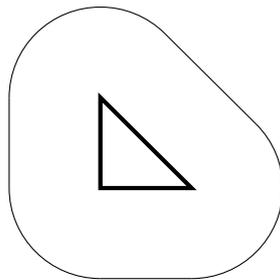


Figura 1.1: 1-intorno di un triangolo.

Infatti, detto $\alpha := \min\{r \geq 0 : K \subset (L)_r, L \subset (K)_r\}$, per $x \in K$ si ha $x \in L + \alpha B^n$, quindi $x = y + \alpha b$, per qualche $y \in L, b \in B^n$. Segue che $|x - y| \leq \alpha$, quindi $\text{dist}(x, L) = \inf_{y \in L} |x - y| \leq \alpha$. Poiché $x \in K$ era generico, vale $\max_{x \in K} \text{dist}(x, L) \leq \alpha$; scambiando i ruoli di K e L , otteniamo $d_H(K, L) \leq \alpha$.

Viceversa, sia $0 < \lambda < \alpha$. Senza perdita di generalità, possiamo supporre che $K \not\subset L + \lambda B^n$. Allora esiste $x \in K$ tale che $x \notin L + \lambda B^n$, quindi $|x - y| > \lambda$ per tutti gli $y \in L$. Segue allora che $d_H(K, L) \geq \lambda$. Poiché $\lambda < \alpha$ era arbitrario, otteniamo $d_H(K, L) \geq \alpha$. Combinando le due disuguaglianze ottenute, deduciamo quindi che $d_H(K, L) = \alpha$.

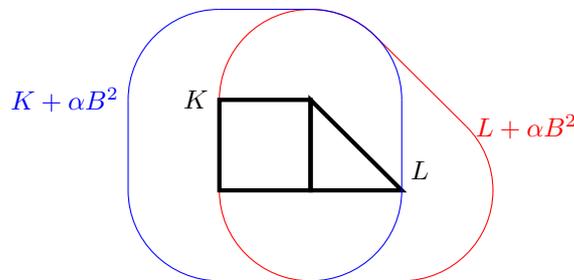


Figura 1.2: Distanza di Hausdorff tra un quadrato e un triangolo con gli r -intorni.

Per dimostrare le proprietà metriche dello spazio \mathcal{C}^n , è necessario un lemma preliminare.

Lemma 1.4

Se $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ è una successione decrescente, ossia $E_{m+1} \subset E_m$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, allora

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} E_m = \bigcap_{m=1}^{+\infty} E_m.$$

Dimostrazione. L'insieme

$$E := \bigcap_{m=1}^{+\infty} E_m$$

è compatto e non vuoto, in quanto intersezione decrescente di compatti non vuoti.

Per assurdo, se la tesi fosse falsa, si avrebbe $E_m \not\subset E + \varepsilon B^n$ per ogni $m \in \mathbb{N}$, per un certo ε . Definiamo

$$A_m := E_m \setminus \text{Int}(E + \varepsilon B^n),$$

dove $\text{Int}(\cdot)$ indica la parte interna. Segue che $\{A_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione decrescente di insiemi compatti e non vuoti, quindi ha un'intersezione non vuota A . Chiaramente $E \cap A = \emptyset$, ma $A_m \subset E_m$ implica che $A \subset E$, che è una contraddizione. \square

Teorema 1.5

Lo spazio metrico (\mathcal{C}^n, d_H) è completo e localmente compatto.

Dimostrazione. (i) *Completezza.* Sia $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ una successione di Cauchy. Per ogni $i \in \mathbb{N}$ definiamo

$$A_i := \overline{\bigcup_{m \geq i} E_m}, \quad A := \bigcap_{i \in \mathbb{N}} A_i.$$

Per costruzione, A_i è non vuoto e chiuso per ogni $i \in \mathbb{N}$. La limitatezza segue dal fatto che $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy: esiste un indice \bar{m} tale che, per ogni $m \geq \bar{m}$ vale $d_H(E_m, E_{\bar{m}}) \leq 1$, quindi

$$A_i \subset \left(\bigcup_{m=i}^{\bar{m}} E_m \right) \cup (E_{\bar{m}})_1.$$

Dalle proprietà illustrate, si deduce che $A_i \in \mathcal{C}^n$. Anche l'insieme A è un elemento di \mathcal{C}^n : infatti per costruzione A è compatto e non vuoto, in quanto intersezione decrescente di compatti. Inoltre, per il Lemma 1.4, vale $d_H(A_i, A) \rightarrow 0$ per $i \rightarrow \infty$.

Ora vogliamo mostrare che A è il d_H -limite degli E_m . Fissiamo $\varepsilon > 0$. Poiché $d_H(A_i, A) \rightarrow 0$, per i abbastanza grande vale $A_i \subset (A)_\varepsilon$, quindi esiste \tilde{m} tale che per ogni $m \geq \tilde{m}$ vale $E_m \subset (A)_\varepsilon$. D'altra parte, poiché $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è di Cauchy, esiste \hat{m} tale che per ogni $m_1, m_2 \geq \hat{m}$ vale $E_{m_1} \subset (E_{m_2})_\varepsilon$. Fissando m_2 e facendo l'unione nel membro di sinistra per ogni $m_1 \geq m_2$, otteniamo $A_i \subset (E_{m_2})_\varepsilon$ per $i \geq m_2$, quindi anche $A_i \subset (E_{m_2})_\varepsilon$ per ogni $m_2 \geq \hat{m}$. Prendendo $\bar{m} = \max\{\hat{m}, \tilde{m}\}$, abbiamo che per ogni $m \geq \bar{m}$ vale $E_m \subset (A)_\varepsilon$ e $A \subset (E_m)_\varepsilon$, come volevamo.

(ii) *Locale compattezza.* Mostriamo che ogni successione limitata $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{C}^n$ ammette una sottosuccessione convergente. Poiché la successione è limitata, tutti i suoi elementi sono contenuti in un cubo Q di lato a , per un certo $a > 0$. Dividendo ogni lato in due parti uguali, possiamo scrivere Q come unione di 2^n cubi di lato $a/2$. Dato $E \in \mathcal{C}^n$, denotiamo con $P_1(E)$ l'unione dei cubi della suddivisione che intersecano E . Poiché i cubi sono in numero finito, esiste una sottosuccessione $\{E_m^{(1)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ di $\{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ che interseca la stessa famiglia di cubi, ossia $T_1 := P(E_m^{(1)})$ non dipende da m . Ripetiamo la stessa procedura per ogni $i \in \mathbb{N}$: dividiamo Q in $(2^i)^n$ cubi di lato $a/2^i$. Dato $E \in \mathcal{C}^n$, denotiamo con $P_i(E)$ l'unione dei cubi di tale costruzione che intersecano E . Poiché i cubi sono in numero finito, possiamo estrarre una sottosuccessione $\{E_m^{(i)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ di $\{E_m^{(i-1)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ che interseca la stessa famiglia di cubi, ossia $T_i := P_i(E_m^{(i)})$ non dipende da m .

Abbiamo così costruito una successione di unione di cubi $\{T_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ e una successione di insiemi $\{E_m^{(i)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ per ogni $i \in \mathbb{N}$ tali che:

$$T_i = P_i(E_m^{(i)}) \quad \forall m \in \mathbb{N},$$

e $\{E_m^{(i)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una sottosuccessione di $\{E_m^{(j)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ per $i > j$.

Fissando i , abbiamo che $d_H(E_h^{(i)}, E_k^{(i)}) \leq a\sqrt{n}2^{-i}$ per ogni $h, k \in \mathbb{N}$. Ora, considerando due indici $i, j \geq i_0$, per costruzione otteniamo

$$d_H(E_h^{(i)}, E_k^{(j)}) \leq a\sqrt{n}2^{-i_0} \quad \forall m, k \in \mathbb{N}, \quad \forall i, j \geq i_0.$$

Con un procedimento diagonale, denotiamo $F_i := E_i^{(i)}$, per cui $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}} \subset \{E_m\}_{m \in \mathbb{N}}$. Inoltre

$$d_H(F_i, F_j) \leq a\sqrt{n}2^{-i_0} \quad \forall i, j \geq i_0.$$

Quindi $\{F_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ è una successione di Cauchy, che per il punto (i) converge. \square

Teorema 1.6

Il sottospazio \mathcal{K}^n è chiuso in (\mathcal{C}^n, d_H) .

Dimostrazione. Mostriamo che il complementare di \mathcal{K}^n è aperto. Sia $E \in \mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$: poiché E non è convesso, esistono due punti $x, y \in E$ e $\lambda \in (0, 1)$ tali che il punto $z := \lambda x + (1 - \lambda)y$ non appartiene a E . Poiché E è chiuso, esiste ε tale che $B(z, \varepsilon)$ non interseca E . Sia ora $E' \in \mathcal{C}^n$ tale che $d_H(E, E') < \varepsilon/2$. Per definizione di d_H , esistono $x', y' \in E'$ tali che $|x - x'| < \varepsilon/2$ e $|y - y'| < \varepsilon/2$. Il punto $z' := \lambda x' + (1 - \lambda)y'$ soddisfa

$$|z - z'| \leq \lambda|x - x'| + (1 - \lambda)|y - y'| < \varepsilon/2,$$

quindi $z' \in B(z, \varepsilon/2)$. Se per assurdo fosse $z' \in E'$, allora esisterebbe $w \in E$ tale che $|w - z'| < \varepsilon/2$, per cui $w \in B(z, \varepsilon) \cap E$, che è assurdo. Quindi E' non è convesso. Abbiamo quindi dimostrato che tutto l'intorno di E nella metrica d_H di raggio $\varepsilon/2$ è contenuto in $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$. Per l'arbitrarietà di E , questo implica che $\mathcal{C}^n \setminus \mathcal{K}^n$ è aperto. \square

Dai due teoremi precedenti, otteniamo il seguente fondamentale risultato, dovuto a W. Blaschke.

Corollario 1.7 - Criterio di selezione di Blaschke

Ogni successione limitata di corpi convessi ammette una sottosuccessione convergente a un corpo convesso, rispetto alla distanza di Hausdorff.

1.2 Rappresentazione dei corpi convessi

Un iperpiano, cioè un sottospazio $(n - 1)$ -dimensionale di \mathbb{R}^n , può essere descritto come lo spazio ortogonale a un certo vettore $u \in \mathbb{S}^{n-1}$. In generale, un iperpiano è della forma

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = \alpha\},$$

per un certo $\alpha \in \mathbb{R}$. In particolare, se $\alpha = 0$, l'iperpiano H contiene l'origine.

Definizione 1.8 - Iperpiano di supporto

Sia $K \in \mathcal{K}^n$. Un iperpiano H si dice *iperpiano di supporto* per K se $K \cap H \neq \emptyset$ e K è interamente contenuto in uno dei due semispazi delimitati da H . Inoltre, se

$$K \subset H^- := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq \alpha\}$$

per qualche $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, allora u si dice *normale esterna* dell'iperpiano di supporto.

Gli iperpiani di supporto permettono di caratterizzare completamente un corpo convesso, come mostrato nel seguente teorema.

Teorema 1.9

Ogni corpo convesso K è l'intersezione dei suoi semispazi di supporto.

Dimostrazione. Nella dimostrazione, indichiamo per brevità con H^- il generico semispazio di supporto in cui è incluso, per costruzione, il corpo convesso. L'inclusione $K \subset \bigcap H^-$ è chiara, per definizione di semipiano di supporto.

Per il viceversa, dividiamo la dimostrazione in più passi.

Passo 1: per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un unico punto $\Pi_K(x) \in K$ tale che

$$\text{dist}(x, K) = |x - \Pi_K(x)|. \quad (1.1)$$

Inoltre, se $x \notin K$, allora $\Pi_K(x) \in \partial K$.

Infatti, se $x \in K$, allora chiaramente $\text{dist}(x, K) = 0$ e $\Pi_K(x) = x$. Se $x \notin K$, per R abbastanza grande vale $B_R(x) \cap K \neq \emptyset$. Su tale insieme, compatto, la mappa continua $y \mapsto |y - x|$ ammette minimo. Indichiamo con $\Pi_K(x)$ un punto di minimo e dimostriamo che è unico. Se $y_0, y_1 \in K$ fossero due punti di minimo distinti, avremmo $|x - y_0| = |x - y_1|$, quindi i due punti apparterebbero al bordo di una stessa palla centrata in x . Il punto medio $y := \frac{y_0 + y_1}{2}$, che appartiene a K per convessità, soddisfa $|x - y| < |x - y_i|$ per $i = 0, 1$, che è un assurdo. Per minimalità, segue anche che il minimo appartiene a ∂K .

Passo 2: se $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$, allora l'iperpiano H che passa per $\Pi_K(x)$ ortogonale a

$$u := \frac{x - \Pi_K(x)}{|x - \Pi_K(x)|}$$

è un iperpiano di supporto per K , con normale esterna u in $\Pi_K(x)$.

Infatti, l'iperpiano H è della forma

$$H = \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot u = \Pi_K(x) \cdot u\}.$$

Chiaramente $\Pi_K(x) \in K \cap H$. Vogliamo mostrare che $K \subset H^-$, ossia che

$$(y - \Pi_K(x)) \cdot u \leq 0 \quad \forall y \in K.$$

Sia $y \in K$, $y \neq \Pi_K(x)$. Definiamo, per $t \in [0, 1]$, $y_t := ty + (1 - t)\Pi_K(x) \in K$. Per definizione di $\Pi_K(x)$, vale

$$|x - y_t| \geq |x - y_0|.$$

Ne consegue che la funzione $t \mapsto |x - y_t|^2$ ha un minimo in $t = 0$, perciò la sua derivata è non negativa in $t = 0$:

$$(x - \Pi_K(x)) \cdot (-y + \Pi_K(x)) \geq 0.$$

Per definizione di u , questo conclude la dimostrazione dell'affermazione.

Passo 3. Dimostrazione dell'inclusione $K \supset \bigcap H^-$. Sia ora per assurdo $x \in \bigcap H^- \setminus K$. Allora l'iperpiano che passa per $\Pi_K(x)$ e ortogonale a u separa x e K , poiché $x \notin K$. In particolare, $x \in H^+ \setminus H$ e $K \subset H^-$, quindi $x \notin H^-$, che è un assurdo. \square

Osservazione 1.1

La mappa di proiezione Π_K introdotta in (1.1) è utile anche per mostrare che da ogni punto di ∂K passa un iperpiano di supporto. È infatti facile dimostrare che $\Pi_K : \mathbb{R}^n \setminus K \rightarrow \partial K$ è suriettiva. Preso quindi un punto $x \in \partial K$ esiste $y \in \mathbb{R}^n \setminus K$ tale che $\Pi_K(y) = x$. Il passo 2 della dimostrazione precedente garantisce l'esistenza di un iperpiano di supporto per K passante per x , con normale esterna $(y - x)/|y - x|$.

Per studiare gli iperpiani di supporto, è utile definire la funzione di supporto di un corpo convesso.

Definizione 1.10 - Funzione di supporto

Sia $K \in \mathcal{K}^n$. La *funzione di supporto* di K è la funzione $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definita come

$$h_K(u) := \sup_{x \in K} x \cdot u.$$

Notiamo che, poiché K è compatto, il sup è in realtà un max.

