Cor.: X e Y contraibili $\Rightarrow$ $C.(X)\otimes C.(Y)$ è aciclico.

Dim.: $0 \to \underset{\text{vive in grado }-1}{\mathbb{Z}(-1)} \to \tilde{C}.(X)\oplus\tilde{C}.(Y) \to \widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)} \to 0$

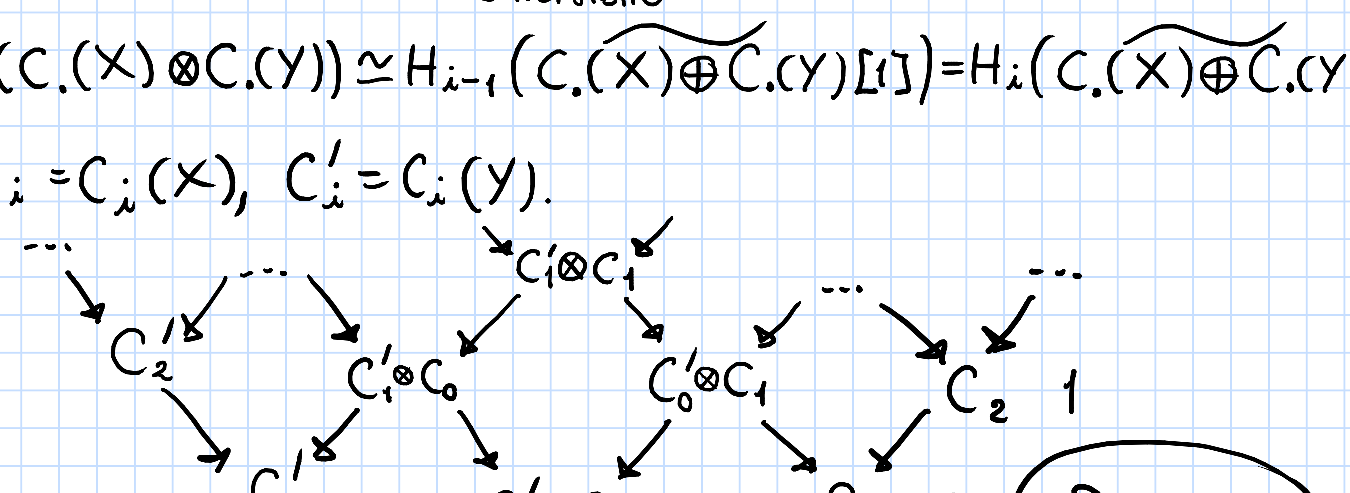
$$\begin{array}{ccc} C_0(X)\otimes C_0(Y) & & C_0(X)\oplus C_0(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ (a,b) & \longmapsto & a+b \end{array}$$

Se X e Y sono contraibili, $\widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)}$ è aciclico.

$$0 \to \widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)}[1] \xrightarrow{\text{aumento di 1 il grado}} \underbrace{\tilde{C}.(X)\otimes\tilde{C}.(Y)}_{\text{contraibile}} \to C.(X)\otimes C.(Y) \to 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow H_i(C.(X)\otimes C.(Y)) \simeq H_{i-1}(\widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)}[1]) = H_i(\widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)}).$$

$C_i = C_i(X)$, $C_i' = C_i(Y)$.



Qua dentro trovi la successione in cui compare $\widetilde{C.(X)\oplus C.(Y)}[1]$. □

Teo. (Eilenberg-Zilber):
siano X, Y s.t., la mappa naturale

$$\begin{array}{ccc} C_0(X\times Y) & \xrightarrow{ez_0} & C_0(X)\otimes C_0(Y) \\ (p,q) & \longmapsto & p\otimes q \end{array}$$

si estende a mappa di complessi $EZ: C.(X\times Y)\to C.(X)\otimes C.(Y)$ che induce un iso. in omologia.

Dim.: uso il teo. sui funtori liberi e aciclici.
$C.(X\times Y)$ e $C.(X)\otimes C.(Y)$ sono funtori da $Top\times Top$ nei complessi di catene e coincidono in dimensione 0 tramite ez_0.
Per $C.(-)\otimes C.(-)$ uso come base la coppia di spazi (Δ^k, Δ^{m-k}) con $id\otimes id$.
Per $C.(-\times -)$ uso come base $\Delta^m\times\Delta^m$ con $\Delta^m\to\Delta^m\times\Delta^m$ mappa diagonale.
Entrambi sono funtori liberi. $\Delta^m\times\Delta^m$ contraibile $\Rightarrow$ $\Rightarrow C.(\Delta^m\times\Delta^m)$ aciclico. Δ^k, Δ^{m-k} contraibili $\Rightarrow$ $\Rightarrow C.(\Delta^k)\otimes C.(\Delta^{m-k})$ aciclico. Allora i funtori sono aciclici.
Quindi esistono morfismi naturali tra $C.(X\times Y)$ e $C.(X)\otimes C.(Y)$ (e viceversa) che estendono ez_0 e la sua inversa.
Sono unici a meno di omotopia.
Se Q la ottengo dall'inversa di ez_0 allo stesso modo, $EZ\circ Q$ e $Q\circ EZ$ sono naturali e omotope all'identità $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ inducono un iso. in H_*. □

