Dim. di Nullstellensatz:

equivalenza di (1), (2), (3).

(3) $\Rightarrow$ (2) $P=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{A}^n$,

$$v_P:\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\longrightarrow\mathbb{K}$$
$$f\longmapsto f(P)$$

$I(P)=\operatorname{Ker} v_P \Rightarrow \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/I(P)\cong\mathbb{K}\Rightarrow$
$\Rightarrow I(P)$ massimale. $I(P)=(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)$.

J massimale $\underset{(3)}{\Rightarrow} I(V(J))=J\Rightarrow V(J)\neq\emptyset\Rightarrow\exists P\in V(J)\Rightarrow$
$\Rightarrow J\subseteq I(P)$, quindi $J=I(P)$ per massimalità.

(2) $\Rightarrow$ (1) Sia J t.c. $V(J)=\emptyset$. Se $1\notin J$, $\exists M\supseteq J$ ideale massimale, ma per (2) $M=I(P)$, $P\in\mathbb{A}^n\Rightarrow P\in V(J)$, assurdo.

(1) $\Rightarrow$ (3) $\sqrt{J}\subseteq I(V(J))$ sempre. Facciamo l'altra inclusione.
Scrivo $J=(g_1,\dots,g_m)$. Sia $f\in I(V(J))$.
$\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n,y]\supseteq\tilde{J}=(g_1,\dots,g_m,yf-1)$.
$V(\tilde{J})=\emptyset\underset{(1)}{\Rightarrow}1\in\tilde{J}\Rightarrow$ posso scrivere $1=\sum_{i=1}^m\alpha_i(x,y)g_i(x)+\beta(x,y)(yf-1)$.
Sostituisco $y=1/f\Rightarrow 1=\sum_{i=1}^m\alpha_i(x,1/f)g_i(x)$. Se $l\gg0$,
$f^l=\sum_{i=1}^m\tilde{\alpha}_i(x)g_i(x)$, $\tilde{\alpha}_i(x)\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\Rightarrow f\in\sqrt{J}$.

Fatto fondamentale (no dim.): $\mathbb{K}$ campo, A $\mathbb{K}$-algebra finitamente generata. A campo $\Rightarrow$ è un'estensione algebrica di $\mathbb{K}$.

Mostriamo (2). J massimale, $A:=\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]/J$ è una $\mathbb{K}$-algebra finit. generata, e campo perché ho quozientato per un ideale massimale $\Rightarrow$ è estensione algebrica di $\mathbb{K}$;
ma $\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}\Rightarrow A=\mathbb{K}$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K}[x_1,\dots,x_n] \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr] & \mathbb{K} \\ & A \arrow[u, "\wr"] \end{tikzcd}$$

$\varphi(x_i)=a_i\in\mathbb{K}$, $i=1,\dots,n\Rightarrow$
$\Rightarrow J\supseteq(x_1-a_1,\dots,x_n-a_n)=I(P)$,
$P=(a_1,\dots,a_n)\Rightarrow J=I(P)$ per massimalità. □

$\mathbb{K}=\overline{\mathbb{K}}$

$$\begin{array}{ccc}
\{X\subseteq\mathbb{A}^n \mid \text{chiuso}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{J\subseteq\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]\mid J=\sqrt{J}\} \\
\cup\!\text{I} & & \\
\{X \text{ irr.}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{J\mid J \text{ primo}\} \\
\cup\!\text{I} & & \\
\{\text{pti}\} & \xleftrightarrow{1:1} & \{I \text{ massimale}\}
\end{array}$$

In $\mathbb{P}^n$: $\{Y\subseteq\mathbb{P}^n \text{ chiuso}\}\xleftrightarrow{1:1}\{\underset{0}{\overset{\vee}{X}} \text{ cono alg. in } \mathbb{A}^{n+1}\}$

$$\updownarrow 1:1$$

$$\left\{J\subseteq\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n] \;\middle|\; \begin{array}{l} J \text{ omogeneo,} \\ J=\sqrt{J}, \\ J\subseteq(x_0,\dots,x_n)\end{array}\right\}$$

$(x_0,\dots,x_n)=:J_0$ è l'ideale irrilevante.

NSS debole nel caso di $\mathbb{P}^n$: J omogeneo $\subseteq\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$,
$V_{\mathbb{P}}(J)=\emptyset\Rightarrow\sqrt{J}\supseteq J_0$.

$X=V(f)\subseteq\mathbb{A}^n$, $f\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.
$J=(f)$, $I(V(J))=\sqrt{J}$. Fattorizzo $f=P_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot P_k^{\alpha_k}$, P_i irr. distinti, $\alpha_i>0$.
$\sqrt{(f)}=(P_1P_2\cdot\ldots\cdot P_k)$. $V(f)=V(P_1\cdot\ldots\cdot P_k)=V(P_1)\cup\ldots\cup V(P_k)$ è la decomposizione irr. minimale. Infatti, $I(V(P_i))=\sqrt{(P_i)}=(P_i)$ ideale primo $\Rightarrow V(P_i)$ irr.. Inoltre, se $V(P_i)\subseteq V(P_j)$, allora
$(P_i)\supseteq(P_j)\Rightarrow P_i\mid P_j\Rightarrow P_i=P_j$.

