$\varphi: A_* \to B_*$ morfismo di complessi di g.a.:

$\forall i$
$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "d_i"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & B_i \arrow[d, "d_i'"] \\ A_{i+1} \arrow[r, "\varphi_{i+1}"] & B_{i+1} \end{tikzcd} \qquad d_i' \circ \varphi_i = \varphi_{i+1} \circ d_i .$$

$\varphi_i(\mathrm{Ker}\, d_i) \subset \mathrm{Ker}\, d_i'$, $\varphi_i(\mathrm{Im}\, d_{i-1}) \subset \mathrm{Im}\, d_{i-1}' \Rightarrow$
$\Rightarrow \varphi$ induce $\varphi_p: H^p(A_*) \to H^p(B_*)$ omomorfismo di g.a..

$0 \to A_* \xrightarrow{\varphi} B_* \xrightarrow{\psi} C_* \to 0$ esatta di complessi di g.a. $\Rightarrow$
$\Rightarrow 0 \to H^0(A_*) \xrightarrow{\varphi_0} H^0(B_*) \xrightarrow{\psi_0} H^0(C_*) \xrightarrow{\delta_0} H^1(A_*) \xrightarrow{\varphi_1} H^1(B_*) \to$
$\xrightarrow{\psi_1} H^1(C_*) \xrightarrow{\delta_1} H^2(A_*) \to \ldots$ esatta di g.a..

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_i \arrow[r, "\varphi_i"] \arrow[d, "d_i"] & B_i \arrow[r, "\psi_i"] \arrow[d, "d_i'"] & C_i \arrow[r] \arrow[d, "d_i''"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & A_{i+1} \arrow[r, "\varphi_{i+1}"] & B_{i+1} \arrow[r, "\psi_{i+1}"] & C_{i+1} \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
diagram chasing

Vogliamo $\delta_i: H^i(C_*) \to H^{i+1}(A_*)$, si fa come a ETA.

Sia $0 \to L \xrightarrow{\phi} F \xrightarrow{\psi} G \to 0$ esatta di prefasci di g.a. su X,
$\mathcal{U}$ ricoprimento aperto di X, $\forall p$
$$0 \to \check{C}^p(\mathcal{U}, L) \xrightarrow{\phi_p} \check{C}^p(\mathcal{U}, F) \xrightarrow{\psi_p} \check{C}^p(\mathcal{U}, G) \to 0 \text{ esatta,}$$
dove dato $\sigma \in \check{C}^p(\mathcal{U}, L)$, $\sigma = (\underbrace{l_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}}_{\in L(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p})})$,
$\phi_p(\sigma) = (\underbrace{\phi_{U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p}}(l_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p})}_{\in F(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_p})})$, ψ_p analoga.

Troviamo la succ. esatta lunga per i $\check{H}^*(\mathcal{U}, \cdot)$.
Poiché $\varinjlim$ è esatto, abbiamo
$0 \to \check{H}^0(X, L) \to \check{H}^0(X, F) \to \check{H}^0(X, G) \xrightarrow{\delta_0} \check{H}^1(X, L) \to \check{H}^1(X, F) \to \check{H}^1(X, G) \to \ldots$
esatta.

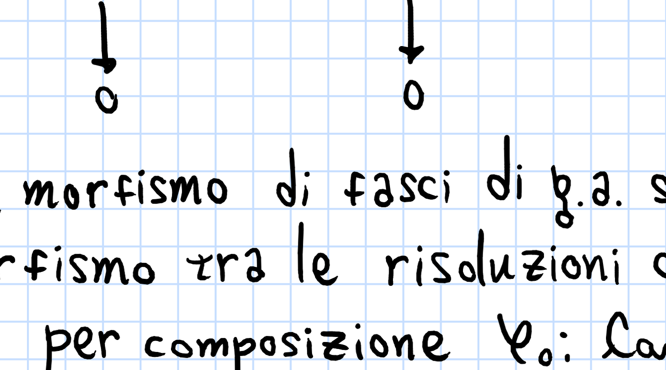
Se $0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ è esatta di fasci di g.a. su X,
abbiamo $0 \to \Gamma(\mathcal{L}) \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \underbrace{\Gamma(\mathcal{F})/\varphi(\Gamma(\mathcal{L}))}_{=G} \to 0$ esatta di prefasci di g.a.
su $X \Rightarrow \ldots \to \check{H}^i(X, \mathcal{L}) \to \check{H}^i(X, \mathcal{F}) \to \check{H}^i(X, G) \to \ldots$ esatta lunga.
Se X è paracompatto, $\check{H}^i(X, G) = \check{H}^i(X, \mathit{Sheaf}(G))$,
$\mathit{Sheaf}(G) = \mathrm{Coker}\, \varphi \cong \mathcal{G}$.

