Complessi CW

$S^{n-1} \subset D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| \leq 1\}$, $U^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x| < 1\}$

Sia X^* s.t. Hausdorff, $X \subset X^*$ t.c. $X^* \setminus X = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} \underbrace{e^n_\lambda}_{\text{aperti}}$ t.c. $\forall \lambda$ e^n_λ è omeo. a U^n. Assumiamo che e^n_λ sia "attaccata" a X tramite una mappa caratteristica $f_\lambda : D^n \to \overline{e^n_\lambda}$ t.c. U^n si mappa omeo. su e^n_λ e $f_\lambda(S^{n-1}) \subset X$.

Se le celle e^n_λ sono in numero finito, allora è chiaro che topologia metto su X^* data la top. di X. Se invece sono infinite, su X^* metto la topologia debole associata a $X \hookrightarrow X^*$ e a $f_\lambda : D^n \to X^*$ (un sottoinsieme è chiuso $\iff$ lo sono tutte le preimmagini).

Def.: un complesso CW è uno s.t. X Hausdorff ottenuto come unione $X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$ t.c.

1) X^0 è discreto (ha la top. discreta)
2) $\forall n$ X^n si ottiene da X^{n-1} incollando n-celle (come sopra)
3) $X = \bigcup X^n$
4) X e X^n hanno la topologia debole associata a unione/incollamento di celle.

Teo.: se X^* è ottenuto da X incollando n-celle $\{e^n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$, allora $H_q(X^*, X) = 0$ $\forall q \neq n$. $\forall \lambda \in \Lambda$, f_λ induce omo. iniettivo

$$H_n(D^n, S^{n-1}) \to H_n(X^*, X) \text{ e}$$
$$H_n(X^*, X) = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} f_{\lambda *}(H_n(D^n, S^{n-1})).$$

$H_n(X^*, X)$ è abel. libero; una base è 1:1 con $\{e^n_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$.

Dim.: come per i grafi. $\square$

Cor.: $H_q(X) \to H_q(X^*)$ è iso. eccetto al più $q = n, n-1$.

Dim.: guardare la succ. esatta lunga della coppia. $\square$

Oss.: se ho (X^*, X), (Y^*, Y) due coppie ottenute incollando n-celle, data una mappa di coppie $f : (X^*, X) \to (Y^*, Y)$ induce un diagramma commutativo tra le successioni esatte delle coppie.

Es. (di CW complessi):

- sfera S^n (1 0-cella + 1 n-cella)
- S^∞ ($S^0 \subset S^1 \subset S^2 \subset S^3 \subset \dots$, $S^n \subset S^{n+1}$ aggiungendo 2 $(n+1)$-celle)
- grafi
- superfici cpt
- prodotto di CW-c. è CW-c.: se $X = \bigcup_n \underbrace{X^n}_{n\text{-scheletro di } X}$, $Y = \bigcup_n Y^n$,
  $X \times Y = \bigcup_n \left(\bigcup_k X^k \times Y^{n-k} \right)$
- proiettivo (reale, complesso, quaternionico, ...)

$$\mathbb{P}^n\mathbb{K} = \mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\} / \sim$$
$$\cup$$
$$\mathbb{P}^{n-1}\mathbb{K}, \quad D^n_{\mathbb{K}} = \{x \in \mathbb{K}^n \mid |x| \leq 1\},$$
$$f : D^n_{\mathbb{K}} \to \mathbb{P}^n\mathbb{K} \qquad \text{funziona.}$$
$$x \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = \sqrt{1 - |x|^2})$$
$$\partial D^n_{\mathbb{K}} = S^{kn-1} \quad (k = 1\ (\mathbb{R}), 2\ (\mathbb{C}), 4\ (\mathbb{H})),$$

$\mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ si ottiene da $\mathbb{P}^{n-1}_{\mathbb{K}}$ attaccando una nk-cella.

Proprietà dei CW-c.:

1) un CW-c. è paracpt $\Rightarrow$ normale
2) un CW-c. è loc. contraibile
3) un cpt in un CW-c. interseca solo un numero finito di celle, in particolare un CW-c. è cpt $\iff$ ha # finito di celle
4) f definita su un CW-c. è continua $\iff$ lo sono le restrizioni alle celle chiuse.

Da 3) segue che in un CW-c. la chiusura di una cella interseca solo un numero finito di celle.

Def.: X CW-c., $A \subset X$ è <u>sottocomplesso</u> $\iff$ A è unione di celle di X t.c. $\forall e^n \subset A$, $\overline{e^n} \subset A$ e gli scheletri di A sono dati da $A^n = X^n \cap A$.

Def.: $f : X \to Y$ mappa tra CW-c. è <u>cellulare</u> se $f(X^n) \subset Y^n$ $\forall n$.

Teo. (Whitehead): ogni mappa tra CW-c. è omotopa a una mappa cellulare. **Dim.:** poi. $\square$

Per ora supponiamo tutte le mappe tra CW-c. cellulari.