Proposizione 1.11

Sia $K \in \mathcal{K}^n$. La funzione di supporto h_K è una funzione convessa e 1-omogenea. In particolare, è una funzione continua.

Dimostrazione. La funzione di supporto è il sup di funzioni lineari, quindi è subadditiva:

$$h_K(u+v) = \sup_{x \in K} \{x \cdot u + x \cdot v\} \leq \sup_{x \in K} x \cdot u + \sup_{x \in K} x \cdot v = h_K(u) + h_K(v).$$

Inoltre è 1-omogenea:

$$h_K(\lambda u) = \sup_{x \in K} x \cdot \lambda u = \lambda h_K(u) \quad \forall \lambda \geq 0.$$

Segue che h_K è sublineare, e quindi convessa; infatti, per ogni $\lambda \in [0, 1]$, si ha:

$$h_K(\lambda u + (1-\lambda)v) \leq h_K(\lambda u) + h_K((1-\lambda)v) = \lambda h_K(u) + (1-\lambda)h_K(v).$$

Concludiamo osservando che, poiché h_K è convessa e ha come dominio \mathbb{R}^n , è anche continua. \square

La funzione di supporto permette di descrivere gli iperpiani di supporto: dato $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, l'iperpiano

$$H := \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u = h_K(u)\}$$

è un iperpiano di supporto per K . Infatti, posto $\bar{x} \in K$ un punto che soddisfa $\bar{x} \cdot u = h_K(u)$, si ha che $\bar{x} \in K \cap H$ e, per massimalità di \bar{x} , si ottiene che

$$K \subset H^- = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq \bar{x} \cdot u\}.$$

In particolare, per il Teorema 1.9 e per la 1-omogeneità dimostrata nella Proposizione 1.11, vale

$$\begin{aligned} K &= \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h_K(u)\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h_K(u) \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h_K(u) \quad \forall u \in \mathbb{R}^n\}. \end{aligned}$$

Osservazione 1.2

È possibile dare un'interpretazione geometrica della funzione di supporto: consideriamo un vettore unitario $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e l'iperpiano di supporto H per K con normale esterna u . Supponiamo che $0 \in K$: allora la funzione di supporto di K in u è la distanza tra l'iperpiano H e l'origine.

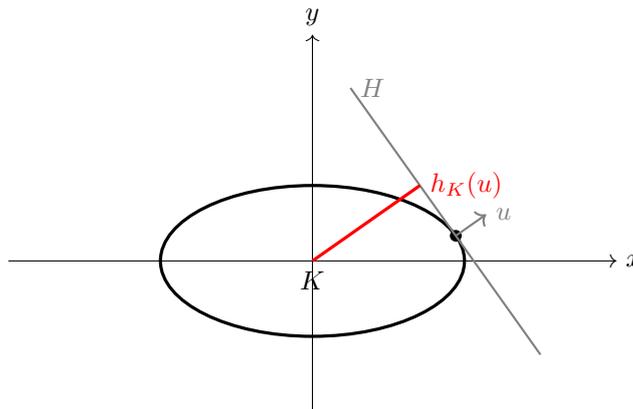


Figura 1.3: $h_K(u)$ per un'ellisse centrata nell'origine.

La corrispondenza tra corpi convessi e funzioni convesse 1-omogenee è biunivoca, come mostriamo nella seguente proposizione.

Proposizione 1.12

Sia h una funzione convessa e 1-omogenea. Allora esiste un unico $K \in \mathcal{K}^n$ tale che $h = h_K$.

Dimostrazione. Definiamo

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(u)\} = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h(u) \ \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Passo 1. L'insieme K è un chiuso, convesso, limitato. Per definizione, K è intersezione di semi-spazi, quindi è chiuso e convesso. Poiché h è continua, K è limitato su \mathbb{S}^{n-1} ; quindi, considerando $u = \pm e_i$ per $i = 1, \dots, n$, otteniamo che le coordinate di $x \in K$ sono limitate, ossia che K è limitato.

Passo 2. Se $K \neq \emptyset$, allora $h_K \leq h$. Preso $x \in K$, vale $x \cdot u \leq h(u)$ per ogni $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, quindi

$$h_K(u) = \sup_{x \in K} x \cdot u \leq h(u).$$

Passo 3. L'insieme K è non vuoto e $h_K \geq h$. Consideriamo l'insieme

$$C := \{(u, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : t \geq h(u)\}.$$

Sia $\bar{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$: il punto corrispondente sul bordo ∂C è $(\bar{u}, h(\bar{u}))$. Poiché C è un cono convesso, i suoi iperpiani di supporto passano per l'origine; dunque l'iperpiano passante per $(\bar{u}, h(\bar{u}))$ è della forma

$$H = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : (x, t) \cdot (\bar{v}, -1) = 0\},$$

per qualche $\bar{v} \in \mathbb{R}^n$. Poiché H è un iperpiano di supporto, vale

$$\begin{cases} (\bar{u}, h(\bar{u})) \cdot (\bar{v}, -1) = 0, \\ (u, t) \cdot (\bar{v}, -1) \leq 0 \ \forall u \in \mathbb{R}^n, \ \forall t \geq h(u), \end{cases} \implies \begin{cases} \bar{u} \cdot \bar{v} = h(\bar{u}), \\ u \cdot \bar{v} \leq h(u) \ \forall u \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

La seconda condizione implica che $\bar{v} \in K$, dunque $K \neq \emptyset$. La prima condizione implica che $h_K(\bar{u}) = \sup_{x \in K} x \cdot \bar{u} \geq \bar{v} \cdot \bar{u} = h(\bar{u})$. Per arbitrarietà di \bar{u} , concludiamo che $h_K \geq h$. \square

Concludiamo la sezione con alcune proprietà della funzione di supporto, riguardanti la somma di Minkowski (si veda la Definizione 1.3) e la convergenza in metrica di Hausdorff.

Proposizione 1.13

Siano $K, L, M \in \mathcal{K}^n$. Allora:

- (i) $K + L \in \mathcal{K}^n$;
- (ii) $h_{K+L} = h_K + h_L$;
- (iii) $K + M = K + L \implies M = L$.

Dimostrazione. (i) Chiaramente $K + L$ è non vuoto, limitato e convesso. Inoltre è compatto, in quanto il prodotto $K \times L$ è compatto in $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ e la somma da $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a \mathbb{R}^n è continua.

(ii) Sia $u \in \mathbb{R}^n$. Se $u = 0$, l'uguaglianza $h_{K+L}(0) = h_K(0) + h_L(0)$ è chiaramente soddisfatta. Se $u \neq 0$, allora esiste $x \in K$ tale che $h_K = x \cdot u$ ed esiste $y \in L$ tale che $h_L(u) = y \cdot u$. Quindi

$$h_K(u) + h_L(u) = (x + y) \cdot u \leq \sup\{z \cdot u : z \in K + L\} = h_{K+L}(u).$$

D'altra parte, dato $u \in \mathbb{R}^n$ e $z \in K + L$, allora $z = x + y$ con $x \in K, y \in L$, per cui

$$z \cdot u = x \cdot u + y \cdot u \leq h_K(u) + h_L(u).$$

Passando al sup su z , otteniamo $h_{K+L}(u) \leq h_K(u) + h_L(u)$.

(iii) Per (ii), abbiamo che

$$h_K + h_M = h_{K+M} = h_{K+L} = h_K + h_L.$$

Quindi $h_M = h_L$ e, per la Proposizione 1.12, $M = L$. \square

Lemma 1.14

Siano $K, L \in \mathcal{K}^n$. Allora

$$h_K \leq h_L \iff K \subset L.$$

Dimostrazione. Se $K \subset L$, allora la disuguaglianza $h_K \leq h_L$ segue dalla definizione di funzione di supporto.

Viceversa, se $h_K \leq h_L$, utilizzando la caratterizzazione mostrata nella Proposizione 1.12, abbiamo

$$K = \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h_K(u)\} \subset \bigcap_{u \in \mathbb{S}^{n-1}} \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot u \leq h_L(u)\} = L.$$

□

Proposizione 1.15

Dati $K, L \in \mathcal{K}^n$, vale

$$d_H(K, L) = \|h_K - h_L\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})}.$$

Dimostrazione. Sia $r \geq 0$ tale che $K \subset (L)_r$ e $L \subset (K)_r$. Per il Lemma 1.14, abbiamo

$$h_K \leq h_{L+rB^n}, \quad h_L \leq h_{K+rB^n},$$

con B^n la palla unitaria di \mathbb{R}^n centrata nell'origine. Utilizzando l'additività della funzione di supporto rispetto alla somma di Minkowski (si veda la Proposizione 1.13) e il fatto che la funzione di supporto di una palla, valutata sui vettori unitari, è pari al raggio, otteniamo, per ogni $u \in \mathbb{S}^{n-1}$,

$$h_K(u) \leq h_L(u) + h_{rB^n}(u) = h_L(u) + r, \quad h_L(u) \leq h_K(u) + h_{rB^n}(u) = h_K(u) + r.$$

Quindi

$$|h_K(u) - h_L(u)| \leq r \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

Passando al sup sugli $u \in \mathbb{S}^{n-1}$ e all'inf su r , otteniamo

$$\|h_K - h_L\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \leq d_H(K, L).$$

Viceversa, detta c la norma L^∞ della differenza delle funzioni di supporto, vale

$$-c \leq h_K(u) - h_L(u) \leq c \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1},$$

quindi

$$h_K(u) \leq h_{L+cB^n}(u), \quad h_L(u) \leq h_{K+cB^n}(u) \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1},$$

dunque $K \subset (L)_c$ e $L \subset (K)_c$, ossia $d_H(K, L) \leq c$. □

1.3 Corpi di spessore costante

Con la funzione di supporto possiamo definire alcune quantità che ci permettono di descrivere la geometria dei corpi convessi.

Definizione 1.16 - Larghezza direzionale di un corpo convesso

Sia $K \in \mathcal{K}^n$. Dato $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, la *larghezza direzionale* di K in direzione u è la quantità

$$w_u(K) := h_K(u) + h_K(-u).$$

La larghezza minima, o *spessore*, di K è

$$w(K) := \min\{h_K(u) + h_K(-u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

La larghezza massima, cioè il *diametro*, di K è

$$\text{diam}(K) := \max\{h_K(u) + h_K(-u) : u \in \mathbb{S}^{n-1}\}.$$

Si dice che K ha *spessore costante* se

$$w_u(K) = w_0 \quad \forall u \in \mathbb{S}^{n-1}.$$

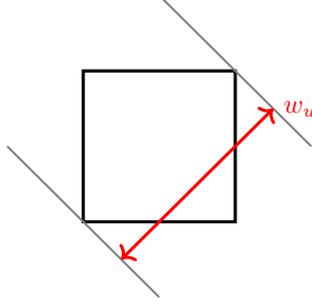


Figura 1.4: Larghezza di un quadrato in direzione $u = (\cos(\frac{\pi}{4}), \sin(\frac{\pi}{4}))$.

Indichiamo con $\mathcal{K}_w^n \subset \mathcal{K}^n$ la classe dei corpi convessi di spessore costante assegnato w .

Proposizione 1.17

La larghezza w_u è d_H -continua in \mathcal{K}^n .

Dimostrazione. Per la Proposizione 1.15, se $K_m \xrightarrow{d_H} K$ in \mathcal{K}^n per $m \rightarrow \infty$, allora $h_{K_m} \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} h_K$. La convergenza uniforme implica la convergenza puntuale

$$w_u(K_m) = h_{K_m}(u) + h_{K_m}(-u) \longrightarrow h_K(u) + h_K(-u) = w_u(K),$$

per ogni $u \in \mathbb{S}^{n-1}$, per $m \rightarrow \infty$. □

Proposizione 1.18

Lo spessore w è d_H -continuo in \mathcal{K}^n .

Dimostrazione. Sia $K_m \xrightarrow{d_H} K$ in \mathcal{K}^n . Per definizione di spessore, $w(K) = w_u(K)$ e $w(K_m) = w_{u_m}(K_m)$ per certi $u, u_m \in \mathbb{S}^{n-1}$. Poiché $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è una successione contenuta in un compatto, a meno di sottosuccessioni (che non rinominiamo) si ha $u_m \longrightarrow u^*$ per qualche $u^* \in \mathbb{S}^{n-1}$. Quindi vale

$$\begin{aligned} |w_{u^*}(K) - w(K_m)| &= |w_{u^*}(K) - w_{u_m}(K_m)| \leq |w_{u^*}(K) - w_{u_m}(K)| + |w_{u_m}(K) - w_{u_m}(K_m)| \leq \\ &\leq |w_{u^*}(K) - w_{u_m}(K)| + 2\|h_K - h_{K_m}\|_{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

poiché $h_{K_m} \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{S}^{n-1})} h_K$ e la funzione $\mathbb{S}^{n-1} \ni v \mapsto w_v(K)$ è continua, per la continuità della funzione h_K .

Quindi

$$\lim_{m \rightarrow \infty} w(K_m) = w_{u^*}(K) \geq w(K) = w_u(K) = \lim_{m \rightarrow \infty} w_u(K_m) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} w(K_m),$$

dove nell'ultima uguaglianza abbiamo usato la continuità di w_u , che vale per la Proposizione 1.17. Perciò $w(K_m) \longrightarrow w(K)$, cioè lo spessore è continuo. □

Una quantità geometrica utile per caratterizzare i corpi convessi è l'inradius.

Definizione 1.19 - Inradius

Dato $K \in \mathcal{K}^n$, l'*inradius* di K è

$$r(K) = \max_{x \in K} \text{dist}(x, \partial K).$$

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto e limitato, l'*inradius* $r(\Omega)$ di Ω è il massimo raggio r tale che esiste un punto $x \in \Omega$ con $x + rB^n \subset \Omega$.

Chiamiamo *sfera inscritta* a K una palla contenuta in K di raggio $r(K)$. Chiamiamo inoltre *sfera circoscritta* a K la più piccola palla che contiene K e indichiamo con $R(K)$ il suo raggio; tale sfera è unica.

Chiamiamo *punto di contatto* di K un punto di ∂K che appartiene a una sfera inscritta.

Per i corpi di spessore costante nel piano, in [CG83] viene enunciato il seguente risultato riguardo l'*inradius*.

Teorema 1.20

Dato $K \in \mathcal{K}_1^2$, vale

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \leq r(K) \leq \frac{1}{2}.$$

Inoltre, il minimo viene raggiunto solo dal triangolo di Reuleaux; il massimo viene raggiunto solo dalla palla.

Nel caso planare, in [YB61, Esercizio 6-12] viene fornita la seguente caratterizzazione dei punti di contatto.

Lemma 1.21

Sia $K \in \mathcal{K}^2$ e sia $B \subset K$ un cerchio inscritto in K . Allora vale una delle seguenti:

- (i) i bordi ∂K e ∂B si intersecano in due punti diametralmente opposti;
- (ii) i bordi ∂K e ∂B si intersecano in tre punti che formano un triangolo acutangolo.

Inoltre, il cerchio inscritto è unico.

Nel caso di un corpo convesso di spessore costante, valgono i seguenti risultati.