Def.: un fascio $\mathcal{F}$ su X si dice FIACCO se $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto la restrizione $\rho^X_U: \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(U, \mathcal{F})$ è suri. (es.: i $\mathcal{C}an^i(\mathcal{F})$ sono fiacchi). Ciò implica: $\forall \emptyset \neq V \subset U \subset X$ aperti, ρ^U_V è suri..

Prop.: $0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ esatta di fasci di g.a. su X, $\mathcal{L}$ fiacco:
1) $0 \to \Gamma(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi} \Gamma(\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi} \Gamma(\mathcal{G}) \to 0$ esatta di prefasci di g.a. su X;
2) $\mathcal{F}$ fiacco $\Longleftrightarrow \mathcal{G}$ fiacco.

Dim.: 1) Vogliamo: $\forall \emptyset \neq U \subset X$ aperto $0 \to \Gamma(U, \mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_U} \Gamma(U, \mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_U} \Gamma(U, \mathcal{G}) \to 0$ esatta, ci basta ψ_U suri.. $s \in \Gamma(U, \mathcal{G})$, sia T l'insieme delle coppie (U', t') dove $\emptyset \neq U' \subset U$ aperto e $t' \in \Gamma(U', \mathcal{F})$ t.c. $\psi \circ t' = \psi_{U'}(t') = s_{|U'}$. s si solleva localmente $\Rightarrow T \neq \emptyset$.
Semiordiniamo T: $(U', t') \leq (U'', t'')$ se $U' \subset U''$ e t'' estende t' $(t''_{|U'} = t')$. Zorn $\Rightarrow \exists (V, t) \in T$ massimale.
Vogliamo $V = U$, per assurdo sia $x \in U \setminus V$. $\exists\, x \in U_x \subset U$ aperto e $t_x \in \Gamma(U_x, \mathcal{F})$ t.c. $\psi_{U_x}(t_x) = s_{|U_x}$. Su $V \cap U_x$,
$\psi_{V \cap U_x}(t_{|V \cap U_x}) = s_{|V \cap U_x} = \psi_{V \cap U_x}((t_x)_{|V \cap U_x})$, cioè
$\psi(t_|) - \psi(t_{x|}) = 0 \underset{\text{esattezza}}{\Longrightarrow}$ a meno di restringere U_x, su $V \cap U_x$
$t - t_x$ proviene da una sezione di $\mathcal{L}$ $l \in \Gamma(U_x \cap V, \mathcal{L})$
$((t - t_x)_{|V \cap U_x} = \varphi_{U_x \cap V}(l))$. Estendiamo l a una sezione l' di $\mathcal{L}$ su U_x $l' \in \Gamma(U_x, \mathcal{L})$, $l'_{|U_x \cap V} = l \Rightarrow$
$\Rightarrow t_x + \varphi_{U_x}(l') \in \Gamma(U_x, \mathcal{F})$ coincide con t su $U_x \cap V$ e si reincolla su t dando una sezione t'' di $\mathcal{F}$ su $V \cup U_x$ che solleva s, assurdo. Allora $V = U \Rightarrow \varphi_U(t) = s$.

2)
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \Gamma(X, \mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^X_U"] & \Gamma(X, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^X_U"] & \Gamma(X, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\rho^X_U"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \Gamma(U, \mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d] & \Gamma(U, \mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=6ex, "\Longleftrightarrow"] & \Gamma(U, \mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$
commutativo con righe e prima colonna esatta.

(⇒)  diagram chasing.

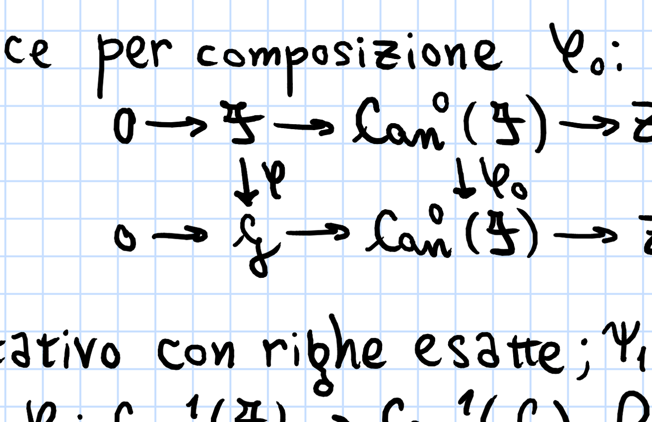
(⇐) 

diagram chasing.