Omologia di CW-c.

$$X = \bigcup_n X^n, \quad X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots \subset X^{n-1} \underset{\substack{\text{attacco} \\ n\text{-celle}}}{\subset} X^n \subset \dots$$

Sia $K = \{K^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ una struttura di CW-c. su X s.t., cioè $X = \bigcup_n K^n$. Per $n < 0$ pongo $K^n = \emptyset$. Poiché K^n è ottenuto da K^{n-1} attaccando n-celle, $H_q(K^n, K^{n-1}) = 0$ $q \neq n$, $H_n(K^n, K^{n-1})$ è abel. libero con base 1:1 con le n-celle.

Lemma: $H_q(K^n) = 0$ $\forall q > n$.

Dim.: induzione su n. $n = 0$ ok. Passo induttivo:

$$\to \underbrace{H_q(K^{n-1})}_{0 \text{ per } q > n-1} \to H_q(K^n) \to \underbrace{H_q(K^n, K^{n-1})}_{0 \text{ per } q \neq n} \to \quad \Rightarrow \text{tesi.} \ \square$$

Costruiamo un complesso algebrico associato a K.

Poniamo $C_n(K) = H_n(K^n, K^{n-1})$ e $d_n : C_n(K) \to C_{n-1}(K)$ è dato dalla composizione $H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow[(K^n, K^{n-1})]{\partial_n} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow[(K^{n-1}, K^{n-2})]{j_{n-1}} H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2})$.

Chiamo $C_n(K)$ complesso cellulare.

Oss.: $d_{n-1} \circ d_n = 0$.

$Z_n(K) = \operatorname{Ker} d_n$, $B_n(K) = \operatorname{Im} d_{n+1}$, $\underbrace{H_n(K)}_{\text{omologia cellulare}} = Z_n(K) / B_n(K)$.

Considero $H_n(X) \xleftarrow{k_n} H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) = C_n(K)$

Teo.: (a) k_n è omo. suri. (c) $\operatorname{Im} j_n = Z_n(K)$
(b) j_n è omo. ini. (d) $\operatorname{Ker} k_n = j_n^{-1}(B_n(K))$

e quindi $j_n \circ k_n^{-1}$ induce iso. $\theta_n : H_n(X) \to H_n(K)$.

Dim.: $0 \to H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \to 0$

$i_n : H_q(K^{n-1}) \to H_q(K^n)$ è iso. per $q \neq n, n-1$ $\Rightarrow$

$$\begin{tikzcd}
H_q(K^{q+1}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dr, "k_{q+1}"'] & H_q(K^{q+2}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "k_{q+2}"] & H_q(K^{q+3}) \arrow[r, "\sim"] \arrow[dl, "k_{q+3}"] & \dots \arrow[dll] \\
& H_q(X) & &
\end{tikzcd}$$

$\Rightarrow$ ...; se X ha dim. finita, $X = K^N \Rightarrow k_N$ iso. $\Rightarrow k_i$ iso. $\forall i > q$. Se X ha dim. infinita, comunque le k_i sono iso.. Infatti ogni classe classe di omologia e ogni bordo hanno supp. cpt e un cpt in CW-c. interseca finite celle. In particolare, $k_{q+1} : H_q(K^{q+1}) \to H_q(X)$ è iso..

Dalla successione, j_n è iniettiva (b).

$H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} H_{n-1}(K^n) \to H_{n-1}(K^n, K^{n-1}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow i_n$ suri. $\forall n$.

$$\begin{tikzcd}
H_n(K^n) \arrow[rr, "i_{n+1}"] \arrow[dr, "k_n"'] & & H_n(K^{n+1}) \arrow[dl, "k_{n+1} \text{ iso.}"] \\
& H_n(X) &
\end{tikzcd}
\Rightarrow k_n \text{ suri. (a).}$$

Inoltre, $\operatorname{Ker} k_n = \operatorname{Ker} i_{n+1}$.

$0 \to H_n(K^n) \xrightarrow{j_n} H_n(K^n, K^{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(K^{n-1}) \xrightarrow{i_n} \underset{H_{n-1}(X)}{\overset{\|}{H_{n-1}(K^n)}} \to 0$

$d_n = j_{n-1} \circ \partial_*$, j_{n-1} ini. $\Rightarrow$

$\Rightarrow Z_n(K) = \operatorname{Ker} d_n = \operatorname{Ker} \partial_* = \operatorname{Im} j_n$ (c).

$\operatorname{Ker} k_{n-1} = \operatorname{Ker} i_n = \operatorname{Im} \partial_*$.

$$\begin{tikzcd}
H_n(K^n, K^{n-1}) \arrow[r, "\partial_*"] \arrow[dr, "d_n"'] & H_{n-1}(K^{n-1}) \arrow[r, "i_n"] \arrow[d, "j_{n-1} \text{ ini.}"] \arrow[drr, "k_{n-1} \text{ suri.}"] & H_{n-1}(K^n) \arrow[r] \arrow[dr, "k_n \text{ iso.}"] & 0 \\
& H_{n-1}(K^{n-1}, K^{n-2}) & & H_{n-1}(X)
\end{tikzcd}$$

$\operatorname{Ker} k_{n-1} = \operatorname{Im} \partial_* = j_{n-1}^{-1}(\operatorname{Im} j_{n-1} \circ \partial_*) = j_{n-1}^{-1}(\operatorname{Im} d_n) = j_{n-1}^{-1}(B_{n-1}(K))$ (d). $\square$