Lemma 1.22

In un corpo convesso K di spessore costante w , per ogni $P \in \partial K$, esiste un punto $Q \in \partial K$ tale che $d(P, Q) = w$.

Inoltre, se P è un punto di contatto, il segmento PQ passa per il centro della sfera inscritta.

Dimostrazione. Dato $P \in \partial K$, sia H_1 un iperpiano di supporto per K passante per P (si veda l'Osservazione 1.1). Sia H_2 l'iperpiano di supporto parallelo ad H_1 , a distanza w da H_1 . Sia $Q = H_2 \cap \partial K$. Il punto Q è unico per stretta convessità dei corpi convessi di spessore costante. Se P e Q non fossero a distanza w , allora si avrebbe $d(P, Q) > w$, che è assurdo, perché in un corpo di spessore costante w vale $\text{diam}(K) = w(K) = w$.

Sia ora O il centro della sfera inscritta. Se P è anche un punto di contatto, allora il segmento OP è ortogonale all'iperpiano H_1 e passa per P ; per quanto mostrato, questo vale anche per il segmento PQ , dunque necessariamente $O \in PQ$. \square

Proposizione 1.23

La sfera inscritta e la sfera circoscritta di un corpo convesso di spessore costante w sono concentriche, e la somma dei loro raggi è uguale a w .

Dimostrazione. Dato un corpo convesso K di spessore costante w , sia B la sua sfera inscritta con centro O . Consideriamo la sfera B' di centro O con raggio $w - r(K)$.

Indichiamo con l'apice C l'operazione di passaggio al complementare. Per assurdo, sia $P' \in K \cap (B')^C$: allora possiamo considerare i due iperpiani di supporto paralleli H_1 e H_2 , con H_1 passante per P' e H_2 a distanza w da H_1 . Poiché $d(P', O) > w$, necessariamente H_2 interseca B in un punto non di contatto, che è assurdo per la definizione di sfera inscritta. Dunque $K \subset B'$.

Inoltre, per il Lemma 1.22, dato un punto di contatto $P \in \partial B$, esiste un punto $Q \in \partial K \cap \partial B'$; quindi B' è la sfera più piccola centrata in O che contiene K . Perciò B' è la sfera circoscritta a K e vale $R(K) = w - r(K)$. \square

Consideriamo ora una sottoclasse di corpi di spessore costante nel piano. Per comodità fissiamo $w = 1$. Tutti i risultati seguenti valgono anche per spessore costante w fissato arbitrario.

Definizione 1.24 - Poligono di Reuleaux

Sia $K \in \mathcal{K}_1^2$ e sia $V \subset \partial K$. L'insieme V si dice *cuspidale* (o *pinching*) per K se ogni diametro di K è incidente con almeno un punto di V . L'insieme K si dice *poligono di Reuleaux* se ammette un insieme cuspidale finito.

Indichiamo con $\mathcal{R} \subset \mathcal{K}_1^2$ la classe dei poligoni di Reuleaux nel piano con spessore costante 1. In [KM00] e [KMW96] viene fornita una completa caratterizzazione geometrica dei poligoni di Reuleaux; in particolare, vale il seguente teorema.

Teorema 1.25

Sia $C \in \mathcal{R}$. Allora esistono n punti $v_1, \dots, v_n \in \partial C$ tali che:

- (i) $3 \leq n < +\infty$ e n è dispari;
- (ii) l'insieme $\{v_1, \dots, v_n\}$ è un insieme cuspidale per C ed è minimale rispetto all'inclusione;
- (iii) l'insieme C è dato da

$$C = \bigcap_{i=1}^n B(v_i, 1),$$

dove $B(v; 1)$ è il disco unitario centrato in v ;

- (iv) il bordo di C è dato da

$$\partial C = \bigcup_{i=1}^n S(v_i; v_{i-1}, v_{i+1}),$$

dove $S(v; u, w)$ è l'arco di circonferenza con centro v di lunghezza minore o uguale a π e con estremi u, w .

Inoltre, tale unione è disgiunta, ad eccezione degli estremi di tali archi di circonferenza.

Il numero n è detto *ordine* del poligono di Reuleaux C ; i punti v_1, \dots, v_n sono detti *vertici* di C e gli archi di circonferenza che costituiscono ∂C sono detti *lati* di C . Nel caso in cui tutti i lati di C siano congruenti, il poligono di Reuleaux C si dice *regolare*. Come evidenziato in Figura 1.5, esistono poligoni di Reuleaux regolari e non regolari.

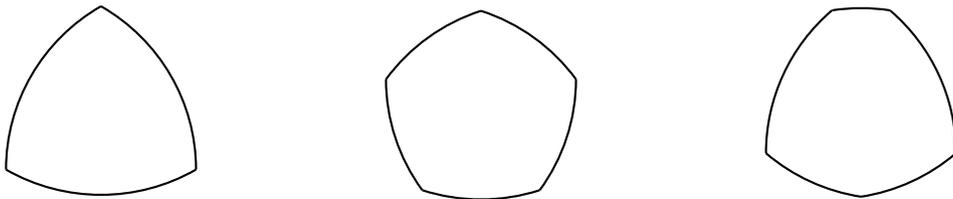


Figura 1.5: Triangolo e pentagono di Reuleaux regolari. Un pentagono di Reuleaux non regolare.

Indichiamo con $\mathcal{R}_N \subset \mathcal{R}$ la classe dei poligoni di Reuleaux con al più N lati, con N numero naturale dispari.

Osserviamo in particolare che valgono le seguenti:

$$\mathcal{R} = \bigcup_N \mathcal{R}_N \quad \text{e} \quad \mathcal{R}_N \subset \mathcal{R}_{N+1} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Nel caso dei poligoni regolari di Reuleaux, è anche possibile calcolare esplicitamente l'inradius, in funzione del numero di lati. Detto R_{2n+1} il poligono regolare di Reuleaux con $2n + 1$ lati, vale la seguente formula:

$$r(R_{2n+1}) = 1 - \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{2(2n+1)}\right)}.$$

Ora vogliamo caratterizzare lo spazio \mathcal{R}_N come sottospazio di \mathcal{C}^2 . Per farlo, è necessario un lemma preliminare.

Lemma 1.26

Siano $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}, \{L_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}^n$ due successioni, con $K_m \xrightarrow{d_H} K$ e $L_m \xrightarrow{d_H} L$. Valgono i seguenti:

- (i) il limite v di ogni successione convergente v_m con $v_m \in K_m$ appartiene a K ;
- (ii) se $\text{Int}(K \cap L) \neq \emptyset$, allora

$$K_m \cap L_m \xrightarrow{d_H} K \cap L.$$

Per la dimostrazione, si veda [Sch13, Teorema 1.8.8, Teorema 1.8.10].

Proposizione 1.27

Il sottospazio \mathcal{R}_N è chiuso in (\mathcal{C}^2, d_H) .

Dimostrazione. Sia $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{R}_N$ una successione di poligoni di Reuleaux che d_H -converge a un corpo convesso $R \in \mathcal{K}_1^2$: vogliamo mostrare che $R \in \mathcal{R}_N$. Osserviamo innanzitutto che, per $m \gg 1$, gli insiemi R_m sono tutti contenuti in un medesimo insieme compatto, ad esempio l'1-intorno $(R)_1$ dell'insieme limite. Allora esiste una sottosuccessione, che chiameremo ancora $\{R_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, tale che ogni R_m ha esattamente N_0 vertici, con $N_0 \leq N$.

Consideriamo i vertici di R_m , che indichiamo $v_k^{(m)}$ per $k = 1, \dots, N_0$: a meno di sottosuccessioni (che non rinominiamo), $v_k^{(m)}$ converge ad un punto v_k per $m \rightarrow \infty$, perché è una successione contenuta in un compatto. Quindi, a meno di un processo diagonale, $v_k^{(m)} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} v_k$ per ogni $k = 1, \dots, N_0$.

Per il Lemma 1.26-(i), $v_k \in R$. Poiché $R \in \mathcal{K}_1^2$, si deduce che $d(v_h, v_k) \leq 1$ per ogni $h, k = 1, \dots, N_0$; in particolare

$$\text{Int} \left(\bigcap_{i=1}^{N_0} B(v_i, 1) \right) \neq \emptyset.$$

Adesso, per il Lemma 1.26-(ii), poiché per ogni i vale

$$B(v_i^{(m)}, 1) \xrightarrow{d_H} B(v_i, 1),$$

otteniamo che

$$R_m = \bigcap_{i=1}^{N_0} B(v_i^{(m)}, 1) \xrightarrow{d_H} \bigcap_{i=1}^{N_0} B(v_i, 1).$$

Per unicità del limite

$$R = \bigcap_{i=1}^{N_0} B(v_i, 1),$$

quindi R è un poligono di Reuleaux con al più $N_0 \leq N$ lati. \square

Infine riportiamo un risultato riguardo la densità dei poligoni di Reuleaux, come viene illustrato in [MMO19].

Teorema 1.28

Il sottospazio dei poligoni di Reuleaux \mathcal{R} è denso in (\mathcal{K}_1^2, d_H) .

Dimostrazione. Sia K una figura piana di spessore costante 1; mostriamo che è possibile costruire un poligono di Reuleaux arbitrariamente vicino in termini della distanza di Hausdorff.

Passo 1. Costruiamo un poligono con vertici $Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m} \in \partial K$ e tale che la distanza tra due vertici opposti Q_k e Q_{m+k} , con $1 \leq k \leq m$, è 1; questo è possibile per il Lemma 1.22. Siano l_1, l_2, \dots, l_{2m} le rette di supporto a K in Q_1, Q_2, \dots, Q_{2m} , rispettivamente, in modo tale che le rette l_k e l_{m+k} , con $1 \leq k \leq m$, siano parallele; permettiamo anche che $Q_k = Q_{k+1}$. Poniamo poi $P_k = l_{k-1} \cap l_k$. Osserviamo che K è circoscritto al poligono $Q_1 Q_2 \dots Q_{2m}$ e inscritto nel poligono $P_1 P_2 \dots P_{2m}$.

In questo modo, il poligono $P_1 P_2 \dots P_{2m}$ ha le seguenti proprietà:

- i lati opposti $P_k P_{k+1}$ e $P_{m+k} P_{m+k+1}$, con $1 \leq k \leq m$, sono paralleli e a distanza 1;
- per ogni $1 \leq k \leq 2m$ il punto Q_k sul lato $P_k P_{k+1}$ e il punto Q_{m+k} sul lato $P_{m+k} P_{m+k+1}$ sono tali che il segmento $Q_k Q_{m+k}$ è ortogonale a $P_k P_{k+1}$ e a $P_{m+k} P_{m+k+1}$ ed ha lunghezza 1.

Contempliamo anche il caso in cui $P_k = Q_k = P_{k+1}$ e $P_{2m+1} = P_1$.

Passo 2. In queste ipotesi, costruiamo un poligono di Reuleaux circoscritto al poligono $Q_1 Q_2 \dots Q_{2m}$ e inscritto nel poligono $P_1 P_2 \dots P_{2m}$. Per farlo, consideriamo un arco di raggio 1 tra Q_k e Q_{k+1} e una curva composta da due archi di circonferenza che collega Q_{m+k} e Q_{m+k+1} in modo tale che la nuova curva abbia spessore costante 1. Sia Z_k un punto la cui distanza da Q_k e Q_{k+1} è 1; scegliamo inoltre Z_k in modo che giaccia nell'involuppo convesso dei punti $\{Q_k Q_{m+k} \cap Q_{k+1} Q_{m+k+1}, Q_{m+k}, Q_{m+k+1}, P_{m+k+1}\}$. Ora, per ogni $1 \leq k \leq m$, disegniamo un arco di raggio w centrato in Z_k che collega Q_k e Q_{k+1} , un arco di raggio 1 centrato in Q_k che collega Q_{m+k} e Z_k e un arco di raggio w centrato in Q_{k+1} che collega Z_k e Q_{m+k+1} . La nuova figura C ha spessore costante 1: infatti, se una delle due rette di supporto parallele l e l' di C interseca l'arco $Q_{m+k} Q_{k+1}$, allora l'altra passa per Q_k : se l passa per Z_k , allora l' è tangente all'arco $Q_k Q_{k+1}$; se l è tangente all'arco $Z_k Q_{m+k+1}$, allora l' passa per il vertice Q_{k+1} .

Passo 3. Infine, possiamo scegliere il poligono $P_1 P_2 \dots P_{2m}$ in modo che la distanza tra Q_k e Q_{k+1} , per $1 \leq k \leq m$, e tra Q_{2m} e Q_1 sia minore di ε ; dunque la distanza di Hausdorff tra K e C tende a zero quando ε tende a zero. \square

Capitolo 2

Rigidità torsionale

In questo capitolo, introduciamo la rigidità torsionale, un funzionale di forma definito a partire da un'equazione alle derivate parziali. Dopo averne illustrato le prime proprietà, mostriamo che la rigidità torsionale è continua rispetto alla convergenza di Hausdorff e dimostriamo alcune stime che la legano ad altri funzionali geometrici.

Diamo ora la definizione di rigidità torsionale.

Definizione 2.1 - Rigidità torsionale

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, si definisce la *rigidità torsionale* di Ω come la quantità

$$T(\Omega) = \int_{\Omega} u_{\Omega} dx,$$

dove u_{Ω} è la *funzione di torsione*, ossia la soluzione della PDE

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

La rigidità torsionale ammette anche la seguente formulazione variazionale:

$$T(\Omega) = \max_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\int_{\Omega} u dx)^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}.$$

Da questa caratterizzazione segue immediatamente una proprietà di monotonia:

$$\Omega_1 \subset \Omega_2 \implies T(\Omega_1) \leq T(\Omega_2).$$

Infatti, data una funzione $u \in H_0^1(\Omega_1)$, questa può essere identificata con una funzione $\tilde{u} \in H_0^1(\Omega_2)$ semplicemente estendendola a zero in $\Omega_2 \setminus \Omega_1$; in questo senso, possiamo scrivere $H_0^1(\Omega_1) \subset H_0^1(\Omega_2)$.

Inoltre T gode della seguente proprietà di riscaldamento:

$$T(t\Omega) = t^{n+2}T(\Omega) \quad \forall t \geq 0.$$

Infatti, data $u \in H_0^1(\Omega)$ soluzione di $-\Delta u = 1$ su Ω , la funzione $v_t(x) = t^2 u(\frac{x}{t}) \in H_0^1(t\Omega)$ è soluzione di $-\Delta v = 1$ su $t\Omega$ e vale

$$T(t\Omega) = \int_{t\Omega} t^2 u\left(\frac{x}{t}\right) dx = t^{n+2} \int_{\Omega} u(y) dy = t^{n+2}T(\Omega).$$

In generale, la rigidità torsionale non può essere calcolata esplicitamente, se non per alcune figure specifiche, come la palla in \mathbb{R}^n o il triangolo equilatero nel piano.