Sia $Y=V(F)\subseteq\mathbb{P}^n$, $F\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]_d$. Fattorizzo
$F=P_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot P_k^{\alpha_k}$, $\alpha_i>0$, P_i irr., distinti e omogenei.
$V(F)=V(P_1)\cup\ldots\cup V(P_k)$ è la decomposizione minimale in irr..
$CY=V_{\mathbb{A}}(F)\subseteq\mathbb{A}^{n+1}$, $CY=V_{\mathbb{A}}(P_1)\cup\ldots\cup V_{\mathbb{A}}(P_k)$ è la decom. minim., perciò induce decom. minim. di Y ($V_{\mathbb{A}}(P_i)$ è un cono $\forall i$).

$X=V(f)\subseteq\mathbb{A}^n$, f libero da quadrati. $I(X)=(f)$, $F=H(f)\in\mathbb{K}[x_0,\dots,x_n]$.
In generale $\overline{X}=\bigcap_{g\in I(X)}V(H(g))$. In questo caso, $g\in I(X)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\exists q$ t.c. $g=q\cdot f\Rightarrow H(g)=H(q)\cdot F\Rightarrow H(g)\in(F)\Rightarrow$
$\Rightarrow\overline{X}=V(F)$.

Morfismi di chiusi affini

$f:\mathbb{A}^n\to\mathbb{A}^m$ morfismo
se $f=(f_1,\dots,f_m)$, $f_i\in\mathbb{K}[x_1,\dots,x_n]$.

In generale se $X\subseteq\mathbb{A}^n$, $Y\subseteq\mathbb{A}^m$ chiusi, $f:X\to Y$ è morfismo se $\exists$ diagramma commutativo

$$\begin{tikzcd} \mathbb{A}^n \arrow[r, "\tilde{f}"] & \mathbb{A}^m \\ X \arrow[u, hook] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$
con $\tilde{f}$ morfismo.

- Id è un morfismo
- $X\xrightarrow{f}Y$, $Y\xrightarrow{g}Z$ morfismi $\Rightarrow X\xrightarrow{g\circ f}Z$ morfismo

Def.: $f:X\to Y$ è un isomorfismo $\Leftrightarrow\exists g:Y\to X$ morfismo t.c. $g\circ f=Id_X$, $f\circ g=Id_Y$.

Lemma: $f:X\to Y$ morfismo $\Rightarrow f$ continua.

Dim.: WLOG $X=\mathbb{A}^n$, $Y=\mathbb{A}^m$. Basta far vedere che $f^{-1}(V(g))$ è chiuso $\forall g\in\mathbb{K}[y_1,\dots,y_m]$. Ma $f^{-1}(V(g))=V(g\circ f)$. □

Def.: $f:X\to Y$ è dominante se $\overline{\operatorname{Im} f}=Y$.

Es. di morfismi:
- mappe lineari/affini
- proiezioni

$$\begin{array}{ccc} \{xy-1=0\}=X\subseteq\mathbb{A}^2 & & (x,y) \\ \downarrow\pi & & \downarrow \\ \mathbb{A}^1 & & x \end{array}$$
. $\pi:X\to\mathbb{A}^1$ è dominante.

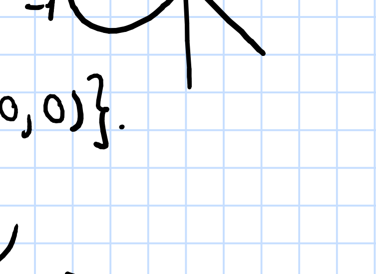
Infatti, Oss.: X irr. $\Leftrightarrow\forall U,V$ aperti $\neq\emptyset$ ho $U\cap V\neq\emptyset\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\forall U\neq\emptyset$ aperto, U è denso.

- $\varepsilon:\mathbb{A}^2\to\mathbb{A}^2$, $(x,y)\mapsto(x,xy)$. $\varepsilon_{|\{xy\neq0\}}:\{xy\neq0\}\to\{uv\neq0\}$ è bigettiva $\Rightarrow$
$\Rightarrow\varepsilon$ dominante. $\operatorname{Im}\varepsilon=\{u\neq0\}\cup\{(0,0)\}$ non è né aperto né chiuso.

- parametrizzazioni

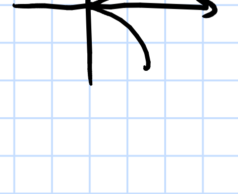
$C_1=\{y^2-x^2(x+1)=0\}\subseteq\mathbb{A}^2_{x,y}$

$$P_1:\mathbb{A}^1\longrightarrow C_1$$
$$t\longmapsto(t^2-1,\,t(t^2-1))$$



P_1 dà una bigezione tra $\mathbb{A}^1\setminus\{0\}$ e $C_1\setminus\{(0,0)\}$.
P_1 è suriettiva.

$C_2=\{y^2=x^3\}$



$$P_2:\mathbb{A}^1\longrightarrow C_2$$
$$t\longmapsto(t^2,t^3)$$

è bigettiva; vedremo che non è un iso..