Teo. (E-Z relativo): Siano $C.(X)\otimes C.(Y) \underset{EZ}{\overset{Q}{\rightleftarrows}} C.(X\times Y)$ come sopra e coppie (X,A), (Y,B). Allora vale il seguente diagramma commutativo con righe esatte

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 \to & C.(A)\otimes C.(Y) + C.(X)\otimes C.(B) & \to & C.(X)\otimes C.(Y) & \to & C.(X,A)\otimes C.(Y,B) & \to 0 \\ & Q'\downarrow\uparrow EZ' & & Q\downarrow\uparrow EZ & & Q''\downarrow\uparrow EZ'' & \\ 0 \to & C.(A\times Y) + C.(X\times B) & \to & C.(X\times Y) & \to & C.(X\times Y)/C.(A\times Y)+C.(X\times B) & \to 0 \end{array}$$

Dim.: per naturalità $Q(C.(A)\otimes C.(Y)) \subset C.(A\times Y)$ e analogo, quindi EZ', Q' sono indotte dalle restrizioni e EZ'', Q'' sono indotte dal passaggio al quoziente.
$Q\circ EZ \sim id$ con omotopia naturale; tale omotopia mappa $C(A\times Y)+C(X\times B)$ in sé e quindi anche $Q'\circ EZ'$ è omotopa a id. Stesso per $EZ'\circ Q'$.
Se scrivo il diagramma di succ. esatte lunghe in omologia associato al diagramma di sopra (con righe esatte) ottengo

$$\begin{array}{ccccc} H_m(C.(A)\otimes C.(Y)+C.(X)\otimes C.(B)) & \to & H_m(C.(X)\otimes C.(Y)) & \to & H_m(C.(X,A)\otimes C.(Y,B)) \to \\ \wr\wr & & \wr\wr & & \uparrow\downarrow \\ H_m(C.(A\times Y)+C.(X\times B)) & \to & H_m(X\times Y) & \to & H_m(\cdots/\cdots) \to \end{array} \Bigg| \text{grado } m-1$$

e per Q''_*, EZ''_* uso il lemma dei cinque.
Se $A\times Y\cup X\times B = int(A\times Y)\cup int(X\times B)$, per MV ($C_{\mathcal{U}}$...) ho $H.(C.(A\times Y)+C.(X\times B)) \simeq H.(A\times Y\cup X\times B)$ e posso sostituirli nella succ. che ho trovato. Allora ha senso definire $(X,A)\times(Y,B) := (X\times Y, A\times Y\cup X\times B)$. □

Teo. (formula di Künneth): se C è un complesso di R-moduli liberi e D è un complesso di R-moduli (R PID), vale la succ. esatta corta

$$0 \to \bigoplus_{i+j=m} H_i(C)\otimes H_j(D) \to H_m(C\otimes D) \to \bigoplus_{i+j=m-1} H_i(C) * H_j(D) \to 0.$$

Se anche D è libero, tale successione spezza.

Dim.: $Z(C)$, $B(C)$ sono liberi, quindi ho
$(Z(C)\otimes Z(D))_m = Ker(id\otimes\partial: (Z(C)\otimes D)_m \to (Z(C)\otimes D)_{m-1})$ e
$(Z(C)\otimes B(D))_m = Im(id\otimes\partial: (Z(C)\otimes D)_{m+1} \to (Z(C)\otimes D)_m)$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow H(Z(C)\otimes D) \simeq Z(C)\otimes H(D)$ e analogamente $H(B(C)\otimes D) \simeq B(C)\otimes H(D)$.
$0\to B(C)\to Z(C)\to H(C)\to 0$, tensorizzo con $H(D)$ da cui

$$\begin{array}{ccccccc} H(C)*H(D) \to & B(C)\otimes H(D) & \xrightarrow{i\otimes id} & Z(C)\otimes H(D) & \to H(C)\otimes H(D) \to 0 \\ & \wr\wr & & \wr\wr & \\ & H(B(C)\otimes D) & \xrightarrow{(i\otimes id)_*} & H(Z(C)\otimes D) & \end{array}$$

Considero
$0\to Z_m(C)\to C_m\to B_{m-1}(C)\to 0$, tensorizzo con D:
$0\to (Z(C)\otimes D)_m \to (C\otimes D)_m \to (B(C)\otimes D)_{m-1}\to 0$ e in H_* ho la succ. esatta lunga
$\to H_m(B(C)\otimes D)\to H_m(Z(C)\otimes D)\to H_m(C\otimes D)\to H_{m-1}(B(C)\otimes D)\to H_{m-1}(Z(C)\otimes D)\to$
Si verifica che l'omo. di connessione è $(i\otimes id)_*$, da cui

$$\begin{array}{ccccc} 0\to coker(i\otimes id)_* & \to & H_m(C\otimes D) & \to & Ker(i\otimes id)_* \to 0 \\ \wr\wr & & & & \wr\wr \\ (H(C)\otimes H(D))_m & & & & (H(C)*H(D))_{m-1} \end{array}$$ □