□

$\varphi: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ morfismo di fasci di g.a. su X si estende a un morfismo tra le risoluzioni canoniche di $\mathcal{F}$ e $\mathcal{G}$.
φ induce per composizione $\varphi_0: \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}an^0(\mathcal{G})$ morfismo
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\psi_1"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{Z}^1(\mathcal{G}) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$
commutativo con righe esatte; ψ_1 si trova con diagram chasing, induce $\varphi_1: \mathcal{C}an^1(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}an^1(\mathcal{G})$. Reiterando otteniamo
$\varphi_i: \mathcal{C}an^i(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}an^i(\mathcal{G})$ t.c.
$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi"] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_0"] & \mathcal{C}an^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_1"] & \mathcal{C}an^2(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_2"] & \ldots \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{G} \arrow[r] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{C}an^1(\mathcal{G}) \arrow[r] & \mathcal{C}an^2(\mathcal{G}) \arrow[r] & \ldots \end{tikzcd}$$
è commutativo con righe esatte.

$0 \to \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \xrightarrow{\psi} \mathcal{G} \to 0$ esatta di fasci di g.a. su X,
$0 \to \mathcal{C}an^0(\mathcal{L}) \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \xrightarrow{\psi_0} \mathcal{C}an^0(\mathcal{G}) \to 0$ esatta (sono un po' di verifiche).
$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{G} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}an^0(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \mathcal{Z}^1(\mathcal{L}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{Z}^1(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & \end{tikzcd}$$
commutativo con colonne e prime due righe esatte $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ ultima riga esatta.
diagram chasing

Per induzione, $0 \to \mathcal{C}an^i(\mathcal{L}) \to \mathcal{C}an^i(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}an^i(\mathcal{G}) \to 0$ esatta $\forall i$.
I $\mathcal{C}an^i$ sono fiacchi $\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^*(\mathcal{L})) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^*(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^*(\mathcal{G})) \to 0$ esatta di complessi di g.a. su X, da cui
$0 \to H^0(X, \mathcal{L}) \to H^0(X, \mathcal{F}) \to H^0(X, \mathcal{G}) \to H^1(X, \mathcal{L}) \to H^1(X, \mathcal{F}) \to H^1(X, \mathcal{G}) \to H^2(X, \mathcal{L}) \to \ldots$
esatta.

Def.: un fascio $\mathcal{F}$ di g.a. si dice ACICLICO se $H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i \geq 1$,
si dice ČECH-ACICLICO se $\check{H}^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i \geq 1$.

$\mathcal{F}$ fiacco $\Rightarrow \mathcal{F}$ aciclico.
$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{C}an^0(\mathcal{F}) \to \mathcal{Z}^1(\mathcal{F}) \to 0$ esatta, $\mathcal{F}$, $\mathcal{C}an^0(\mathcal{F})$ fiacchi $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{Z}^1(\mathcal{F})$ fiacco.
$0 \to \mathcal{Z}^i(\mathcal{F}) \to \mathcal{C}an^i(\mathcal{F}) \to \mathcal{Z}^{i+1}(\mathcal{F}) \to 0$, $\mathcal{Z}^i(\mathcal{F})$, $\mathcal{C}an^i(\mathcal{F})$ fiacchi $\Rightarrow$
$\Rightarrow \mathcal{Z}^{i+1}(\mathcal{F})$ fiacco. Allora $\mathcal{Z}^i(\mathcal{F})$ fiacco $\forall i$.
Passando alle sezioni globali,
$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}^1(\mathcal{F})) \to 0$$
$$\vdots$$
$$0 \to \Gamma(X, \mathcal{Z}^i(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^i(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{Z}^{i+1}(\mathcal{F})) \to 0$$
esatte $\Rightarrow$

$\Rightarrow 0 \to \Gamma(X, \mathcal{F}) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^0(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^1(\mathcal{F})) \to \Gamma(X, \mathcal{C}an^2(\mathcal{F})) \to \ldots$
esatta $\Rightarrow H^i(X, \mathcal{F}) = 0$ $\forall i \geq 1$.

Teo. (De Rham astratto): $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_0 \xrightarrow{\varphi_0} \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\varphi_1} \ldots$ risoluzione di $\mathcal{F}$ con gli $\mathcal{L}_i$ aciclici $\Rightarrow H^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, \mathcal{L}_*)) =$
$= \dfrac{\mathrm{Ker}\, \varphi_{p,X}}{\mathrm{Im}\, \varphi_{p-1,X}}$ (sulle sezioni globali).