Esempio 2.1

Nel caso della palla unitaria $B^n \subset \mathbb{R}^n$ centrata nell'origine, il problema

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } B^n, \\ u \in H_0^1(B^n) \end{cases}$$

si risolve. Infatti, cercando la soluzione tra le funzioni radiali, la PDE diventa una ODE nella variabile distanza dall'origine. Risolvendo l'equazione ordinaria, si ottiene che il problema ha come soluzione la funzione

$$u(x) = \frac{1 - |x|^2}{2n}.$$

Usando la formula d'integrazione per le funzioni radiali, otteniamo

$$\int_{B^n} u(x) dx = \frac{1}{2n} \left(\omega_n - n\omega_n \int_0^1 t^2 t^{n-1} dt \right) = \omega_n \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \right).$$

Quindi

$$T(B^n) = \frac{\omega_n}{n(n+2)}.$$

In particolare, in dimensione 2, otteniamo

$$T(B^2) = \frac{\omega_2}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Esempio 2.2

Nel piano, l'equazione differenziale $-\Delta u = 1$ non si risolve nemmeno per geometrie facili, come il quadrato o il rettangolo; in questi casi, neppure la separazione delle variabili facilita la risoluzione. Tuttavia il problema è risolubile per i triangoli equilateri. Sia \mathcal{T} il triangolo equilatero di lato l , con i vertici in $(0, 0)$, $(l\sqrt{3}/2, l/2)$ e $(l\sqrt{3}/2, -l/2)$. Si verifica che la sua funzione di torsione è

$$u(x, y) := \frac{\sqrt{3}}{2l} \left(y + \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \left(y - \frac{x}{\sqrt{3}} \right) \left(x - \frac{\sqrt{3}}{2} l \right).$$

Possiamo quindi calcolare la rigidità torsionale di \mathcal{T} :

$$T(\mathcal{T}) = 2 \int_0^{\sqrt{3}l/2} \int_0^{x/\sqrt{3}} u(x, y) dy dx = \frac{\sqrt{3}l^4}{320}.$$

2.1 Continuità della rigidità torsionale

In generale, la rigidità torsionale è definita su insiemi aperti, mentre la teoria dei corpi convessi è sviluppata su insiemi chiusi; perciò è necessario specificare la topologia, e quindi la convergenza, di cui vengono dotati tali insiemi. Inoltre, se $K \in \mathcal{C}^n$, utilizzeremo $T(K)$ per indicare $T(\text{Int}(K))$.

In questa sezione consideriamo gli insiemi aperti contenuti in un aperto limitato prescritto $D \subset \mathbb{R}^n$. In questa classe, definiamo la *distanza di Hausdorff complementare*

$$\bar{d}_H(\Omega_1, \Omega_2) := d_H(\bar{D} \setminus \Omega_1, \bar{D} \setminus \Omega_2).$$

Un'altra possibile distanza tra gli aperti contenuti in D è la norma L^1 della differenza delle funzioni caratteristiche, ossia

$$\|\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}\|_{L^1(D)} = \int_D |\chi_{\Omega_1} - \chi_{\Omega_2}| dx = |\Omega_1 \Delta \Omega_2| = |\Omega_1 \setminus \Omega_2| + |\Omega_2 \setminus \Omega_1|.$$

In generale, la convergenza secondo la distanza di Hausdorff, la convergenza secondo la distanza di Hausdorff complementare (delle parti interne) e la convergenza L^1 delle funzioni caratteristiche sono nozioni distinte. Tuttavia, nella classe dei corpi convessi a parte interna non vuota, sono equivalenti.

Per mostrarlo, definiamo la *differenza di Minkowski* di due insiemi non vuoti E e F di \mathbb{R}^n come

$$E - F := \{x \in \mathbb{R}^n : F + x \subset E\}.$$

Se $F = rB^n$, allora $E - rB^n$ si chiama *insieme parallelo interno* e corrisponde a

$$E - rB^n = \{x \in E : \text{dist}(x, \partial E) \geq r\}.$$

Osservazione 2.3

In generale, vale

$$(E + F) - F \supset E, \quad (E - F) + F \subset E.$$

Tuttavia, se K e L sono corpi convessi, il primo contenimento diventa un'uguaglianza, ossia

$$(K + L) - L = K.$$

Proposizione 2.2

Siano $K_m, K \subset D$ corpi convessi con parte interna non vuota. Allora

(i) per $m \rightarrow \infty$

$$d_H(K_m, K) \rightarrow 0 \iff \bar{d}_H(\text{Int}(K_m), \text{Int}(K)) \rightarrow 0;$$

(ii) per $m \rightarrow \infty$

$$d_H(K_m, K) \rightarrow 0 \implies \|\chi_{K_m} - \chi_K\|_{L^1(D)} \rightarrow 0.$$

Dimostrazione. (i) Se $d_H(K_m, K) \rightarrow 0$, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste m_ε tale che, per ogni $m \geq m_\varepsilon$, vale

$$K_m \subset K + \varepsilon B^n, \quad K \subset K_m + \varepsilon B^n,$$

dove $B^n \subset \mathbb{R}^n$ è la palla unitaria. Poiché K, K_m e B^n sono convessi, si applica l'osservazione precedente, per cui

$$K_m - \varepsilon B^n \subset (K + \varepsilon B^n) - \varepsilon B^n = K, \quad K - \varepsilon B^n \subset (K_m + \varepsilon B^n) - \varepsilon B^n = K_m.$$

Ora osserviamo che l' ε -insieme parallelo esterno del complementare è il complementare dell' ε -insieme interno parallelo:

$$(A - \varepsilon B^n)^C = A^C + \varepsilon B^n.$$

Infatti

$$w \in (A - \varepsilon B^n)^C \iff w \notin \{p : p + \varepsilon B^n \subset A\} \iff \exists z \in B^n \text{ tale che } w + \varepsilon z \in A^C.$$

D'altra parte, l'ultima condizione è equivalente a

$$\exists t \in B^n, y \in A^C \text{ tale che } w = y + \varepsilon t \iff w \in A^C + \varepsilon B^n.$$

Quindi, complessivamente, abbiamo che

$$\bar{D} \setminus \text{Int}(K) \subset (\bar{D} \setminus \text{Int}(K_m)) + \varepsilon B^n.$$

Analogamente vale scambiando K e K_m .

Viceversa, se $\bar{d}_H(\text{Int}(K_m), \text{Int}(K)) \rightarrow 0$, per il Criterio di selezione di Blaschke 1.7, esiste un corpo convesso K^* e una sottosuccessione $\{m_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ tale che $d_H(K_{m_h}, K^*) \rightarrow 0$ per $h \rightarrow \infty$. Per l'implicazione precedente, il \bar{d}_H -limite di $\text{Int}(K_m)$ è $\text{Int}(K)$, da cui $\text{Int}(K^*) = \text{Int}(K)$; quindi tutta la successione d_H -converge e $K^* = K$.

(ii) La norma L^1 della differenza delle funzioni caratteristiche vale

$$\|\chi_{K_m} - \chi_K\|_{L^1(D)} = |K \setminus K_m| + |K_m \setminus K| = |K| + |K_m| - 2|K \cap K_m|.$$

In [Sch13, Teorema 1.8.10], viene dimostrato un risultato che implica $K_m \cap K \xrightarrow{d_H} K$. Inoltre, in [Sch13, Teorema 1.8.20], viene mostrato che il volume è d_H -continuo. Questi risultati ci permettono di concludere. \square

Consideriamo $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e $f \in H^{-1}(\Omega)$. Consideriamo l'equazione differenziale alle derivate parziali (PDE)

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \mathcal{D}'(\Omega)$$

con condizioni di Dirichlet omogenee al bordo; consideriamo quindi $u \in H_0^1(\Omega)$. Valgono i seguenti fatti (per una trattazione completa, si rimanda a [BB05]):

- la PDE ammette un'unica soluzione, che denoteremo u_Ω^f ;
- la mappa $f \mapsto u_\Omega^f$ si chiama *operatore risolvante*: agisce da $H^{-1}(\Omega)$ a $H_0^1(\Omega)$, è lineare (per la linearità della PDE) ed è continuo (per le disuguaglianze di Poincaré e Cauchy-Schwarz).

Osserviamo che per $f \equiv 1$, la funzione u_Ω^1 è la funzione di torsione e la sua norma L^1 è la rigidità torsionale.

Teorema 2.3

Sia $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ una successione di corpi convessi con parte interna non vuota contenuti nell'aperto D . Se

$$d_H(K_m, K) \rightarrow 0 \quad \text{per } m \rightarrow \infty,$$

allora

$$u_{\Omega_m}^1 \xrightarrow{L^2} u_\Omega^1 \quad \text{per } m \rightarrow \infty,$$

con $\Omega_m := \text{Int}(K_m)$ e $\Omega := \text{Int}(K)$. In particolare,

$$T(K_m) \rightarrow T(K).$$

Dimostrazione. Per semplicità, sia $u_m := u_{\Omega_m}^1 \in H_0^1(\Omega_m)$. Innanzitutto, usando la PDE e l'integrazione per parti, osserviamo che

$$\int_D |\nabla u_m(x)|^2 dx = \int_{\Omega_m} |\nabla u_m(x)|^2 dx = \int_{\Omega_m} u_m dx = \int_D u_m dx.$$

Applicando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per la mappa duale $H^{-1} - H_0^1$ all'ultimo termine, deduciamo che esiste una costante $C = C(D)$ tale che

$$\|\nabla u_m\|_{L^2(D)}^2 \leq C(D) \|1\|_{H^{-1}(D)} \|u_m\|_{H_0^1(D)}.$$

Poiché $u_m \in H_0^1(\Omega_m)$, la disuguaglianza di Poincaré garantisce l'equivalenza tra la norma L^2 del gradiente e la norma H_0^1 della funzione. Dunque, complessivamente abbiamo:

$$\|u_m\|_{H_0^1(D)} \leq C(D) \|1\|_{H^{-1}(D)}.$$

Quindi la successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ è uniformemente limitata in $H_0^1(D)$. Per il Teorema di Rellich, esiste una funzione $u^* \in H_0^1(D)$ e una sottosuccessione $\{u_{m_k}\}_{k \in \mathbb{N}}$ che converge a u^* debolmente in $H_0^1(D)$, fortemente in $L^2(D)$ e puntualmente per q.o. $x \in D$.

Affermiamo che u^* soddisfa $-\Delta u^* = 1$ nel senso delle distribuzioni in D , ossia, per ogni $\varphi \in C_c^\infty(D)$

$$\int_D \nabla u^* \cdot \nabla \varphi dx = \int_D \varphi dx.$$

Sia φ una funzione test fissata, con supporto compatto $\text{supp}(\varphi) := E \subset\subset D$. In particolare, $E + \varepsilon B^n \subset\subset K$ per qualche $\varepsilon > 0$. Poiché per ipotesi $d_H(K_m, K) \rightarrow 0$, esiste m_ε tale che, per $m \geq m_\varepsilon$

$$E + \varepsilon B^n \subset\subset K \subset K_m + \varepsilon B^n.$$

Facendo la differenza di Minkowski con εB^n , otteniamo

$$E \subset (E + \varepsilon B^n) - \varepsilon B^n \subset\subset (K_m + \varepsilon B^n) - \varepsilon B^n = K_m.$$

Quindi, per m abbastanza grande, $E \subset \Omega_m := \text{Int}(K_m)$ e $\varphi \in C_c^\infty(\Omega_m)$. Dunque, per m sufficientemente grande,

$$\int_D \nabla u_{m_k} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_{m_k}} \nabla u_{m_k} \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega_{m_k}} \varphi \, dx = \int_D \varphi \, dx.$$

Passando al limite debole delle u_{m_k} , otteniamo la proprietà desiderata.

Ora mostriamo che $u^* \in H_0^1(\Omega)$, con $\Omega := \text{Int}(K)$. Usando che $u_{m_k}(\chi_D - \chi_{\Omega_{m_k}}) = 0$ quasi ovunque per ogni k , passando al limite debole per $k \rightarrow \infty$, otteniamo

$$0 = u(\chi_D - \chi_\Omega) = u\chi_{D \setminus \Omega},$$

dove si è usato il fatto che nel caso convesso le funzioni caratteristiche convergono in L^1 , per la Proposizione 2.2 (ii). Quindi $u = 0$ quasi ovunque in Ω^C , che è una caratterizzazione di $H_0^1(\Omega)$ nel caso in cui Ω è convesso.

Per concludere, osserviamo che tutta la successione $\{u_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ converge fortemente in L^2 a u^* : questo segue dall'unicità della soluzione di $-\Delta u = 1$ e dal fatto che la successione è uniformemente limitata. La convergenza L^2 implica la convergenza L^1 nell'insieme limitato D . Questo equivale alla convergenza delle rigidità torsionali. \square

2.2 Stime della rigidità torsionale

Poiché la rigidità torsionale è definita implicitamente, è interessante trovare delle stime su T in termini di funzionali più semplici, ad esempio funzionali geometrici, come l'area, il perimetro o l'inradius. Queste stime sono della forma

$$T(\Omega) \leq C F(\Omega) \quad \text{oppure} \quad T(\Omega) \geq C F(\Omega),$$

con C costante positiva e F funzionale di forma.

Un primo fondamentale risultato di questo tipo è la disuguaglianza di Saint-Venant, che è stata dimostrata per la prima volta da G. Pólya in [Pó48].

Teorema 2.4 - Disuguaglianza di Saint-Venant

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ una palla. Allora

$$T(\Omega) \leq T(B) \quad \text{se } |\Omega| = |B|,$$

o, equivalentemente,

$$\frac{T(\Omega)}{|\Omega|^{\frac{n+2}{n}}} \leq \frac{T(B)}{|B|^{\frac{n+2}{n}}}.$$

Inoltre, l'uguaglianza è ottenuta se e solo se $\Omega = B$.

Nel caso planare, Pólya fornisce in [Pó60] un'ulteriore disuguaglianza, che lega la rigidità torsionale all'area e al perimetro.

Proposizione 2.5

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un aperto limitato e convesso. Allora

$$T(\Omega) \geq \frac{|\Omega|^3}{3P^2(\Omega)}.$$

Infine, mostriamo una stima tramite l'inradius.

Proposizione 2.6

Se Ω è un aperto contenuto in D , allora

$$T(\Omega) \geq \frac{\omega_n}{n(n+2)} r^{n+2}(\Omega),$$

dove $r(\Omega)$ è l'inradius di Ω .

Dimostrazione. Per definizione di inradius, esiste $x \in \Omega$ tale che $x + r(\Omega)B^n \subset \Omega$, quindi

$$T(\Omega) \geq T(x + r(\Omega)B^n) = r^{n+2}(\Omega)T(B^n) = \frac{\omega_n}{n(n+2)}r^{n+2}(\Omega).$$

□

2.3 Funzioni test e principio del massimo

In generale, per determinare stime sulla rigidità torsionale, sono possibili due approcci. Il primo consiste nell'utilizzare la formulazione variazionale

$$T(\Omega) = \max_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{(\int_{\Omega} u dx)^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}.$$

Quindi, presa una funzione $u \in H_0^1(\Omega)$, vale

$$T(\Omega) \geq \frac{(\int_{\Omega} u dx)^2}{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}.$$

La difficoltà diventa quindi determinare le funzioni $u \in H_0^1(\Omega)$ che forniscono delle stime utili del primo membro. Osserviamo inoltre che, con questo metodo, siamo in grado di fornire solamente stime dal basso.