Teo.: sia R un PID, supponiamo $H_m(X,A;R)$ finit. gen. o $H_m(Y,B;R)$ fin. gen.. Se vale MV per $A\times Y$, $X\times B$ allora c'è una succ. esatta corta naturale

$$0\to \bigoplus_{i+j=m} H^i(X,A;R)\otimes H^j(Y,B;R) \to H^m((X,A)\times(Y,B);R) \to \bigoplus_{i+j=m+1} H^i(X,A;R)*H^j(Y,B;R)\to 0.$$

Dim.: applichiamo Künneth per l'omologia, ma c'è qualcosa da aggiustare. Se C_m e D_m sono finit. gen., allora $Hom(C_m\otimes D_n, R) \simeq Hom(C_m,R)\otimes Hom(D_n,R)$ e posso riscrivere per C^* e D^* la formula di Künneth:

$$0\to \bigoplus_{i+j=m} H^i(C^*)\otimes H^j(D^*) \to \underset{\underset{H^m(Hom(C.\otimes D.),R)}{\parallel}}{H^m(C^*\otimes D^*)} \to \bigoplus_{i+j=m+1} H^i(C^*)*H^j(D^*)\to 0$$

Se C_m e D_m non sono finit. gen., ma per esempio posso supporre $H_m(C.)$ finit. gen. $\forall m$: $H_m(C.) = Z_m(C.)/B_m(C.)$, $Z_m(C.)$ libero $\Rightarrow \exists F_m\subset Z_m$ t.c. F_m è finit. gen. e $F_m \twoheadrightarrow H_m(C.)$.
Pongo $L_{m+1} = Ker(F_m\to H_m(C.))$ e (K_m, d_m) con $K_m = F_m\oplus L_m$ libero e finit. gen. e $d_m|_{F_m} = 0$, $d_m|_{L_m}$ = inclusione in F_{m-1}.
$F_m\subset Z_m(C.)$, $L_{m+1}\subset B_m(C.)$ e si ha

$$\begin{array}{ccccccc} 0\to & L_{m+1} & \to & F_m & \to & H_m(C.) & \to 0 \\ & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_m} & & \parallel & \\ 0\to & B_m(C.) & \to & Z_m(C.) & \to & H_m(C.) & \to 0 \end{array}$$ ed esiste

θ_{m+1} t.c. $L_{m+1} \xrightarrow{\theta_{m+1}} C_{m+1} \xrightarrow{\partial_m} B_m$ e

$f_m = (\varphi_m, \theta_m): \underset{F_m\oplus L_m}{K_m} \to C_m$. f induce f_* in omologia, che è iso.

$f^\#: Hom(C_m,R)\to Hom(K_m,R)$, $f^\#$ induce iso. in H^* usando i coefficienti universali e la naturalità (+ lemma dei 5).

$$\begin{array}{ccc} Hom(C_p,R)\otimes Hom(D_q,R) & \xrightarrow{f^\#\otimes id} & Hom(K_p,R)\otimes Hom(D_q,R) \\ \downarrow\otimes & & \downarrow{\scriptstyle\wr\ \text{iso. perché } K_p \text{ è finit. gen.}} \\ Hom(C_p\otimes D_q, R) & \xrightarrow{(f\otimes id)^\#} & Hom(K_p\otimes D_q, R) \end{array}$$

$f^\#\otimes id$ induce un iso. in H^* (usare Künneth),
$f\otimes id$ induce iso. in H_* per Künneth
$\Rightarrow (f\otimes id)^\#$ induce iso. in H^* per coeff. univ..
Segue che $\otimes$ è iso. in H^*.
Per Künneth (in omologia) applicato a $Hom(C,R)$ e $Hom(D,R)$,

$$0\to \bigoplus_{i+j=m} H^i(C)\otimes H^j(D) \to H^m(Hom(C,R)\otimes Hom(D,R)) \to \bigoplus_{i+j=m+1} H^i(C)*H^j(D)\to 0$$

$$\wr\wr$$

$$H^*(Hom(C\otimes D),R) \overset{(EZ^\#)^*}{\simeq} H^*(Hom(C(X\times Y)),R))$$

$C_i = C_i(X)$, $D_j = C_j(Y)$,
$C.(X)\otimes C.(Y) \xleftarrow{EZ} C.(X\times Y)$ induce iso. in H_*, applicando Hom ho $(EZ^\#)^*$ iso. (uso coeff. univ. + naturalità su $EZ^\#$).
Usando EZ relativo ho
$C.(X,A)\otimes C.(Y,B) \xleftarrow{EZ} C.(X\times Y)/C.(A\times Y)+C.(X\times B)$
iso. in H_* $\Rightarrow$ (coeff. univ.) iso. in H^*, da cui
$H^*(C.(X,A)\otimes C.(Y,B)) \simeq H^*(X\times Y, X\times B\cup A\times Y)$ se vale MV

e quindi segue Künneth in H^* nel caso relativo. □