Dim.: spezziamo la risoluzione in succ. esatte corte
$0 \to K_i \to \mathcal{L}_i \xrightarrow{\varphi_i} K_{i+1} \to 0$, $K_i = \mathrm{Ker}\, \varphi_i = \mathrm{Im}\, \varphi_{i-1}$.
Otteniamo
$0 \to H^0(X, K_i) \to H^0(X, \mathcal{L}_i) \xrightarrow{\alpha} H^0(X, K_{i+1}) \xrightarrow{\beta} H^1(X, K_i) \to \overset{0}{\overset{\parallel}{H^1(X, \mathcal{L}_i)}} \to$
$\to H^1(X, K_{i+1}) \xrightarrow{\sim} H^2(X, K_i) \to H^2(X, \mathcal{L}_i) \to H^2(X, K_{i+1}) \xrightarrow{\sim}$
$\xrightarrow{\sim} H^3(X, K_i) \to H^3(X, \mathcal{L}_i) \to \ldots$ esatta, $\underset{0}{\underset{\parallel}{}}$
quindi $\forall i \geq 1$ $H^p(X, K_{i+1}) \cong H^{p+1}(X, K_i)$,
$H^1(X, K_i) = H^0(X, K_{i+1})/\mathrm{Ker}\, \beta = H^0(X, K_{i+1})/\mathrm{Im}\, \alpha$,
$H^0(X, K_i) = \mathrm{Ker}\, \alpha$.
α è indotta da φ_i sulle sezioni globali:
$\mathrm{Im}\, \alpha = \mathrm{Im}\,(\Gamma(X, \mathcal{L}_i) \xrightarrow{\varphi_{i,X}} \Gamma(X, \mathcal{L}_{i+1}))$,
$\mathrm{Ker}\, \alpha = \mathrm{Ker}\,($ // $)$.

Se $p \geq 1$, $H^{p+1}(X, \mathcal{F}) \cong H^p(X, K_1) \cong H^{p-1}(X, K_2) \cong \ldots$
$\ldots \cong H^1(X, K_p) \cong H^0(X, K_{p+1})/\mathrm{Im}\, \varphi_{p,X} = \dfrac{\mathrm{Ker}\, \varphi_{p+1,X}}{\mathrm{Im}\, \varphi_{p,X}}$,
idem se $p+1 = 0, 1$. □

Cor.: X paracompatto, $0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{L}_0 \to \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2 \to \ldots$
risoluzione di $\mathcal{F}$ con gli $\mathcal{L}_i$ Čech-aciclici $\Rightarrow$
$\Rightarrow \check{H}^p(X, \mathcal{F}) = H^p(\Gamma(X, \mathcal{L}_*))$.

Es.: X varietà diff., $0 \to \mathbb{R} \to C^\infty_{X,\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^1_{X,\mathbb{R}} \xrightarrow{d} \mathcal{A}^2_{X,\mathbb{R}} \to \ldots$
risoluzione di $\mathbb{R}$ Čech-aciclica $\Rightarrow$
$\Rightarrow \check{H}^p(X, \mathbb{R}) \cong \dfrac{\mathrm{Ker}\, d_{p,X}}{\mathrm{Im}\, d_{p,X}} = \dfrac{\{p\text{-forme globali chiuse}\}}{\{p\text{-forme globali esatte}\}} = H^p_{DR}(X, \mathbb{R})$.
(idem con $\mathbb{C}$).

Se X paracompatto, ogni $C^\infty_{X,\mathbb{R}}$-modulo $\underset{\substack{\text{fascio per cui ha senso moltiplicare}\\ \text{le sezioni per funzioni } C^\infty}}{\mathcal{A}}$ è Čech-aciclico:

$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ ricoprimento aperto di X loc. finito;
$\exists$ partizione dell'unità C^∞ subordinata a $\mathcal{U}$:
$\forall \alpha \in I$ $\exists\, \varphi_\alpha: X \to \mathbb{R}$ C^∞ t.c. $\varphi_\alpha(x) = 0$ se $x \notin U_\alpha$ e
$\underbrace{\sum_{\alpha \in I} \varphi_\alpha(y)}_{\text{finita}} = 1$ $\forall y \in X$.
$\sigma \in \check{C}^p(\mathcal{U}, \mathcal{A})$ t.c. $d\sigma = 0$,
$\tau_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}} = \sum_{\beta \in I} \varphi_\beta \underset{\substack{\text{estesa a 0 fuori}\\ \text{da } U_{\beta,\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}}}}{\sigma_{\beta,\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}}} \in \Gamma(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_{p-1}}, \mathcal{A})$,
$d\tau = \sigma$.