Il secondo approccio si basa sull'utilizzo del principio del massimo per funzioni subarmoniche e superarmoniche. Diamo ora la definizione di tali classi di funzioni ed enunciamo tale principio.

Definizione 2.7 - Funzioni subarmoniche e superarmoniche

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Una funzione $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ si dice *subarmonica* se verifica

$$\Delta u \geq 0 \quad \text{su } \Omega.$$

Una funzione u si dice *superarmonica* se $-u$ è subarmonica.

Teorema 2.8 - Principio del massimo

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato. Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ è subarmonica, allora

$$\max_{\bar{\Omega}} u = \max_{\partial\Omega} u.$$

Se $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ è superarmonica, allora

$$\min_{\bar{\Omega}} u = \min_{\partial\Omega} u.$$

Per applicare questo teorema al problema della rigidità torsionale, consideriamo i due problemi:

$$\begin{cases} -\Delta v \geq 1 & \text{in } \Omega, \\ v \in H_0^1(\Omega), \end{cases} \quad \begin{cases} -\Delta v \leq 1 & \text{in } \Omega, \\ v \in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

Sia v_1 una soluzione del primo problema. Allora, considerando la funzione $u - v_1$, abbiamo che

$$-\Delta(u - v_1) = -\Delta u + \Delta v_1 \leq 0,$$

quindi $u - v_1$ è subarmonica. Inoltre $u - v_1$ è nulla su $\partial\Omega$, perciò per il principio del massimo vale $u \leq v_1$. Otteniamo quindi la seguente stima sulla rigidità torsionale:

$$T(\Omega) \leq \int_{\Omega} v_1 dx.$$

In modo analogo, considerando v_2 soluzione del secondo problema, otteniamo che la funzione $u - v_2$ è superarmonica, dunque, applicando nuovamente il principio del massimo, abbiamo $u \geq v_2$. Otteniamo quindi la stima

$$T(\Omega) \geq \int_{\Omega} v_2 \, dx .$$

Dunque questo metodo ci permette di rilassare il problema e studiarne due più semplici. Inoltre, con questo metodo possiamo fornire stime della rigidità torsionale sia dall'alto che dal basso.

Ottimizzazione di forma

In questo capitolo studiamo il problema di ottimizzazione di forma

$$\inf\{T(K) : K \in \mathcal{K}_w^n\}.$$

Supponiamo, senza perdita di generalità, che $w = 1$.

Inizialmente, dimostriamo l'esistenza di un minimo in \mathcal{K}_1^n e, nel caso $n = 2$, anche nella classe dei poligoni di Reuleaux con al più N lati \mathcal{R}_N .

Ci concentriamo quindi sul problema per $n = 2$:

$$\min\{T(K) : K \in \mathcal{K}_1^2\}.$$

In questo caso, indaghiamo alcune proprietà qualitative dell'insieme ottimale; in particolare, ci concentriamo su stime relative all'inradius, tramite la costruzione di figure inscritte di cui riusciamo a calcolare o stimare la rigidità torsionale.

Questi risultati, insieme all'ottimizzazione numerica illustrata nel Capitolo 4, sostengono la congettura che il minimo sia il triangolo di Reuleaux, ipotizzata da B. Bogosel, A. Henrot e I. Lucardesi in [BHL18].

3.1 Teoremi di esistenza

Utilizzando il metodo diretto del Calcolo delle Variazioni, otteniamo i seguenti risultati riguardo l'esistenza di un minimo della rigidità torsionale.

Teorema 3.1

La rigidità torsionale T ammette un minimo nella classe \mathcal{K}_1^n .

Dimostrazione. Sia $\{K_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_1^n$ una successione minimizzante per T con $m \rightarrow \infty$. Osserviamo che ogni elemento della successione ha diametro 1. Quindi, senza perdita di generalità, a meno di traslazioni che non cambiano il valore di T , possiamo supporre che tutti gli elementi della successione siano contenuti in un medesimo insieme compatto. Possiamo quindi applicare il Criterio di selezione di Blaschke 1.7, che garantisce l'esistenza di una sottosuccessione (che non rinominiamo) convergente a qualche $K \in \mathcal{K}^n$ rispetto alla metrica di Hausdorff. Grazie alla continuità dello spessore (si veda la Proposizione 1.18) otteniamo che $K \in \mathcal{K}_1^n$.

Poiché per il Teorema 2.3 la rigidità torsionale è d_H -continua, abbiamo che

$$T(K) = \lim_{m \rightarrow \infty} T(K_m) = \inf_{\mathcal{K}_1^n} T.$$

Quindi K è minimo per T in \mathcal{K}_1^n . □

Osservazione 3.1

È sensato studiare anche il problema della massimizzazione della rigidità torsionale in \mathcal{K}_1^n , tuttavia la sua soluzione è immediata. Infatti, per la disuguaglianza isodiametrica, vale

$$|\Omega| \leq |B|,$$

dove $B \subset \mathbb{R}^n$ è una palla di diametro pari al diametro di Ω . Se $K \in \mathcal{K}_1^n$ allora $\text{diam}(K) = \text{diam}(B) = 1$, quindi utilizzando la disuguaglianza di Saint-Venant 2.4, otteniamo

$$T(K) \leq \frac{|K|^{\frac{n+2}{n}}}{|B|^{\frac{n+2}{n}}} T(B) \leq T(B).$$

Quindi

$$\max_{\mathcal{K}_1^n} T = T(B),$$

dove B è la palla di raggio $1/2$.

In dimensione $n = 2$ dimostriamo un secondo risultato di esistenza, nella classe dei poligoni di Reuleaux con al più N lati, con spessore costante fissato.

Teorema 3.2

La rigidità torsionale T ammette un minimo nella sottoclasse \mathcal{R}_N di \mathcal{K}_1^2 .

La dimostrazione è analoga a quella del Teorema 3.1 e sfrutta la chiusura della classe \mathcal{R}_N in \mathcal{C}^2 dimostrata nel Teorema 1.27.

Dai Teoremi 3.2 e 1.28, ricordando che $\mathcal{R}_N \subset \mathcal{R}_{N+1} \subset \mathcal{K}_1^2 \forall N \in \mathbb{N}$, otteniamo che

$$\min_{\mathcal{K}_1^2} T = \lim_{N \rightarrow +\infty} \min_{\mathcal{R}_N} T = \inf_{\mathcal{R}} T.$$

3.2 Stima sull'inradius dell'insieme ottimale

In questa sezione, se non diversamente specificato, lavoriamo nella classe \mathcal{K}_1^2 . Indichiamo inoltre con K_{opt} una forma ottimale per la rigidità torsionale in tale classe.

Un approccio per studiare K_{opt} è quello di sfruttare la proprietà di monotonia della rigidità torsionale per indagare geometrie più semplici contenute in K_{opt} , per poi tradurre le stime in termini di proprietà dell'ottimo. In particolare, cerchiamo di stimare la quantità

$$r_{opt} := r(K_{opt}).$$

Ricordiamo che, per il Teorema 2.6 l'inradius di un corpo convesso K di spessore costante uguale a 1 soddisfa

$$r(K) \in \left[1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{2}\right],$$

con $r(K) = 1 - 1/\sqrt{3}$ solo per il triangolo di Reuleaux e $r(K) = 1/2$ solo per il cerchio. Quindi cerchiamo delle stime dall'alto su r_{opt} per restringere la classe di forme ammissibili, con l'obiettivo di ricondurci al triangolo di Reuleaux.

3.2.1 Stima con la sfera inscritta

La figura più semplice da considerare è il cerchio inscritto. Un primo approccio è quello di usare la Proposizione 2.5 e stimare l'area di K_{opt} con l'area del cerchio inscritto.

Inoltre, vale il seguente teorema, dimostrato per la prima volta da J.E. Barbier. Una dimostrazione di questo teorema viene fornita nel Capitolo 4.

Teorema 3.3 - Teorema di Barbier

I corpi di spessore costante w nel piano hanno perimetro costante, uguale a πw .

Sfruttando questo risultato con $w = 1$, la Proposizione 2.5, l'inclusione della sfera inscritta, otteniamo

$$T(K) \geq \frac{|K|^3}{3\pi^2} \geq \frac{(\pi r^2(K))^3}{3\pi^2} = \frac{\pi}{3} r^6(K).$$

Se il valore del membro destro supera la rigidità torsionale del triangolo di Reuleaux $c_0 := T(R_3)$, deduciamo che K non è minimizzante. Ne deriva che condizione necessaria di ottimalità è

$$r_{opt} \leq \sqrt[6]{\frac{3c_0}{\pi}} \leq 0.5082,$$

dove abbiamo utilizzato la stima, ottenuta numericamente, $c_0 \leq 0.01803$. Tuttavia notiamo che la stima non è significativa, poiché $r(K) \leq 0.5$ per ogni $K \in \mathcal{K}_1^2$.

In alternativa, possiamo usare la Proposizione 2.6. In dimensione 2 tale disuguaglianza diventa

$$T(K) \geq \frac{\pi}{8} r^4(\Omega).$$

Come prima, otteniamo una condizione necessaria di ottimalità:

$$r_{opt} \leq \sqrt[4]{\frac{8c_0}{\pi}} \leq 0.4629.$$

Questa disuguaglianza sta effettivamente restringendo l'insieme di forme ammissibili ai corpi convessi di spessore costante tali che $r(K) \in [1 - 1/\sqrt{3}, 0.4629]$.

3.2.2 Stima con 3-cap

In realtà, per un corpo di spessore costante K nel piano, è possibile individuare un'altra figura inscritta. Se $r < \frac{1}{2}$, allora il cerchio inscritto B_r , di centro O , è tangente in almeno tre punti distinti P, Q, R al bordo del corpo. Infatti, se fossero soltanto due, questi dovrebbero necessariamente essere antipodali, conducendo a $r = \frac{1}{2}$. Per il Lemma 1.22, esistono tre punti $A, B, C \in \partial K$ che sono rispettivamente a distanza 1 da P, Q, R . Quindi, dato un corpo convesso K di spessore costante 1 con inradius $r < \frac{1}{2}$, è sempre possibile trovare un sottoinsieme C_{ABC} dato dall'involuppo convesso del cerchio inscritto B_r con centro O e tre punti $A, B, C \in \partial K$ a distanza $1 - r$ da O . Ogni vertice A, B, C determina una "punta", che chiameremo *cap*, indicata rispettivamente con C_A, C_B, C_C , i cui lati sono tangenti a B_r ; inoltre tali punte sono disgiunte. Chiameremo l'insieme C_{ABC} un **3- r -cap**.

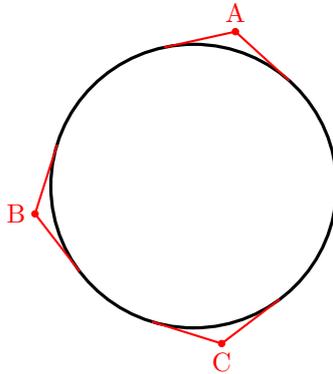
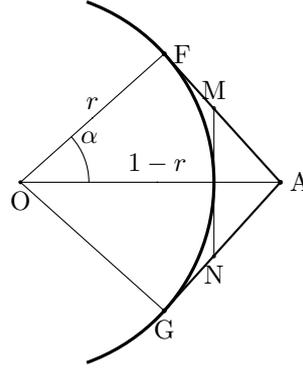


Figura 3.1: Un 3- r -cap.

Una volta costruita tale figura, possiamo innanzitutto cercare di riapplicare la stima che sfrutta l'area. Per calcolare l'area di C_{ABC} , calcoliamo l'area di un singolo cap. Facendo riferimento alla Figura 3.2, è facile verificare che $|C_A| = 2(|AOF| - \frac{1}{2}\alpha r^2)$.

Figura 3.2: Struttura di un r -cap.

Poiché risulta che AF ha lunghezza $\sqrt{1-2r}$, otteniamo che $|AOF| = \frac{1}{2}r\sqrt{1-2r}$. Usando che $\cos \alpha = \frac{r}{1-r}$, otteniamo

$$|C_{ABC}| = \pi r^2 + 3r\sqrt{1-2r} - 3 \arccos\left(\frac{r}{1-r}\right) r^2.$$

Osserviamo che tale area non dipende dalla posizione di A, B, C , ma solo da r . I valori di r che escludiamo imponendo $|C_{A,B,C}|/(3\pi^2) \geq c_0$ non sono significativi.

Poiché la rigidità torsionale di C_{ABC} non può essere calcolata esplicitamente, possiamo provare a iterare il ragionamento iniziale e inscrivere delle figure di rigidità torsionale nota in C_{ABC} .

Un primo modo è quello di inscrivere un triangolo equilatero \mathcal{T}_l in ciascuna punta: tale triangolo risulta avere un'altezza di $1-2r$ e dunque un lato di lunghezza pari a $l = \frac{2}{\sqrt{3}}(1-2r)$. Poiché la rigidità torsionale è additiva su insiemi disgiunti, utilizzando la formula descritta nell'Esempio 2.2 per $T(\mathcal{T}_l)$, otteniamo

$$T(\Omega) \geq T(B_r) + 3T(\mathcal{T}_l) = \frac{\pi}{8}r^4 + \frac{\sqrt{3}}{60}(1-2r)^4.$$

Imponendo tale quantità minore di c_0 , troviamo nuovamente la stima

$$r_{opt} \leq 0.4629.$$

Alternativamente, possiamo inscrivere un cerchio B_ρ di raggio ρ in ciascuna punta. Considerando la retta tangente alla circonferenza inscritta ortogonale all'altezza della punta, otteniamo il triangolo isoscele AMN in Figura 3.2, di altezza $1-2r$; inoltre si può calcolare la base del triangolo, che risulta essere uguale a $2r\sqrt{1-2r}$. Otteniamo quindi che il lato obliquo del triangolo è $l = \sqrt{-3r^3 + 8r^2 - 4r + 1}$. Poiché vale $A = \frac{p\rho}{2}$, dove p è il perimetro del triangolo, otteniamo

$$\rho = \frac{2r(1-2r)^{\frac{3}{2}}}{2r\sqrt{1-2r} + 2\sqrt{-3r^3 + 8r^2 - 4r + 1}}.$$

Utilizzando nuovamente la stima

$$T(\Omega) \geq T(B_r) + 3T(B_\rho) = \frac{\pi}{8}r^4 + \frac{3\pi}{8}\rho^4,$$

otteniamo che

$$r_{opt} \leq 0.4629.$$

Per tentare di migliorare la stima su r_{opt} , possiamo ricorrere al calcolo numerico della rigidità torsionale di un 3 - r -cap. Per farlo, innanzitutto è necessario indagare la struttura di tale insieme. Fissiamo il centro O di B_r nell'origine degli assi e il vertice A nel punto $(1-r, 0)$, lasciando B e C liberi di ruotare sulla circonferenza di raggio $1-r$ e centro O ; indichiamo con ϕ e ψ gli angoli che individuano i punti B e C , misurati in senso antiorario a partire dal semiasse positivo delle ascisse. In questo modo, i punti di contatto P, Q, R corrispondenti a A, B, C sono individuati

rispettivamente dagli angoli $\pi, \phi + \pi, \psi - \pi$. Affinché valga il Lemma 1.21, i punti P, Q, R devono formare un triangolo acutangolo, quindi deve essere $0 < \phi < \pi, \pi < \psi < 2\pi$.

Osserviamo però che non tutti questi angoli sono possibili: infatti, poiché una configurazione (ϕ, ψ) sia geometricamente ammissibile, i punti Q e R non possono giacere all'interno delle punte determinate dagli altri punti, né nella regione diametralmente opposta, perché altrimenti si violerebbe la condizione di spessore costante; inoltre le punte non possono intersecarsi. Definiamo quindi l'angolo limite ϕ_0 come

$$\phi_0(r) = \pi - 2 \arctan\left(\frac{r}{\sqrt{1-2r}}\right).$$

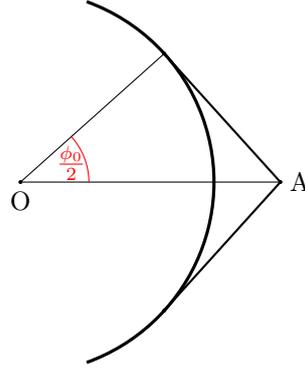


Figura 3.3: L'angolo $\frac{\phi_0}{2}$.

In questo modo, i valori possibili per gli angoli diventano:

$$\phi_0(r) \leq \phi \leq \pi - \frac{\phi_0(r)}{2}, \quad \pi + \frac{\phi_0(r)}{2} \leq \psi \leq \pi + \phi - \frac{\phi_0}{2}.$$

Una volta determinate le condizioni di ammissibilità sugli angoli (ϕ, ψ) , possiamo passare al calcolo numerico della rigidità torsionale, con le *functions* descritte nella Sezione 4.3. Adottiamo un approccio graduale, implementando prima il calcolo per un 1-*r-cap*, poi un 2-*r-cap* e infine per un 3-*r-cap*.

Con la *function* T1cap, possiamo studiare la funzione

$$r \mapsto T(C_1(r)),$$

ottenendo il grafico in Figura 3.4. Osserviamo in particolare che la funzione è crescente.

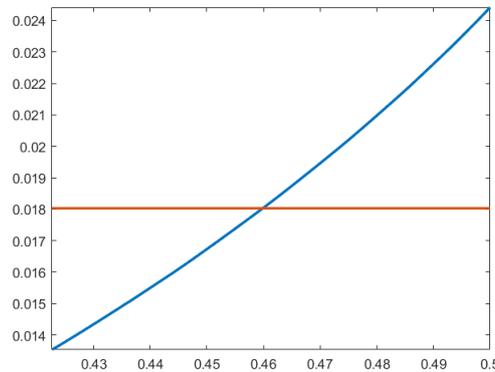


Figura 3.4: Plot della funzione $r \mapsto T(C_1(r))$ e della costante c_0 .

Da questo, otteniamo la stima numerica

$$r_{opt} \leq 0.4593.$$

Passando al caso in un $2-r$ -cap, consideriamo prima ad r fissato la funzione

$$\phi \mapsto T(C_2(r, \phi)).$$

Testando valori diversi di r , emerge come tale funzione sia monotona decrescente, come mostrato in Figura 3.5.

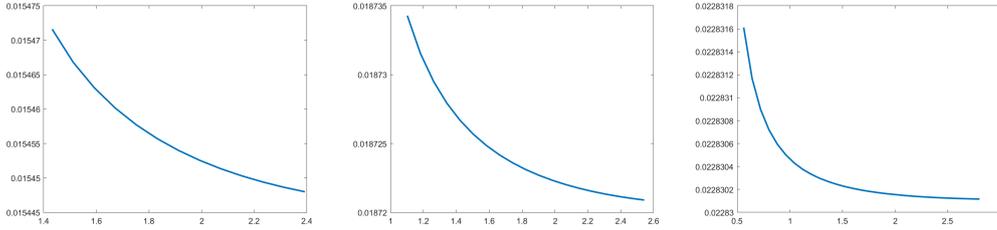


Figura 3.5: Plot della funzione $\phi \mapsto T(C_2(r, \phi))$ per $r = 0.43, 0.46, 0.49$.

Quindi il calcolo numerico suggerisce che

$$\phi_{opt} = \pi - \frac{\phi_0(r)}{2}.$$

A questo punto possiamo studiare la funzione

$$r \mapsto T\left(C_2\left(r, \pi - \frac{\phi_0(r)}{2}\right)\right),$$

che produce il grafico in Figura 3.6.

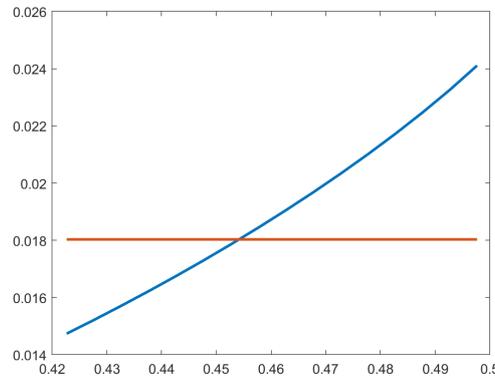


Figura 3.6: Plot della funzione $r \mapsto T(C_2(r, \pi - \phi_0(r)/2))$ e della costante c_0 .

Quindi otteniamo la nuova stima

$$r_{opt} \leq 0.4542.$$

Infine passiamo allo studio di un $3-r$ -cap. Innanzitutto fissiamo due valori di r e ϕ , e studiamo numericamente la funzione

$$\psi \mapsto T(C_3(r, \phi, \psi)).$$

In Figura 3.7 viene riportato il grafico di tale funzione per diversi valori di ψ , con r fissato.

In tutti i casi, la funzione presenta un punto di minimo, che corrisponde numericamente al valore

$$\psi_{opt} = \pi + \frac{\phi}{2},$$

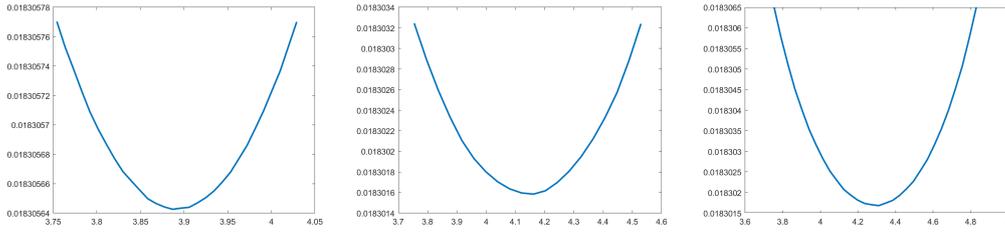


Figura 3.7: Plot della funzione $\psi \mapsto T(C_3(r, \phi, \psi))$ per $r = 0.45$ e $\phi = 1.5, 2, 2.3$.

che vuol dire che il minimo viene raggiunto nella configurazione in cui i punti A e B sono simmetrici rispetto all'asse determinato da C .

Possiamo quindi studiare la funzione

$$\phi \mapsto T\left(C_3\left(r, \phi, \pi + \frac{\phi}{2}\right)\right).$$

Testando con diversi valori di r , otteniamo la Figura 3.8. Da questi grafici emerge come tale funzioni abbia un punto di minimo che corrisponde numericamente al valore

$$\phi_{opt} = \frac{2}{3}\pi.$$

Questo indica che la configurazione ottimale è quella simmetrica, in cui i punti A, B, C sono disposti sui vertici di un triangolo equilatero. Osserviamo in particolare che questa configurazione si ottiene quando il corpo considerato è il triangolo di Reuleaux.

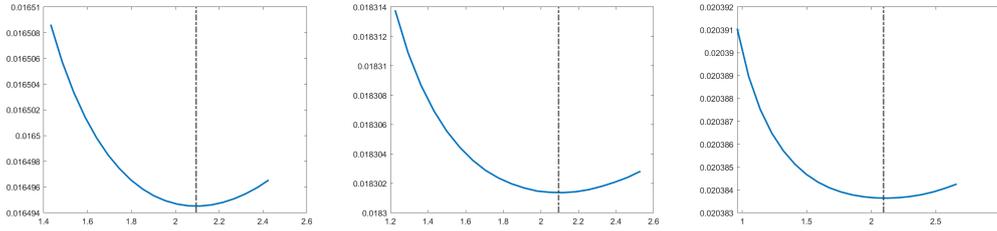


Figura 3.8: Plot della funzione $\phi \mapsto T(C_3(r, \phi, \pi + \phi/2))$ per $r = 0.43, 0.45, 0.47$.

Possiamo quindi passare allo studio della funzione

$$r \mapsto T\left(C_3\left(r, \frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right)\right),$$

producendo il grafico in Figura 3.9.

Da questo, otteniamo infine la stima

$$r_{opt} \leq 0.4471.$$

Osserviamo che queste stime sono particolarmente restrittive: ad esempio, tutti i poligoni regolari di Reuleaux, ad eccezione del triangolo, vengono esclusi.

3.2.3 Possibili strategie e congettura

Un'altra possibile strada percorribile per affrontare il problema consiste nello sfruttare le derivate di forma, uno strumento che permette di studiare il comportamento asintotico della rigidità torsionale quando il dominio subisce delle perturbazioni infinitesime.

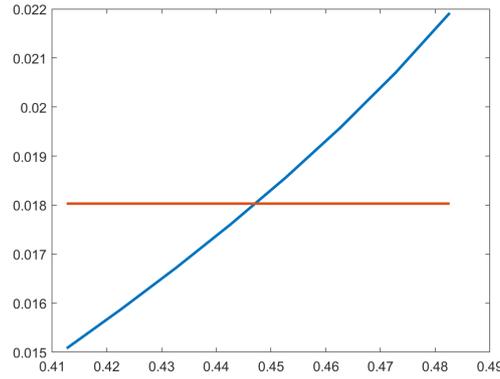


Figura 3.9: Plot della funzione $r \mapsto T(C_3(r, 2/3\pi, 4/3\pi))$ e della costante c_0 .

Definizione 3.4 - Derivata di forma

Sia F un funzionale di forma e sia $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ un campo vettoriale. Indichiamo con $\Omega_\varepsilon := (I + \varepsilon V)(\Omega)$ la perturbazione di Ω in direzione V . La *derivata di forma* di F in direzione V è

$$F'(\Omega, V) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F(\Omega_\varepsilon) - F(\Omega)}{\varepsilon},$$

se tale limite esiste.

In particolare, nel caso della rigidità torsionale, in [HP18, Capitolo 5] viene dimostrato il seguente teorema di struttura sulla derivata di forma.

Teorema 3.5

Dato Ω misurabile, vale

$$T'(\Omega, V) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(|\nabla u|^2 V) dx = \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^2 V \cdot n \, d\mathcal{H}^1,$$

dove la seconda uguaglianza vale se Ω è di classe C^1 .

Inoltre, la condizione di ottimalità di una certa forma nella classe di insiemi ammissibili \mathcal{A} può essere tradotta in termini della derivata di forma. Infatti, se $V \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ è tale che $\Omega_\varepsilon \in \mathcal{A}$ per ogni ε piccolo, allora vale

$$T'(\Omega, V) = 0.$$

Tuttavia, l'utilizzo delle derivate di forma è particolarmente difficile, per diversi motivi: innanzitutto la formula è di difficile estensione a insiemi non regolari, come i poligoni di Reuleaux. Inoltre, è complicato caratterizzare i campi vettoriali V che preservano i vincoli considerati, quindi tali che $(I + \varepsilon V)(\Omega) \in \mathcal{K}_1^2$ o anche \mathcal{R}_N . Infine, la derivata di forma permette di individuare i punti critici di T , ma non di indagarne la natura; per farlo, è necessario ricorrere alla derivata seconda di forma, che presenta una struttura molto più complicata.

Recentemente, G. A. Philippin ha dimostrato in [Phi20] il seguente risultato riguardo l'ottimalità del triangolo di Reuleaux nella classe dei poligoni di Reuleaux regolari. Sottolineiamo che il teorema considera una classe di competitori molto ristretta ed arriva ad una conclusione che avevamo già dedotto dalle stime sull'inradius. Per poter concludere che il minimo è il triangolo di Reuleaux, servirebbe avere maggiori informazioni. Ad esempio, basterebbe dimostrare che, fissato un numero dispari N di lati, l'ottimo tra i poligoni di Reuleaux con al più N lati è il poligono regolare; tuttavia anche questa è solo una congettura.

Teorema 3.6 - Teorema di Philippin

Detto R_{2n+1} il poligono di Reuleaux con $2n+1$ lati e $B_{1/2}$ un disco di raggio $1/2$, vale

$$T(R_3) < T(R_5) < \dots < T(R_{2n+1}) < \dots \nearrow T(B_{1/2}).$$

La dimostrazione del teorema si basa sulle disuguaglianze

$$T(\Omega^*) \geq T(\Omega) \geq T(\widehat{\Omega}),$$

dove Ω^* è una con $|\Omega| = |\Omega^*|$ e $\widehat{\Omega}$ è una palla di raggio $r(\Omega)$. La prima disuguaglianza è la disuguaglianza di Saint-Venant, mentre la seconda segue dalle proprietà di monotonia di T . Sia $\rho(\Omega)$ il raggio della palla Ω^* . Denotando con $\rho_{2n+1} = \rho(R_{2n+1})$ e con $r_{2n+1} = r(R_{2n+1})$, G. A. Philippin mostra che

$$r_{2n+1} \geq \rho_{2n-1}.$$

A questo punto, usando entrambe le disuguaglianze, la tesi segue immediatamente, infatti

$$T(R_{2n-1}) \leq T(R_{2n-1}^*) \leq T(\widehat{R}_{2n+1}) \leq T(R_{2n+1}).$$

Tutti questi risultati, insieme alla sperimentazione numerica, come mostrata nel Capitolo 4, sostengono la congettura che il minimo della rigidità torsionale sia il triangolo di Reuleaux.

Ottimizzazione numerica

In questo capitolo, illustriamo le proprietà della funzione di supporto di un corpo convesso nel piano; in particolare, consideriamo la sua serie troncata di Fourier, in modo da ridurci ad uno spazio finito-dimensionale in cui ambientare l'ottimizzazione numerica.

Dopodiché riportiamo i codici MATLAB utilizzati per calcolare numericamente la rigidità torsionale, illustrando i metodi impiegati da MATLAB per risolvere tali problemi. Infine riportiamo i codici per il calcolo della rigidità torsionale di un 3-*r*-cap, utilizzati per determinare le stime nella Sezione 3.2.2.

4.1 Funzioni di supporto nel piano

Consideriamo lo spazio \mathcal{K}^2 . Identificando \mathbb{S}^1 con $[0, 2\pi]$, possiamo scrivere la restrizione a \mathbb{S}^1 di una funzione di supporto h_K come

$$p_K(\theta) := h_K(\nu(\theta)), \quad \text{con } \nu(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Osserviamo che una funzione di supporto h_K è completamente determinata dai suoi valori su \mathbb{S}^1 , ossia da p_K : questo segue dal fatto che h_K è 1-omogenea. Nel seguito, quando chiaro dal contesto, indicheremo p_K con p .

La restrizione p a \mathbb{S}^1 della funzione di supporto di un corpo K ha due vantaggi fondamentali: innanzitutto fornisce una parametrizzazione del bordo ∂K , data da

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta), \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta). \end{cases}$$

Inoltre, permette di caratterizzare la convessità tramite la relazione $p + p'' \geq 0$ nel senso delle distribuzioni, ossia

$$\int_0^{2\pi} (p + p'')\varphi \, d\theta \geq 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty([0, 2\pi]), \quad \varphi \geq 0.$$

Infatti, se $K \in \mathcal{K}^2$ è strettamente convesso, esiste un unico punto di contatto in $K \cap H_{\nu(\theta)}$, che denotiamo $X(\theta) := (x(\theta), y(\theta))$. L'insieme $\{\nu(\theta), \nu^\perp(\theta)\}$ è una base ortonormale di \mathbb{R}^2 , dove ν^\perp è la rotazione di $\frac{\pi}{2}$ in senso antiorario di ν , ossia $\nu^\perp = (-\nu_2, \nu_1)$. Quindi possiamo scrivere:

$$X(\theta) = a(\theta)\nu(\theta) + b(\theta)\nu^\perp(\theta),$$

per certi a, b . Per costruzione, abbiamo

$$a(\theta) = X(\theta) \cdot \nu(\theta) = p(\theta).$$

Utilizzando il fatto che nel punto di bordo $X(\theta)$ la normale è ν , e osservando che $\nu' = \nu^\perp$ e $(\nu^\perp)' = -\nu$, otteniamo anche che

$$0 = X'(\theta) \cdot \nu(\theta) = -b(\theta) + p'(\theta),$$

quindi $b(\theta) = p'(\theta)$. In conclusione, ∂K è parametrizzato da

$$X(\theta) = p(\theta)\nu(\theta) + p'(\theta)\nu^\perp(\theta) \iff \begin{cases} x(\theta) = p(\theta)\cos(\theta) - p'(\theta)\sin(\theta), \\ y(\theta) = p(\theta)\sin(\theta) + p'(\theta)\cos(\theta). \end{cases}$$

Per quanto riguarda la convessità, se K è di classe C^2 con curvatura gaussiana strettamente positiva e h è di classe C^2 , la curvatura κ di ∂K è data da

$$\nu'(\theta) = \kappa(\theta)X'(\theta).$$

Nel nostro caso, poiché $X' = (p + p'')\nu^\perp$, abbiamo

$$\kappa > 0 \implies p(\theta) + p''(\theta) > 0 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Concludiamo la sezione osservando che possiamo identificare la funzione p_K , che è 2π -periodica, con la sua lista di coefficienti di Fourier $\{a_k, b_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ attraverso lo sviluppo

$$p_K(\theta) = a_0 + \sum_{k \geq 1} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta).$$

Nell'ambito dell'ottimizzazione numerica, è utile considerare la sottoclasse finito-dimensionale dei corpi convessi costituita dai corpi associati ad una serie di Fourier con un numero finito di coefficienti non nulli. Definiamo quindi:

$$\mathcal{F}_N := \{p : p \text{ è una funzione di supporto di un corpo convesso, } a_k = b_k = 0 \ \forall k \geq N\}.$$

Chiaramente $\mathcal{F}_N \subset \mathcal{F}$, dove \mathcal{F} è l'insieme delle funzioni di supporto di un corpo convesso.

Valgono i seguenti risultati, che giustificano la riduzione alle serie troncate di Fourier.

Lemma 4.1

\mathcal{F}_N è chiusa in \mathcal{F} rispetto alla norma del sup.

Dimostrazione. Sia $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_N$ con $p_m \xrightarrow{L^\infty(\mathbb{S}^1)} p$ per $m \rightarrow \infty$. Per la Proposizione 1.15 e la corrispondenza tra funzioni di supporto e corpi convessi, abbiamo $p \in \mathcal{F}$. Indichiamo con $\{a_k^{(m)}, b_k^{(m)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ e $\{\alpha_k, \beta_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ i coefficienti di Fourier di p_m e p , rispettivamente. Vogliamo mostrare che

$$p = \alpha_0 + \sum_{k=1}^N \alpha_k \cos(k\theta) + \beta_k \sin(k\theta).$$

Osserviamo innanzitutto che per ogni $k, m \in \mathbb{N}$

$$\int_0^{2\pi} (p_m - p) \sin(k\theta) d\theta = c(b_k^{(m)} - \beta_k), \quad \int_0^{2\pi} (p_m - p) \cos(k\theta) d\theta = c(a_k^{(m)} - \alpha_k),$$

dove c è una costante positiva universale (indipendente da k e m).

Ora, poiché $\|p_m - p\|_{L^\infty(\mathbb{S}^1)} \rightarrow 0$, anche $\|p_m - p\|_{L^2(\mathbb{S}^1)} \rightarrow 0$; quindi

$$\left| \int_0^{2\pi} (p_m - p) \sin(k\theta) d\theta \right| \leq \int_0^{2\pi} |p_m - p| |\sin(k\theta)| d\theta \rightarrow 0$$

per la disuguaglianza di Hölder. Analogamente vale con il coseno.

Dato che $a_k^{(m)} = b_k^{(m)} = 0$ per ogni $k \geq N$, per ogni $m \in \mathbb{N}$, otteniamo che

$$\alpha_k = \beta_k = 0 \quad \text{per ogni } k \geq N,$$

ossia $p \in \mathcal{F}_N$. □

Lemma 4.2

I corpi convessi associati ad un elemento di \mathcal{F}_N per qualche N sono densi nella classe dei corpi convessi.

Dimostrazione. La tesi segue dalla convergenza uniforme delle troncate della serie di Fourier di una funzione di supporto; questo fatto vale perché gli elementi di \mathcal{F}_N sono funzioni Lipschitziane. \square

Lavorando con corpi convessi sotto vincoli geometrici, per applicare correttamente l'approssimazione con la serie troncata di Fourier, è importante controllare che la troncatura preservi i vincoli.

In particolare, il vincolo di larghezza costante uguale a 1

$$h_K(\nu) + h_K(-\nu) \equiv 1 \quad \forall \nu \in \mathbb{S}^1$$

si traduce in

$$p_K(\theta) + p_K(\theta + \pi) \equiv 1 \quad \forall \theta \in [0, 2\pi].$$

Quindi, per corpi di larghezza costante w , i coefficienti con indice pari nello sviluppo in serie sono nulli e $2a_0 = w$.

Osservazione 4.1

Osserviamo come, grazie allo sviluppo in serie di Fourier della funzione di supporto, si possano dedurre molte proprietà sui corpi convessi associati. Ad esempio, è possibile dimostrare il Teorema di Barbier 3.3, enunciato nel Capitolo 3.

Infatti, riprendendo la notazione utilizzata ad inizio sezione per la parametrizzazione $\theta \mapsto X(\theta)$ di ∂K in termini della funzione di supporto, vale

$$P(K) = \int_0^{2\pi} \|X'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} |p(\theta) + p''(\theta)| d\theta = \int_0^{2\pi} (p(\theta) + p''(\theta)) d\theta = \int_0^{2\pi} p(\theta) d\theta = 2\pi a_0.$$

4.2 Implementazione in MATLAB

Per implementare la ricerca del minimo della rigidità torsionale in MATLAB, consideriamo corpi convessi la cui serie di Fourier ha un numero finito di coefficienti non nulli. Assoceremo a tali corpi il vettore dei loro coefficienti di Fourier.

La prima *function* realizzata, dato un vettore F , considera una discretizzazione di $[0, 2\pi]$ data da $\theta_m = 2\pi \frac{m}{M}$, per $m = 1, \dots, M$, e valuta in tali punti la parametrizzazione del bordo del corpo associato a F

$$\begin{cases} x(\theta) = p(\theta) \cos(\theta) - p'(\theta) \sin(\theta) \\ y(\theta) = p(\theta) \sin(\theta) + p'(\theta) \cos(\theta) \end{cases},$$

per poi disegnare tale corpo.

```
function [Xf,Yf] = draw(F)
    N=(length(F)-1)/2; %numero di coefficienti di Fourier dispari
    M=1000;
    theta=linspace(0,2*pi, M);
    X=zeros(M,1);
    Y=zeros(M,1);

    function [w]=h(x)
        w=F(1);
        for i=1:N
            w=w+F(1+i)*cos(i*x)+F(1+i+N)*sin(i*x);
        end
    end

    function [z]=dh(x)
```

```

        z=0;
        for i=1:N
            z=z-F(1+i)*i*sin(i*x)+F(1+i+N)*i*cos(i*x);
        end
    end

    for j=1:M
        X(j)=h(theta(j))*cos(theta(j))-dh(theta(j))*sin(theta(j));
        Y(j)=h(theta(j))*sin(theta(j))+dh(theta(j))*cos(theta(j));
    end

    k=convhull(X,Y);
    X=X(k);
    Y=Y(k);

    Xf(1,1)=X(1);
    Yf(1,1)=Y(1);
    counter=1;

    for i=2:M
        counter=counter+1;
        if abs(X(i)-X(i-1))<1e-03 && abs(Y(i)-Y(i-1))<1e-03
            counter=counter-1;
        else
            Xf(counter,1)=X(i);
            Yf(counter,1)=Y(i);
        end
    end

    if abs(Xf(counter)-Xf(1))<1e-03 && abs(Yf(counter)-Yf(1))<1e-03
        Xf=Xf(2:counter,1);
        Yf=Yf(2:counter,1);
    end

    plot(Xf,Yf)
    axis equal
end

```

Dopodiché, è necessario implementare una *function* che, dato un vettore F , calcoli la rigidità torsionale del corpo associato al vettore F .

Per farlo, si utilizza il pacchetto *Partial Differential Equation Toolbox* di MATLAB, che permette di risolvere numericamente equazioni differenziali della forma

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + d \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (c \nabla u) + au = f$$

utilizzando il *metodo degli elementi finiti (FEM)*. Per l'equazione differenziale in esame, considereremo $m = d = a = 0$ e $c = f = 1$.

Il metodo degli elementi finiti prevede di discretizzare il dominio considerato in una griglia (*mesh*) di *elementi finiti* di forma codificata; nel nostro caso, si tratta di una triangolazione del dominio. In seguito, si considera uno spazio di funzioni finito-dimensionale (la cui base è data dalle *funzioni di base* o *funzioni di forma*), come ad esempio lo spazio delle funzioni affini a tratti su ciascun elemento della griglia, e si assume che la soluzione dell'equazione sia esprimibile come combinazione lineare delle funzioni di base. Infine, tramite la formulazione debole dell'equazione, la si riconduce ad un'equazione algebrica.

Nel caso della rigidità torsionale, la formulazione debole dell'equazione è

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_{\Omega} v \, dx$$

per ogni funzione test $v \in C_c^\infty(\Omega)$. Quindi, dette $\{\varphi_i\}$ le funzioni di base, assumiamo $u = \sum \alpha_j \varphi_j$ con α_j incognite. Ora testiamo con $v = \varphi_i$ per ogni i :

$$\sum_j \alpha_j \int_{\Omega} \nabla \varphi_j \cdot \nabla \varphi_i \, dx = \int_{\Omega} \varphi_i \, dx,$$

ossia

$$\sum_j \langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle_{L^2} \alpha_j = \int_{\Omega} \varphi_i \, dx.$$

Quindi, detti

$$M = (\langle \nabla \varphi_i, \nabla \varphi_j \rangle_{L^2})_{i,j} \quad \text{e} \quad \underline{w} = \left(\int_{\Omega} \varphi_i \, dx \right)_i,$$

il problema si riscrive come

$$M \underline{\alpha} = \underline{w}.$$

Abbiamo quindi ricondotto l'equazione differenziale ad un sistema lineare, che può essere risolto numericamente in diversi modi.

La funzione `solvepde` restituisce il valore della soluzione u nei nodi della triangolazione; per poter calcolare l'integrale sul dominio della soluzione, si è approssimata quest'ultima con una funzione costante su ciascun elemento della discretizzazione, il cui valore è dato dalla media dei valori nei nodi corrispondenti. Si è poi integrata questa approssimazione per ottenere la rigidità torsionale approssimata del corpo.

```
function [rt] = T(F)
    %N=(length(F)-1)/2;
    [X,Y]=draw(F);

    dg=[2; length(X); X; Y];
    dl=decsd(dg);

    model = createpde();
    geometryFromEdges(model,dl);
    applyBoundaryCondition(model,"dirichlet","Edge", 1:length(X),"u",0);
    specifyCoefficients(model,"m",0,"d",0,"c",1,"a",0,"f",1);
    mesh=generateMesh(model, Hmax=0.05, Hmin=0.00005,
        GeometricOrder='linear');
    [p,~,t] = meshToPet(mesh);
    u=solvepde(model);

    rt=0;
    k=length(t(1,:));
    for j=1:k
        A=p(:,t(1,j));
        B=p(:,t(2,j));
        C=p(:,t(3,j));
        M=[A(1),A(2),1; B(1),B(2),1; C(1),C(2),1];
        rt=rt+1/2*(u.NodalSolution(t(1,j))+u.NodalSolution(t(2,j))+
            u.NodalSolution(t(3,j)))/3 * abs(det(M));
    end
end
```

Infine, per determinare il minimo del funzionale T nella classe \mathcal{A} , si implementa una *function* che utilizza la routine MATLAB `fmincon`. Tale funzione permette di trovare il minimo di un funzionale sotto vincoli lineari; la sua sintassi infatti è

$$\text{fmincon}(\text{fun}, x_0, A, b, A_{eq}, b_{eq}, lb, ub, \text{nonlcon}, \text{options}),$$


```

Aeq=zeros(2*N+1,2*N+1);
for i=0:N
    Aeq(2*i+1,2*i+1)=1;
end

x0=zeros(2*N+1,1)+0.001;
x0(1)=1/2;

options=optimoptions("fmincon","Display","iter", "Algorithm","
    interior-point");
[f]=fmincon(@T,x0,A,b,Aeq,beq,[],[],[],options);
end

```

Attraverso la sperimentazione numerica con $\min T$, inseriamo un valore arbitrario (dispari) di N ed effettuiamo la routine di minimizzazione con $fmincon$, dove il dato iniziale è una piccola perturbazione della circonferenza di raggio $\frac{1}{2}$. Il risultato dell'ottimizzazione è il triangolo di Reuleaux, come riportato in Figura 4.1. Questo conferma numericamente la congettura enunciata nel Capitolo 3.

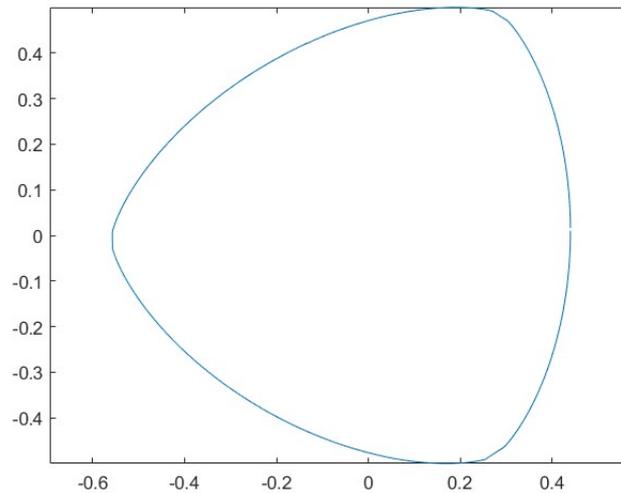


Figura 4.1: Risultato della simulazione numerica: il triangolo di Reuleaux.

4.3 Calcolo della rigidità torsionale di un 3-r-cap

In questa sezione, riportiamo i codici utilizzati per calcolare numericamente la rigidità torsionale di un 1- r -cap, un 2- r -cap e un 3- r -cap. Osserviamo che, in questi casi, la routine $fmincon$ non produce un risultato ammissibile; questo probabilmente è dovuto alla scelta dei parametri di tolleranza nella distanza tra i punti del bordo del corpo e nella triangolazione del dominio.

Riportiamo innanzitutto il codice per il calcolo della rigidità torsionale di un 1- r -cap.

```

function [rt]=T1cap(r)
    theta=(0:0.1:2*pi)';
    x1=r*cos(theta);
    y1=r*sin(theta);
    x2=1-r;
    y2=0;
    x=[x1; x2];
    y=[y1; y2];

```

```

k=convhull(x,y);
X=x(k);
Y=y(k);

Xf(1,1)=X(1);
Yf(1,1)=Y(1);
counter=1;

for i=2:length(X)
    counter=counter+1;
    if abs(X(i)-X(i-1))<1e-05 && abs(Y(i)-Y(i-1))<1e-05
        counter=counter-1;
    else
        Xf(counter,1)=X(i);
        Yf(counter,1)=Y(i);
    end
end

if abs(Xf(counter)-Xf(1))<1e-05 && abs(Yf(counter)-Yf(1))<1e-05
    Xf=Xf(2:counter,1);
    Yf=Yf(2:counter,1);
end
X=Xf;
Y=Yf;

dg=[2; length(X); X; Y];
dl=decsd(dg);

model = createpde();
geometryFromEdges(model,dl);
applyBoundaryCondition(model,"dirichlet","Edge", 1:(length(X)-1),"u",0);
specifyCoefficients(model,"m",0,"d",0,"c",1,"a",0,"f",1);
mesh=generateMesh(model, Hmax=0.05, Hmin=0.00005,
    GeometricOrder='linear');
[p,~,t] = meshToPet(mesh);
u=solvepde(model);

rt=0;
k=length(t(1,:));
for j=1:k
    A=p(:,t(1,j));
    B=p(:,t(2,j));
    C=p(:,t(3,j));
    M=[A(1),A(2),1; B(1),B(2),1; C(1),C(2),1];
    rt=rt+1/2*(u.NodalSolution(t(1,j))+u.NodalSolution(t(2,j))+
        u.NodalSolution(t(3,j)))/3 * abs(det(M));
end
end

```

Segue il codice per il calcolo della rigidità torsionale di un 2-r-cap.

```

function [rt]=T2cap(r,phi)
theta=(0:0.01:2*pi)';
x1=r*cos(theta);
y1=r*sin(theta);
x2=(1-r)*[1; cos(phi)];

```

```

y2=[0; (1-r)*sin(phi)];
x=[x1; x2];
y=[y1; y2];
k=convhull(x,y);
X=x(k);
Y=y(k);

Xf(1,1)=X(1);
Yf(1,1)=Y(1);
counter=1;

for i=2:length(X)
    counter=counter+1;
    if abs(X(i)-X(i-1))<1e-05 && abs(Y(i)-Y(i-1))<1e-05
        counter=counter-1;
    else
        Xf(counter,1)=X(i);
        Yf(counter,1)=Y(i);
    end
end

if abs(Xf(counter)-Xf(1))<1e-05 && abs(Yf(counter)-Yf(1))<1e-05
    Xf=Xf(2:counter,1);
    Yf=Yf(2:counter,1);
end
X=Xf;
Y=Yf;

%plot(X,Y,'-')
%axis equal
dg=[2; length(X); X; Y];
dl=decsg(dg);
%pdegplot(dl,"EdgeLabels","on","FaceLabels","on")

model = createpde();
geometryFromEdges(model,dl);
applyBoundaryCondition(model,"dirichlet","Edge", 1:(length(X)-1),"u",0);
specifyCoefficients(model,"m",0,"d",0,"c",1,"a",0,"f",1);
mesh=generateMesh(model, Hmax=0.003, Hmin=0.00005,
    GeometricOrder='linear');
%pdeplot(mesh)
[p,~,t] = meshToPet(mesh);
u=solvepde(model);

rt=0;
l=length(t(1,:));
for j=1:l
    A=p(:,t(1,j));
    B=p(:,t(2,j));
    C=p(:,t(3,j));
    M=[A(1),A(2),1; B(1),B(2),1; C(1),C(2),1];
    rt=rt+1/2*(u.NodalSolution(t(1,j))+u.NodalSolution(t(2,j))+
        u.NodalSolution(t(3,j)))/3 * abs(det(M));
end
end

```

Riportiamo infine il codice per il calcolo della rigidità torsionale di un 3-r-cap.

```
function [rt]=T3cap(r, a, b)
    psi=[a;b];
    theta=(0:0.005:2*pi)';
    x1=r*cos(theta);
    y1=r*sin(theta);
    x2=(1-r)*[1; cos(psi(1))];
    y2=[0; (1-r)*sin(psi(1))];
    x3=(1-r)*cos(psi(2));
    y3=(1-r)*sin(psi(2));
    x=[x1; x2; x3];
    y=[y1; y2; y3];
    k=convhull(x,y);
    X=x(k);
    Y=y(k);

    Xf(1,1)=X(1);
    Yf(1,1)=Y(1);
    counter=1;

    for i=2:length(X)
        counter=counter+1;
        if abs(X(i)-X(i-1))<1e-05 && abs(Y(i)-Y(i-1))<1e-05
            counter=counter-1;
        else
            Xf(counter,1)=X(i);
            Yf(counter,1)=Y(i);
        end
    end

    if abs(Xf(counter)-Xf(1))<1e-05 && abs(Yf(counter)-Yf(1))<1e-05
        Xf=Xf(2:counter,1);
        Yf=Yf(2:counter,1);
    end
    X=Xf;
    Y=Yf;

    %plot(X,Y,'-')
    %axis equal
    dg=[2; length(X); X; Y];
    dl=decsg(dg);
    %pdegplot(dl,"EdgeLabels","on","FaceLabels","on")

    model = createpde();
    geometryFromEdges(model,dl);
    applyBoundaryCondition(model,"dirichlet","Edge", 1:(length(X))
        ,"u",0);
    specifyCoefficients(model,"m",0,"d",0,"c",1,"a",0,"f",1);
    mesh=generateMesh(model, Hmax=0.004, Hmin=0.00005,
        GeometricOrder='linear');
    [p,~,t] = meshToPet(mesh);
    u=solvepde(model);

    rt=0;
    l=length(t(1,:));
    for j=1:l
```

```
A=p(:,t(1,j));
B=p(:,t(2,j));
C=p(:,t(3,j));
M=[A(1),A(2),1; B(1),B(2),1; C(1),C(2),1];
rt=rt+1/2*(u.NodalSolution(t(1,j))+u.NodalSolution(t(2,j))+
u.NodalSolution(t(3,j)))/3 * abs(det(M));
end
end
```


Capitolo 5

Possibili estensioni

In questo capitolo illustriamo un problema di ottimizzazione di forma collegato a quello studiato finora per metterne in luce le analogie e cercare di generalizzare la congettura di ottimalità del triangolo di Reuleaux.

5.1 Primo autovalore del Laplaciano

Un problema strettamente legato alla minimizzazione della rigidità torsionale è la massimizzazione del primo autovalore del Laplaciano, λ_1 .

Definizione 5.1 - $\lambda_1(\Omega)$

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, si definisce il *primo autovalore del Laplaciano* di Ω , $\lambda_1(\Omega)$, come la più piccola costante $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che l'equazione differenziale

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{in } \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

abbia soluzione.

Analogamente alla rigidità torsionale, anche λ_1 ammette una formulazione variazionale:

$$\lambda_1(\Omega) = \min_{u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\Omega} u^2 dx}.$$

In corrispondenza della disuguaglianza di Saint-Venant, vi è la seguente disuguaglianza, grazie alla quale si riesce a mostrare che λ_1 è minimizzato dalla palla nella classe \mathcal{K}_w^n .

Teorema 5.2 - Disuguaglianza di Faber-Krahn

Sia $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un aperto limitato e sia $B \subset \mathbb{R}^n$ una palla. Allora

$$\lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(B) \quad \text{se } |\Omega| = |B|,$$

o, equivalentemente,

$$|\Omega|^{\frac{2}{n}} \lambda_1(\Omega) \geq |B|^{\frac{2}{n}} \lambda_1(B).$$

Inoltre, l'uguaglianza è ottenuta se e solo se $\Omega = B$.

Questi fatti fanno intuire un certo legame tra T e λ_1 ; anzi sembrano suggerire che, in qualche senso, T si comporti come $1/\lambda_1$.

In realtà, sia la rigidità torsionale che il primo autovalore del Laplaciano possono essere inseriti in un quadro più generale, grazie alla seguente definizione.

Definizione 5.3 - $\lambda_{p,q}(\Omega)$

Dato $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto limitato, si definisce

$$\lambda_{p,q}(\Omega) = \min_{u \in W_0^{1,p}(\Omega) \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx}{\left(\int_{\Omega} |u|^q \, dx\right)^{\frac{p}{q}}},$$

dove $1 < p < \infty$ e q è tale che

$$\begin{cases} 1 < q < \frac{np}{n-p} & \text{se } 1 < p < n, \\ 1 < q < \infty & \text{se } p \geq n. \end{cases}$$

Grazie alle immersioni di Sobolev $W^{1,p} \hookrightarrow L^q$, il funzionale sopra è ben definito.

Si può mostrare che un minimo di tale rapporto è anche soluzione di

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda_{p,q}(\Omega) \|u\|_{L^q(\Omega)}^{p-q} |u|^{q-2} u & \text{in } \Omega, \\ u \in W_0^{1,p}(\Omega), \end{cases}$$

dove Δ_p è il p -Laplaciano, definito come

$$\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

La scelta di parametri $(p, q) = (2, 2)$ corrisponde a λ_1 , mentre la scelta $(p, q) = (2, 1)$ al reciproco della rigidità torsionale:

$$\lambda_{2,2} = \lambda_1, \quad \lambda_{2,1} = \frac{1}{T}.$$

Possiamo quindi formulare una congettura più generale:

Congettura: *Il triangolo di Reuleaux massimizza $\lambda_{p,q}$ nella classe di corpi di larghezza costante fissata.*

La dimostrazione della congettura è una sfida che rimane aperta.

Bibliografia

- [AB22] Pedro R.S. Antunes and Benjamin Bogosel. Parametric shape optimization using the support function. *Computational Optimization and Applications*, 82:107–138, 2022.
- [BB05] Dorin Bucur and Giuseppe Buttazzo. *Variational Methods in Shape Optimization Problems*. Birkhäuser, 2005.
- [BHL18] Benjamin Bogosel, Antoine Henrot, and Ilaria Lucardesi. Minimization of the eigenvalues of the dirichlet-laplacian with a diameter constraint. *SIAM J. Math. Anal.*, 50(5):5337–5361, 2018.
- [CG83] Gulbank D. Chakerian and Helmut Groemer. *Convex Bodies of Constant Width. Convexity and Its Applications*. Birkhäuser, 1983.
- [HL21] Antoine Henrot and Ilaria Lucardesi. Body of constant width with minimal area in a given annulus, 2021.
- [HP18] Antoine Henrot and Michel Pierre. *Shape Variation and Optimization: A Geometrical Analysis*, volume 28 of *Tracts in Mathematics*. European Mathematical Society, 2018.
- [KM00] Yaakov S. Kupitz and Horst Martini. On the isoperimetric inequalities for reuleaux polygons. *Journal of Geometry*, 68:171–191, 2000.
- [KMW96] Yaakov S. Kupitz, Horst Martini, and Bernd Wegner. A linear-time construction of reuleaux polygons. *Contributions to Algebra and Geometry*, 37(2):415–427, 1996.
- [Lay82] Steven R. Lay. *Convex Sets and Their Applications*. Pure & Applied Mathematics. Wiley, 1 edition, 1982.
- [MMO19] Horst Martini, Luis Montejano, and Déborah Oliveros. *Bodies of Constant Width: An Introduction to Convex Geometry with Applications*. Birkhäuser, 2019.
- [Phi20] Gérard A. Philippin. On the eigenvalues and the torsional rigidities of regular reuleaux polygons. *Results in Mathematics*, 75(78), 2020.
- [PS51] György Pólya and Gabor Szegő. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*, volume 27 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, 1951.
- [P648] György Pólya. Torsional rigidity, principal frequency, electrostatic capacity and symmetrization. *Quart. Appl. Math.*, 6(3):267–277, 1948.
- [P660] György Pólya. Two more inequalities between physical and geometrical quantities. *J. Indian Math. Soc.*, 24(3-4):413–419, 1960.
- [Sch13] Rolf Schneider. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory, 2nd expanded edition*. Cambridge University Press, 2013.
- [YB61] I. M. Yaglom and V. G. Boltyanskii. *Convex Figures*. Mir Publishers, 1961.

Ringraziamenti

Quest'ultima pagina è dedicata a tutte le persone che, in un modo o nell'altro, mi hanno sostenuto in questi anni: se sono qui, è anche grazie a voi.

Innanzitutto voglio ringraziare la professoressa Ilaria Lucardesi, che mi ha guidato nella realizzazione di questa tesi. Oltre ad essere stata un riferimento accademico, in questi mesi ha rappresentato per me una presenza costante, capace di creare un clima di fiducia e scambio, che ha reso questa esperienza ancora più significativa.

Un importante ringraziamento va alla mia famiglia, che per me ha rappresentato un punto di riferimento in tutti questi anni. In particolare, voglio ringraziare mia mamma: con la tua forza, rappresenti per me un esempio da seguire ogni giorno. Grazie anche a chi purtroppo non ha potuto accompagnarmi fino a qui: grazie Lucio, Adele, Nullo.

Questi tre anni a Pisa sicuramente non sarebbero stati la stessa cosa se non fosse per tutte le persone che, da vicino o da lontano, mi sono sempre rimaste accanto.

Grazie agli amici dell'università: mi avete fatto sentire a casa anche a Pisa (anche se avete delle pronunce strane). In realtà, le cose per cui vorrei ringraziarvi sono tante, quindi farò così: ve lo scrivo a voce.

Grazie agli amici dello studentato, che avete condiviso con me i miei primi due anni qui.

Grazie agli amici di pallavolo, che mi avete accolto anche se non sapevo (e tuttora non so) fare la rincorsa.

Grazie agli amici del liceo: anche se lontani, ho sempre sentito la vostra presenza e il vostro sostegno.

Grazie agli amici del mio oratorio, che avete sempre creduto in me.